

PROGRAMAÇÃO DA GRADE DE HORÁRIO EM ESCOLAS DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Vânia Nobre de Sousa

UniSoma Computação Ltda.
Campinas – SP
vania@unisoma.com.br

Antônio Carlos Moretti*

IMECC
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Campinas – SP – Brasil
moretti@ime.unicamp.br

Valéria Abrão de Podestá

IMECC
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Campinas – SP – Brasil
valeria@ime.unicamp.br

* *Corresponding author* / autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 04/2007; aceito em 09/2008 após 1 revisão
Received April 2007; accepted September 2008 after one revision

Resumo

A programação da grade de horários em escolas de ensino fundamental e médio, também conhecido como problema turma-professor (PTP), consiste em fixar uma seqüência de agendamentos de aulas envolvendo professores e grupos de estudantes (que possuem um mesmo currículo de disciplinas) em um período pré-determinado (tipicamente uma semana), sujeito a requisitos didáticos, físicos e organizacionais. É um problema combinatorial NP-completo e é geralmente resolvido através da aplicação de procedimentos heurísticos. Neste trabalho, apresentamos um procedimento de Busca Tabu associado a uma Busca Local Aleatória e duas formulações matemáticas. O procedimento proposto foi experimentado com sucesso em escolas públicas brasileiras.

Palavras-chave: agendamento em escolas; meta-heurísticas; otimização combinatoria.

Abstract

The school timetabling problem (STP) consists in fixing a sequence of meetings between teachers and students in a prefixed period of time (typically a week), satisfying organizational, pedagogical and personal constraints. STP is a NP-complete problem and is usually tackled using heuristic methods. In this work we considered typical characteristics of Brazilian public schools. We presented a Tabu Search procedure associated with a Randomized Local Search to solve this problem and two mathematical formulations. The implementation of the procedure has been successfully experimented in some Brazilian public schools.

Keywords: school timetabling; meta-heuristics; combinatorial optimization.

1. Introdução

A programação da grade de horários em escolas de ensino fundamental e médio, também conhecido como problema turma-professor (PTP), consiste em fixar uma seqüência de agendamentos de aulas envolvendo professores e grupos de estudantes (que possuem um mesmo currículo de disciplinas) em um período pré-determinado (tipicamente uma semana). Esta seqüência de agendamentos deve satisfazer um conjunto de requisitos didáticos, físicos e organizacionais.

Há uma infinidade de variações do PTP. Isto se deve ao fato de que em países, regiões de um país, ou até mesmo, instituições de ensino de uma mesma região adotam critérios educacionais diferenciados entre si. Devido a esta característica, o PTP é um problema de difícil generalização. Resolvê-lo manualmente é uma tarefa difícil e que pode durar dias ou até semanas para sua conclusão, podendo gerar resultados insatisfatórios com relação a diversos requisitos. Muitas vezes, professores reclamam por um mínimo de aulas duplas para algumas disciplinas e, principalmente, por uma grade de horário com menos períodos vagos entre uma aula e outra. Além disso, dependendo do número de grupos de estudantes e professores envolvidos no problema, ele se torna manualmente intratável. Por estes motivos, uma atenção considerável tem sido devotada à solução automática do PTP ao longo dos últimos anos. Começando com o trabalho de Gotlieb (1963), muitos trabalhos para a resolução do PTP já foram realizados, por exemplo, Shaerf (1996), Colorni *et al.* (1998), etc.

Por ser um problema NP-completo, isto é, não se conhece algoritmos polinomiais para resolvê-lo na maioria das situações em que se apresenta (Even *et al.*, 1976), a tratabilidade do PTP por técnicas exatas de otimização demanda muito tempo e esforço computacional. Então, muitos procedimentos heurísticos têm sido considerados para se obter uma solução viável satisfatória em um tempo computacional razoável. Além disso, outra vantagem das técnicas de busca local é que elas iniciam a busca de uma grade de horário inicial, permitindo a manutenção de uma grade de horário. Por exemplo, se um professor é substituído por outro, requisitos relacionados com a satisfação dos professores devem ser atualizados. Utilizando técnicas de busca local, a grade de horário anterior pode ser utilizada como solução inicial para a obtenção de uma nova solução. Tal processo geralmente obtém uma boa solução para o novo problema em um tempo menor.

Dentre as abordagens e técnicas de solução de um PTP, podem ser destacadas: heurísticas diretas (Junginger, 1986), redução ao problema de coloração de um grafo (Neufeld & Tartar, 1974; de Werra, 1997), fluxo em redes (Ostermann & de Werra, 1983) e as meta-heurísticas Busca Tabu (Costa, 1994; Schaerf, 1996), *Simulated Annealing* (Abramson, 1991), Algoritmos Genéticos (Colorni *et al.*, 1998; Filho *et al.*, 2001), entre outras.

Observando as vantagens mencionadas ao se utilizar técnicas de busca local para resolver o PTP, desenvolvemos o procedimento heurístico BLA+BT envolvendo uma Busca Local e uma Busca Tabu. Também apresentamos duas formulações matemáticas para o problema PTP encontrado em escolas públicas estaduais de ensino fundamental e médio e comparamos as soluções obtidas através dos métodos propostos.

Descrevemos na Seção 2 as características do problema abordado. Na Seção 3 apresentamos dois modelos matemáticos. Já a metodologia aplicada na resolução do problema encontra-se detalhada na Seção 4. Os resultados computacionais e comparações entre os métodos aplicados para duas escolas estaduais de Campinas (São Paulo) estão descritos na Seção 5. E, finalmente, na Seção 6 apresentamos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

2. Descrição do Problema

O problema turma-professor (PTP) abordado trata do agendamento semanal do encontro entre professores e turmas. Chamamos este encontro de *aula*. A grade de horário de um turno (manhã, tarde ou noite) destas instituições é constituída por ND dias de aula por semana (geralmente de segunda à sexta-feira) e cada dia d possuindo NH_d horários de aula, o que define um total de $NH_{tot} = \sum_{d=1}^{ND} NH_d$ horários de aula por semana em um turno. Chamamos de um *horário de aula* h a unidade de tempo de uma aula. Há um conjunto P de professores que lecionam para um conjunto T de turmas, onde uma *turma* constitui um conjunto disjuncto de alunos que possuem um mesmo currículo de disciplinas. As aulas para uma turma t ocorrem em uma única sala. Desta forma, estas salas são pré-determinadas no início de cada ano pela coordenadoria e, portanto, a associação turma-sala não precisa ser considerada no problema de agendamento das aulas. A associação dos professores às turmas e a carga didática do professor também são pré-definidos pela coordenadoria e são informados pela matriz de requerimentos $R_{p \times T}$, onde cada entrada R_{pt} indica o número de aulas que o professor p tem que lecionar para turma t .

As turmas estão sempre disponíveis em seus turnos de aula – uma turma possui suas aulas em somente um turno – e precisam ter suas grades de horário completamente preenchidas, enquanto que os professores precisam indicar os horários nos quais eles podem ou não lecionar (estão disponíveis ou não).

Os professores podem lecionar mais de uma disciplina por turno. Contudo, uma turma t tem todas as aulas de uma determinada disciplina ministradas por um único professor p . Por exemplo, não pode haver mais de um professor lecionando Matemática para uma mesma turma t .

As aulas de Educação Física (EF) devem ocorrer em quadras de esporte. As escolas possuem um número limitado NQ de quadras de esporte e, quando há mais de NQ aulas desta disciplina em um determinado horário de aula, estas aulas excedentes são ministradas em sala de aula como aulas teóricas.

Deste modo, este problema deve satisfazer as seguintes restrições essenciais:

1. Cada professor deve dar o número correto de aulas que lhe é requerido;
2. A cada turma deve ser associado somente um professor por horário de aula;
3. A cada professor deve ser associada, no máximo, uma turma por horário de aula, respeitando-se a disponibilidade deste professor;
4. Por motivos pedagógicos, deve haver no máximo duas aulas de um mesmo professor para uma mesma turma no período de um dia.

Também se deseja que a grade de horários apresente as seguintes características não-essenciais:

5. Os dias de aulas do professor p para turma t devem ser alternados, ou seja, se no dia d a turma t tem aula do professor p então o próximo dia não deve ter;
6. Evitar “janelas” (horários de aula sem atividade entre uma aula e outra) na grade horária dos professores, no período de um dia;
7. Ter no máximo NQ professores de Educação Física por horário de aula, onde NQ é o número de quadras de esporte que a escola possui;

8. Evitar que duas aulas de uma mesma disciplina para uma turma t no dia d sejam separadas por aulas de outras disciplinas;
9. Atender um número mínimo de aulas duplas requeridas pelo professor p para turma t .
10. Tornar a grade do professor a mais compacta possível, ou seja, fazer com que o professor tenha que comparecer na escola o menor número de dias possível.

3. Formulação Matemática

Nesta seção apresentamos duas modelagens matemáticas que consideram o agendamento das aulas de um único turno. Uma é baseada em variáveis binárias cujos valores determinam o agendamento de uma aula unitária e a outra formulação, no agendamento de aulas duplas.

Temos um *agendamento de aula dupla* de um professor p para uma turma t quando há duas aulas agendadas em horários de aula consecutivos em um mesmo dia da semana e, um *agendamento de aula unitária*, quando há somente uma. A seguir apresentamos os parâmetros utilizados nos dois modelos:

P : conjunto com $NP = |P|$ professores.

EF : conjunto de todos os professores de Educação Física.

T : conjunto com $NT = |T|$ turmas.

H_{tot} : conjunto de todos os horários de aula da semana.

H_d : conjunto de todos os horários de aula de um dia d da semana.

NH_d : número de horários de aula em um dia d .

D : conjunto de todos os dias de aula por semana.

ND : número de dias de aula por semana.

NQ : número de quadras de esporte.

W_{pdh} : não-preferência do professor p por horário de aula h do dia d .

R_{pt} : número de aulas para a turma t que o professor p tem que atender.

$DISP_{pdh}$: disponibilidade do professor p no horário de aula h do dia d , onde $DISP_{pdh} = 1$ se o professor está disponível para lecionar e $DISP_{pdh} = 0$ caso contrário.

D_{pt} : número mínimo de aulas duplas do professor p para turma t .

3.1 Modelo Matemático (1)

O modelo matemático apresentado nesta seção é baseado no agendamento de aulas unitárias, dado pela variável binária x , onde $x_{pindh} = 1$ quando um professor p leciona para uma turma t no horário de aula h do dia da semana d e $x_{pindh} = 0$ caso contrário.

Considere as seguintes variáveis:

z_{ptd} : 1 se o professor p dá aula para turma t no dia da semana d , 0 caso contrário;

$w_{pindh(h+1)}$: 1 se o professor p dá aula para a turma t nos horários de aula h e $h+1$ do dia d , 0 caso contrário;

- y_{pd} : 1 se o professor p tem aula agendada no dia d , 0 caso contrário;
- $b2_{ptd}$: 1 se houver mais de uma aula (p,t) no dia da semana d e que não são consecutivas, 0 caso contrário;
- u_{pd} : h se $h \in \{1, \dots, NH_d\}$ for o último horário de aula agendado para o professor p no dia d , 0 caso contrário;
- v_{pd} : h se $h \in \{1, \dots, NH_d\}$ for o horário de aula da primeira aula agendada para o professor p no dia d , 0 caso contrário;
- $b1_{pd}$: n se $n \leq NH_d - 2$ for o número de aulas vagas entre duas aulas lecionadas por p em d e 0 se não houver aulas vagas;
- $D1_{dh} \geq 0$: número de vezes em que mais de NQ aulas de Educação Física são agendados para o mesmo horário de aula h do dia d ;
- $D2_{ptd} \geq 0$: número de vezes em que o requerimento de aulas em dias alternados para o par (p,t) não é satisfeito;
- $D3_{pt} \geq 0$: número de vezes em que o requerimento de aulas duplas para um par (p,t) não é atendido.

3.1.1 Restrições

A seguir descrevemos como modelamos cada um dos requisitos apresentados na Seção 2.

1. Cada professor p deve ministrar um dado número de aulas semanais para uma dada turma t :

$$\sum_{d=1}^{ND} \sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh} = R_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \quad (1)$$

2. Devemos ter em cada horário h do dia da semana d um único professor p associado a uma turma t :

$$\sum_{p \in P} x_{ptdh} \leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D, h \in H_d \quad (2)$$

3. Devemos ter em cada horário de aula h do dia da semana d uma única turma t associada a um professor p , se este professor estiver disponível:

$$\sum_{t \in T} x_{ptdh} \leq DISP_{pdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H_d \quad (3)$$

4. Devem ser agendadas no máximo duas aulas de um mesmo professor p para uma mesma turma t em um dia da semana d :

$$\sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh} \leq 2 \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D \quad (4)$$

5. Para introduzirmos a preferência de se ter no máximo NQ professores de Educação Física (EF) por horário de aula, permitindo que todas as aulas de EF sejam ministradas na quadra de esportes, avaliamos as restrições:

$$\sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} x_{ptdh} - NQ \leq D1_{dh} \quad \forall d \in D, h \in H_d \quad (5)$$

6. Para verificarmos se a turma t tem aula do professor p no dia d avaliamos:

$$\sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh} \geq z_{ptd} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D \quad (6)$$

$$\sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh} / NH_d \leq z_{ptd} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D \quad (7)$$

7. Avaliamos as seguintes restrições para verificarmos quando os dias de ocorrência das aulas (p,t) não são alternados:

$$z_{ptd} + z_{pt(d+1)} - 1 \leq D2_{ptd} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in \{1, \dots, ND-1\} \quad (8)$$

8. Para avaliarmos o número de vezes em que a restrição de se obter um determinado número de aulas duplas para o par (p,t) é violada, verificamos a seguinte restrição não-linear (Souza, 2000):

$$D_{pt} - \sum_{d=1}^{NH} \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} x_{ptd(h+1)} \leq D3_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \quad (9)$$

Porém, esta restrição pode ser linearizada pelo conjunto de restrições:

$$x_{ptdh} + x_{ptd(h+1)} - w_{ptdh(h+1)} \leq 1 \quad \forall p \in P, t \in T, h \in \{1, \dots, NH_d - 1\} \quad (10)$$

$$x_{ptd(h+1)} - w_{ptdh(h+1)} \geq 0 \quad \forall p \in P, t \in T, h \in \{1, \dots, NH_d - 1\} \quad (11)$$

$$x_{ptdh} - w_{ptdh(h+1)} \geq 0 \quad \forall p \in P, t \in T, h \in \{1, \dots, NH_d - 1\} \quad (12)$$

$$D_{pt} - \sum_{d=1}^{ND} \sum_{h=1}^{NH_d} w_{ptdh(h+1)} \leq D3_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \quad (13)$$

9. Avaliamos o último horário de aula de um professor p no dia d por:

$$u_{pd} \geq h \sum_{t \in T} x_{ptdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H_d \quad (14)$$

10. Verificamos se um professor p leciona em um dia d por:

$$\sum_{t \in T} z_{ptd} \geq y_{pd} \quad \forall p \in P, d \in D \quad (15)$$

$$\sum_{t \in T} z_{ptd} / NH_d \leq y_{pd} \quad \forall p \in P, d \in D \quad (16)$$

11. O número de aulas vagas entre duas aulas na grade de um professor p é dado por (Souza, 2000):

$$b1_{pd} = u_{pd} - v_{pd} + y_{pd} - \sum_{t \in T} \sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh} \quad \forall p \in P, d \in D \quad (17)$$

12. Avaliamos o primeiro horário de aula de um professor p no dia d por:

$$v_{pd} \leq (NH_d + 1)y_{pd} - (NH_d + 1 - h) \sum_{t \in T} x_{ptdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H_d \quad (18)$$

13. Podemos verificar se existe duas ou mais aulas para o par (p,t) em d que são separadas por aulas de outros professores pela restrição não-linear:

$$\left(\sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh}\right) - \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh}x_{ptd(h+1)} - 1 \leq b2_{ptd} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D \quad (19)$$

Mas, como já visto anteriormente, pode ser linearizada por restrições do tipo (10), (11) e (12) em conjunto com:

$$b2_{ptd} \geq \left(\sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh}\right) - \left(\sum_{h=1}^{NH_d-1} w_{ptd(h+1)}\right) - 1 \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D \quad (20)$$

3.1.2 Função Objetivo

Seja Q uma dada grade de horários cujas características obedecem às restrições descritas na Seção 3.1.1. A função objetivo pode ser descrita de uma forma hierarquizada como,

$$\text{Min} \sum_{i=1}^7 \alpha_i f_i(Q) \quad (21)$$

onde α_i é o peso que indica a importância de cada parcela f_i . As parcelas são explicadas a seguir:

1. Consideramos a não-preferência dos professores pelos horários de aula disponíveis através da parcela:

$$f_1(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} \sum_{h=1}^{NH_d} W_{pdh} x_{ptdh} \quad (22)$$

2. O número de vezes que as preferências expressas em (5) são violadas é dado por:

$$f_2(Q) = \sum_{d \in D} \sum_{h \in H} D1_{dh} \quad (23)$$

3. O número de vezes em que o professor p leciona t em dias consecutivos é verificado por:

$$f_3(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} D2_{ptd} \quad (24)$$

4. O número de dias que o professor p deve comparecer na escola para lecionar é dado por:

$$f_4(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{d \in D} y_{pd} \quad (25)$$

5. A diferença entre o número mínimo de aulas duplas requisitadas e as que realmente foram agendadas é dado por:

$$f_5(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} D3_{pt} \quad (26)$$

6. O número de aulas vagas entre duas aulas nas grades de cada professor p é dado por:

$$f_6(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{d \in D} b1_{pd} \quad (27)$$

7. O número de dias em que há mais de uma aula (p,t) agendada em d e não são consecutivas:

$$f_7(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} b2_{ptd} \quad (28)$$

3.2 Modelo Matemático (2)

O modelo matemático apresentado nesta seção é baseado no agendamento de aulas unitárias e duplas (duas aulas para um par (p,t) que ocorrem em horários de aula consecutivos, em um mesmo dia). Várias restrições são diretamente satisfeitas admitindo-se somente um agendamento unitário ou um agendamento duplo por dia, como a de se obter um número mínimo de aulas duplas, e a modelagem de outras pode ser verificada com maior facilidade, diminuindo o número de variáveis auxiliares.

Considere as seguintes variáveis:

x_{ptdh} : 1 se o professor p dá aula dupla para a turma t iniciando no horário de aula h do dia d , 0 caso contrário;

y_{ptdh} : 1 se o professor p dá aula simples (unitária) para turma t no horário de aula h do dia d , 0 caso contrário;

u_{pd} : h se $h \in \{1, \dots, NH_d\}$ for o último horário de aula do professor p no dia d e 0 caso contrário;

v_{pd} : h se $h \in \{1, \dots, NH_d\}$ for o horário de aula da primeira aula agendada para o professor p no dia d , 0 caso contrário;

z_{pd} : 1 se o professor p tem aula agendada no dia d , 0 caso contrário;

b_{pd} : n se $n \leq NH_d - 2$ for o número de horários de aula sem aula agendada entre duas aulas lecionadas por p em d , 0 se não houver aulas vagas;

$D1_{dh} \geq 0$: número de vezes em que mais de NQ aulas de Educação Física são agendadas para o mesmo horário de aula h do dia d ;

$D2_{ptd} \geq 0$: número de vezes em que o requerimento de aulas em dias alternados para o par (p,t) não é satisfeito.

Na próxima seção mostramos a modelagem matemática.

3.2.1 Restrições

Considere o parâmetro abaixo:

$S_{pt} = R_{pt} - 2D_{pt}$: número de aulas simples (unitárias).

Mostramos a seguir como modelamos cada uma das características consideradas:

1. Cada professor p deve ministrar um dado número de aulas semanais para uma dada turma t :

$$\sum_{d \in D} \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} = D_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \quad (29)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} = S_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \quad (30)$$

2. Devemos ter em cada horário de aula h do dia da semana d um único professor p associado a uma turma t :

$$\sum_{p \in P} x_{ptd1} + \sum_{p \in P} y_{ptd1} \leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D \quad (31)$$

$$\sum_{p \in P} x_{ptd(h-1)} + \sum_{p \in P} x_{ptdh} + \sum_{p \in P} y_{ptdh} \leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D, h \in \{2, \dots, NH_d - 1\} \quad (32)$$

$$\sum_{p \in P} x_{ptd(NH_d-1)} + \sum_{p \in P} y_{ptd(NH_d)} \leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D \quad (33)$$

3. Devemos ter em cada horário de aula h do dia da semana d uma única turma t associada a um professor p :

$$\sum_{t \in T} x_{ptd1} + \sum_{t \in T} y_{ptd1} \leq DISP_{pd1} \quad \forall p \in P, d \in D \quad (34)$$

$$\sum_{t \in T} x_{ptd(h-1)} + \sum_{t \in T} x_{ptdh} + \sum_{t \in T} y_{ptdh} \leq DISP_{pdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in \{2, \dots, NH_d - 1\} \quad (35)$$

$$\sum_{t \in T} x_{ptd(NH_d-1)} + \sum_{t \in T} y_{ptd(NH_d)} \leq DISP_{pd(NH_d)} \quad \forall p \in P, d \in D \quad (36)$$

4. Devem ser agendadas no máximo duas aulas de um mesmo professor p para uma mesma turma t em um dia da semana d ;

$$\sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} \leq 1 \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D \quad (37)$$

5. Para introduzirmos a preferência de se ter no máximo NQ professores de Educação Física (EF) por horário de aula, permitindo que todas as aulas de EF sejam ministradas na quadra de esportes, avaliamos as restrições:

$$\sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} x_{ptd1} + \sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} y_{ptd1} - NQ \leq D1_{d1} \quad \forall d \in D \quad (38)$$

$$\sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} x_{ptd(h-1)} + \sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} x_{ptdh} + \sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} y_{ptdh} - NQ \leq D1_{dh} \quad \forall d \in D, h \in \{2, \dots, NH_d - 1\} \quad (39)$$

$$\sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} x_{ptd(NH_d-1)} + \sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} y_{ptd(NH_d)} - NQ \leq D1_{d(NH_d)} \quad \forall d \in D \quad (40)$$

6. Para satisfazer, o máximo possível, a preferência de se alternar os dias de aula de um mesmo professor p para uma determinada turma t , consideramos:

$$\sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{pt(d+1)h} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{pt(d+1)h} - 1 \leq D2_{ptd} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in \{1, \dots, ND-1\} \quad (41)$$

7. Avaliamos z_{pd} através das restrições:

$$\sum_{t \in T} \left\{ \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} \right\} \geq z_{pd} \quad \forall p \in P, d \in D \quad (42)$$

$$\sum_{t \in T} \left\{ \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} \right\} / M \leq z_{pd} \quad \forall p \in P, d \in D \quad (43)$$

onde M é um número maior ou igual que NH_d .

8. Avaliamos u_{pd} através das restrições:

$$u_{pd} \geq (h+1) \sum_{t \in T} x_{ptdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in \{1, \dots, NH_d - 1\} \quad (44)$$

$$u_{pd} \geq (h) \sum_{t \in T} y_{ptdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H_d \quad (45)$$

9. Avaliamos v_{pd} através das restrições:

$$v_{pd} \leq (NH_d + 1)z_{pd} - (NH_d + 1 - h) \sum_{t \in T} x_{ptdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in \{1, \dots, NH_d - 1\} \quad (46)$$

$$v_{pd} \leq (NH_d + 1)z_{pd} - (NH_d + 1 - h) \sum_{t \in T} y_{ptdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H_d \quad (47)$$

10. O número de aulas vagas entre duas aulas lecionadas para um professor p no dia d é dado por:

$$b_{pd} = u_{pd} - v_{pd} + z_{pd} - \sum_{t \in T} \left\{ 2 \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} \right\} \quad \forall p \in P, d \in D \quad (48)$$

3.2.2 Função Objetivo

Seja Q uma dada grade de horários cujas características obedecem às restrições descritas na Seção 3.2.1. A função objetivo pode ser descrita de uma forma hierarquizada como,

$$\text{Min} \sum_{i=1}^5 \beta_i f_i(Q) \quad (49)$$

onde β_i é o peso que indica a importância de cada parcela f_i . As parcelas são explicadas a seguir:

1. Consideramos a não-preferência dos professores pelos horários de aula disponíveis através da parcela:

$$f_1(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} \sum_{h=1}^{NH_d-1} (W_{pdh} + W_{pd(h+1)}) x_{ptdh} + \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} \sum_{h=1}^{NH_d} W_{pdh} y_{ptdh} \quad (50)$$

2. O número de vezes que as preferências expressadas em (38), (39) e (40) são violadas é dado por:

$$f_2(Q) = \sum_{d \in D} \sum_{h \in H_d} D1_{dh} \quad (51)$$

3. O número de vezes que as preferências expressadas em (41) são violadas é dado por:

$$f_3(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} D2_{ptd} \quad (52)$$

4. O número total de janelas nas grades de horário dos professores é dado por:

$$f_4(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{d \in D} b_{pd} \quad (53)$$

5. A soma do número de dias que cada professor trabalha na instituição é dada por:

$$f_5(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{d \in D} z_{pd} \quad (54)$$

4. Metodologia usada na resolução do problema

A utilização de técnicas heurísticas para tratar problemas de geração de grades de horário é justificada considerando-se que este é um problema NP-completo, o qual seria resolvido por métodos exatos de otimização em um tempo de processamento computacional razoável somente para problemas pequenos, ou seja com um número pequeno de professores, turmas e horários de aula (por exemplo, 3 turmas, 14 professores e 4 horários de aula por dia). Além disso, as técnicas de busca local iniciam o processo de busca de uma grade de horário inicial, permitindo a manutenção de uma grade de horário.

Assim sendo, apresentamos nesta seção os procedimentos heurísticos que foram aplicados para resolver o problema turma-professor com as características citadas na Seção 2.

4.1 Busca Local Aleatória e Busca Tabu

As técnicas de Busca Local são baseadas na noção de *vizinhança*. Considere um problema de otimização, onde S é seu espaço de busca e f sua função objetivo a ser minimizada. A função N , que depende da estrutura do problema, associa a cada solução factível $s \in S$ sua vizinhança $N(s) \subseteq S$. Cada solução $s' \in N(s)$ é chamada de *vizinha de s* e é alcançada de s através de um *movimento*.

De forma geral, uma técnica de busca local parte de uma solução inicial s_0 e pesquisa o espaço de busca, avaliando soluções vizinhas.

Dentre as técnicas de busca local, temos o *Método de Descida*. Neste método, a cada iteração, analisa-se toda a vizinhança $N(s)$ de uma solução s e escolhe-se a melhor solução $s' \in N(s)$ como candidata para a próxima iteração. A solução s' tem a sua vizinhança pesquisada na próxima iteração se $f(s') < f(s)$. Assim sendo, o método pára ao ser encontrado um mínimo local s^* , ou seja $f(s^*) < f(s)$ para todo $s \in N(s^*)$. Por outro lado, no procedimento Busca Local Aleatória (BLA), analisa-se uma vizinhança $\bar{N}(s) \subset N(s)$

gerada aleatoriamente. Se em $\bar{N}(s)$ não for encontrada nenhuma solução candidata s' , gera-se uma outra vizinhança de s . O procedimento pára após um determinado número de iterações sem melhora do valor da função objetivo.

No método de Busca Tabu, por sua vez, analisa-se uma vizinhança $V(s) \subseteq N(s)$ e escolhe-se a solução $s' \in V(s)$ que possui menor valor de função objetivo para ter sua vizinhança explorada na próxima iteração, mesmo que este valor seja pior que o melhor encontrado até o momento. Para a prevenção da ocorrência de ciclos, movimentos feitos recentemente são proibidos por um número determinado de iterações. Estes movimentos proibidos compõem a chamada *lista tabu*. Se em alguma iteração for analisado um movimento que está proibido (for tabu) e que fornece melhoria no valor de função objetivo, ele pode ser realizado se satisfizer um *critério de aspiração*. Ou seja, considerando s' a solução obtida de s através do movimento tabu m , se $f(s') \leq A(f(s))$ então s' pode ser aceita mesmo que m esteja na lista tabu. Maiores detalhes do método de Busca Tabu podem ser encontrados em Glover *et al.* (1997).

4.2 Representação de uma grade de horário

Uma grade de horário de professores é representada como uma matriz $Q_{NP \times NH_{tot}}$, onde NP (número de professores) e NH_{tot} (número total de horários de aula em um turno). Cada linha p desta matriz representa o agendamento semanal do professor p . Cada elemento $q_{ph} = \{-1, 0, 1, 2, \dots, NT\}$ indica a atividade do professor p no horário de aula h , de forma que q_{ph} igual a:

- 1: se o professor p não pode ter aula agendada no horário de aula h ;
- 0: se o horário de aula estiver disponível para agendamento;
- $t \in \{1, \dots, NT\}$: se o professor p foi agendado para dar aula para a turma t no horário de aula h .

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	...
P_1	0	1	1	2	3	4	4	1	...
P_2	-1	-1	-1	-1	2	3	1	4	...
P_3	6	6	7	8	0	0	2	2	...
P_4	2	2	4	4	0	0	3	3	...

Figura 1 – Representação de uma grade de horário Q .

Os horários de aula são representados pela seqüência $\{h_1, \dots, h_{NH_{tot}}\}$. Considere NH_d como sendo constante para todos os dias d da semana, sem perda de generalidade. Se tivermos NH_d horários de aula por dia da semana, então representamos a seqüência de horários de

aula no primeiro dia por $\{h_1, \dots, h_{NH_d}\}$, no segundo por $\{h_{NH_d+1}, \dots, h_{2.NH_d}\}$, e assim até o último dia da semana. Então, a seqüência de horários de um dia d da semana é representada por $\{h_{(d-1)NH_d+1}, \dots, h_{d.NH_d}\}$.

4.3 Estrutura e exploração da vizinhança

Um *movimento simples* consiste na troca de dois valores distintos e não negativos de uma dada linha de Q . Tal movimento é identificado por $m = (p, h_i, h_j)$, onde h_i e h_j representam os horários de aula nos quais as atividades q_{ph_i} e q_{ph_j} do professor p serão trocadas, sendo $q_{ph_i} \neq q_{ph_j} \neq -1$. Consideramos $i < j$, para facilitar a aplicação da lista tabu.

Seja $Q \oplus m$ a aplicação de um movimento simples m à matriz Q . Desta forma, a vizinhança $N(Q)$ é composta de todas as grades de horário Q' , factíveis ou não, tal que $Q' = Q \oplus m$. A cardinalidade de $N(Q)$ é majorada por $NP(NH_{tot}(NH_{tot} - 1))/2$.

Considere as seguintes definições:

Definição 4.1. Um horário de aula h possui **sobreposição de professores** com relação a uma aula (p, t) quando existir um ou mais professores $\bar{p} \neq p$ agendados para ensinar a turma t neste mesmo horário.

Definição 4.2. Um **movimento simples** consiste na troca de dois valores distintos e não negativos de uma dada linha p da matriz Q , sendo identificado por $m_s = (p, h_i, h_j)$, $i < j$.

Definição 4.3. Seja h_i um horário de aula que possui sobreposição de professores com relação a uma aula (p, t) . Um movimento simples $m_{r_1} = (p, h_k, h_i)$ para $i < k$ (ou $m_{r_1} = (p, h_i, h_k)$ para $i > k$) é um **movimento reparador-1** se a turma t não estiver envolvida em nenhuma aula agendada em h_k .

Definição 4.4. Seja h_i um horário de aula que possui sobreposição de professores com relação a uma aula (p, t) . Seja $\bar{P} \subseteq P$ o conjunto que contém estes professores. Um movimento simples $m_{r_2} = (\bar{p}, h_i, h_k)$ para $i < k$ (ou $m_{r_2} = (\bar{p}, h_k, h_i)$ para $i > k$) é considerado um **movimento reparador-2** se $\bar{p} \in \bar{P}$ e a turma t não está envolvida em nenhuma aula agendada em h_k .

Devido à representação utilizada temos que, ao realizarmos um movimento simples, podemos estar alocando mais de um professor para uma mesma turma em um mesmo horário de aula, violando a restrição essencial 2 (ver Seção 2). Então, com o objetivo de reparar estas infactibilidades, realizamos os movimentos reparadores. A aplicação destes movimentos nos procedimentos utilizados está descrita com mais detalhes nas seções seguintes.

4.4 Função objetivo

A função objetivo f de uma grade de horário é calculada pela soma de componentes que calculam a diferença entre esta grade e a grade de horário que satisfaz todos os requisitos (1) até (10), como visto na Seção 2. Cada componente i é multiplicada por um peso $\gamma_i \in \mathfrak{R}$, $\gamma_i \geq 0$. Assim, a função objetivo de uma grade de horário Q é da forma:

$$f(Q) = \sum_{i=1}^9 \gamma_i f_i(Q) \quad (55)$$

Estes pesos refletem a importância de cada uma das componentes de f . Como é um problema de minimização, quanto maior for o valor de γ_i , maior a importância do requisito medido pela componente f_i . Desta forma, f possui uma estrutura hierarquizada, onde para as componentes que avaliam as restrições essenciais o peso é muito maior do que para as demais.

A seguir, descrevemos como cada uma das componentes consideradas foi avaliada:

$f_1(Q)$: número de vezes que dois ou mais professores ensinam uma mesma turma em um mesmo horário de aula somado ao número de vezes que não foi associado nenhum professor a uma turma;

$f_2(Q)$: número de aulas vagas entre uma aula lecionada e outra na grade de horário de um dia dos professores (ver Figura 2, aulas vagas em horários h_2 e h_3);

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
p	2	0	0	6	0

Figura 2 – Avaliação parcial de f_2 para um professor p , onde $f_{2, \text{parcial}}(p) = 2$.

$f_3(Q)$: excedente de aulas de um professor p para uma turma t em um dia da semana, para todos os professores (em nosso caso, quando excede $N_{\max} = 2$, conforme Figura 3);

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
p	1	1	1	3	4

Figura 3 – Avaliação parcial de f_3 para a aula $(p,1)$, onde $f_{3, \text{parcial}}(p,1) = 3 - N_{\max} = 3 - 2 = 1$.

$f_4(Q)$: diferença entre o número de aulas duplas requisitadas dos professores para as turmas e as que realmente foram agendadas;

$f_5(Q)$: número de aulas de Educação Física que superam o número de quadras de esporte NQ para cada horário de aula;

$f_6(Q)$: soma das preferências dos professores pelos horários de aula que possuem aula agendada;

$f_7(Q)$: número de vezes em que o requerimento didático de alternar os dias de aula para o par (p,t) não é obedecido;

$f_8(Q)$: número de vezes que há mais de uma aula do professor p para a turma t em um mesmo dia da semana e não são consecutivas, ou seja, há aulas de outras disciplinas separando-as (ver Figura 4);

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
p	7	2	3	7	4

Figura 4 – Avaliação parcial de f_8 para a aula $(p,7)$, onde $f_{8,parcial}(p,7) = 1$.

$f_9(Q)$: número de dias nos quais o professor tem pelo menos uma aula agendada.

Geralmente, consideramos os pesos relacionados com infactibilidades sendo maiores que os demais. Assim sendo $\gamma_1, \gamma_3 > \gamma_2 \gg \gamma_4, \gamma_5, \dots, \gamma_9$. Observe que, para uma solução viável temos $f_1(Q) = f_3(Q) = 0$. A componente γ_2 é a mais importante das restrições não-essenciais. Os professores ficam insatisfeitos com horários sem atividade entre uma aula e outra porque, geralmente, eles têm que permanecer na escola e não ganham financeiramente por esse tempo inativo.

4.5 Solução inicial

A solução inicial foi gerada através de um método de agendamento construtivo parcialmente guloso. Primeiramente, determinamos o grau de urgência θ_p de agendamento para cada professor p considerando o número de aulas de sua carga didática pelo número de horários de aula em que este professor e as turmas que devem ser ensinadas por ele estão disponíveis para agendamento. Assim sendo, temos que:

$$\theta_p = (\sum_{t \in T} R_{pt}) / (N_{disp} + 1) \quad (56)$$

onde $R_{p \times t}$ é o número de aulas de um professor p para uma turma t e N_{disp} é o número total de alocações (p,h) nas quais as aulas podem ser agendadas sem violar a restrição essencial 2. Desta forma, escolhemos o professor p que possui θ_p com maior valor para ter suas aulas agendadas. A cada passo todas as aulas (p,t) envolvendo o professor p escolhido são agendadas e o valor de N_{disp} é atualizado para todos os professores que ainda não foram agendados. Após a escolha do professor, escolhemos aleatoriamente as aulas (p,t) para serem alocadas. Para alocarmos uma aula (p,t) , escolhemos um horário de aula de forma que não haja, a princípio, nenhuma violação às restrições essenciais 2 e 4. Caso tal horário não seja encontrado, admitimos violação à restrição 4. Se mesmo assim não conseguirmos alocar esta aula, admitimos violação à restrição 2. Neste último caso, com o objetivo de diminuir a

infectibilidade com relação à restrição 2, realizamos o movimento reparador-1 $m_{r_1} = (p, h, h_i)$ (se $h < h_i$) ou $m_{r_1} = (p, h_i, h)$ (se $h_i < h$) onde h_i é um horário de aula ao qual a turma t ainda não foi associada. Se a turma t_i que estava agendada em h_i antes do movimento m_{r_1} já estiver associada a alguma aula (\bar{p}, t_i) em h , realizamos o movimento reparador-2 com relação a esta aula, $m_{r_2} = (\bar{p}, h, h_j)$ (se $h < h_j$), ou $m_{r_2} = (\bar{p}, h_j, h)$ (se $h_j < h$).

4.6 Aplicação da metodologia proposta

O procedimento Busca Local Aleatória (BLA) parte de uma solução inicial Q_0 , utilizando a representação detalhada na Seção 4.2, guiando a busca pela função objetivo como na Seção 4.4. A cada iteração, uma vizinhança construída aleatoriamente $V(Q^*) \subset N(Q^*)$ – onde Q^* é a melhor grade de horário encontrada até o momento – é explorada e, se a melhor solução Q' encontrada nesta vizinhança possuir um valor de função $f(Q') < f(Q^*)$, esta passará a ser a nova solução a ter sua vizinhança pesquisada. Senão, construímos uma nova vizinhança aleatória $V(Q^*)$ e procedemos da mesma forma. O método pára após um determinado número de iterações sem melhora do valor da função objetivo.

Um vizinho Q' de Q^* é obtido da seguinte forma:

1. Para um professor $p \in P$ escolhemos aleatoriamente um horário de aula $h_i \in \{1, \dots, NH_{total} - 1\}$ e um horário de aula $h_j \in \{h_i + 1, \dots, NH_{total}\}$, onde $t_i = Q_{ph_i}^*$ e $t_j = Q_{ph_j}^*$;
2. se o movimento simples $m_1 = (p, h_i, h_j)$ estiver definido, realizamos este movimento;
3. se ao realizarmos esse movimento encontramos sobreposição de professores com relação à aula (p, t_j) em h_i , executamos o movimento reparador-2 $m_2 = (\bar{p}, h_j, h_k)$ tal que (\bar{p}, t_k) não está agendada em h_i ;
4. se encontramos sobreposição de professores com relação à aula (p, t_i) em h_j , executamos o movimento reparador-2 $m_3 = (\bar{p}, h_j, h_l)$ tal que (\bar{p}, t_l) não está agendada em h_j .

Ao realizarmos esses quatro passos para todos os professores $p \in P$, obtemos uma vizinhança $V(Q^*)$ constituída de, no máximo, $|P|$ vizinhos.

Para a aplicação da Busca Tabu, utilizamos a representação detalhada na Seção 4.2 e a função objetivo como na Seção 4.4. A vizinhança $V(Q)$ explorada a cada iteração é toda a vizinhança $N(Q)$, a qual é composta de todos os vizinhos de Q gerados através de movimentos simples, como definido na Seção 4.3.

Foi utilizada uma lista tabu sistematicamente dinâmica, ou seja, o número de iterações que um movimento m deve permanecer tabu, $I_{tabu}(m)$, é variável e escolhido de forma sistemática. Seja T_{min} e T_{max} os valores mínimo e máximo de $I_{tabu}(m)$, para todo movimento m . Construímos uma seqüência decrescente de números inteiros entre T_{min} e T_{max} , $\alpha \in Z^+$. A seqüência s é utilizada para determinarmos o valor do número de iterações tabu do movimento atual m , sendo repetida ao longo do processo de busca. Se na iteração k for escolhido o elemento s_i , então na iteração $k+1$ será escolhido s_{i+1} , se este não for o último elemento da seqüência; se s_{i+1} for o último elemento, então a seqüência será repetida novamente e será selecionado o elemento s_1 . Desse modo, os valores menores de $I_{tabu}(m) \in s$ permitem a exploração da vizinhança da solução atual próximo de um ótimo local, intensificando a busca. Por outro lado, os valores maiores podem ajudar a superar ótimos locais, permitindo uma diversificação na busca.

Como a lista tabu pode ser muito restritiva, utilizamos um critério de aspiração que é acionado quando obtemos uma solução Q' melhor do que a melhor solução obtida até o momento Q^* . Assim sendo, mesmo que o movimento m que gerou Q' seja tabu, poderá ser executado se satisfizer este critério. Obtida uma solução inicial Q_0 gerada de forma construtiva ou de grades anteriores, a Busca Local Aleatória (BLA) inicia-se e continua até alcançar um número de iterações sem melhora ou até alcançar um número máximo de iterações. A partir de então, a Busca Tabu (BT) inicia-se com a melhor solução obtida pelo BLA e continua até que alcance um número máximo de iterações sem melhora ou até alcançar um número máximo de iterações.

O processo BLA+BT é repetido iniciando sempre da melhor solução obtida pelo ciclo anterior e pára quando esta solução não é melhorada por um número máximo de ciclos sem melhora.

Caso a solução encontrada não seja viável, as componentes f_1 e f_3 da função objetivo indicarão a quantidade de infactibilidades presentes nela. Dessa forma, identificam-se quais os professores, turmas e horários de aula que estão em conflito, para uma possível negociação.

A BLA foi usada por dois objetivos diferentes. O primeiro objetivo consiste em gerar uma solução inicial para a BT. A BLA é um procedimento rápido para melhoria da solução inicial construtiva, gerando uma solução inicial para a BT com poucas ou nenhuma violação às restrições essenciais. Quando a BT parte da solução inicial construtiva consome um tempo computacional maior para alcançar uma solução factível (que não contenha violações das restrições (2) e (4)). O segundo objetivo é o de direcionar a busca para regiões ainda não pesquisadas. Após a BT não conseguir melhorar o valor da função objetivo por um determinado número de iterações, iniciamos a BLA com a melhor solução obtida pela BT. Dessa forma, como a BLA utiliza movimentos reparadores, a solução pode ser melhorada e pode ter sua estrutura modificada de tal modo que a BT reinicie em uma direção diferente.

5. Testes computacionais

Nesta seção estão descritos testes computacionais que foram realizados com a aplicação da metodologia apresentada na Seção 4 utilizando dados dos três turnos de duas escolas estaduais em Campinas, São Paulo. Também apresentamos resultados obtidos através das formulações matemáticas apresentadas na Seção 3. E, finalmente, na Seção 5.3 comparamos os procedimentos aplicados.

5.1 Escola Estadual Barão Geraldo de Rezende

Situada no distrito de Barão Geraldo, em Campinas-SP, a Escola Estadual Barão Geraldo de Rezende, ou simplesmente Escola Rezende, possuía no ano de 2005 um número total de 45 professores e 27 turmas distribuídas em 3 turnos, e, no ano de 2006, 41 professores e 25 turmas conforme mostra a Tabela 1.

Tabela 1 – Características da Escola Rezende nos anos de 2005 e 2006.

Escola Rezende						
Turnos	2005			2006		
	Turmas	Prof.	#aulas/dia	Turmas	Prof.	#aulas/dia
manhã	12	24	6	11	21	6
tarde	12	24	6	10	22	5 à 6
noite	3	14	4	4	14	4
Número de quadras de esporte: 2						
Número de dias de aula por semana: 5						

Havia professores que lecionavam em mais de um turno, porém todas as turmas possuíam suas aulas em um único turno. Nos turnos da manhã e da tarde, as turmas tinham seis aulas por dia e à noite quatro. As aulas aconteciam de segunda à sexta-feira, somando um total de 30 aulas por semana para os turnos da manhã e da tarde e 20 para o turno da noite.

5.2 Escola Estadual Professor Hilton Federici

Situada no distrito de Barão Geraldo, em Campinas-SP, a Escola Estadual Professor Hilton Federici, ou simplesmente Escola Hilton Federici, possuía no ano de 2005 turmas distribuídas em 3 turnos, conforme mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Características da Escola Hilton Federici.

Escola Hilton Federici			
Turno	Turmas	Professores	#aulas/dia
manhã	7	22	6
tarde	8	19	6
noite	11	25	4
Número de quadras de esporte: 2			
Número de dias de aula por semana: 5			

Também havia professores que lecionavam em mais de um turno, porém, todas as turmas possuíam suas aulas em um único turno. Nos turnos da manhã e da tarde, as turmas tinham seis aulas por dia e quatro de noite. As aulas eram de segunda à sexta-feira, somando um total de 30 aulas por semana para os turnos da manhã e da tarde e 20 para o turno da noite.

Essa escola possui turmas do 2º Ciclo do Ensino Fundamental (de quinta à oitava série), Ensino Médio (de 1ª à 3ª série) e Supletivo. O agendamento é feito no início de cada semestre.

5.3 Comparação entre as soluções obtidas por programação matemática, procedimento heurístico e manualmente

Com a finalidade de compararmos a solução das duas modelagens e do Procedimento BLA+BT, observamos a seguinte relação entre os pesos considerados:

Descrição	Procedimento BLA+BT	Modelo Matemático (1)	Modelo Matemático (2)	Valor
Um professor por turma e uma turma por professor em cada horário de aula.	γ_1	Restrição forte do modelo	Restrição forte do modelo	500
Aulas vagas (janelas).	γ_2	α_6	β_4	19
Mais que 2 aulas para par professor-turma em um dia.	γ_3	Restrição forte do modelo	Restrição forte do modelo	20
Aulas duplas.	γ_4	α_5	Restrição forte do modelo	1
Número de quadras de esporte.	γ_5	α_2	β_2	1
Preferência dos professores.	γ_6	α_1	β_1	1
Dias de aula alternados para par professor-turma.	γ_7	α_3	β_3	1
Aulas consecutivas para par professor-turma	γ_8	α_7	Restrição forte do modelo	1
Número de dias que professor comparece na escola.	γ_9	α_4	β_5	1

Para obtermos resultados através das formulações matemáticas propostas na Seção 3 utilizamos o modelador e otimizador XPRESS-MP versão 1.6 com as funções de pré-processamento e estratégia de corte ativas.

Todos os resultados presentes neste trabalho foram obtidos utilizando um microcomputador Pentium 4, 1.9 GHz, de 384 MB de RAM e com sistema operacional Microsoft Windows XP.

Tabela 3 – Melhor solução encontrada em 6 horas de processamento para a Escola Rezende (2005).

Escola Rezende 2005 (R05)					
Modelo (1)					
	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições
manhã (m)	1269	1178,4	6	8395	13907
tarde (t)	1536	1379,8	6	11270	22703
noite (n)	1704	1599,2	6	8426	14171
Modelo (2)					
	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições
manhã (m)	790	614,3	6	5077	4097
tarde (t)	711	561,3	6	4849	4057
noite (n)	26	0	0,74	687	1028

Tabela 4 – Melhor solução encontrada em 6 horas de processamento para a Escola Rezende (2006).

Escola Rezende 2006 (R06)					
Modelo (1)					
	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições
manhã (m)	1555	2257,2	6	8422	14035
tarde (t)	480	734,8	6	6326	10944
noite (n)	83	292	6	2675	4765
Modelo (2)					
	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições
manhã (m)	910	141	6	5330	4385
tarde (t)	282	296,7	6	4156	4015
noite (n)	51	64,5	6	1480	1859

Tabela 5 – Melhor solução encontrada em 6 horas de processamento para a Escola Hilton Federici (2005).

Escola Hilton Federici (HF05)					
Modelo (1)					
	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições
manhã (m)	537	1030,5	6	5769	10021
tarde (t)	446	909,8	6	6546	11033
noite (n)	123	121,6	6	4839	8212
Modelo (2)					
	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições
manhã (m)	142	181,6	6	3384	3294
tarde (t)	152	214,5	6	3322	3104
noite (n)	61	7,0	6	2303	2907

As Tabelas 3, 4 e 5 apresentam os resultados obtidos em seis horas de processamento (sendo interrompido neste período) para cada um dos turnos da manhã, tarde e noite das escolas Rezende e Hilton Federici. O *gap* apresentado é dado pelo melhor valor de função encontrado (f. obj.) sobre o limitante inferior definido pelo otimizador XPRESS, indicando a qualidade da solução obtida. Para soluções ótimas, temos *gap* de 0%.

Para os problemas das duas escolas, como não dispúnhamos do número mínimo de aulas duplas requerido por cada professor em 2005, supomos que as disciplinas compostas de 6 aulas teriam 3 aulas duplas, as compostas de 5 e 4 aulas teriam 2 aulas duplas e as compostas de 2 aulas teriam uma única aula dupla.

Foram encontradas soluções factíveis para todos os turnos das duas escolas e, para o turno da noite da escola Rezende, foi encontrada a solução ótima utilizando o modelo (2).

Com o modelo (2) o número de variáveis e restrições é menor do que o número obtido através do modelo (1). Também podemos verificar que o *gap* das soluções obtidas pelo modelo (2) é sempre menor que o das soluções obtidas através do modelo (1), ou seja, no período de seis horas, através do modelo (2), a distância entre a solução encontrada e a ótima é menor que no modelo (1).

Na Tabela 6 verifica-se as melhores soluções finais obtidas para os problemas das escolas Rezende e Hilton Federici através dos modelos de programação matemática (1) e (2) (na Tabela 6, PM1 e PM2 respectivamente) e BLA+BT. Os valores obtidos para o procedimento BLA+BT são resultado de uma média de 5 execuções.

Tabela 6 – Valores de função objetivo obtidos manualmente, por programação matemática e pela metodologia proposta (BLA+BT).

	R05 _m	R05 _t	R05 _n	R06 _m	R06 _t	R06 _n	HF _m	HF _t	HF _n
Manual	612	788	79	-	-	-	-	-	-
PM(1)	1269	1536	1704	1555	480	83	537	446	123
PM(2)	790	711	26	910	282	51	142	152	61
BLA+BT	303,4	291,8	38	199,6	152,8	55,4	107,6	141,6	101,8

Também apresentamos a solução manual para a escola Rezende 2005. Como não dispúnhamos da preferência dos professores pelos horários de aula para os outros casos, não pudemos comparar sua solução manual com as demais. Para o método BLA+BT temos a média de 5 execuções e o critério de parada adotado como sendo 50 iterações sem melhora da solução ou 100 iterações no máximo para a Busca Tabu, 100 iterações sem melhora da solução ou 150 iterações no máximo para a Busca Local Aleatória e no máximo um ciclo (BLA+BT) sem melhora da solução.

Os valores médios arredondados para obtenção das soluções através do procedimento BLA+BT foram: (R05_m) 571s, (R05_t) 600s, (R05_n) 97s, (R06_m) 619s, (R06_t) 518s, (R06_n) 97s, (HF_m) 422s, (HF_t) 374s, (HF_n) 234s.

Os resultados obtidos pelo procedimento BLA+BT foram em torno de 50% melhores que os manuais. Já com relação à PM(2), temos melhores soluções de BLA+BT para problemas maiores e, para os problemas menores (R05_n, R06_n e HF_n) temos soluções com menores

valores de função, porém próximas. Mas, devemos verificar que as soluções obtidas por BLA+BT demandaram um tempo menor que por PM(2).

Para todos os cenários testados consideramos a não-preferência dos professores como sendo os valores 0 (bom), 1 (razoável) e 2 (péssimo).

6. Conclusões e trabalhos futuros

Descrevemos um problema típico das EEFM públicas do Estado de São Paulo. Apresentamos duas formulações matemáticas para tratar este problema, desenvolvendo, como contribuição, uma formulação matemática baseada no agendamento de blocos de aulas duplas e unitárias e desenvolvendo a modelagem de diversas restrições encontradas nestas escolas que não são tratadas na literatura. Também apresentamos um procedimento de Busca Tabu composto de uma lista tabu sistematicamente dinâmica e utilizando movimentos simples como em Shaerf (1996). Desenvolvemos um procedimento de Busca Local Aleatória baseada em movimentos reparadores que foi utilizado para acelerar o processo de busca junto à Busca Tabu (procedimento BLA+BT). O procedimento (BLA+BT) mostrou resultados satisfatórios, tanto com relação ao tempo computacional como com relação à qualidade das soluções obtidas. Além disso, mostramos como tratar variações que podem ser encontradas nas EEFM paulistas.

Como contribuição deste trabalho, foi desenvolvida uma heurística que trata os turnos da manhã, tarde e noite de uma instituição considerando as restrições que existem entre eles. Esta heurística foi aplicada para resolver um problema encontrado na grade de horário da Escola Estadual Barão Geraldo de Rezende, em Campinas, no ano de 2006, gerando uma solução aceita pelos funcionários.

Futuramente, pretendemos aumentar o número de restrições abordadas para abranger um número maior de instituições de ensino. Por exemplo, restrições que dizem respeito às instituições que possuem mais de uma unidade de ensino e que possuem professores que trabalham em várias destas unidades.

Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq pelo financiamento deste trabalho (bolsa de pesquisa do professor Dr. Antônio Carlos Moretti – processo nº 307907/2007-4).

Referências Bibliográficas

- (1) Abramson, D. (1991). Constructing schools timetables using simulated annealing: sequential and parallel algorithms. *Management Science*, **37**(1), 98-113.
- (2) Colomi, A.; Dorigo, M. & Maniezzo, V. (1998). Metaheuristics for high school timetabling. *Computational Optimization Applications*, **9**, 275-298.
- (3) Costa, D. (1994). A tabu search algorithm for computing an operational timetable. *European Journal of Operational Research*, **76**, 98-110.

- (4) de Werra, D. (1997). The combinatorics of timetabling. *European Journal of Operational Research*, **96**, 504-513.
- (5) Even, S.; Itai, A. & Shamir, A. (1976). On the complexity of timetabling and multicommodity flow problems. *SIAM Journal of Computation*, **5**, 691-703.
- (6) Filho, G.R. & Lorena, L.A.N. (2001). A constructive evolutionary approach to school timetabling. **In:** *Applications of Evolutionary Computing* [edited by E.J.W. Boers, J. Gottlieb, P.L. Lanzi, R.E. Smith, S. Cagnoni, E. Hart, G.R. Raidl and H. Tjink], volume 2037, 130-139. Springer Lecture Notes in Computer Science.
- (7) Glover, F. & Laguna, M. (1997). *Tabu Search*. Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht London.
- (8) Gottlieb, C.C. (1963). The construction of a class-teacher timetables. **In:** *IFIP Congress* [edited by C.M. Poplewell], volume 62, 73-77, North-Holland. Springer Lecture Notes in Computer Science.
- (9) Junginger, W. (1986). Timetabling in Germany – a survey. *Interfaces*, **16**, 66-74.
- (10) Neufeld, G.A. & Tartar, J. (1974). Graph coloring conditions of the existence of solutions to the timetable problem. *Communications of the ACM*, **17**(8), 450-433.
- (11) Ostermann, R. & de Werra, D. (1983). Some experiments with a timetabling system. *OR Spektrum*, **3**, 199-204.
- (12) Shaerf, A. (1996). Tabu search techniques for large high-school timetabling problems. **In:** 13th National Conference of the American Association for Artificial Intelligence (AAAI-96).
- (13) Sousa, V.N. (2006). Programação da grade de horário em escolas de ensino fundamental e médio. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.
- (14) Souza, M.J.F. (2000). School Timetabling: an approximation by metaheuristics PhD. Dissertation, Computing and Systems Engineering Program, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil.