UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOÃO DA CRUZ ALMEIDA

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA BASEADA EM UMA EXPERIÊNCIA COM UM GRUPO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Cruz das Almas - Bahia
2014

JOÃO DA CRUZ ALMEIDA

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA BASEADA EM UMA EXPERIÊNCIA COM UM GRUPO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: **Prof^o MSc. Erikson Alexandre Fonseca dos Santos**

Cruz das Almas - Bahia
2014

FICHA CATALOGRÁFICA

A447c	Almeida, João da Cruz. Construções geométricas: uma proposta metodológica baseada em uma experiência com um grupo de alunos do Ensino Médio / João da Cruz Almeida._ Cruz das Almas, BA, 2014. 81f.; il. Orientador: Erikson Alexandre Fonseca dos Santos. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. 1.Matemática – Estudo e ensino. 2.Matemática – Geometria. 3.Ensino médio – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título. CDD: 510.7

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA BASEADA EM UMA EXPERIÊNCIA COM UM GRUPO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

JOÃO DA CRUZ ALMEIDA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Prof° MSc. Erikson Alexandre Fonseca dos Santos
Orientador

Aryana J. L. da S. Cavalcante

Profª MSc. Aryana Joecy Lima da Silva Cavalcante (UFS)
Examinadora 1

Priscila Santos Ramos

Profª MSc. Priscila Santos Ramos (UFOB)
Examinadora 2

Cruz das Almas, 25 de julho de 2014.

A Deus por sempre me conceder sabedoria
nas escolhas dos melhores caminhos, coragem
para acreditar, força para não desistir e
proteção para me amparar!
Aos meus pais, por me incentivar e apoiar
em todas as minhas escolhas e decisões.
À minha querida esposa, pela ajuda
e por aguentar meus momentos de ansiedade
no período em que me dediquei ao mestrado.

Agradecimentos

A Deus, presença forte em meu viver, agradeço pela minha vida e pelas oportunidades que me foram dadas. Por sua luz que ilumina meu caminhar e mantém acesa em mim, por meios de suas obras, a esperança e a certeza da concretização deste trabalho. Agradeço ainda a ele por ter me presenteado com família e amigos maravilhosos que me apoiam em todos os momentos.

Aos meus pais pelo empenho dedicado à minha educação, por ter garantindo minha formação pessoal e profissional, pelo exemplo e pelos valores ensinados me mostrando que coragem e determinação são fundamentais para a conquista dos objetivos.

À minha família pelo incentivo, paciência e compreensão ao longo deste trabalho, muito me ajudaram para conquistar o almejado.

À minha esposa, mulher especial em minha vida, amiga, companheira, que sempre compreendeu a importância deste desafio para mim, e me incentivou com o carinho.

À minha filha, suas "mexidas" na barriga de sua mãe me deram muita força para concluir.

Agradeço ao meu orientador, professor Ms.C. Erikson Alexandre Fonseca dos Santos, que aceitou a tarefa de me orientar. Sem a sua paciência para ouvir minhas inquietações, certamente não teria conseguido ordenar as ideias. Agradeço pelo incentivo, compreensão e suas valiosas sugestões que contribuíram significativamente para a concretização deste trabalho, jamais se cansou de me instigar.

Agradeço à Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, ao Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas e aos coordenadores do PROFMAT pelo apoio.

Ao corpo docente do PROFMAT pelo incentivo, dedicação e por contribuir substancialmente para minha formação.

Aos amigos, presente especial de Deus, por partilhar os sonhos e ser um auxílio no alcance de nossos objetivos.

Aos meus colegas do PROFMAT, pelo companheirismo e os momentos de aprendizagens que compartilhamos.

A direção do Colégio Estadual Governador João Durval Carneiro e aos alunos que participaram, pois contribuíram significativamente para a concretização desta pesquisa.

À Sociedade Brasileira de Matemática por permitir o alcance do objetivo.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado.

À banca examinadora que cedeu uma parte de seu tempo precioso para poder contribuir com este trabalho.

Um grande obrigado a todos que de alguma forma me ajudaram nesta caminhada. Que Deus os retribua com louvor.

"Ainda que eu falasse línguas, as dos homens e dos anjos,
se não tivesse o amor, seria como um sino ruidoso ou como um
símbolo estridente. Ainda que eu tivesse o dom da profecia,
o conhecimento de todos os mistérios e de toda a ciência,
ainda que tivesse toda fé, a ponto de transportar montanhas,
se eu não tivesse amor eu nada seria".
(Bíblia Sagrada, Coríntios. 13, 1-2)

Resumo

No presente estudo apresentamos um projeto, elaborado como uma proposta metodológica para o ensino de construções geométricas usando régua e compasso, desenvolvido com um grupo de alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública, visando servir de subsídio para professores do Ensino Médio na elaboração de aulas de Geometria. Inicialmente fazemos uma reflexão sobre a história do ensino de Geometria no Brasil a partir do início do século XX, analisando os principais fatos que contribuíram positiva ou negativamente para a abordagem das construções geométricas nas escolas. Esta pesquisa, que é exploratória e de caráter quali-quantitativo, foi desenvolvida mediante a realização de aulas, as quais descrevemos, bem como as definições e construções necessárias à execução das mesmas. Com a finalidade de avaliarmos a eficácia do projeto, aplicamos dois testes, um anterior e outro posterior às aulas. Por fim, apreciando os resultados obtidos e a partir das observações realizadas durante as aulas, tecemos considerações, destacando as possibilidades do trabalho com construções geométricas como um aliado na aprendizagem dos conceitos e no entendimento das propriedades, bem como um motivador no processo ensino-aprendizagem de Geometria.

Palavras-chaves: Construções Geométricas. Metodologia. Ensino-aprendizagem.

Abstract

In this study we present a project, designed as a methodology for teaching geometric constructions, developed with a group of students of the 3rd year of high school in a public school. Initially we reflect on the history of the teaching of Geometry in Brazil from the early twentieth century, analyzing the key facts that contributed positively or negatively to the approach of geometric constructions in schools. This research, which is exploratory and qualitative and quantitative character was developed by conducting classes, which describe, as well as definitions and necessary for the implementation of the same buildings. In order to evaluate the effectiveness of the project, we applied two tests, anterior and posterior classes. Finally, enjoying the results and from observations made during classes, we weave considerations, highlighting the possibilities of working with geometric constructions as an ally in learning the concepts and understanding of the properties, as well as a motivator in the teaching-learning Geometry.

Key words: Geometric Constructions. Methodology. Teaching-learning.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Ao analisarmos o atual ensino de Geometria, percebemos que muitas vezes o ensino dos conceitos e das propriedades geométricas acontece de forma desassociada das construções; outras vezes quando são abordadas as construções não há um aprofundamento nos conceitos, o que faz o ensino destas ser mais "desenhos" meramente do que instrumentos para visualização de propriedades. Raras vezes percebemos um entrosamento entre as construções, conceitos e propriedades. Diante desta realidade seria de grande valia que nós professores de Matemática ao ensinarmos Geometria, fizéssemos uso das construções como aliadas no desenvolvimento de nossas aulas para que haja uma aprendizagem significativa tanto no processo de construção, como na aquisição dos conceitos e propriedades.

Neste sentido é extremamente necessária a oferta de subsídios para que possamos contar com material de pesquisa para elaboração de aulas, visando o desenvolvimento de atividades que enfoquem as construções geométricas como meio de despertar no aluno o gosto pela Geometria e aptidão para realização das mesmas. Ressaltamos também a importância da elaboração de materiais para professores dos Ensinos Fundamental e Médio que considerem a realidade educacional e que, ao mesmo tempo, permitam o avanço do educando. Pensando nisto elaboramos um material que aborde não somente os conceitos e as construções fundamentais, mas também apresente atividades mais elaboradas, com um nível mais complexo possibilitando tanto ao professor como aos alunos a ampliação do seu conhecimento. Além disso, teremos disponível uma proposta metodológica que nos permita avançar, ir além daquilo que os livros didáticos do Ensino Médio oferecem, já que a literatura em Matemática neste nível abordando construções geométricas ainda é escassa.

Na atual conjuntura da realidade educacional percebemos que o ensino de Geometria no nível médio quase sempre é focado no abstrato. Os conceitos e as propriedades são meramente apresentados, e as figuras, na maioria da vezes, servem apenas para ilustrar, uma vez que estas são "desenhadas" sem qualquer compromisso de veracidade. Por exemplo, ao estudarmos os pontos notáveis do triângulo, as figuras apresentadas já trazem as medianas ou bissetrizes traçadas e concorrendo em um ponto; o aluno não participa dessa construção, apenas aprende como se denomina tal ponto de interseção. Ainda que alguns docentes considerem o trabalho com as construções demorado ou que tomam o tempo todo da aula, acreditamos que é válido, pois a aprendizagem do educando acontecerá de forma concreta e a visualização das propriedades através das construções facilitará o entendimento dos conceitos que ora foram apresentados.

Da nossa prática pedagógica como professor de Matemática lecionando Geometria, constatamos que alguns docentes, ou por questão da formação acadêmica ou por não julgar importante, se abstêm do trabalho com construções geométricas, às vezes provocando até uma certa “rejeição” por parte do aluno. Neste viés, nosso projeto apresenta uma proposta de trabalho que facilite a aprendizagem das construções e, consequentemente, dos conteúdos geométricos. Não propomos com ele esgotar as possibilidades de se trabalhar com construções geométricas, mas sim de disponibilizar um importante aporte para a elaboração de aulas que visem despertar no estudante o gosto pela Geometria e, mais especificamente, pelas construções geométricas.

De forma geral pretendemos apresentar uma proposta metodológica para o ensino de construções geométricas usando régua e compasso, servindo de subsídio para professores do Ensino Médio na elaboração de aulas de Geometria. Intentamos ainda aplicar esta proposta em uma turma do 3º ano de Ensino Médio e a partir daí analisar se as estratégias utilizadas apresentaram resultados satisfatórios garantindo a aprendizagem.

Especificamente, pretendemos incentivar discussões a respeito do tema abordado e, com isso, analisar o atual ensino de Geometria. Ademais, motivar o desenvolvimento de projetos similares de modo que venham a surgir outros trabalhos e que novos rumos possam ser vislumbrados. É nossa intenção ainda propiciar que a aprendizagem dos conceitos geométricos aconteça de maneira eficaz, através de aulas que associem construções geométricas, conceitos e propriedades. Não obstante, objetivamos aprimorar o raciocínio lógico do estudante auxiliando-o na maneira de pensar e agir ante a situações propostas, no desenvolvimento de sua autonomia e na busca por soluções nos acontecimentos do seu cotidiano.

Nosso trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro deles abordamos a fundamentação teórica e o subdividimos em duas seções. Inicialmente analisamos a história do ensino de Geometria no Brasil a partir do início de século XX, tendo como base o pensamento de alguns autores. Na segunda seção mostramos a situação atual do ensino das construções geométricas e a importância destas para a compreensão da Matemática.

No segundo capítulo descrevemos as etapas da pesquisa e sua classificação. Expomos o contexto onde foi aplicado o projeto, o perfil dos participantes e a forma como elaboramos e conduzimos os trabalhos. Apresentamos também as definições necessárias para o entendimento das construções geométricas e algumas demonstrações de resultados que envolvem construções geométricas.

No capítulo três analisamos os questionários aplicados. Apresentamos os dados obtidos e mediante a realidade observada refletimos sobre a situação do ensino de Geometria no contexto estudado, ressaltando os aspectos que facilitaram ou dificultaram a execução das construções propostas e consequentemente o aprendizado dos conteúdos trabalhados.

Por fim, no último capítulo abordamos as construções geométricas realizadas e apresentamos as propostas metodológicas de aulas. Na primeira seção descrevemos detalhadamente os procedimentos utilizados nas construções. Já na segunda, apresentamos os objetivos e os roteiros das aulas que foram desenvolvidas.

1 Contextualização do Ensino de Geometria

1.1 Histórico

Para melhor compreendermos a situação atual do ensino de Geometria nas escolas públicas brasileiras é necessária primeiramente uma abordagem do processo histórico do ensino de tal conteúdo. Para isso façamos uma análise desde o início do século XX até a presente data. Anteriormente a este século, basicamente não havia aulas de Geometria na educação básica, sendo vista apenas em cursos superiores. É importante ressaltar que a escola não era "pública" e nem todos tinham acesso. Sendo assim vamos analisar aqui a partir do momento em que a educação brasileira começou a ser organizada de maneira mais criteriosa considerando a sua gratuidade e o acesso, o que aconteceu no princípio do século passado a partir de mudanças no modelo educacional no sentido de oferecer educação a todos. Entre as mudanças que ocorreram destacaram-se a Reforma Francisco Campos[1], a Constituição de 1934 e a Reforma Capanema[2].

Até a década de 20 o ensino de Matemática nos cursos secundários era realizado de forma fragmentada nos ramos de Álgebra, Aritmética e Geometria[3]. Para Dassie e Rocha (2003) a criação da disciplina Matemática ocorre no final dessa década, inicialmente por proposta de Euclides Roxo[4] apenas para o Colégio Pedro II e, em seguida, com a Reforma Francisco Campos, ocorrida em 1931, tal mudança é estendida para todos os colégios de nível secundário. Além da junção dos conteúdos de Aritmética, Algébra e Geometria, a reforma também propunha o emprego de um método heurístico:

> o ensino se fará, assim, pela solicitação constante da atividade do aluno (método heurístico), de quem se procurará fazer um descobridor e não um receptor passivo de conhecimentos. Daí a necessidade de se renunciar completamente à pratica de memorização sem raciocínio, ao enunciado abusivo de raciocínio e regras e ao estudo sistemático das demonstrações já feitas. Ao invés disso, deve a matéria ser levada ao conhecimento do aluno por meio da resolução de problemas e de questionários intimamente coordenados. Assim os problemas não se devem limitar a exercícios dos assuntos ensinados, mas cumpre sejam propostos como processo de orientar a pesquisa de teoremas e de desenvolver a presteza na conclusão lógica. (ROCHA, 2001, p. 210).

De acordo com esta proposta o aluno seria protagonista de seu aprendizado, não mais um "telespectador", e sim um "construtor" do seu conhecimento. Daí a necessidade de mudanças nas aulas de Matemática que enfocavam a memorização.

[1] Significativa reforma na educação nacional, que ficou conhecida com este nome por que Francisco Campos era o responsável pelo recém-criado Ministério da Educação e Saúde Pública.

[2] As leis que compunham esta reforma foram publicadas quando o Ministério da Educação e Saúde Pública estava sob o comando de Gustavo Capanema Filho.

[3] As aulas de Geometria também incluíam conteúdos de Trigonometria.

[4] Euclides Roxo (1890-1950) foi diretor do externato do Colégio Pedro II.

A junção dos três ramos da Matemática citados acima em um único componente contribuiu no sentido de que todo aluno de escola pública teria acesso ao conhecimento inerente a tal componente.

Destacamos ainda na Reforma Francisco Campos o Decreto nº 19.890 de 18 de abril de 1931, que insere a disciplina Desenho Geométrico nas cinco séries do Curso Fundamental[5] durando até 1971, quando da promulgação da Lei 5.692.

Entre os anos de 1942 a 1946 foram publicadas uma série de leis, que compunham a Reforma Capanema. Segundo Gaspar (2013) a disciplina de Desenho Geométrico foi organizada considerando não só os conteúdos, como também a metodologia:

> estabeleceu o programa de Desenho nas quatro séries do curso ginasial, sendo que o Desenho Geométrico se encontrava presente desde a primeira série do ginasial, com a utilização dos instrumentos básicos de Desenho (régua e compasso) [...] estabeleceu o programa de Desenho e as instruções metodológicas para o curso colegial e científico. [...] também incluiu o ensino de Desenho como disciplina obrigatória nos cursos primário elementar, complementar e supletivo. (GASPAR, 2013, p. 4)

Desta forma a referida disciplina foi elevada a uma posição privilegiada, pois além de colocá-lo presente em todas as séries, também incentivava as construções geométricas com o uso de instrumentos.

Na década de 50 temos dois acontecimentos importantíssimos para o ensino de Desenho Geométrico: primeiro a Portaria Ministerial nº 966 de 2 de outubro de 1951, que enfatiza o ensino de Desenho Geométrico como fundamental para o ensino de Matemática; segundo, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) que foi desencadeado a partir do Primeiro Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática no Curso Secundário, em 1955. O objetivo deste movimento era aproximar a Matemática ensinada aqui no Brasil daquela ensinada nos Estados Unidos e na Europa e a difusão de suas ideias começou a partir de 1961 com a criação do Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM).

O MMM foi um dos grandes responsáveis por significativas mudanças no ensino de Matemática, entre as quais destacamos a redução ou exclusão do ensino de Geometria nas escolas de ensino básico; os livros didáticos de Matemática passam a abordar os conteúdos de forma mais restrita sem demonstrações; a Geometria perde espaço nos livros, onde os autores buscavam cada vez mais aproximar-se daquilo que o movimento propunha.

Costa (1982) afirma que essa "inferioridade" da Geometria já era apresentada nos livros didáticos antes da década de 50, sendo agravada pelo MMM principalmente nas escola públicas:

> ... a falta de Geometria repercute seriamente em todo o estudo das ciências exatas, da arte e da tecnologia. Mas o Desenho Geométrico foi afetado na sua própria razão de ser, já que em si é uma forma gráfica de estudo de Geometria e de suas aplicações. Muito antes de desaparecer, como matéria obrigatória no ensino do 1º grau, o Desenho Geométrico

[5] Ver artigo 3º do Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931.

> já havia sido transformado numa coleção de receitas memorizadas, onde muito mal se aproveitava o mérito da prática no manejo dos instrumentos do desenho, pois geralmente estes se reduziam à régua e compasso. (COSTA, 1982, p.89-90).

Para Gomes (2007) o MMM fez com que houvesse uma excessiva ênfase ao ensino da Álgebra, colocando os outros campos da Matemática, como a Geometria por exemplo, em segundo plano. Gomes, afirma que

> o Movimento da Matemática Moderna, que buscou aproximar a Matemática escolar da Matemática como disciplina científica, com a configuração estabelecida sobretudo a partir do século XIX, e procurou integrar o ensino da Aritmética, da Álgebra e da Geometria pela introdução da linguagem dos conjuntos e do estudo das estruturas algébricas, acabou por ser o responsável, em grande parte, pelo lugar de destaque assumido pela Álgebra nas práticas educativas escolares. (GOMES, 2007, p. 9)

Outro fato que contribuiu significativamente para a quase exclusão do ensino de Desenho Geométrico das escolas públicas no Brasil foi a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1961 que estabeleceu em seu artigo 45[6]:

> Art. 45. No ciclo ginasial serão ministradas nove disciplinas.
>
> Parágrafo único. Além das práticas educativas, não poderão ser ministradas menos de 5 nem mais de 7 disciplinas em cada série, das quais uma ou duas devem ser optativas e de livre escolha do estabelecimento para cada curso.(LDB 4024, 1961 artigo 45, § único)

Em 1971, com a reformulação da LDB (Lei nº 5692 de 11 de agosto de 1971), criou-se um núcleo comum com disciplinas obrigatórias e outro núcleo com disciplinas facultativas chamado de parte diversificada. Sendo que a escola só podia construir a matriz curricular dentro desta última. Assim, o Desenho Geométrico saiu do currículo das escolas que passaram a ter na parte diversificada Educação Artística em todas as séries, o que ocasionou o fim das construções geométricas em muitas escolas. Segundo Zuin (2002) isso não foi geral, "algumas escolas mantiveram as construções geométricas nas aulas de Educação Artística, sendo editados alguns livros nessa área com um programa voltado para Desenho Geométrico".

Costa e Lima (2010) apontam como principais motivos para o abandono atual do ensino de Geometria e, consequentemente, Desenho Geométrico, o MMM e a reforma da LDB pela lei 5692/71. Esta reforma afetou não só o ensino das construções, como também o de Geometria Euclidiana. Um dos entraves no ensino de Desenho Geométrico passou a ser justamente a falta de material didático, situação que segundo Zuin (2001) permaneceu até a década de 80 quando são lançadas as coleções de Desenho Geométrico para turmas de 5ª a 8ª série, porém ainda não havia nada oficial que inserisse as construções nos currículos escolares.

6 Revogado pela lei nº 5.692 de 1971.

Essa superioridade era confirmada na distribuição das unidades dos livros didáticos que até alguns anos atrás trazia os conteúdos geométricos nos últimos capítulos e ainda desassociados dos outros campos. Ressaltamos também que as construções geométricas quase não eram abordadas nos livros de Matemática e quando isto acontecia era de maneira simples e sem explicar todo o processo. Os procedimentos das construções ficavam à responsabilidade do professor de Educação Artística, que era uma junção de Geometria com Artes, mas não havia uma integração entre conceitos, propriedades e construções. De fato, o que ocorria era: o aluno aprendia o conceito em Matemática, quando existia tempo hábil e o professor tinha conhecimento e habilidade, o aluno fazia "desenhos" nas aulas de Educação Artística.

No final do século XX, começam a surgir ações positivas que auxiliam no resgate do ensino das construções nos Ensinos Fundamental e Médio. Destacamos aqui o lançamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1997, que

> têm como função subsidiar a elaboração ou a revisão curricular dos Estados e Municípios, dialogando com as propostas e experiências já existentes, incentivando a discussão pedagógica interna das escolas e a elaboração de projetos educativos, assim como servir de material de reflexão para a prática de professores. (BRASIL, 1997, p. 18).

Em 1998, são publicados os PCN's de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, que propõem retomar o uso de régua e compasso nas construções, fato que demonstra uma preocupação com ensino das construções nas séries finais do Ensino Fundamental.

Notamos que ainda hoje alguns autores e professores reforçam a "superioridade" da Álgebra. Exemplo disso é a distribuição que alguns autores continuam usando nos livros didáticos colocando os conteúdos de Geometria nas últimas unidades; no planejamento escolar também verificamos que algumas vezes os conteúdos geométricos são relacionados para o final do ano letivo e acabam não sendo abordados por falta de tempo ou, talvez, por falta de domínio.

1.2 Maneira como as Construções Geométricas são abordadas nas escolas

O ensino de Geometria não deve ser baseado apenas em aulas expositivas com a apresentação de conceitos e propriedades sem a manipulação, sem a construção de figuras que permitam ao educando a visualização daquilo que está sendo abordado. A aquisição de regras por parte do aluno sem associação, sem uma aplicação prática, não permitirá a escola o alcance de seus objetivos que entre eles está preparar para a vida. É necessário que as propostas metodológicas baseiem-se na manipulação e na construção, porém infelizmente as escolas em sua maioria ainda não fazem isso:

> o que temos percebido é que, na maioria das escolas, o ensino se baseia muito mais na manipulação sintática de símbolos e regras do

> que no significado dos mesmos. Muitos alunos cometem vários erros por não conseguirem compreender a lógica do raciocínio ou, ainda, por não conseguirem manipular os símbolos com determinadas regras (MORELATTI; SOUZA, 2006, p. 1) .

As construções geométricas são instrumentos essenciais não só para o aprendizado de Geometria, mas também para os outros campos da Matemática. Daí a necessidade de propostas de trabalho que visem oferecer subsídios de qualidade, e no nível acessível para os estudantes do Ensino Médio; que permitam ao professor da Educação Básica elaborar e ministrar aulas propiciando ao aluno a aquisição de conhecimentos fundamentais neste campo. Ressaltando que o objetivo não é só aprender os conteúdos abordados, que por si só já era o suficiente, mas também que esta metodologia contribua para adquirir outros conhecimentos no campo da Matemática como afirma Wagner:

> Os problemas de construções são motivadores, às vezes intrigantes e frequentemente conduzem à descoberta de novas propriedades. São educativos no sentido que em cada um é necessária uma análise da situação onde se faz o planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também sobre a compatibilidade dos dados. (WAGNER, 2007, prefácio)

2 Aspectos Metodológicos da Pesquisa

Nossa pesquisa é baseada na aplicação de um projeto que consiste numa abordagem de construções geométricas simples e outras mais elaboradas, usando régua e compasso. Apresentamos uma metodologia diferente daquela que comumente usamos nas nossas aulas de Geometria, baseada na aplicação de construções, onde o aluno possa ir adquirindo autonomia para elaborar os passos e assim propiciarmos formas de conduzí-los a uma aprendizagem significativa.

Na prática pedagógica em escola pública presenciamos situações que nos revelam o pouco ou nenhum conhecimento de alunos do Ensino Médio, e até mesmo de concluintes, a respeito das construções geométricas. Este fato foi uma das principais motivações para a realização deste trabalho. Assim, surgiu a preocupação em elaborar um material para ser usado nas aulas de Geometria que propiciasse a aquisição de habilidades para as construções. Contudo, percebemos que inicialmente era necessário sabermos qual o nível de conhecimento acerca de construções que os alunos já dominam para que, a partir daí, elaborássemos o subsídio (ou as aulas).Desta forma, nossa pesquisa é baseada na aplicação de um projeto, com uma metodologia diferente daquela que comumente usamos nas nossas aulas de Geometria, para que através dele busquemos formas de conduzir a uma aprendizagem significativa. Neste capítulo classificamos a pesquisa, citamos suas etapas e relatamos os procedimentos adotados para coleta e análise dos dados. Neste capítulo classificamos a pesquisa, citamos suas etapas e relatamos os procedimentos adotados para coleta e análise dos dados.

2.1 Tipo da pesquisa

Segundo Gil (2002) esta é uma pesquisa exploratória, pois

> ...tem como objetivo proporcionar mais familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipótese. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado. Na maioria dos casos, essas pesquisas envolvem: (a) levantamento bibliográfico; (b) entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado; e (c) análise de exemplos que “estimulem a compreensão” (GIL, 2002, p. 41).

Considerando que esta pesquisa reúne aspectos qualitativos e quantitativos na coleta e na análise de dados, ela é de natureza quali-quantitativa, pois envolve dados numéricos, estatísticos e informações textuais. Segundo Minayo (2002) os dados quantitativos e qualitativos se complementam, interagindo dinamicamente. A pesquisa qualitativa

> ..se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado, ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.(MINAYO, 2002, p.21-22)

Enquanto que a pesquisa quantitativa "...atua em níveis da realidade, onde os dados se apresentam aos sentidos [...] tem como campo de práticas e objetivos trazer à luz dados, indicadores e tendências observáveis" (MINAYO, 1993, p. 9).

Assim, nesta pesquisa, consideramos os aspectos qualitativos e também os quantitativos, a fim de obtermos uma análise mais fiel dos testes e situações observadas, pois "o estudo quantitativo pode gerar questões para serem aprofundadas qualitativamente, e vice-versa". (MINAYO, 1993, p.9)

2.2 Contexto e participantes da pesquisa

Inicialmente pretendíamos aplicar o projeto em uma turma de 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Governador João Durval Carneiro, no município de São Felipe, na Bahia, porém devido ao calendário escolar estadual está incompatível com o tempo do projeto e por termos mais facilidade em montar um grupo de alunos, resolvemos aplicar o projeto com alunos do 3º ano da escola supracitada. Para isso reunimos os estudantes que tivessem interesse em participar das aulas que ocorreram no turno oposto, podendo ser de turmas diferentes. No primeiro momento tivemos 30 alunos inscritos dos quais apenas 12 iniciaram e participaram efetivamente do projeto. Todos eles já haviam tido aulas de Geometria no ano anterior (com professores diferentes), mas nenhum havia visto construções geométricas utilizando régua e compasso. Aqueles que em algum momento fizeram construções aconteceu de maneira simples e livre, como por exemplo, construções de triângulos, retângulos, quadrados (os alunos faziam as figuras do tamanho e da forma que quisessem).

2.3 O projeto

Nas aulas de Geometria, que ministramos no 2º ano do Ensino Médio do Colégio citado anteriormente, percebíamos a falta e a necessidade de trabalhar as construções geométricas e também o interesse de alguns alunos por esta área. Assim, resolvemos propor uma metodologia para que tais aulas pudessem abordar estes procedimentos e propiciar um maior conhecimento sobre as construções, dada a relevada importância destas para o aprendizado.

Inicialmente foi feita uma sondagem para verificarmos quais conceitos prévios que os alunos possuíam. Para isso foram utilizados exercícios simples[1] que visaram analisar

[1] Ver teste de sondagem, anexo 1.

o conhecimento de conceitos, propriedades e processos de construções. Posteriormente foram elaboradas atividades que abordaram construções fundamentais tais como: traçar paralelas, perpendiculares, mediatriz, bissetriz, triângulos; em seguida, a partir daquilo que fora observado no primeiro momento, faríamos outras construções mais complexas visando o aprimoramento dos conhecimentos já observados e também a ampliação destes. Para isso usamos construções geométricas que permitissem aos alunos visualizarem propriedades e também a fixação de conceitos e definições. Antes de toda construção foi feita uma apresentação de definições prévias necessárias ao entendimento do que estava sendo construído e ao longo desta construção esperávamos que os alunos pudessem observar outras propriedades e assim acontecesse a aprendizagem, ou seja, os objetivos serem alcançados. As atividades foram desenvolvidas em 7 encontros com duração de 2 aulas de 50 minutos, uma vez por semana.

A partir daqui descrevemos os conteúdos abordados, os objetivos, a metodologia, os recursos e as questões propostas.

2.3.1 Conteúdos

Inicialmente foram estudados os conceitos primitivos: ponto, reta e plano. Em seguida, apresentamos as definições de segmento de reta, semirreta, classificamos duas retas quanto à suas posições relativas no plano e conceituamos mediatriz de um segmento de reta. Posteriormente definimos ângulos e bissetriz de um ângulo. Na sequência estudamos o círculo, semicírculo e arco do círculo. Depois definimos triângulos, apresentamos seus elementos, destacamos e definimos os ponto notáveis e, por fim, inscrição e circuncrisção dos triângulos. Concluindo, conceituamos quadrado e apresentamos os pontos de inscrição e circunscrição dos mesmos.

2.3.2 Objetivos específicos

Baseado nos conteúdos, elencamos como principais objetivos específicos:

1. Identificar ponto, reta e plano presentes em nosso cotidiano;
2. Definir e reconhecer semirreta e segmento de reta;
3. Classificar retas coplanares quanto à suas posições no plano;
4. Definir e traçar mediatriz de um segmento de reta;
5. Conceituar ângulos;
6. Definir, identificar e traçar bissetriz de um ângulo;
7. Conceituar polígonos e identificar seus elementos;
8. Conceituar triângulos, identificando seus elementos, cevianas e pontos notáveis;

9. Traçar triângulos, definir e traçar quadrados;
10. Encontrar o centro dos círculos inscrito e circunscrito de qualquer triângulo;
11. Inscrever e circunscrever quadrados.

2.3.3 Metodologia

Com o objetivo de sondar os estudantes e analisarmos o projeto aplicamos dois questionários (Anexos 1 e 2). O primeiro, aplicado antes das aulas, teve o intuito de verificar os conceitos prévios que os alunos possuíam; o segundo foi respondido pelos alunos após o término das aulas. Este último com questões semelhantes as do anterior, porém modificamos os exercícios para que a análise dos resultados não fosse comprometida, uma vez que os alunos relatavam durante as aulas quando abordávamos uma construção semelhante à solicitada no primeiro questionário.

Durante as aulas apresentamos, sempre que possível, objetos ou situações do cotidiano que tivessem relação com o conteúdo estudado, para que o aluno pudesse perceber situações em que podemos fazer uso do conhecimento geométrico (nas construções de casas, por exemplo). Optamos inicialmente por mostrarmos as figuras e depois apresentarmos as definições, desta forma, através da observação, eles puderam construir o conhecimento e tirar conclusões. Interferimos sempre que necessário corrigindo os equívocos e apresentando as definições corretas. Achamos necessário explicar como utilizar os instrumentos, régua e compasso, uma vez que percebemos dificuldades com o uso dos mesmos e este fato poderia atrapalhar o desenvolvimento das atividades. Nas primeiras aulas, após apresentarmos as definições, fizemos as construções junto com os alunos e, posteriormente, fomos deixando que eles trabalhassem sem a nossa interferência. Porém nos colocando à disposição sempre que necessário ou solicitado. Nas aulas em que abordamos os pontos notáveis do triângulo, deixamos que eles descobrissem através da construção que as cevianas (medianas, bissetrizes, alturas e mediatrizes) concorriam em um ponto para depois nomearmos esta interseção e afirmar que este fato acontece em todo triângulo.

2.3.4 Recursos

Utilizamos como principais instrumentos para o desenvolvimento das aulas régua e compasso e como materiais auxiliares, para melhor compreensão e assimilação, objetos com forma de sólidos geométricos e cartolinas.

2.3.5 Questões propostas

No decorrer do projeto vimos que era necessário incluir, além das construções propostas, os seguintes questionamentos:

1. Como construir um triângulo conhecendo seus lados?
2. Como construir um quadrado sabendo a medida de seu lado?

2.4 Realizando o projeto

O projeto foi aplicado mediante o acontecimento das seguintes etapas:

1. Mapeamento dos discentes interessados em participar do projeto;
2. Aplicação do teste de sondagem[2] aos alunos;
3. Análise do teste de sondagem identificando o conhecimento dos estudantes;
4. Realização das aulas elaboradas;
5. Aplicação da análise de evolução[3];
6. Sistematização dos dados analisados.

No primeiro momento procuramos alunos interessados em participar das aulas. Para evitarmos comparações com as aulas de Geometria realizadas no ano anterior optamos por formar um grupo que, preferencialmente, tivesse alunos de turmas diferentes e motivados em participar do projeto.

Ressaltamos que a metodologia aplicada no projeto já foi utilizada por alguns professores. Contudo, percebemos, já na aplicação do teste, que os alunos nunca tiveram contato com os instrumentos (régua e compasso) para construções, pois a forma como os seguravam demonstravam claramente este fato, além dos relatos. Devido à dificuldade de compreensão das definições, optamos por apresentar materiais concretos durante as aulas, como por exemplo, objetos com formas geométricas sólidas, recortes de cartolina, além de mostrar objetos presentes na própria sala de aula como a porta, a lousa, as madeiras do telhado, entre outros.

2.5 Teste de sondagem

Inicialmente, aplicamos o teste de sondagem com o objetivo de verificar o conhecimento dos alunos, quanto aos conteúdos específicos: conceitos primitivos, posições relativas de duas retas, triângulos, pontos notáveis dos triângulos, quadrados e círculos. Para isso o dividimos em três partes: a primeira, compreendendo as questões de 1 a 5, visava perceber se os alunos reconheciam triângulos e propriedades de retângulos, identificavam retas paralelas, retas perpendiculares, mediatriz, bissetriz, triângulos, reconheciam a altura relativa a um vértice do triângulo e associavam conceitos ao desenho.

[2] Ver anexo 1.
[3] Ver anexo 2.

A segunda parte, envolvendo as questões de 6 a 8, pretendia analisar o conhecimento sobre definições: retas perpendiculares, incentro e baricentro.

A última, que compreendeu as questões de 9 a 12, propôs verificar o nível de conhecimento e as habilidades dos alunos sobre construções geométricas.

2.6 Definições Básicas

Nesta seção apresentaremos as definições que foram usadas de modo que procuramos utilizar uma linguagem de fácil compreensão para o aluno do Ensino Médio. Nossa intenção é auxiliar o professor no desenvolvimento das atividades. Para isso foram usadas como referências [1], [11] e [12].

2.6.1 Apresentando os conceitos primitivos

Dos elementos ponto, reta e plano temos uma noção intuitiva, porém eles não possuem definição formal.

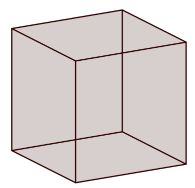


Figura 1 – Caixa.

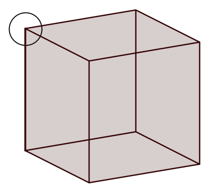


Figura 2 – Destaque na caixa.

(A) Ponto

Na caixa da figura acima os "cantos" (destaque na figura) nos dão a ideia do ponto. Para representá-lo usamos uma letra maiúscula do alfabeto latino.

Figura 3 – Pontos A e B.

(B) Reta

Ao observarmos as bordas da caixa da figura 1 temos a ideia da reta. Para representá-la podemos usar dois pontos contidos nela ou uma letra minúscula do alfabeto latino, ou seja, $\overleftrightarrow{AB}$ ou m.

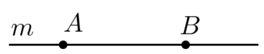


Figura 4 – Reta $\overleftrightarrow{AB}$ ou m.

(C) Plano

Olhando para a tampa da caixa da figura 1 podemos associá-la a um plano. Também nos dão a ideia de plano, a folha de papel e a lousa. Para representar este último ente geométrico usamos uma letra minúscula do alfabeto grego, por exemplo: α (alfa), β (beta), γ (gama), λ (lambda), etc.

2.6.2 Semirreta

Definição 2.1. *Considerando um ponto O contido numa reta, observamos que este ponto divide a reta em duas partes com origem neste ponto O e sentidos contrários. Cada uma dessas partes é chamada de* ***semirreta****.*

Na figura 5, temos a semirreta $\overrightarrow{OA}$, com origem no ponto O e sentido para a esquerda, e a semirreta $\overrightarrow{OB}$, também com origem no ponto O e sentido para a direita.

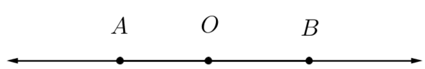


Figura 5 – Semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

2.6.3 Segmento de reta

Definição 2.2. *O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado* ***segmento*** *AB. Os pontos A e B são denominados* ***extremos*** *ou* ***extremidades*** *do segmento.*

Indicaremos o comprimento do segmento AB pelo símbolo $\overline{AB}$ e nos desenhos usaremos letras minúsculas latinas para indicar o comprimento do segmento.

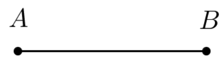


Figura 6 – Segmento AB

2.6.4 Ponto médio de um segmento

Definição 2.3. *Chamamos de* ***ponto médio*** *do segmento AB a um ponto C deste segmento, tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.*

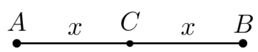


Figura 7 – C é o ponto médio do segmento AB.

2.6.5 Ângulos

Definição 2.4. *Dadas duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ num plano α, um* ***ângulo*** *(ou* ***região angular****) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

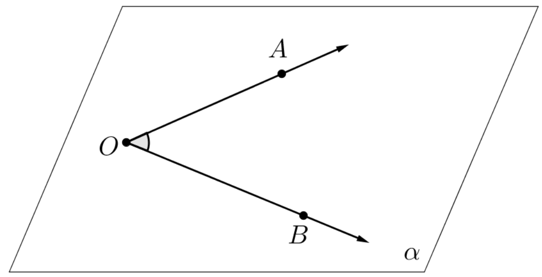


Figura 8 – Ângulo $A\widehat{O}B$ ou $B\widehat{O}A$.

Existem várias maneiras distintas de representar um ângulo. Ao observarmos a figura 8, a região destacada entre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ forma o ângulo $A\widehat{O}B$ ou $B\widehat{O}A$. Quando usamos esta representação a letra indicativa do vértice deve sempre aparecer entre as outras duas que representam pontos das semirretas que formam o ângulo.

Quando nenhum outro ângulo exibido tem o mesmo vértice, podemos usar a letra que designa o vértice para representar o ângulo. Assim, o ângulo da figura acima também pode ser representado por $\widehat{O}$. Ainda podemos usar letras minúsculas gregas para representar um ângulo. A partir daqui usaremos como notação a letra indicativa do vértice e para representar a medida do ângulo usaremos uma letra minúscula grega.

Usaremos como medida de ângulos o grau (^{o}), mas também podem ser medidos em radiano.

Podemos classificar os ângulos quanto à sua medida em:

a) Ângulo **agudo**: sua medida é maior que 0^o e menor que 90^o.

b) Ângulo **reto**: sua medida é igual a 90^o.

c) Ângulo **obtuso**: sua medida é maior que 90^o e menor que 180^o.

Observe na figura 9 a notação especial para ângulo reto.

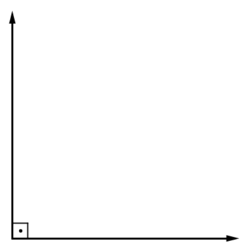


Figura 9 – Ângulo reto.

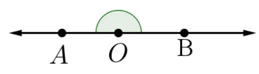


Figura 10 – $A\widehat{O}B$ é um ângulo raso.

Definição 2.5. *Um ângulo formado por duas semirretas distintas de uma mesma reta é chamado de* ***ângulo raso****. Sua medida corresponde a 180º.*

2.6.6 Congruência

Definição 2.6. *Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando* $\overline{AB} = \overline{CD}$*. Analogamente, diremos que dois ângulos* $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ *são congruentes se eles têm a mesma medida.*

2.6.7 Colinariedade

Definição 2.7. *Sejam A, B e C pontos de um plano* α*. Se C estiver sobre a reta* $\overleftrightarrow{AB}$*, diremos que A, B e C* ***são colineares****; caso contrário, diremos que A, B e C são* ***não-colineares*** *(figura 11).*

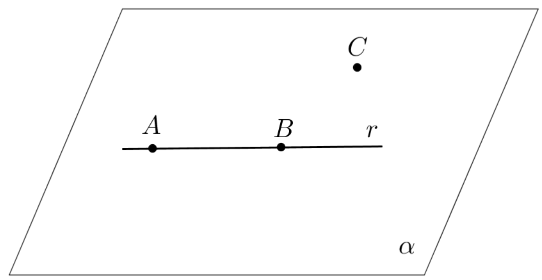


Figura 11 – Três pontos não-colineares.

2.6.8 Posição relativa de duas retas no plano

Duas retas coplanares, ou seja, que estão no mesmo plano, podem se interceptar ou não. Podemos classificar retas coplanares de acordo com o número de pontos em que se interceptam.

2.6.8.1 Retas coincidentes

Definição 2.8. *Duas retas em um plano β que possuem mais de um ponto comum são chamadas* ***coincidentes****. Se r e s possuem mais de um ponto em comum, consequentemente possuem todos os pontos em comum. Para indicar que as retas r e s são coincidentes, usaremos a notação $r \equiv s$ o que lemos assim: r coincidente a s.*

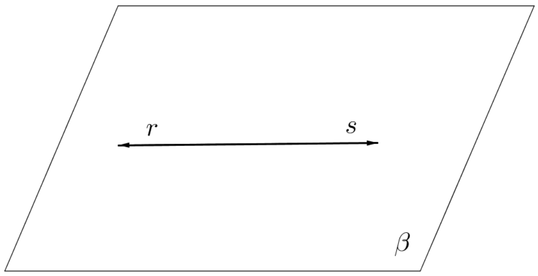


Figura 12 – $r \equiv s$.

2.6.8.2 Retas paralelas

Definição 2.9. *Duas retas em um plano γ que não se interceptam, isto é, não possuem ponto em comum, são ditas* ***paralelas****. Denotaremos essa relação por $r//s$.*

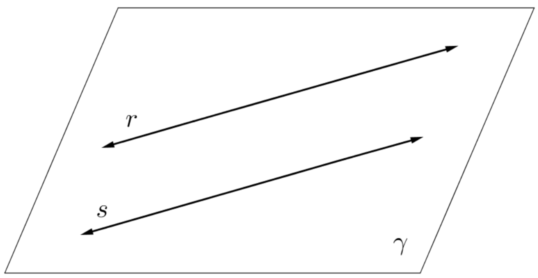


Figura 13 – $r//s$.

2.6.8.3 Retas concorrentes

Definição 2.10. *Duas retas r e s contidas em um plano λ são ditas **concorrentes** se r e s possuem apenas um ponto comum. Na figura 14 o ponto E é chamado **ponto de concorrência** das retas r e s. Denotamos esta relação por $r \times s$ e lemos: r concorrente a s.*

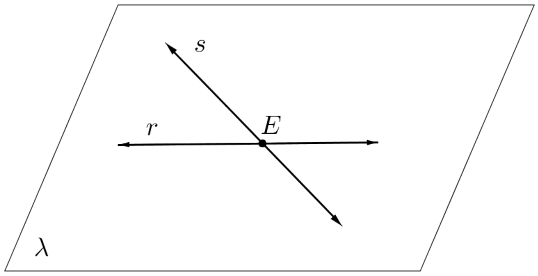


Figura 14 – $r \times s$.

2.6.8.4 Retas perpendiculares

Definição 2.11. *Sejam r e s duas retas contidas em um plano ψ. Diremos que a reta r é **perpendicular** a reta s se forem concorrentes e os ângulos determinados por elas forem retos. Esta relação entre as duas retas será denotada por $r \perp s$ o que lemos assim: r perpendicular a s.*

Observemos que retas perpendiculares são, portanto, um caso particular de retas concorrentes.

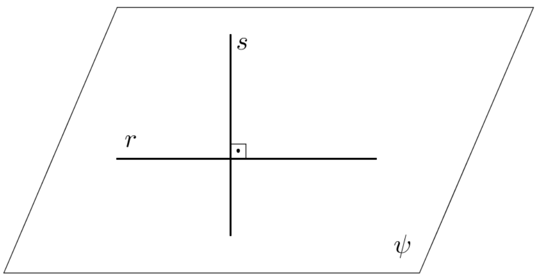


Figura 15 – $r \perp s$

2.6.9 Mediatriz de um segmento de reta

Definição 2.12. *Dados dois pontos A e B em um plano ϕ, a **mediatriz** do segmento AB é a reta perpendicular a AB que passa por seu ponto médio M, ou seja, a mediatriz de AB é o conjunto dos pontos do plano ϕ que equidistam de A e de B.*

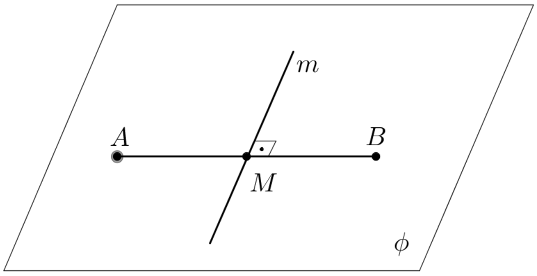


Figura 16 – A reta m é a mediatriz do segmento AB.

2.6.10 Bissetriz de um ângulo

Definição 2.13. *Dado um ângulo $A\widehat{O}B$, sua **bissetriz** é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que o divide em dois ângulos congruentes. Neste caso, dizemos ainda que $\overrightarrow{OC}$ bissecta $A\widehat{O}B$.*

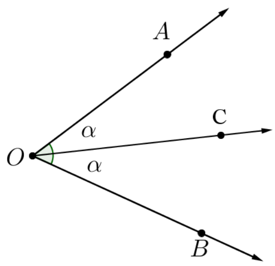


Figura 17 – $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $A\widehat{O}B$.

2.6.11 Polígonos

Definição 2.14. *Sejam $n \geq 3$ um número natural e A_1, A_2,...,A_n pontos distintos do plano. Dizemos que A_1, A_2,...,A_n é um **polígono (convexo)** se, para cada $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2, ...$). Os pontos A_1, A_2,...,A_n são chamados **vértices** do polígono; os segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 são os **lados** do polígono.*

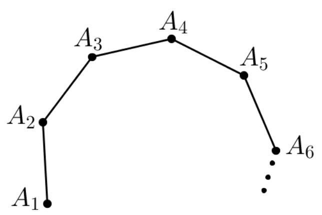


Figura 18 – Polígono $A_1A_2...A_n$.

Definição 2.15. *Uma* ***diagonal*** *de um polígono é qualquer um dos segmentos A_iA_j que não seja um lado do mesmo.*

2.6.12 Triângulo

Definição 2.16. *Dados três pontos A, B e C não-colineares em um plano ω, a união dos segmentos AB, BC e CA chama-se* ***triângulo*** *ABC e o denotaremos por ΔABC.*

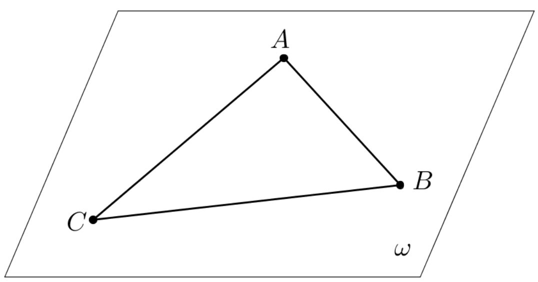


Figura 19 – ΔABC.

Com base na figura 19, os elementos de um triângulo são:

(a) **Vértices**: os pontos A, B e C;

(b) **Lados**: os segmentos AB, BC e CA;

(c) **Ângulos internos**: $A\widehat{B}C$ ou $\widehat{B}$, $B\widehat{C}A$ ou $\widehat{C}$ e $C\widehat{A}B$ ou $\widehat{A}$.

Podemos classificar triângulos de duas maneiras: em relação ao comprimento de seus lados ou quanto às medidas de seus ângulos internos.

Quanto ao comprimento de seus lados, um triângulo ABC é denominado:

(a) **Equilátero**, se $\overline{AB} = \overline{CA} = \overline{BC}$.

(b) **Isósceles**, se ao menos dois dentre AB, BC e CA forem congruentes.

(c) **Escaleno**, se $\overline{AB} \neq \overline{CA} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$.

Quanto às medidas de seus ângulos internos, um triângulo é chamado:

(a) **Acutângulo**, se todos os seus ângulos internos forem agudos.

(b) **Retângulo**, se tiver um ângulo interno reto.

(c) **Obtusângulo**, se tiver um ângulo interno obtuso.

Definição 2.17. ***Ceviana*** *de um triângulo é qualquer segmento (ou reta ou semirreta correspondente) que une um vértice do mesmo a um ponto sobre a reta suporte do lado oposto a tal vértice.*

Definição 2.18. *O segmento que une os pontos médios de dois lados quaisquer de um triângulo é chamado de* ***base média*** *do triângulo.*

Enunciamos a seguir o **teorema da base média**. Em virtude da demonstração deste resultado exigir outros conhecimentos que fogem ao contexto do nosso trabalho, ela não será feita, mas pode ser encontrada na página 76 da referência [12].

Teorema 2.1. *Seja ABC um triângulo qualquer. Se P e Q são os pontos médios dos lados CA e AB, respectivamente, então $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{BC}$. Reciprocamente, se traçarmos por Q uma paralela ao lado BC, então a mesma intersecta CA em P. Ademais, em qualquer dos casos acima, temos $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.*

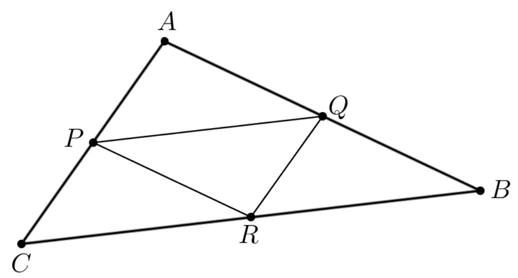


Figura 20 – Bases médias do triângulo ABC.

2.6.12.1 Mediana

Definição 2.19. *Seja ABC um triângulo e seja M um ponto do lado BC. O segmento AM chama-se* ***mediana*** *do triângulo relativamente ao lado BC se M for o ponto médio de BC.*

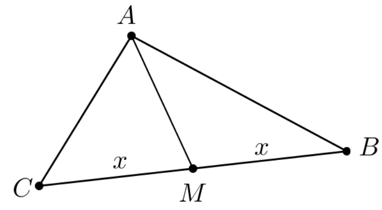


Figura 21 – AM é a mediana relativa ao lado BC.

2.6.12.2 Bissetriz

Definição 2.20. *Seja ABC um triângulo e seja D um ponto do lado BC. O segmento AD chama-se* ***bissetriz*** *do ângulo $\widehat{A}$ se a semirreta AD divide o ângulo $C\widehat{A}B$ em dois ângulos congruentes.*

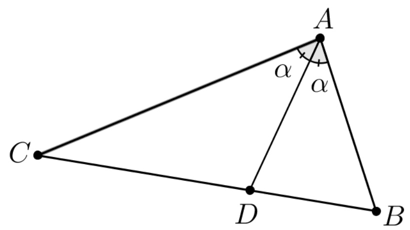


Figura 22 – AD é bissetriz do ângulo $\widehat{A}$.

2.6.12.3 Mediatriz

Definição 2.21. *Seja ABC um triângulo e seja M o ponto médio do segmento CA. A reta b, perpendicular ao segmento CA no ponto M, é chamada de* ***mediatriz*** *do lado CA.*

As mediatrizes dos lados de um triângulo são chamadas de mediatrizes do triângulo.

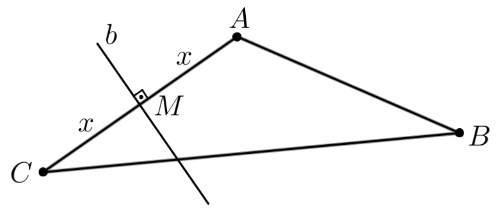


Figura 23 – b é a mediatriz do lado CA.

2.6.12.4 Altura

Definição 2.22. *Seja ABC um triângulo e seja H um ponto do lado BC. O segmento AH chama-se **altura** do triângulo relativamente ao lado BC, se AH for perpendicular a reta que contém B e C.*

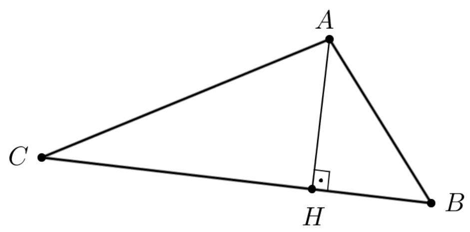


Figura 24 – AH é a altura relativa ao lado BC.

2.6.13 Círculo

Definição 2.23. *Sejam A um ponto do plano ϵ e r um número real positivo. O **círculo** de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano, tais que $\overline{AB} = r$.*

Denotaremos círculos por letras gregas maiúsculas.

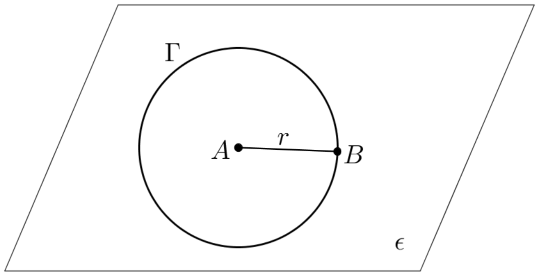


Figura 25 – Círculo Γ.

Na figura 25 temos o círculo Γ de raio r e centro A, que comumente escrevemos $\Gamma(A,r)$.

Definição 2.24. *Sejam A e B pontos de um círculo de centro O e raio r. Considere a reta t que passa por A e B. Cada semiplano determinado por t contém uma parte do círculo chamada* ***arco****.*

O arco contido no semiplano contendo o centro é chamado de **arco maior** e o outro arco é denominado **menor**, como vemos na figura 26.

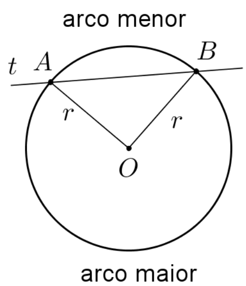


Figura 26 – Arco de círculo.

Se $A\widehat{O}B$ é um ângulo raso, cada arco é um semicírculo, como mostramos na figura 27.

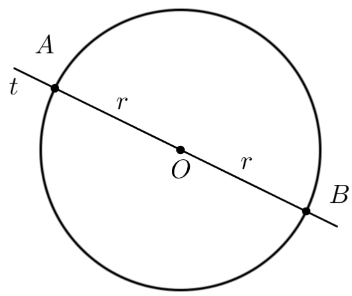


Figura 27 – Semicírculo.

Definição 2.25. *Quando uma reta e um círculo tem apenas um ponto em comum, dizemos que a reta **tangencia** o círculo e a chamamos de reta **tangente** ao círculo. O ponto comum entre uma reta tangente e um círculo é chamado de **ponto de tangência**.*

Definição 2.26. *Um polígono está **inscrito** num círculo se todos os seus vértices pertencem ao círculo.*

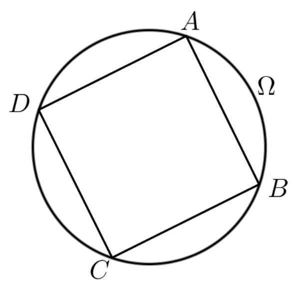


Figura 28 – $ABCD$ inscrito no círculo Ω.

Definição 2.27. *Um círculo está **inscrito** em um polígono se todos os lados são tangentes ao círculo. Neste caso, dizemos que o polígono **circunscreve o círculo**.*

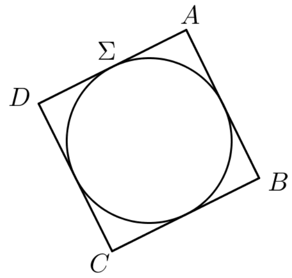


Figura 29 – $ABCD$ circunscrito no círculo Σ.

2.6.14 Quadrado

Definição 2.28. *Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos AB, BC, CD e DA interceptam-se apenas nas extremidades, a união destes quatro segmentos é um* ***quadrilátero****. Notação: quadrilátero $ABCD$.*

São elementos do quadrilátero $ABCD$:

(a) **Vértices**: os pontos A, B, C e D;

(b) **Lados**: os segmentos AB, BC, CD e DA;

(c) **Ângulos**: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$;

(d) **Diagonais**: os segmentos AC e BD.

Definição 2.29. *Um quadrilátero convexo é dito um* ***paralelogramo*** *se possuir os lados opostos paralelos.*

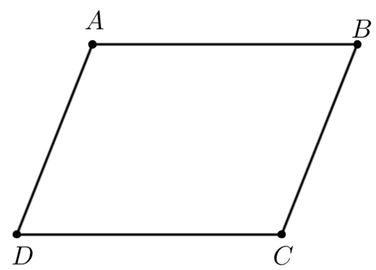


Figura 30 – Paralelogramo $ABCD$: $AB//CD$ e $DA//BC$.

Proposição 2.1. *Em todo paralelogramo as diagonais se interceptam nos seus respectivos pontos médios.*

Em virtude de a demonstração do resultado exigir outros conhecimentos que fogem ao contexto do nosso trabalho, ela não será feita, mas pode ser encontrada na página 74 da referência [12].

Definição 2.30. *Um quadrilátero cujos ângulos internos são todos retos e os lados são todos congruentes é um **quadrado**.*

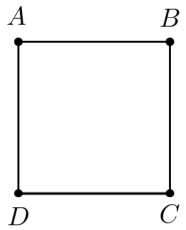


Figura 31 – Quadrado $ABCD$.

2.6.15 Pontos notáveis do triângulo

2.6.15.1 Baricentro

Definição 2.31. *Em todo triângulo, as três medianas passam por um único ponto, denominado de **baricentro** do triângulo. O baricentro de um triângulo está situado sempre no seu interior. Denotaremos o baricentro por G.*

Proposição 2.2. *O baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão 2 : 1.*

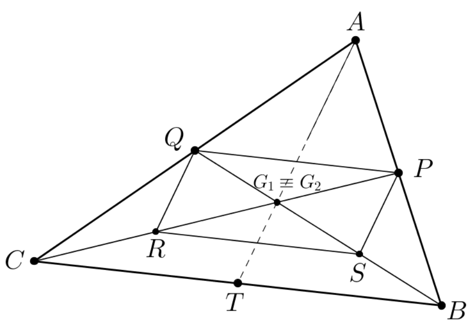


Figura 32 – As medianas e o baricentro.

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer, P e Q os pontos médios dos lados AB e CA, respectivamente, e seja G_1 a interseção entre BQ e CP (figura 32). Sejam, ainda,

R e S os respectivos pontos médios dos segmentos CG_1 e BG_1. Aplicando o **teorema da base média**, temos que $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{RS} // \overleftrightarrow{BC}$, daí $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{RS}$. Além disso $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ e $\overline{RS} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, portanto $\overline{PQ} = \overline{RS}$. Pela definição 2.29 $PQRS$ é um paralelogramo, então $\overline{PG_1} = \overline{RG_1}$ e $\overline{QG_1} = \overline{SG_1}$. Como R e S são pontos médios de CG_1 e BG_1, respectivamente, temos que $\overline{BS} = \overline{SG_1} = \overline{G_1Q}$ e $\overline{CR} = \overline{RG_1} = \overline{G_1P}$, donde concluímos que $\overline{BG_1} = 2\overline{G_1Q}$ e $\overline{CG_1} = 2\overline{G_1P}$.

Consideremos T o ponto médio de BC e G_2 a interseção entre AT e BQ. De forma análoga concluímos que $\overline{AG_2} = 2\overline{G_2T}$ e $\overline{BG_2} = 2\overline{G_2Q}$. Como $\overline{BG_1} = 2\overline{G_1Q}$ e $\overline{BG_2} = 2\overline{G_2Q}$, isso nos garante que $G_1 \equiv G_2$. Então, chamando $G_1 \equiv G_2$, de G, temos que AT, BQ e PC se interceptam em G e que o mesmo divide cada mediana na razão 2 : 1 a partir do vértice. □

Na figura 33, temos que os segmentos CM, AN e BO são, respectivamente, as medianas relativas aos lados AB, BC e CA do triângulo ABC e G é o ponto de interseção destas medianas. Portanto G é o baricentro.

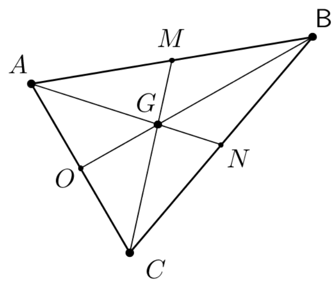


Figura 33 – G é o baricentro do triângulo ABC

2.6.15.2 Circuncentro

Definição 2.32. *Em todo triângulo as mediatrizes do lados passam todas por um mesmo ponto o qual definimos como* ***circuncentro*** *do mesmo.*

Proposição 2.3. *O circuncentro é o ponto de concorrência das mediatrizes de um triângulo.*

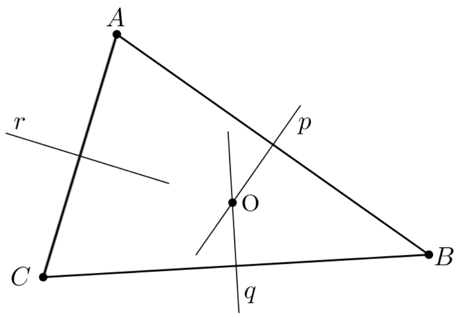


Figura 34 – As mediatrizes e o circuncentro.

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer, p, q e r as respectivas mediatrizes dos lados AB, BC e CA. Seja ainda o ponto O a interseção entre as retas p e q, como ilustrado na figura 34.

Pela definição de mediatriz e pelo fato de $O \in q$, temos que $\overline{OB} = \overline{OC}$. Usando agora o fato de $O \in p$, temos $\overline{OA} = \overline{OB}$. Daí $\overline{OA} = \overline{OC}$, novamente pela definição concluímos que $O \in r$. Portanto O é a interseção das mediatrizes, o circuncentro. □

Observação 1. O circuncentro de um triângulo pode ser um ponto interior (triângulo acutângulo) ou exterior (triângulo obtusângulo) ao triângulo, ou mesmo está situado sobre um de seus lados (triângulo retângulo).

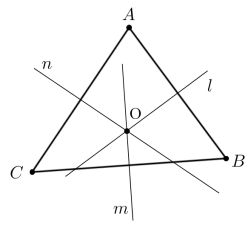


Figura 35 – Triângulo acutângulo.

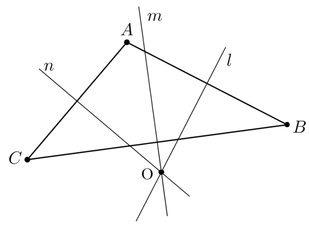


Figura 36 – Triângulo obtusângulo.

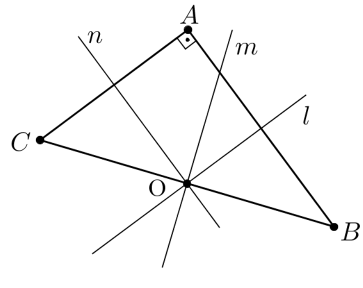


Figura 37 – Triângulo retângulo.

Proposição 2.4. *Todo triângulo admite um único círculo passando por seus vértices. Tal círculo é dito* ***circunscrito*** *ao triângulo e seu centro é o* ***circuncentro deste****.*

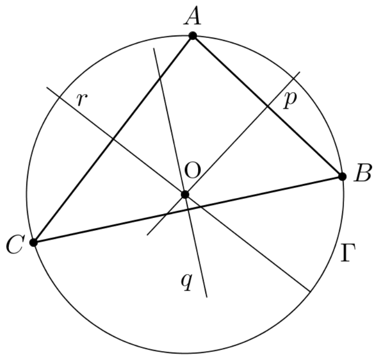


Figura 38 – Circuncentro e círculo circunscrito a um triângulo.

Demonstração. **(Existência)** Sejam ABC um triângulo qualquer e O seu circuncentro (figura 38). Como já foi provado anteriormente, temos que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, pois O é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo. Observemos que o círculo Γ de centro O e raio $R = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, passa pelo vértices do triângulo.

(Unicidade) Consideremos agora um círculo que passe pelos vértices de ABC, portanto seu centro deve ser equidistante dos mesmos. Assim, por definição, o centro pertence as mediatrizes dos lados de ABC, ou seja, o ponto de interseção das mesmas, o circuncentro. O raio deste círculo é $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, que é igual a R. □

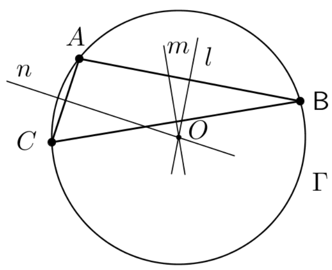


Figura 39 – Γ é o círculo circunscrito ao triângulo ABC.

2.6.15.3 Incentro

Definição 2.33. *As bissetrizes internas de todo triângulo concorrem em um único ponto chamado de* ***incentro*** *do triângulo.*

A demonstração para o caso do incentro é análoga a do circuncentro e, portanto, não a faremos. Para consulta, indicamos ver a demonstração em [12] página 107. O incentro do triângulo está situado sempre no seu interior. Denotaremos o incentro por I.

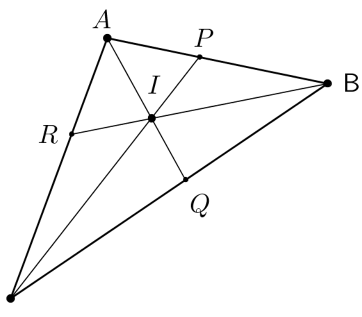


Figura 40 – I é o incentro do triângulo ABC.

Na figura 40, temos que os segmentos AQ, BR e CP são, respectivamente, as bissetrizes dos ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ do triângulo ABC e I é o ponto de interseção destas bissetrizes. Portanto I é o incentro.

Proposição 2.5. *Todo triângulo admite um único círculo contido no mesmo e tangente a seus lados. Tal círculo é dito **inscrito** no triângulo e seu centro é o **incentro** deste.*

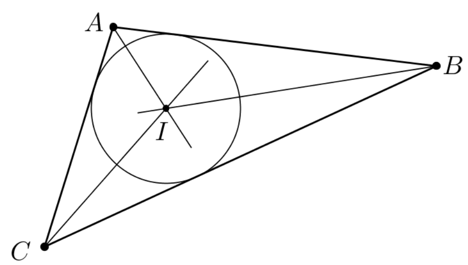


Figura 41 – Incentro e círculo inscrito em um triângulo.

Demonstração. **(Existência)** Sejam ABC um triângulo qualquer e I o ponto de interseção das bissetrizes internas deste (figura 41). I é equidistante de AB, BC e CA, lados do triângulo. Chamando de r a distância de I aos lados, temos que o círculo de centro I e raio r está contido no triângulo ABC e é tangente aos seus lados.

(Unicidade) Consideremos agora um círculo tangente aos lados do triângulo ABC. Portanto seu centro é equidistante aos lados do mesmo. Então, por definição, o centro pertence a bissetriz dos ângulos internos de ABC, ou seja, o ponto de interseção das mesmas, o incentro. O raio deste círculo é a distância entre I e os lados, isto é, r. $\square$

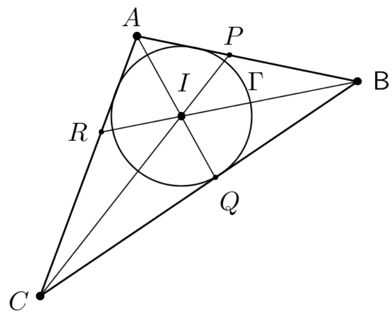


Figura 42 – Γ é o círculo inscrito ao triângulo ABC.

2.6.15.4 Ortocentro

Definição 2.34. *Em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto denominado de* ***ortocentro*** *do triângulo.*

Proposição 2.6. *O ortocentro é o ponto de concorrência das alturas de um triângulo.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Temos três casos a considerar:

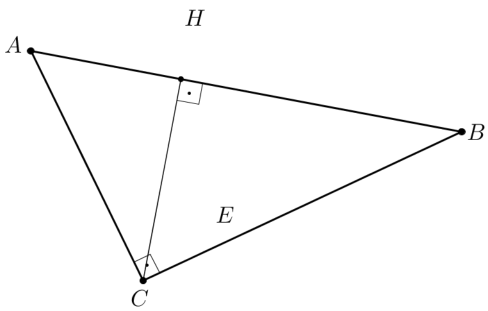


Figura 43 – Ortocentro de um triângulo retângulo.

(a) ABC é retângulo (figura 43). Supondo, sem perda de generalidade, que $B\widehat{C}A = 90^{o}$, temos que BC é a altura relativa ao lado CA e CA a altura relativa ao lado BC. Por definição, a altura relativa ao lado AB passa por C, então as três alturas se interceptam em C, ortocentro do triângulo.

(b) ABC é acutângulo (figura 44). Consideremos três retas p, q e r respectivamente paralelas a BC, CA e AB passando por A, B e C, também respectivamente. Sejam ainda R, S e T as respectivas interseções entre p e q, q e r, p e r. Por construção, temos que $ABSC$ e $ABCT$ são paralelogramos, então $\overline{CT} = \overline{AB} = \overline{CS}$, donde podemos afirmar que

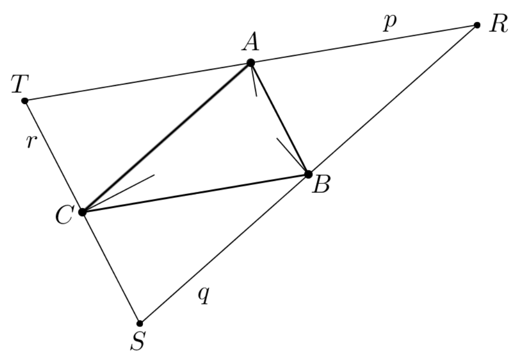


Figura 44 – Ortocentro de um triângulo acutângulo.

C é o ponto médio de ST. De maneira análoga, B é o ponto médio de SR e A o ponto médio de RT.

Como $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{RT}$, a altura relativa a BC é perpendicular a RT. Analogamente as alturas relativas a AB e CA são perpendiculares respectivamente a ST e SR. Portanto, as alturas de ABC são as mediatrizes dos lados do triângulo RST. Como já demonstramos que as mediatrizes se interceptam em um ponto, concluímos que as alturas de um triângulo também se interceptam em um ponto, o ortocentro.

(c) ABC é obtusângulo. A prova é análoga à do caso (b). □

Observação 2. O ortocentro de um triângulo pode ser um ponto interior (triângulo acutângulo) ou exterior (triângulo obtusângulo) ao triângulo, ou mesmo está situado sobre um dos vértices (triângulo retângulo).

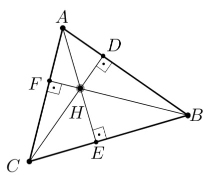


Figura 45 – Triângulo acutângulo.

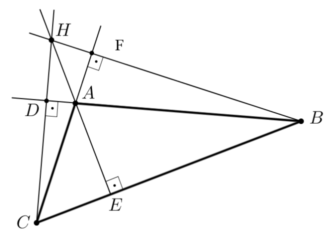


Figura 46 – Triângulo obtusângulo.

Nas figuras 45 e 46 temos que as retas CD, AE e BF são, respectivamente, as alturas relativas aos lados AB, BC e CA do triângulo ABC e H é o ponto de interseção destas alturas. Portanto, H é o ortocentro. Já na figura 47 AE é a altura relativa ao lado BC, CA é a altura relativa ao lado AB e vice-versa.

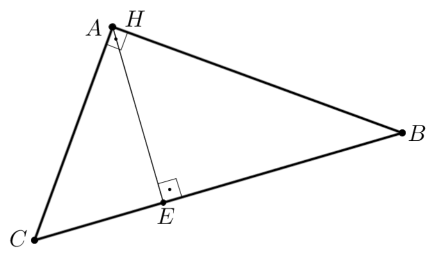


Figura 47 – Triângulo retângulo.

2.7 Instrumentos utilizados

Nas construções geométricas usamos apenas régua e compasso. No caso da régua, ela foi usada exclusivamente para traçar retas conhecendo-se dois pontos e o compasso para traçar um círculo conhecendo-se seu centro e o raio definido pelo comprimento de um segmento conhecido. Devido ao grande número de alunos que não possuíam régua não graduada permitimos o uso de régua graduada desde que a mesma não fosse utilizada como instrumento de medida.

3 Análise dos Resultados

3.1 Aspectos observados nos questionários

Durante a aplicação dos questionários alguns alunos relataram não ter visto alguns dos conteúdos como, por exemplo, pontos notáveis do triângulo. Percebemos também que não tinham nenhuma familiaridade com construções, foram praticamente unânimes em afirmar "nunca vimos construções na sala". Abaixo apresentamos, em forma de tabela e em gráfico, os dados referentes a aplicação do teste de sondagem que foi respondido por 12 discentes.

Questão	Acertos (%)	Erros (%)	Não responderam (%)
1	50	25	25
2	25	50	25
3	50	50	0
4	58,3	8,3	33,3
5	91,7	0	8,3
6	0	75	25
7	0	8,3	91,7
8	8,3	0	91,7
9	0	25	75
10	0	8,3	91,7
11	0	0	100
12	0	0	100

Tabela 1 – Porcentagem de acertos, erros e ausência de respostas das questões tratadas no teste de sondagem.

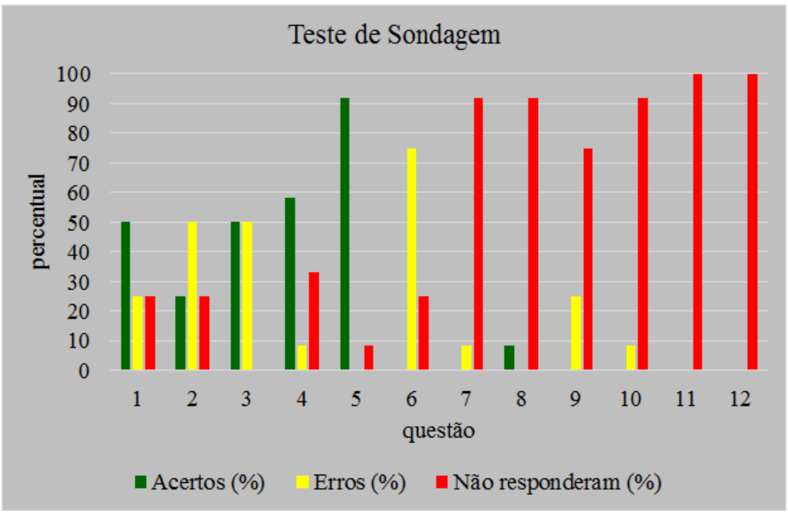


Figura 48 – Porcentagem de acertos, erros e ausência de respostas das questões tratadas no teste de sondagem.

Analisando a tabela com o resultado da aplicação do teste, percebemos que a maioria dos alunos apenas conhece as figuras sem conseguir definir ou atribuir as propriedades inerentes à elas. Constatamos também a falta de habilidades referentes às construções básicas. Isso fica evidente quando observamos na tabela a quinta questão, que explora o reconhecimento de triângulos, com o maior índice de acertos, enquanto as questões onze e doze, que abordam construções, vemos que todos os estudantes entrevistados deixaram em branco.

O primeiro bloco, composto pelas questões 1 a 5, todas de múltipla escolha com exceção da primeira, aborda o reconhecimento de figuras e propriedades. Este bloco apresentou o maior número de acertos. Na primeira questão, apesar de a metade do alunos responder corretamente, o que nos chama a atenção é o fato de três deles não responderem alegando não saber o que são retas paralelas e retas perpendiculares, e um destes inclusive não conseguia identificar no desenho a reta indicada. A segunda questão revelou claramente a falta de associação do conceito à figura. Um aluno chegou a afirmar: "o ângulo estou vendo, mas a bissetriz não está desenhada". A terceira questão nenhum estudante deixou de responder, porém, entre os que erraram, alguns não identificaram o símbolo de ângulo reto. A quarta e a quinta questões foram as duas com o maior índice de acertos, 58,3% e 91,7%, respectivamente, demostrando que os estudantes assimilam mais quando é apresentado a figura.

No segundo bloco, formado pelas questões de 6 a 8, tratamos de definições. A sexta questão procurou verificar o conhecimento sobre o centro do círculo inscrito ao triângulo, apesar de ser um exercício de múltipla escolha, não foi respondida corretamente por nenhum aluno, além de ser a que apresentou o maior número de erros. As questões 7 e 8, que, respectivamente, abordam o conceito de baricentro e retas perpendiculares, apresentaram alto índice de ausência de respostas: 91,7%. Neste bloco apenas a questão 8 foi respondida corretamente por 1 aluno que corresponde a 8,3%. Fica evidente a dificuldade que os educandos têm de trabalharem com definição, que muitas vezes não aprendem, mas apenas decoram aquilo que o professor ou livro didático apresenta.

No último bloco, que abrange as questões de 9 a 12, trabalhamos com construções. Não houve acertos, a maioria não respondeu os exercícios, atingindo 100% nas atividades 11 e 12. Este fato revela a falta de habilidades dos alunos para trabalhar com construções geométricas devido à ausência de abordagem das mesmas no decorrer dos estudos, um dos fatos que nos leva a esta conclusão é a afirmação de um estudante participante do projeto: "nunca tive uma aula de Geometria que construísse alguma coisa".

Assim, constatamos que o conhecimento prévio dos alunos participantes do projeto está associado ao "ver a figura pronta"; no que se refere a definir ou interpretar os estudantes apresentam dificuldades. Outro fato que percebemos é que os discentes não apresentaram conhecimentos sobre construções, (pois não houve acertos em nenhuma questão que envolvesse construção). É importante ressaltar a alta incidência de questões sem responder, a única respondida por todos foi a terceira, o que demonstra a falta de aprendizado ou a falta da abordagem destes conteúdos nas aulas de Geometria.

Durante a aplicação do teste de sondagem verificamos também a ausência de conhecimento à respeito dos símbolos usados como, por exemplo, ângulo reto, a forma de denotar uma reta. Além disso, o único instrumento[1] de desenho utilizado por aqueles que responderam as questões de construção foi a régua, ainda assim de maneira equivocada, pois traçavam retas aleatórias.

Após as aulas propostas aplicamos o segundo teste com o objetivo de avaliarmos a evolução que os estudantes tiveram no projeto. Na tabela 2 e no gráfico (figura 50) apresentamos os resultados desta análise da evolução.

Apesar de os questionários não possuírem a mesma quantidade de questões, repetimos o primeiro gráfico (figura 49) aqui, a fim de proporcionar uma melhor comparação entre o antes e depois das aulas.

Questão	Acertos (%)	Erros (%)	Não responderam (%)
1	83,3	16,7	0
2	100	0	0
3	75	25	0
4	83,3	8,3	8,3
5	58,3	33,7	8,3
6	83,3	16,7	0

Tabela 2 – Porcentagem de acertos, erros e ausência de respostas das questões tratadas na análise de evolução.

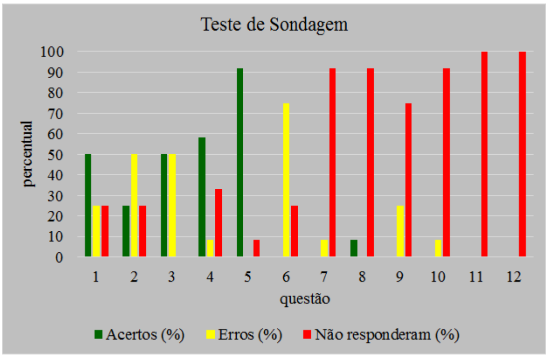


Figura 49 – Teste de sondagem.

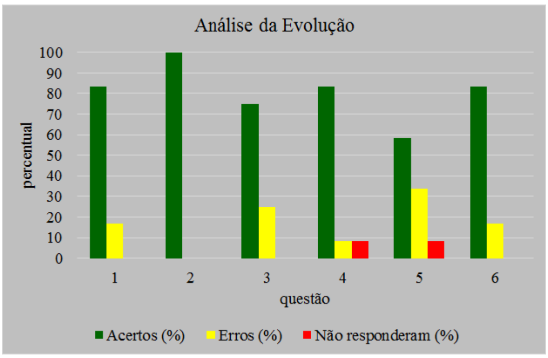


Figura 50 – Análise da evolução.

Neste teste optamos por reduzir o número de exercícios devido ao tempo de aplicação e modificá-los para que o resultado não prejudicasse a análise dos dados. Como o anterior o dividimos em três blocos, porém duas questões em cada. No primeiro, questões 1 e 2, abordamos o reconhecimento através de figuras: na primeira, de retas

[1] Foi solicitado a todos que trouxessem régua, compasso, esquadro e transferidor, além de também levarmos para eventuais empréstimos.

paralelas e perpendiculares através do desenho do quadrado e, na segunda, de mediana do triângulo. No segundo bloco, formado pelas questões 3 e 4, tratamos de definições, do circuncentro e da mediatriz, respectivamente. No último bloco, composto pelas questões 5 e 6, abordamos as construções das mediatrizes dos lados do triângulo e da bissetriz do ângulo, respectivamente.

Percebemos que tivemos um maior número de acertos em todas as questões, e a quantidade de exercícios sem responder diminuiu consideravelmente. Apenas um aluno não respondeu a 4ª questão e outro a 5ª. Quanto ao estudante que não respondeu o exercício 4, ele sabia fazer o desenho, mas não sabia definir.

Um fato relevante sobre as questões 3, 5 e 6 relacionadas, respectivamente à definição de circuncentro, construção de mediatriz do lado do triângulo e bissetriz do ângulo, é que apresentaram respostas erradas, porém estas na realidade estavam incompletas, o que demostra que o aluno avançou. Destacamos também a questão 2 que abordou o reconhecimento da mediana do triângulo ela foi respondida corretamente por todos os alunos.

O primeiro bloco apresentou o maior número de acertos, contudo na primeira questão, praticamente igual a aplicada no primeiro questionário, dois alunos erraram as respostas parcialmente. Acreditamos que estes erros estão mais associados à localização da reta na figura do que o entendimento do conceito.

No segundo bloco a questão 3 apresentou mais erros do que a 4, associamos este fato a permuta entre os nomes dos pontos notáveis que alguns alunos comumente fazem. Eles reconhecem os elementos, sabem que se interceptam em um único ponto, porém trocam bastante o nome deste ponto.

No terceiro bloco, que apresentou o maior número de respostas erradas, durante a aplicação do questionário notamos que os estudantes não sabiam por onde iniciar. Depois de um certo tempo começaram a responder e, em alguns casos, o tempo dedicado a lembrar os passos foi maior do que aquele destinado a traçar. A maneira que alguns usavam a régua e o compasso também revelou a falta de "habilidade" com tais instrumentos. Alguns preferiam mudar a folha de posição do que mudar o instrumento.

Constatamos avanços em todas as questões, mas na realização das construções ainda percebemos algumas dificuldades como, por exemplo, a maneira correta de usar os instrumentos, principalmente o compasso. Alguns alunos permitiam que o instrumento ficasse "solto" o que propiciava erros no traçado, tendo que ser refeito. Quanto ao uso da régua, a maioria não posicionou corretamente sobre o ponto considerado.

É importante ressaltarmos os comentários dos alunos durante a aplicação da análise de evolução como, por exemplo, "até que isso não é difícil" ou "estou conseguindo entender a questão"; o emprego da palavra "entender" refere-se ao fato de saber o conceito que a questão aborda, ainda que ele não soubesse a resposta, mas compreendia o que fora solicitado. Outra mudança que verificamos foi quanto ao interesse em apresentar uma resposta. Analisando a tabela percebemos o baixo número de questões sem resposta. Ao indagar uma estudante porque no teste anterior tinha deixado muitos exercícios sem responder e nesse ter feito todos, ela afirmou: "antes eu não tinha ideia do que estava na questão, agora posso não responder certinho, mas tenho uma noção". Ficou evidente também que a aprendizagem foi mais eficaz quando os conceitos foram associados à figura. Na questão 2 tivemos 100% de acertos; já a definição sem a figura continuou sendo um dos entraves apresentados, apesar do aumento do número das respostas corretas.

3.2 Análise geral da pesquisa

Durante a aplicação do projeto percebemos que os alunos no transcorrer dos estudos nos Ensinos Fundamental e Médio nunca tiveram aula de construções usando régua e compasso. Os poucos que viram usavam os instrumentos de maneira livre e quase sempre os desenhos não tinham compromisso com a veracidade como, por exemplo, ao desenhar o triângulo retângulo usavam apenas a régua e se baseavam nas linhas do caderno para traçar a reta perpendicular. As construções realizadas eram sempre de polígonos ou retas e segmentos. Estes fatos dificultaram as aulas no início, pois tivemos que explicar a maneira correta de usar e, ainda assim, nas primeiras construções tivemos que mostrar como fazer.

Um fato que ficou evidente na aplicação do teste de sondagem e durante as atividades foi a dificuldade de compreender as definições. Alguns alunos sabiam as definições, na realidade decoraram, mas não compreendiam, não associavam ao desenho. A partir do depoimento dos estudantes constatamos que tiveram poucas aulas de Geometria na sua trajetória escolar e estas eram ministradas com excessiva teoria e quase que ausência total de construções. Nas primeiras aulas essa falta de proximidade com os conteúdos atrapalhou o desenvolvimento das atividades, pois era preciso abordar os conceitos tomando cuidado para não serem apenas memorizados. Contudo a proposta não era apresentar as definições, mas permitir ao educando a elaboração dos conceitos. Percebemos entretanto que alguns alunos não tinham "paciência" e queriam que apresentássemos logo as definições. Todavia, mantivemos a ideia inicial procurando não apresentar a definição pronta, mas permitir que a partir das respostas apresentadas aos questionamentos propostos fossem surgindo as definições.

No decorrer das aulas ocorreram algumas inquietações. A primeira das preocupações, já citada anteriormente, foi a falta de habilidade em usar a régua e o compasso, esse fato revelou a total ausência de aulas que abordassem construções, além de demandar mais tempo para as atividades. Isso exigiu que fizéssemos mudança no planejamento inicial do projeto. Outra preocupação foi quanto aos conhecimentos prévios. A maioria dos alunos esqueceu muitos conteúdos básicos trabalhados no Ensino Fundamental. Vale destacar que todos os estudantes envolvidos neste projeto tiveram a disciplina Geometria[2] no ano anterior, com uma aula semanal, porém os conteúdos trabalhados pelos professores não foram iguais. Por já conhecer esta realidade, pois trabalhamos como professor na escola onde o projeto foi aplicado, preferimos começar com os conceitos primitivos.

Outro fator preocupante é a falta de motivação de participar das aulas da disciplina de Geometria ou nas aulas desta dentro da disciplina de Matemática, muitos alunos inseriram o nome na relação para participar do projeto e desistiram antes de começar, alguns por incompatibilidade de horário e outros por achar que as aulas não seriam proveitosas. Segundo os depoimentos ouvidos durante a aplicação do projeto essa falta de motivação está associada à metodologia usada nas aulas da disciplina: "são tradicionais", "apenas apresentam o assunto". A introdução da primeira aula, usando objetos do cotidiano, nos ajudou a motivá-los e a mostrar a utilidade da Geometria em nossa vida. Durante as atividades ouvimos frases como: "me enganei, Geometria é bem interessante".

Apesar da preocupação inicial e de mudarmos o planejamento por conta do ritmo das construções, pudemos apontar uma possível mudança de visão da Geometria ocorrida em alguns educandos que no início do projeto achavam difícil compreender os passos das construções e no decorrer perceberam que era possível realizá-las. Outra modificação surgida foi a compreensão dos conceitos. No transcorrer das aulas pudemos perceber que os alunos aprendiam melhor quando eles participavam da elaboração das definições, sejam através de questionamentos ou das construções.

[2] A Escola oferece a disciplina de Geometria apenas no 2º ano do Ensino Médio. Ela compõe a parte diversificada do currículo, vinculada ao eixo de Matemática e ao de Ciências Naturais. A carga horária é de uma aula semanal.

4 Proposta de Ensino de Construções Geométricas com o uso de Régua e Compasso

Apresentaremos neste capítulo algumas propostas de aulas com o intuito de auxiliar o processo de ensino-aprendizagem das construções geométricas.

Estas propostas estão baseadas nas experiências adquiridas ao longo de nossa vida profissional e também naquelas que vivenciamos ao longo do desenvolvimento deste trabalho junto com os estudantes.

As principais construções que desenvolvemos estão descritas na seção 4.1. e são baseadas nas referências [12] e [17].

4.1 Construções

As construções que propomos para as aulas foram:

1. Traçar a mediatriz de um segmento de reta;
2. Traçar uma reta perpendicular à uma reta dada passando por um ponto também dado;
3. Traçar uma reta paralela à uma reta dada passando por um ponto dado;
4. Traçar a bissetriz de um ângulo dado;
5. Traçar as mediatrizes de um triângulo e encontrar seu circuncentro;
6. Traçar as bissetrizes do triângulo e encontrar seu incentro;
7. Traçar as medianas do triângulo e encontrar seu baricentro;
8. Traçar as alturas relativas aos lados do triângulo e encontrar seu ortocentro;
9. Traçar o círculo circunscrito ao triângulo;
10. Traçar o círculo inscrito ao triângulo;
11. Traçar o círculo circunscrito a um quadrado dado;
12. Traçar o círculo inscrito a um quadrado dado.

A partir daqui vamos descrever os passos de cada construção. O par de figuras em cada construção retrata o desenho inicial (figura à esquerda) e o produto final da construção (figura à direita).

4.1.1 Mediatriz

Construção 4.1. *Traçar a mediatriz de um segmento de reta.*

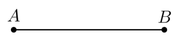


Figura 51 – Segmento AB.

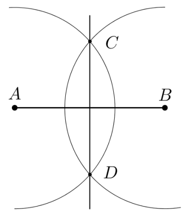


Figura 52 – Mediatriz de AB.

1º passo: com o auxílio de uma régua traçamos um segmento AB qualquer;

2º passo: com o compasso, centro em A e abertura maior que a metade de $\overline{AB}$, traçamos um círculo;

3º passo: realizamos o procedimento anterior, porém agora com o centro em B;

4º passo: marcamos as intercessões dos círculos, com os pontos C e D;

5º passo: traçamos a reta $\overleftrightarrow{CD}$, que é a mediatriz do segmento AB.

Observemos que pelos círculos traçados temos que $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD}$, portanto os pontos C e D equidistam dos pontos A e B o que nos garante que eles pertencem a mediatriz conforme a definição (2.12).

4.1.2 Reta perpendicular

Construção 4.2. *Traçar uma perpendicular à uma reta dada passando por um ponto também dado.*

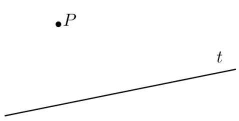


Figura 53 – Reta t e ponto P.

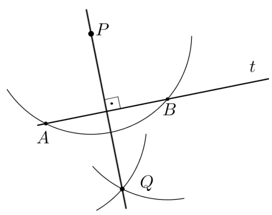


Figura 54 – $\overleftrightarrow{PQ} \perp t$.

1º passo: traçamos a reta t e o ponto P fora da reta;

2º passo: com o centro do compasso em P traçamos um círculo qualquer interceptando a reta t nos pontos A e B;

3º passo: com o mesmo raio traçamos dois círculos com centros nos pontos A e B, respectivamente, determinando em uma das interseções destes círculos o ponto Q;

4º passo: traçamos a reta ligando os pontos P e Q, que é perpendicular à reta t.

Notemos que $\overline{PA} = \overline{PB}$, pelo primeiro círculo traçado e $\overline{QA} = \overline{QB}$, pelo segundo. Daí P e Q são pontos equidistantes de A e B. Logo a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz do segmento AB, o que nos garante que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

4.1.3 Paralela

Construção 4.3. *Traçar uma paralela à uma reta dada passando por um ponto dado.*

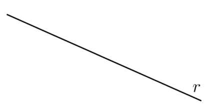


Figura 55 – Reta r e ponto P.

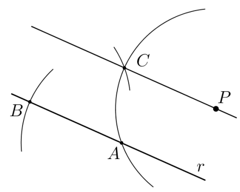


Figura 56 – $\overleftrightarrow{PC}$ // r.

1º passo: com o auxílio de uma régua traçamos uma reta r qualquer e marcamos um ponto P fora da reta dada;

2º passo: com o compasso, centro em P traçamos um círculo que intersecta a reta r em A;

3º passo: com o centro em A e o mesmo raio, traçamos outro círculo que intersecta a reta r em B;

4º passo: com o centro em B e o mesmo raio, traçamos um terceiro círculo que intersecta o primeiro no ponto C;

5º passo: traçamos a reta $\overleftrightarrow{PC}$, que é a reta paralela à reta r passando por P.

Notemos que $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CP}$, pois o raio é o mesmo. Daí a reta $\overleftrightarrow{PC}$ é paralela à reta r.

4.1.4 Bissetriz

Bissetriz!construção

Construção 4.4. *Traçar a bissetriz de um ângulo dado.*

1º passo: traçamos o ângulo $A\widehat{O}B$;

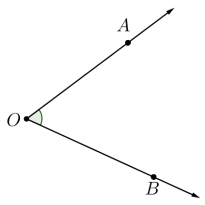


Figura 57 – $A\widehat{O}B$.

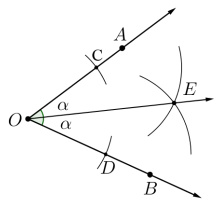


Figura 58 – $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz de $A\widehat{O}B$.

2º passo: com o centro do compasso no vértice O do ângulo e um raio qualquer, traçamos um círculo e marcamos as interseções com os lados, digamos pontos C e D respectivamente;

3º passo: com o centro no ponto C e, em seguida em D, traçamos dois círculos de mesmo raio que se intersectam no ponto E;

4º passo: unindo o ponto E ao vértice do ângulo temos a bissetriz procurada.

Notemos que $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{CE} = \overline{DE}$, ou seja, os pontos O e E equidistam de C e D, o que nos garante que $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.

4.1.5 Mediatrizes de um triângulo

Construção 4.5. *Traçar as mediatrizes de um triângulo e encontrar seu circuncentro.*

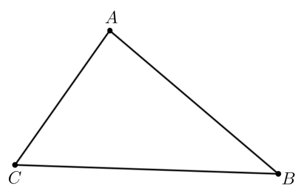


Figura 59 – ΔABC.

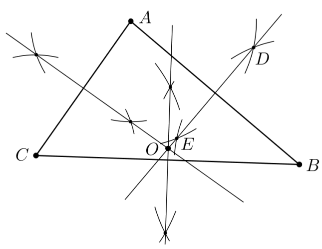


Figura 60 – O é o circuncentro do ΔABC.

1º passo: desenhamos um triângulo ABC qualquer;

2º passo: traçamos a mediatriz do lado AB, conforme a construção (1);

3º passo: realizamos o mesmo procedimento com os lados BC e CA, respectivamente;

4º passo: marcamos o ponto de interseção das mediatrizes, ponto O, que é o circuncentro do triângulo ABC.

Notemos que apenas duas mediatrizes são suficientes para encontrarmos o circuncentro, como vimos na proposição (2.3).

4.1.6 Bissetrizes de um triângulo

Construção 4.6. *Traçar as bissetrizes de um triângulo e encontrar seu incentro.*

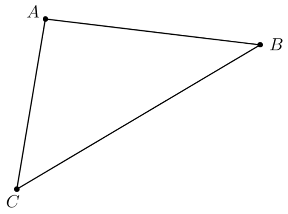


Figura 61 – ΔABC.

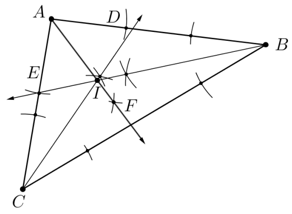


Figura 62 – I é o incentro do ΔABC.

1º passo: desenhamos um triângulo ABC qualquer;

2º passo: traçamos a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$, conforme construção (4);

3º passo: realizamos o mesmo procedimento com os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ respectivamente;

4º passo: marcamos o ponto de interseção das bissetrizes, ponto I, que é o incentro do triângulo ABC.

Notemos que apenas duas bissetrizes são suficientes para encontrarmos o incentro, conforme vimos na definição (2.33).

4.1.7 Medianas de um triângulo

Construção 4.7. *Traçar as medianas do triângulo e encontrar o baricentro.*

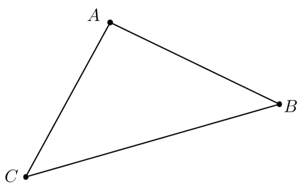


Figura 63 – ΔABC.

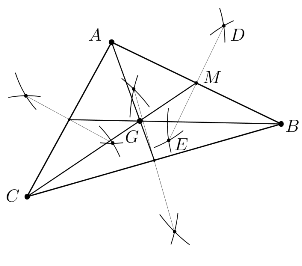


Figura 64 – G é o baricentro do ΔABC.

1º passo: desenhamos um triângulo ABC qualquer;

2º passo: encontramos o ponto médio, digamos M do lado AB. Para isso traçamos a mediatriz do lado AB, conforme construção (1);

3º passo: traçamos o segmento CM, que é a mediana relativa ao lado AB;

4º passo: realizamos o mesmo procedimento para encontrar as medianas relativas ao lado BC e CA, respectivamente;

5º passo: marcamos o ponto de interseção das medianas, digamos G, que é o baricentro do triângulo ABC.

Notemos que duas medianas são suficientes para encontrar o baricentro, de acordo com o que vimos na definição (2.31).

4.1.8 Alturas de um triângulo

Construção 4.8. *Traçar as alturas relativas aos lados do triângulo e encontrar seu ortocentro.*

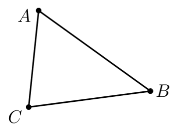


Figura 65 – ΔABC.

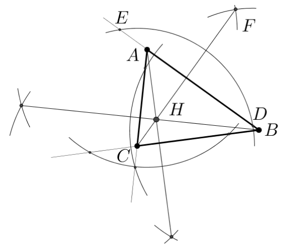


Figura 66 – H é o ortocentro do ΔABC.

1º passo: desenhamos um triângulo ABC qualquer;

2º passo: traçamos a altura relativa ao lado AB, ou seja, traçamos a reta perpendicular ao lado AB passando pelo vértice C. Para isso seguimos o procedimento descrito na construção (2);

3º passo: seguindo os passos da construção (2), traçamos as alturas relativas aos lados BC e CA, respectivamente;

4º passo: marcamos a intercessão das alturas, ponto H, que é o ortocentro do triângulo ABC.

Notemos que duas alturas são suficientes para encontrarmos o ortocentro, de acordo com o que vimos na proposição (2.6).

4.1.9 Círculo circunscrito ao triângulo

Construção 4.9. *Traçar o círculo circunscrito ao triângulo*[1].

Para traçarmos o círculo circunscrito ao triângulo basta encontrarmos o circuncentro do triângulo (construção 5), pois este é o centro do círculo pedido, conforme proposição (2.4).

[1] Atividade proposta aos alunos sem a apresentação dos passos da construção.

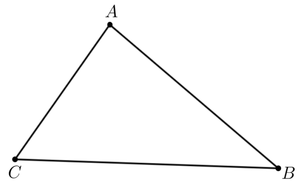


Figura 67 – ΔABC.

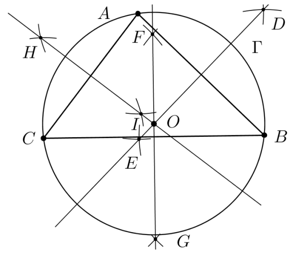


Figura 68 – Círculo Γ circunscrito no ΔABC.

4.1.10 Círculo inscrito ao triângulo

Construção 4.10. *Traçar o círculo inscrito ao triângulo*[2].

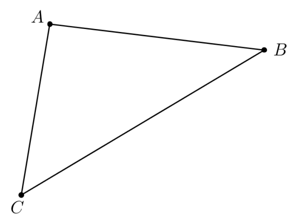


Figura 69 – ΔABC.

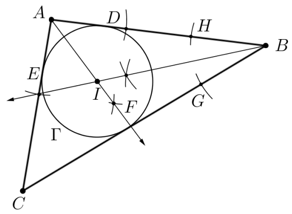


Figura 70 – Círculo Γ inscrito no ΔABC.

Para traçarmos o círculo inscrito ao triângulo basta descobrirmos o incentro (construção 6), visto que este é o centro do círculo solicitado, como vimos na proposição (2.5).

4.1.11 Círculo circunscrito ao quadrado

Construção 4.11. *Traçar o círculo circunscrito a um quadrado dado.*

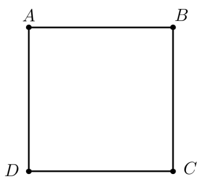


Figura 71 – Quadrado $ABCD$.

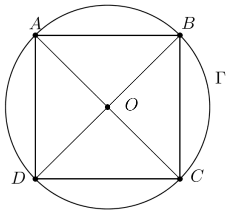


Figura 72 – O é o centro de Γ circunscrito a $ABCD$.

[2] Ver nota anterior.

1º passo: traçamos as diagonais do quadrado $ABCD$ dado;

2º passo: marcamos o ponto de intercessão das diagonais, digamos O, que é o centro do círculo circunscrito ao quadrado $ABCD$.

Com efeito, em todo quadrado as diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios (proposição 2.1) , os lados são congruentes e, consequentemente, as diagonais também são côngruas. Dai, temos $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO}$ que é o raio do círculo circunscrito.

4.1.12 Círculo inscrito ao quadrado

Construção 4.12. *Traçar o círculo inscrito a um quadrado dado.*

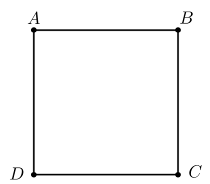


Figura 73 – Quadrado $ABCD$.

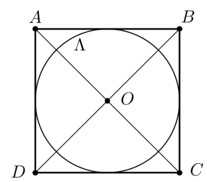


Figura 74 – O é o centro de Λ inscrito a $ABCD$.

Temos duas sugestões de construção: usando as diagonais do quadrado ou usando as mediatrizes dos lados do quadrado.

Para a primeira sugestão:

1º passo: repetimos os passos da construção (11);

2º passo: com o centro do compasso no ponto de interseção das diagonais, ponto O, traçamos o círculo tangente aos lados.

Como os lados do quadrado são congruentes e as diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios, temos que a distância de O aos lados do quadrado são iguais. Daí temos que O é o centro do círculo inscrito ao quadrado.

Usando a segunda opção:

1º passo: traçamos a mediatriz do lado AB (que é a mesma do lado CD);

2º passo: traçamos a mediatriz do lado BC (que é a mesma do lado DA);

3º passo: marcamos o ponto de intercessão das mediatrizes, ponto O, que é o centro do círculo inscrito ao quadrado $ABCD$.

Como o quadrado possui os quatro lados congruentes, temos que as mediatrizes dos lados se interceptam nos pontos médios de ambas. Chamando os pontos médios de AB, BC, CD e DA de M, N, P e Q, respectivamente, temos: $\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OP} = \overline{OQ}$, que é o raio do círculo inscrito ao quadrado.

4.2 Propostas Metodológicas de Aulas.

4.2.1 Aula 1

Conteúdos abordados:

Conceitos primitivos, semirreta, segmento de reta, definição e construção da mediatriz de um segmento; posições relativas de duas retas coplanares;

Objetivos:

Identificar os conceitos fundamentais, reconhecendo-os como parte essencial para a estrutura da geometria; compreender os fundamentos adotados nas construções geométricas usando régua e compasso; classificar retas coplanares, ligando-as às situações do cotidiano; definir e traçar mediatriz de um segmento de reta.

Descrição das atividades:

Nesta primeira atividade apresentamos as noções primitivas. Para isso inicialmente pedimos aos alunos que nos dessem exemplos que dão ideia destes entes, a seguir apresentamos as figuras e fizemos estas representações no quadro, fornecendo mais exemplos. Usamos o mesmo procedimento para reta e semirreta, e só depois disso apresentamos as definições das mesmas.

Nesta aula identificamos as posições de duas retas coplanares. Para isso apresentamos algumas figuras e perguntamos como classificamos tais retas. A partir das respostas demos as definições e solicitamos alguns exemplos do cotidiano. Apresentamos também a definição de ponto médio. Para isso primeiro questionamos aos alunos para que depois construíssemos junto tal definição. Por último, introduzimos o conceito de mediatriz, inicialmente apresentando figuras e depois realizando a construção.

Explicamos como utilizar os instrumentos. A régua utilizada não deveria ser graduada, caso fosse não poderiam usá-la para medir segmentos. Ensinamos o local adequado para segurar o compasso, como também que as linhas auxiliares ao desenho deviam ser traçadas de forma leve para não confundir o desenho inicial ou com o que estávamos buscando na atividade.

Por fim apresentamos os passos e, junto com os alunos, fizemos a construção 1. À medida que fomos traçando no quadro os estudantes deveriam ir realizando em seu caderno e sempre que necessário fomos à cadeira do discente para auxiliá-lo. Com a mediatriz já traçada afirmamos que a mesma é equidistante das extremidades do segmento, pois usamos o mesmo arco.

Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos;

4.2.2 Aula 2

Conteúdo abordado:

Posições relativas de duas retas coplanares; construção de reta paralela e reta perpendicular à uma reta dada passando por um ponto também dado.

Objetivos:

Classificar retas coplanares, ligando-as às situações do cotidiano; construir reta paralela e reta perpendicular à uma reta dada, compreendendo os passos que justificam a construção.

Descrição das atividades:

Inicialmente fizemos uma breve revisão dos conteúdos apresentados na aula anterior e pedimos que fizessem a construção 1 sozinhos. Em seguida, apresentamos os passos para a construção 2, traçar uma reta perpendicular à uma reta dada passando por ponto também dado (neste primeiro momento o ponto será não pertencente à reta). Seguimos a mesma metodologia adotada na aula anterior. Durante a construção evidenciamos que para traçar a perpendicular, inicialmente encontramos dois pontos pertencentes à reta equidistantes do ponto dado, daí traçamos a mediatriz do segmento formado por estes pontos, o que nos garante que é perpendicular à reta dada e passa exatamente no ponto dado.

Em seguida pedimos que traçassem uma perpendicular à uma reta dada passando por um ponto dado pertencente à reta, esperamos que realizassem a construção usando o mesmo procedimento anterior, contudo sem apresentar os passos, mas questionando-os sobre o que fazer na sequência.

Depois passamos para a construção 3, traçar uma paralela a uma reta dada passando por um ponto dado. Começamos mostrando para o aluno que o ponto dado não era pertencente à reta, pois se fosse as retas seriam coincidentes. A construção também foi feita em conjunto. Ressaltamos o fato de usarmos equidistância para encontrarmos a paralela, fato claramente percebido quando usamos o mesmo arco.

Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos.

4.2.3 Aula 3

Conteúdo abordado:

Ângulos, bissetrizes de ângulos, triângulos e quadrados.

Objetivos:

Construir a bissetriz de um ângulo, percebendo as propriedades que justificam a construção; reconhecer triângulos e quadrados, bem como seus elementos e propriedades; compreender os passos adotados para o transporte de segmentos e sua importância na construção de triângulos e quadrados quando conhecemos os lados.

Descrição das atividades:

Iniciamos mostrando desenhos de bissetrizes de ângulos e citando alguns casos em que a usamos como, por exemplo, diagonal do retângulo. A seguir definimos bissetriz e apresentamos a construção 4, traçar a bissetriz de um ângulo dado. Desta vez deixamos que fizessem a construção sozinhos, interferindo apenas quando necessário ou solicitado, para que adquirissem confiança e autonomia para realizar as construções. Ao fim da construção destacamos o fato do último ponto encontrado (o que será ligado ao vértice do ângulo) ser equidistante dos lados do ângulo, justificando que a semirreta traçada é, de fato, a bissetriz.

Indagamos-os sobre o que é um triângulo e solicitamos que desenhassem. Depois mostramos figuras destes com formatos variados e perguntamos se todos eram triângulos. A partir das respostas demos a definição. Usamos a mesma metodologia para apresentar a definição de quadrado, entretanto usamos as figuras em diferentes posições para evitarmos falsas interpretações, tal como: só é quadrado quando o lado está na horizontal e quando os lados aparecem "inclinados" não são.

Apresentamos as seguintes atividades: 1 – Como construir um triângulo conhecendo seus lados? 2 – Como construir um quadrado dado que sabemos quem é seu lado?. Ao término verificamos quais os procedimentos adotados e entre aqueles que construíram analisamos qual(is) o(s) procedimento(s) adequado(s) e juntos estabelecemos o roteiro. Na primeira destacamos o transporte de segmentos, ainda não explorado. Já na segunda enfatizamos a construção de uma perpendicular passando por um ponto dado sobre à reta. Ressaltamos também a inviabilidade ou dificuldade de tais construções utilizando apenas a régua, ainda que graduada.

Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos.

4.2.4 Aula 4

Conteúdo abordado:

Mediatriz e bissetriz de triângulos; circuncentro e incentro.

Objetivos:

Conceituar e identificar mediatriz e bissetriz de triângulos; definir circuncentro e incentro; aplicar os conhecimentos adquiridos sobre construções geométricas para traçar as mediatrizes (bissetrizes) e encontrar o circuncentro (incentro), relacionando os passos realizados às propriedades que justificam as construções.

Descrição das atividades:

Inicialmente pedimos que conceituassem mediatriz, depois questionamos-os sobre as mediatrizes de um triângulo. A partir das respostas mostramos figuras de triângulos com as mediatrizes traçadas, provocando a elaboração da definição sem a necessidade inicial de escrevê-la. Após a compreensão de mediatriz de um triângulo, passamos para a construção 5, traçar as mediatrizes de um triângulo, sem afirmar que as mediatrizes se encontram num mesmo ponto. Deixamos que construíssem sozinhos e ao término questionamos se em todas as construções as mediatrizes se encontraram em um único ponto. Perceberam que estes elementos sempre se interceptam em um ponto e, assim, definimos circuncentro. Destacamos que duas mediatrizes são suficientes para encontrar o circuncentro, que pode estar no interior do triângulo (triângulo acutângulo), no exterior (triângulo obtusângulo) ou sobre o lado (triângulo retângulo).

O procedimento anterior foi adotado na construção 6, traçar as bissetrizes de um triângulo, considerando agora a definição de bissetrizes de um ângulo. Ao final da construção destacamos que a intercessão entre as bissetrizes é chamada de incentro, que o mesmo é sempre interior ao triângulo e que apenas duas bissetrizes são suficientes par encontrá-lo.

Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos.

4.2.5 Aula 5

Conteúdo abordado:

Mediana e altura de triângulos; baricentro e ortocentro.

Objetivos:

Definir e identificar mediana e altura de triângulos; definir baricentro e ortocentro; encontrar o baricentro (ortocentro) de um triângulo, a partir da construção com régua e compasso, estabelecendo relação entre o procedimento adotado com as propriedades referentes ao ponto notável.

Descrição das atividades:

Começamos a aula apresentando alguns triângulos com suas respectivas medianas e demos a definição das mesmas. Em seguida passamos para a construção 7, traçar as medianas de um triângulo. Incitamos os alunos a perceberem, a partir da definição, que para construir as medianas bastava traçar a mediatriz dos lados para achar o ponto médio deste e em seguida uni-lo ao vértice oposto. Durante a construção alguns deles conseguiram visualizar que estes elementos se intersectam em um único ponto e que apenas duas eram suficientes para encontrá-lo. No final identificamos o baricentro e o definimos, destacando que sempre estará no interior do triângulo.

Logo após perguntamos aos educandos o que eles associavam ao ouvir a palavra altura e o que é a altura de um triângulo. Em seguida mostramos triângulos com as respectivas alturas traçadas e apresentamos a definição desta. Passamos para a construção 8, traçar as alturas relativas aos lados do triângulo. Novamente provocamos situações para que percebessem que esta construção baseava-se em traçar uma perpendicular ao lado do triângulo passando pelo vértice oposto. Mostramos os passos àqueles que apresentaram dificuldades. Alguns estudantes comentaram sobre o fato da altura traçada estar no exterior do triângulo. Alguns concluíram também que as três alturas se interceptaram no mesmo ponto e que apenas duas eram necessárias para encontrar este ponto. A partir destas conclusões, definimos ortocentro e destacamos que tal ponto pode estar no interior do triângulo (triângulo acutângulo), no exterior (triângulo obtusângulo) ou sobre o vértice (triângulo retângulo).

Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos.

4.2.6 Aula 6

Conteúdo abordado:

Circunscrição e inscrição do triângulo.

Objetivos:

Encontrar o centro e traçar o círculo circunscrito (inscrito) ao triângulo, justificando os passos através da relação com as propriedades.

Descrição das atividades:

Começamos a aula explicando o conceito de circunscrito e questionando como fariam para circunscrever um triângulo. Alguns alunos afirmaram que o centro devia ser um dos pontos notáveis, aproveitamos para relembrar a definição de cada um destes, o que nos fez perceber que muitos trocavam os nomes dos pontos de interseção. A partir das construções já realizadas nas aulas anteriores pedimos que verificassem qual seria o ponto, assim, identificaram o circuncentro. Então, solicitamos que fizessem a construção 9, traçar o círculo circunscrito ao triângulo. Alguns alunos traçaram apenas duas mediatrizes[3]. Para concluir justificamos que o circuncentro é o centro do círculo circunscrito porque ele é equidistante dos vértices, pelo fato de ser o ponto de interseção das mediatrizes.

Repetimos o procedimento anterior para a construção 10, traçar o círculo inscrito ao triângulo. Eles mesmos verificaram o ponto, identificando o incentro. Também traçaram apenas duas bissetrizes[4]. Desta vez questionamos se sabiam porque o incentro era o centro do círculo inscrito, a resposta mais próxima da justificativa correta foi: "o ponto está na bissetriz e ela está no meio dos lados". Concluímos, aprimorando a justificativa dada.

Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos.

4.2.7 Aula 7

Conteúdo abordado:

Circunscrição e inscrição do quadrado.

Objetivos:

Construir o círculo circunscrito (inscrito) ao quadrado, valendo-se das propriedades do mesmo na elaboração da estratégia.

Descrição das atividades: Para esta aula aproveitamos a segunda atividade proposta na aula 3, que consistia em traçar um quadrado sabendo o lado. Como verificamos que os estudantes apresentaram muitas dificuldades em traçar a perpendicular, optamos por apresentar o quadrado para as construções 11 e 12 já pronto. Para a primeira construção, traçar o círculo circunscrito ao quadrado, os alunos procuraram uma forma de encontrar o centro do quadrado. Foi sugerido por um deles traçar as mediatrizes dos lados. Confirmamos que esta podia ser uma forma de encontrar o centro do círculo e

[3] Para alguns alunos sugerimos traçar as três mediatrizes, pois os traçados não estavam bem feitos.

[4] Pelo mesmo motivo anterior, solicitamos a alguns que traçassem as três bissetrizes.

questionamos se haveria outra. Daí, dissemos que poderíamos usar as diagonais, pois era mais simples de traçar as mediatrizes.

Para a construção 12, traçar o círculo inscrito ao quadrado, apenas a solicitamos e alguns perguntaram se poderiam também usar as diagonais, pedimos que verificassem e, assim, concluíram a construção. Para finalizar justificamos que o ponto de encontro das diagonais é o centro dos dois círculos porque estas se interceptam em seu ponto médio, daí são equidistantes dos vértices (construção 11) e dos lados (construção 12).

Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos.

Considerações Finais

A proposta apresentada neste trabalho teve por objetivo principal provocar mudanças na atual forma de ensino das construções geométricas nas escolas públicas. Acreditamos e notamos que ao propiciarmos condições do aluno relacionar as construções aos conceitos, ao instigá-los a descoberta, o aprendizado acontece de forma significativa. É importante também a utilização de metodologias que permitam uma relação entre o conhecimento prévio e os conteúdos estudados.

O uso de materiais de desenho é um grande aliado para o aprendizado de conceitos e propriedades geométricas. Além se ser motivador para o educando, ainda que alguns tenham dificuldades no início, a ação de construir propicia uma aprendizagem mais prazerosa e o envolvimento do estudante nas atividades é maior, pois ele percebe a relação entre construção e definição.

Não pretendemos que este material seja o único utilizado na sala de aula, nem deve, mas que possa servir como subsídio ou como fonte de pesquisa, para auxiliar os professores que ministram aulas de Desenho Geométrico na elaboração das atividades. Ressaltamos que ele não deve ser utilizado como um "roteiro pronto", no entanto, deve ser visto como sugestão de um caminho. Cabe ao professor a análise da melhor metodologia a ser utilizada, levando em consideração a realidade da turma, conhecimento prévio, habilidades, entre outros. Não trata-se de apenas abordar as construções, como se fosse o único objetivo, contudo elas são um caminho para a aprendizagem da teoria, para a abordagem das definições e entendimento das propriedades.

Ao aproximarmos o educando do processo das construções estamos avizinhando-os dos conceitos, o que evita definições decoradas e não aprendidas. Este processo faz com que o sujeito envolvido não seja apenas observador, mas protagonista na elaboração e execução dos passos que conduzem aos resultados. Assim, é extremamente importante o planejamento das ações do professor para que este material não seja encarado como pronto e sim como um instrumento auxiliar na busca de aulas mais prazerosas e de melhores resultados no processo ensino-aprendizagem de Desenho Geométrico.

A presente proposta pode ser aplicada em turmas do Ensino Médio, do 1º ao 3º ano, todavia é preciso analisar o conhecimento dos estudantes antes de aplicá-la. O teste de sondagem constitui um valioso instrumento para tal fim.

O trabalho com construções geométricas pode e deve ser desenvolvido em todos os anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º anos) e no Ensino Médio. Ainda que não haja a disciplina Desenho Geométrico, podemos abordar as construções geométricas na disciplina de Geometria[5] ou nas aulas de Matemática destinadas aos conteúdos

[5] Para as escolas que possui a disciplina no currículo, como é o caso da escola onde o projeto foi aplicado.

geométricos. Quanto mais cedo o aluno tiver contato com os instrumentos, maior será a facilidade para abordar construções mais complexas. Entretanto, a abordagem das construções só fará sentido se propiciar a aprendizagem dos conceitos e propriedades, para não corrermos o risco de ministrarmos aulas de “desenhos”. Portanto, não podemos pensar na aplicação deste projeto de maneira desassociada dos conteúdos planejados para a série, mas de forma concomitante.

Referências

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana 11ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática; 11).

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática - 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997. v.1.

[4] BRASIL. Senado Federal. Lei n. 4.024, de 20 de dezembro de 1961. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: 1961. Disponível em < http://presrepublica.jusbrasil.com.br/legislacao/129047/lei-de-diretrizes-e-base-de-1961-lei-4024-61 >. Acesso em: 26 fev. 2014.

[5] COSTA, Mário Duarte da. O desenho básico na área tecnológica. In: CONGRESSO NACIONAL DE DESENHO, 2, Florianópolis, 1981. Anais... Florianópolis: UFSC, 1982. p.89-93.

[6] COSTA, Maria Aparecida; LIMA, Sônia Regina dos Reis. Ensino de Prismas: uma análise a partir do livro didático. 2010. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2010. Disponível em: <http://www.unifal-mg.edu.br/matematica/files/file/estudo%20de%20prismas.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2014.

[7] DASSIE, Bruno Alves; ROCHA, José Lourenço da. O ensino de matemática no Brasil nas primeiras décadas do século XX. Caderno Dá Licença, n. 4, ano 5. Niterói: Universidade Federal Fluminense, dez 2003. Disponível em: <http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume4/da_Licena_Bruno.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2014.

[8] GASPAR, Jorge Alexandre dos Santos Gaspar. O Desenho Geométrico como disciplina escolar no Rio de Janeiro: uma história da primeira metade do século XX. Rio de Janeiro. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

[9] GOMES, Maria Laura Magalhães. O ensino da Geometria no Brasil nas últimas décadas: da ausência a presença com prevalência das abordagens experimentais. In: I Seminário de Ensino de Geometria, 2007, Ouro Preto.

[10] GIL, Antonio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2002.

[11] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.. A Matemática do Ensino Médio: Volume 2. 6ª ed. Rio de Janeiro. SBM. 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

[12] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática; 25).

[13] MORELATTI, Maria Raquel Miotto; SOUZA, Luís Henrique Gazeta de. Aprendizagem de conceitos geométricos pelo futuro professor das séries iniciais do Ensino fundamental e as novas tecnologias. Educ.rev., Curitiba, nº. 28, 2006. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttex&pid=S0104-40602006000200017&Ing=pt&nrm=isso >. Acesso em: 12 fev. 2014.

[14] MINAYO, Maria Cecilia de Souza. Pesquisa Social: teoria, método e criatividade. 21 ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

[15] MINAYO, Maria Cecilia de Souza; SANCHES, Odécio. Quantitativo-qualitativo: oposição ou complementaridade? Caderno Saúde Pública, Rio de Janeiro, v. 9, n. 3, p.239-262, jul/set. 1993.

[16] ROCHA, José Lourenço. A Matemática do curso secundário na reforma Francisco Campos. Rio de Janeiro, 2001. 228 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

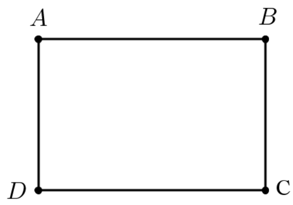
[17] WAGNER, Eduardo. CARNEIRO, José Paulo Q.(col.). Construções Geométricas. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática; 9).

[18] ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 2001a. 206 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

[19] ZUIN, Elenice de Souza Londron. Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental e o Ensino da Construções Geométricas, Entre Outras Considerações. GT 19 - Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2002. Disponível em: <http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CBwQFjAA&url=http%3A%2F%2F25reuniao.anped.org.br%2Fexcedentes25%2Felenicezuint19.rtf&ei=A3urU8O_E8vNsAS5roDIDg&usg=AFQjCNGlakojMOBQlsNTVu0NCLVNgQWw-A&bvm=bv.69837884,d.b2k>. Acesso em: 28 jan. 2014.

Anexo 1 - Teste de sondagem

1. Sabendo que $ABCD$ é um retângulo, em cada item classifique as retas em paralelas ou perpendiculares:

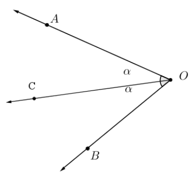
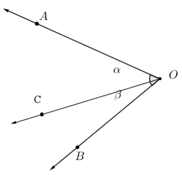
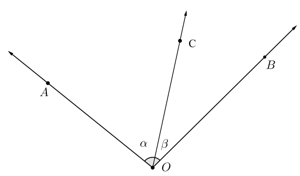


a) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ ________________ b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ ________________

c) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ ________________ d) $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ ________________

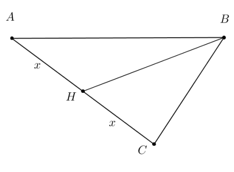
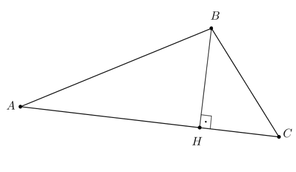
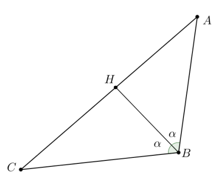
e) $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ ________________ f) $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ ________________

2. Em qual dos ângulos seguintes a semirreta $\overrightarrow{OC}$ representa a bissetriz do ângulo formado pelas semirretas a e b?

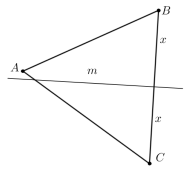
a) ( ) b) ( ) c) ( )

3. Em qual dos triângulos o segmento BH representa a altura do triangulo ABC relativa ao vértice B?

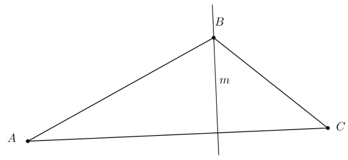




a) ( ) b) ( ) c) ( )

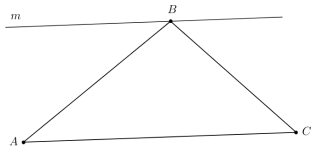
4. Em qual triângulo abaixo a reta m representa a mediatriz do lado BC do triângulo ABC?



a) ( )

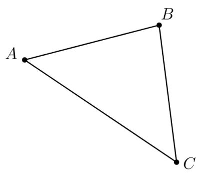


b) ( )

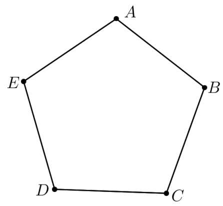


c) ( )

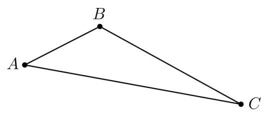
5. Marque um X nos triângulos:



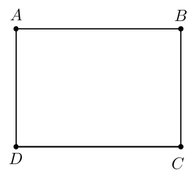
( )



( )



( )



( )

6. O centro do círculo inscrito ao triângulo é:

   a) o incentro, que é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo;

   b) o ortocentro, que é o ponto de interseção das alturas do triângulo;

   c) o baricentro que é o ponto de interseção das medianas do triângulo;

   d) o circuncentro que é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo.

7. Como chama-se o ponto de encontro das medianas de um triângulo?

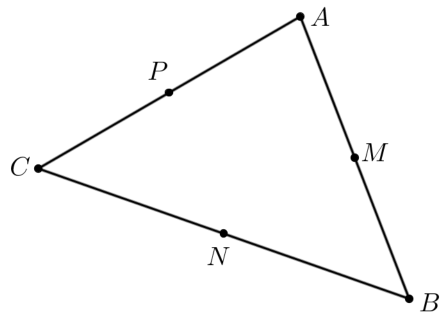
   ____

8. Defina retas perpendiculares.

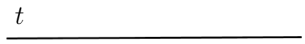
   ____

   ____

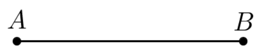
9. No triângulo ABC abaixo trace as medianas, sabendo que M, N e P são os pontos médios de AB, BC e CA, respectivamente (pode usar qualquer instrumento de desenho).



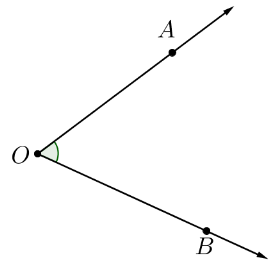
10. Dada a reta t trace uma reta perpendicular a esta reta (pode usar qualquer instrumento de desenho).



11. Trace a mediatriz do segmento AB (pode usar qualquer instrumento de desenho).

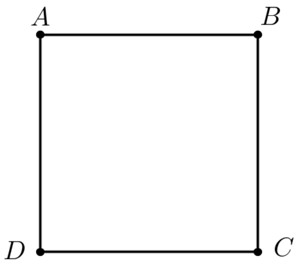


12. Trace a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$ abaixo (pode usar qualquer instrumento de desenho).


A
O
B

Anexo 2 - Análise da Evolução

1. Sabendo que $ABCD$ é um quadrado, em cada item classifique as retas em paralelas ou perpendiculares:

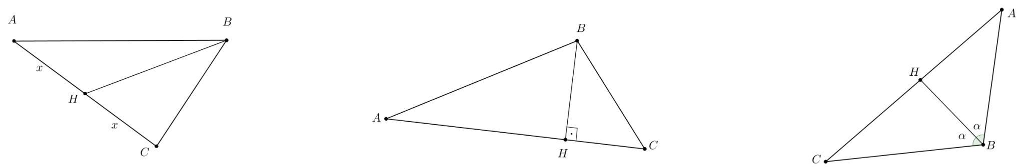


a) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ ________________ b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ ________________

c) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ ________________ d) $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ ________________

e) $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ ________________ f) $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ ________________

2. Em qual dos triângulos o segmento BH representa a mediana relativa ao lado AC do triângulo ABC?



a) ( ) b) ( ) c) ( )

3. O centro do círculo circunscrito ao triângulo é:

a) o incentro, que é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo;

b) o ortocentro, que é o ponto de interseção das alturas do triângulo;

c) o baricentro que é o ponto de interseção das medianas do triângulo;

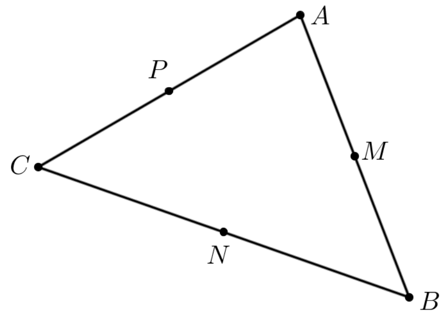
d) o circuncentro que é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo.

4. Defina mediatriz de um segmento de reta.

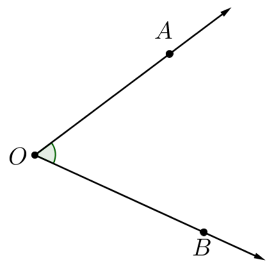
____

____

5. No triângulo ABC abaixo trace as mediatrizes e encontre o incentro, sabendo que M, N e P são os respectivos pontos médios dos lados AB, BC e CA.



6. Usando régua e compasso trace a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$ abaixo:



Índice