Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Cônicas para o Ensino Médio, da contextualização à álgebra.

Marcelo Honório dos Santos

Goiania

2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Marcelo Honório dos Santos				
E-mail:	mhsantos_1@hotmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor					
Agência de fomento:				Sigla:	
País:	Brasil	UF:		CNPJ:	
Título:	Cônicas para o Ensino Médio, da Contextualização à Álgebra				
Palavras-chave:	Cônicas; Parábola; Hipérbole; Elipse; Geometria Analítica; Geogebra.				
Título em outra língua:	Conic for Secondary Education, contextualization álgebra.				
Palavras-chave em outra língua:	Conics; Parable; Hyperbole; Ellipse; Analytical Geometry; Geogebra.				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico.				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	21/03/2014				
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT – IME – UFG				
Orientador (a):	Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues				
E-mail:	Paulo_rodrigues@ufg.br				
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

____ Data: ____ / ____ / _____

Assinatura do (a) autor (a):

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Marcelo Honório dos Santos

Cônicas para o Ensino Médio, da contextualização à álgebra.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.

Goiânia

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Santos, Marcelo Honório dos.
S237c Cônicas para o Ensino Médio, da Contextualização à Álgebra [manuscrito] / Marcelo Honório dos Santos. - 2014.
62 f. : il., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2014.
Bibliografia.
Inclui lista de tabelas e figuras.
1. Geometria analítica – Cônicas – Ensino médio 2. Cônicas – Ensino médio 3. Parábola 4. Elipse 5. Hipérbole I. Título.

CDU: 514.133:373.5

Marcelo Honório dos Santos

Cônicas para o Ensino Médio, da Contextualização à Álgebra

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 21 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello
Matemática-UFMT

Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Marcelo Honório dos Santos graduou-se em Licenciatura Matemática pela Fafi-BH - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Belo Horizonte em 1995. Especializou-se em Supervisão Escolar no ano de 2003 pela Universo - Universidade Salgado de Oliveira. Atualmente é professor de Matemática do ensino médio do Centro Educacional Sesc Cidadania, professor de Matemática do ensino médio do Colégio Einstein de Goiânia, professor de Matemática I e Matemática II para curso de administração da ESUP/FGV - Escola Superior de Negócios em Goiânia.

Dedico este Trabalho às pessoas mais importantes da minha vida: Minha esposa Sandra, a base de tudo que sou hoje, pois sempre acreditou em mim, mais que eu mesmo. Permitiu que eu pudesse sair de casa para ir em busca de meus conhecimentos e com quem passarei o resto dos dias da minha vida de Mestre, até que Deus assim o queira. Minha linda filhinha Carol cuja inteligência e graciosidade encantam a todos com quem convive. E enche o pai de orgulho com os seus resultados e, com certeza, seguirá o exemplo do pai, transformando a vida de todos aqueles que passarem pelas suas mãos e pelos seus cuidados. Ao meu querido pequeno filho amigãozão João Marcelo pois, mesmo sem saber o que o "Babai"saía para fazer nos dias de aula, sempre me recebeu sorrindo, com a alegria de quem acabara de ganhar um lindo presente e isso justificava cada minuto da minha batalha. Você há de se orgulhar do "Babai"e o "Babai"há de se orgulhar de você.

Agradecimentos

- A Deus pelos dons e oportunidades;

- Aos familiares e amigos pelo apoio e compreensão pela minha ausência durante o curso. Em especial ao Papai Roberto e a Mamãe Maria que puderam compartilhar comigo mais esta vitória. Ao meu velho Juca e a minha sogra Alvarinda pessoas que eu estimo, tenho o maior respeito e admiração;

- Aos professores do PROFMAT, em especial ao Prof. Paulo Henrique, meu orientador, e ao Prof. Mário que selou esta minha passagem pela UFG com os seguintes dizeres: "Educar não é encher um balde. Educar é acender uma lâmpada";

- A todos os colegas do PROFMAT pelos nossos encontros prazerosos de sábado. Em especial a quatro deles: Betinho, Evandro, Normando e Ricardo com quem pude estender os dias de nossos encontros e despertar uma amizade eterna;

- Aos idealizadores e criadores do PROFMAT;

- Aos Funcionários da UFG que sempre nos trataram com muito respeito.

Resumo

Visando despertar o interesse do aluno pelo tema, antes mesmo do seu tratamento algébrico, o trabalho *Cônicas para o Ensino Médio,da contextualização à álgebra* inicia-se com o contexto histórico do tema *cônicas*, mostrando a origem dos seus estudos e discorrendo um pouco sobre os matemáticos responsáveis pela fundamentação dessa teoria. Abordaremos o tratamento algébrico das três cônicas em estudo: A elipse, a parábola e a hipérbole pois é assim que os alunos da educação básica os veem durante o 3º ano do ensino médio. Citaremos também alguns conceitos básicos da geometria analítica os quais serão necessários para as demonstrações das propriedades e das proposições que permearão o trabalho. Apresentaremos também o programa GEOGEBRA com explicações das suas funções básicas as quais servirão de suporte para enriquecer situações cotidianas da sala de aula cuja temática inclui *cônicas.* Algumas construções dinâmicas serão apresentadas utilizando o programa e isto poderá servir para o professor como motivação para algumas demonstrações geométricas. Finalmente, apresentaremos propostas para a abordagem do tema em sala de aula de maneira diferenciada uma vez que contextualizaremos com fatos históricos e situações cotidianas cada uma das cônicas, juntamente com uma proposta de problematização da cônica, vinculada à sua aplicação.

Palavras-chave: Cônicas; Parábola; Hipérbole; Elipse; Geometria Analítica; Geogebra.

Abstract

Aiming to arouse student interest in the subject, even before their algebraic treatment work *Conic for Secondary Education, contextualization algebra* begins with the historical context of the theme *conical*, showing the origin their studies and discoursing a little about the reasons responsible for this mathematical theory. Discuss the algebraic treatment of the three conical study: The ellipse, the parable and the hyperbola it is so that students see the basic education during the 3rd year of high school. Also will cite some basic concepts of analytic geometry which will be necessary for statements of properties and propositions that permeate the work. We will also present the GEOGEBRA program with explanations of its basic functions which will support everyday situations to enrich the classroom whose theme includes *conical*. Some dynamic constructions will be presented using the program and it should serve as motivation for the teacher to some geometric statements. Finally, we will present proposals to approach the subject in the classroom differently since contextualizaremos with historical facts and everyday situations each conic, together with a proposal for discussion of conical, linked to your application.

Keywords: Conics; Parable; Hyperbole; Ellipse; Analytical Geometry; Geogebra.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Este trabalho foi idealizado à partir de experiências vividas em sala de aula onde os educandos eram submetidos à memorização e repetição de equações que por si só não despertavam o interesse. Através dele buscamos um melhor significado para aquilo que se ensina e para aquilo que se aprende.

Alguns temas matemáticos chegam aos ouvidos do educando no momento certo do seu desenvolvimento, tais como o conjunto dos números inteiros, conteúdo aplicado no 7º ano do ensino fundamental, as expressões algébricas, apresentadas aos alunos no 8º ano do ensino fundamental, as equações quadráticas durante o 9º ano do ensino fundamental e outros. Porém, é muito comum na atualidade, os professores da educação básica desferirem conteúdos em seus alunos com o simples intuito de cumprirem os seus conteúdos programáticos. Podemos citar como exemplos, o simples cálculo do máximo divisor comum entre dois números naturais, a obtenção das raízes complexas de uma equação polinomial do 3º grau. Do mais simples ao mais complexo tema, se não houver significado, o conteúdo se perde com o tempo.

Dar significado ao que se ensina é um desafio constante para o bom educador. Por isso, não é suficiente ao educador ter domínio apenas do conteúdo que se trabalha. É necessário relacioná-lo com as diferentes situações que poderão ser vivenciadas pelos alunos no decorrer da sua vida e ainda, trazer para a sala de aula, aplicações práticas daquilo que se ensina. Em alguns momentos essa tarefa é árdua. Como provar por exemplo, para um educando de 8º ano que a simplificação de uma fração algébrica faz-se necessária, pois só assim poderemos escrever uma fração equivalente escrita de maneira mais simples? " Ora professor, se é a mesma coisa para que é preciso simplificar?". Um professor " despreparado " poderia aproveitar a oportunidade e responder da seguinte forma: " Tem que simplificar porque é preciso simplificar e pronto, faça o que está pedindo e não questione mais, garoto ". Uma coisa é certa: Dar significado às frações algébricas para os novos educandos é realmente uma tarefa árdua. Porém, o bom educador já deve antecipar-se a esses questionamentos. No mínimo, uma reflexão sobre a evolução do indivíduo desde o momento em que ele entrou na escola até o momento em que questionou as frações: Será que ele ainda é o mesmo? Para onde vão os nossos conhecimentos?

Quando o grego Tales de Mileto esfregou um pedaço de resina fóssil em um pedaço de pano qualquer, e a resina parecia atrair pequenos corpos, ele não sabia que ali era a origem dos motores elétricos que nos tempos atuais impulsionariam o mundo.

Quando questionamos a uma criança " o que ela vai ser quando crescer ", ela poderá nos responder com uma larga gargalhada e isso pode significar apenas que ela não tenha entendido a pergunta. O que se deve observar não é a resposta da criança, mas se o questionamento lhe foi feito no momento oportuno.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, no que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno do ensino médio como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional (Brasil, 2006, p.40). Porém ela não não possui apenas o caráter formativo ou instrumental. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. Ainda de acordo com os PCN's, para que essa etapa da escolaridade possa complementar a formação iniciada na escola básica e permitir o desenvolvimento das capacidades que são os objetivos do ensino de Matemática, é preciso rever e redimensionar alguns dos temas tradicionalmente ensinados. O tema " Cônicas " é pertinente ao 3º ano do Ensino Médio, período em que o educando já possui maturidade para entender e compreender assuntos mais complexos da atualidade que transcendem a sala de aula.

A proposta do presente trabalho tem como motivador o atual momento da educação matemática. A falta de significado do que se aprende tem afastado da nossa ciência o glamour das novas descobertas. Trabalhar as cônicas como simples equações quadráticas de duas variáveis, tem deixado o conteúdo como um apêndice na educação matemática. Ou seja, vamos aprender, pois está no programa, ou até mesmo, vamos aprender " rapidinho ", porque isso não é importante, " não cai no vestibular ". O simples trato algébrico do tema não consegue se manter vivo na lembrança dos educandos. Quando falamos " da contextualização à álgebra ", deixaremos claro que a aplicação deverá motivar a álgebra e não a álgebra motivar a aplicação.

Este trabalho é destinado a todos os educadores que atuam na educação matemática, principalmente para os professores que lecionam nas séries finais do ensino médio. Ele está estruturado com o propósito de dar um aporte histórico do tema cônicas, bem como trazer os principais nomes daqueles que contribuíram para o seu desenvolvimento. Trás também uma seção que apresenta os conceitos básicos da geometria analítica, conceitos esses que permitirão ao leitor uma pesquisa rápida e simplificada do tema, se necessária. Seguindo as propostas dos PCN's, apresentamos também um software de apoio pedagógico denominado Geogebra acompanhado de aplicações que permeiam os assuntos. Segundo os PCN's, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras (Brasil, 2006, p.43). Finalizando, são apresentadas algumas sugestões que servirão de motivadores para despertar o interesse dos alunos para o tema. Esses motivadores vão desde a arquitetura moderna até às novas tecnologias, contribuindo para a significância e contextualização do tema, como é o objetivo deste trabalho.

1 Preliminares

1.1 Contexto Histórico

As cônicas correspondem às curvas quádricas elipse, hipérbole e parábola. O nome cônicas deve-se à forma como essas curvas foram descobertas por Menaecmus (380-320 a. C.), discípulo do astrônomo, matemático e filósofo grego Eudoxo de Cnido (408-347 a. C.), que foi o primeiro a perceber que elipses, hipérboles e parábolas são obtidas por cortes de um cone por um plano não paralelo à base. A partir de trabalhos anteriores, o grande geômetra grego Apolônio de Perga (262-190 a. C.) desenvolveu essas curvas em sua famosa obra *As Cônicas*, que apresenta a definição de secções cônicas como curvas formadas pela intersecção de um plano com a superfície de um cone e introduzem ainda os termos parábola, hipérbole e elipse pela primeira vez.

No livro A História da Matemática, de Carl Boyer [5], consta que as secções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. Pelo menos duas vezes nesse intervalo tinham sido escritas exposições gerais, por Aristeu e por Euclides, mas assim como *Os elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores, em nível mais avançado o tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas, inclusive *As cônicas* de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo. Se a sobrevivência é uma medida de qualidade, *Os elementos* de Euclides e *As cônicas* de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos.

Antes de Apolônio, as cônicas eram obtidas como secções de três tipos bem diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Aparentemente pela primeira vez, Apolônio mostrou que bastava um único cone, figura 1, para serem obtidas todas as três espécies de secções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de secção.

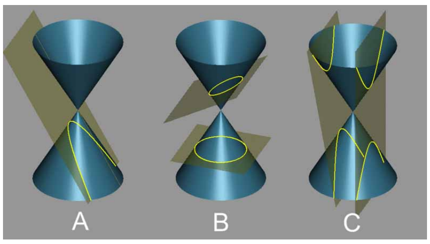
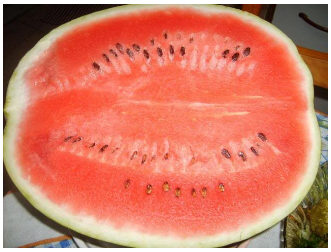


Figura 1: Secção do cone

Com certa frequência, no ambiente que nos cerca, deparamo-nos com as cônicas. Por exemplo, ao fazer um corte transversal passando pelo seu centro de uma melancia, obtemos uma secção em forma de elipse como na figura 2a. A luz de um abajur projetada na parede pode formar os ramos de uma hipérbole mostrado na figura 2b. O feixe de luz dos faróis dos automóveis são refletidos em superfícies parabólicas, conforme figura 2c.



(a) Secção transversal melancia

(b) Abajur

(c) Farol do automóvel

Figura 2: Cônicas no nosso dia

Hoje, as cônicas têm aplicações em Astronomia, Engenharia, Arquitetura, Tecnologia da comunicação etc. É muito comum andarmos pelas ruas e depararmos com monumentos que lembram estas curvas. Estes monumentos passam por tratamentos algébricos e estruturais até chegarem a sua arte final, não só com o objetivo de se tornarem atrativos para a apreciação visual, mas também para que possam possuir e aproveitar as propriedades das curvas que representam, sejam elas hipérboles, parábolas ou elipses.

1.2 Conceitos básicos da geometria analítica

Aqui trataremos de alguns conceitos básicos da geometria analítica que serão necessário para o bom entendimento das equações algébricas das cônicas e para as demonstrações de algumas propriedades destes lugares geométricos.

1.2.1 Sistema cartesiano ortogonal

O **sistema cartesiano ortogonal** é formado por dois eixos perpendiculares entre si. O eixo x (horizontal) é o eixo das **abscissas**, e o eixo y (vertical) é o eixo das **ordenadas**. Os eixos se cruzam no ponto $O(0,0)$, denominado **origem** das coordenadas do plano cartesiano.

Podemos localizar qualquer ponto P do plano cartesiano por meio de um único par ordenado (x_P, y_P) de números reais. Reciprocamente, dado uma par ordenado (x_P, y_P) de números reais, associa-se a ele um único ponto P pertencente ao plano [3].

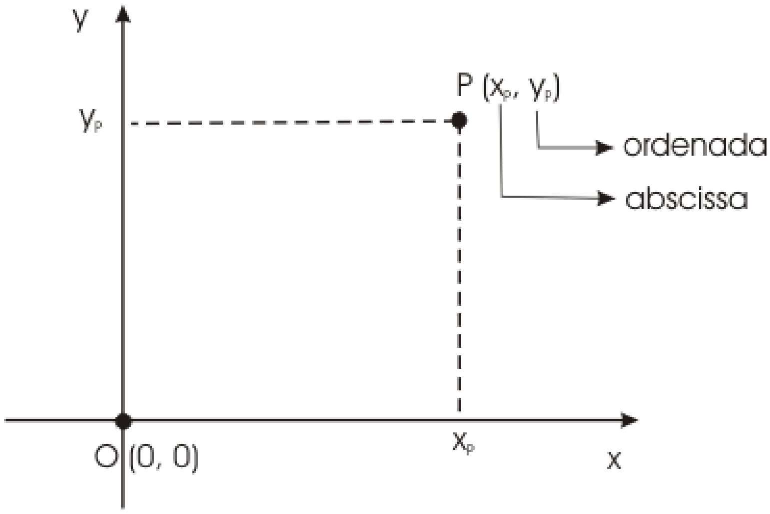


Figura 3: Plano cartesiano

1.2.2 Distância entre dois pontos

Em muitas situações que envolvem as cônicas, precisamos conhecer a distância entre dois pontos.

Para isso vamos considerar dois pontos distintos, A e B, de coordenadas $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, sendo a distância entre eles dada por $d_{A,B}$, que é a medida do segmento $\overline{AB}$ de origem A e extremidade B.

Vamos representá-los no plano cartesiano apresentado na Figura 4. Também representamos um ponto auxiliar C, de modo a formar um triângulo ABC, retângulo em C.

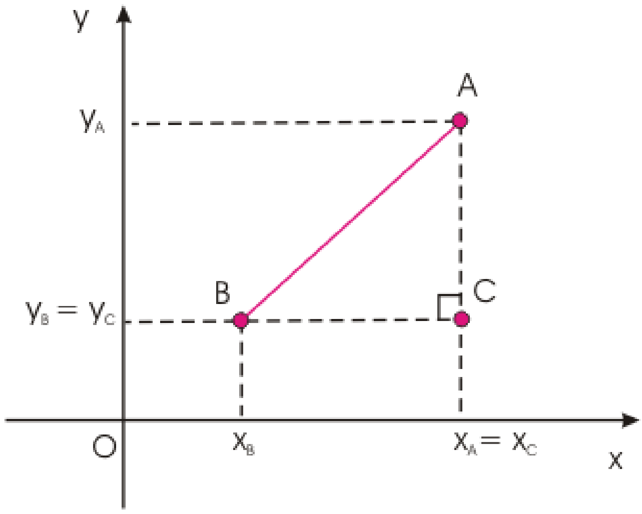


Figura 4: Distância entre dois pontos

Pelo teorema de Pitágoras: $(d_{A,B})^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

Sabemos que BC $= |x_B - x_C|$ e que AC $= |y_A - y_c|$

Como $|x_B - x_C|^2 = (x_B - x_C)^2$ e $|y_A - y_c|^2 = (y_A - y_c)^2$, temos:

$$(d_{A,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Portanto, a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano é dada por:

$$\boxed{d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

É importante observar que a fórmula acima também pode ser aplicada quando A e B estão alinhados horizontal ou verticalmente.

1.2.3 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Muitas vezes precisaremos dividir um segmento em dois de mesma medida. Por isso, é necessário determinar o ponto médio de um segmento.

Vamos considerar um segmento de reta cujos extremos são os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, e seja $M(x_M, y_M)$ o ponto médio entre A e B, temos:

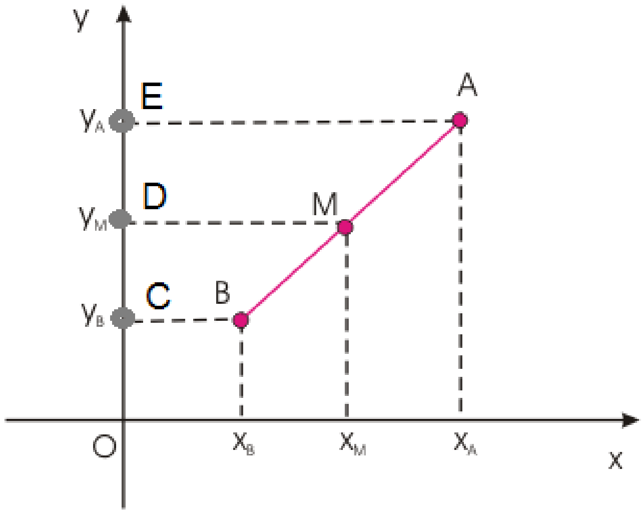


Figura 5: Ponto médio de um segmento de reta

Pelo teorema de Tales:

$$\text{AM} = \text{MB} \Rightarrow ED = DC \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_B + x_A$$

Portanto:

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}$$

Pelo teorema de Tales:

$$\text{AM} = \text{MB} \Rightarrow FG = GH \Rightarrow y_A - y_M = y_M - y_B \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B$$

Portanto:

$$\boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

Podemos concluir que, se tivermos um segmento de extremos A e B, a abscissa do ponto médio será a média aritmética das abscissas dos extremos e a ordenada do ponto será a média aritmética das ordenadas dos extremos [3].

Portanto, o ponto médio M do segmentos $\overline{AB}$ é dado por:

$$\boxed{M(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})}$$

1.3 Elipse

Definição 1.1. *Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles. Elipse ξ é o conjunto dos pontos P de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $2a > 2c$).*

$$\xi = \{P \in \alpha \ / \ PF_1 + PF_2 = 2a\}$$

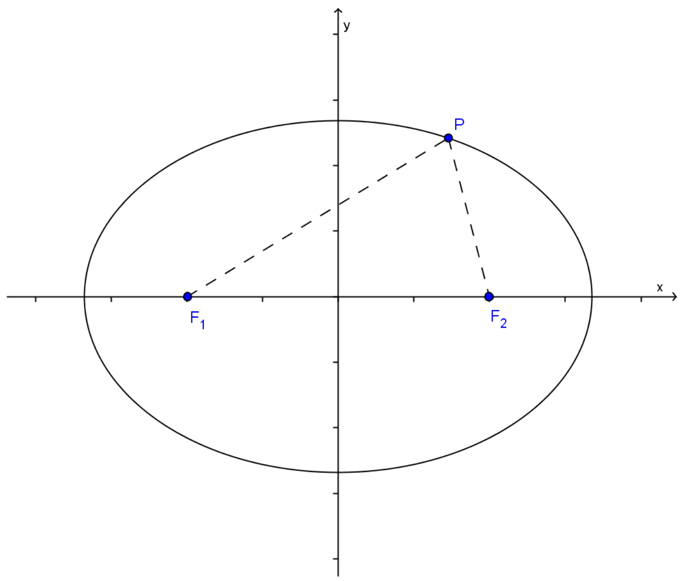


Figura 6: Elipse

Elementos principais

$F_1 e F_2 \longrightarrow$ focos

O $\longrightarrow$ centro

$A_1A_2 \longrightarrow$ eixo maior

$B_1B_2 \longrightarrow$ eixo menor

2c $\longrightarrow$ distância focal

2a $\longrightarrow$ medida do eixo maior

2b $\longrightarrow$ medida do eixo menor

$\dfrac{c}{a} \longrightarrow$ excentricidade

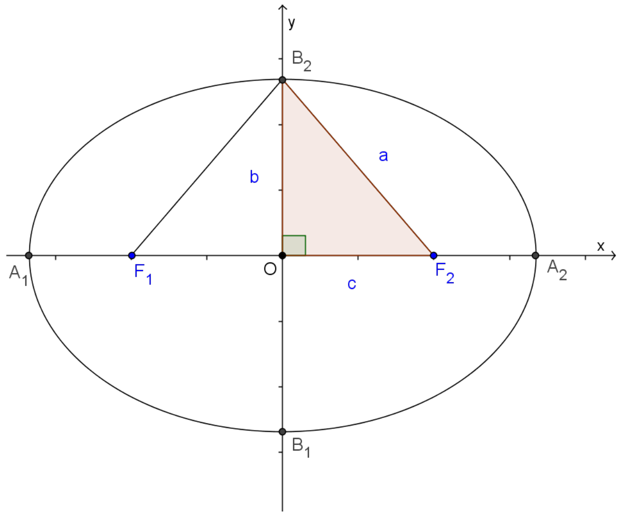


Figura 7: Elementos principais da elipse

Relação Notável: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Proposição 1.1. *A equação de uma* ***elipse*** *cujos focos são* F_1*=(-c, 0) e* F_2*=(c,0) é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \textit{ onde } b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

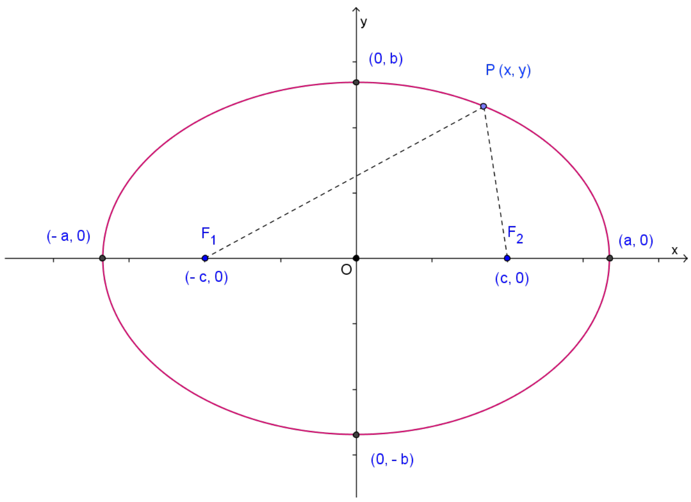


Figura 8: Elipse com focos (-c, 0) e (c, 0)

Demonstração. A elipse é o conjunto dos pontos P (x, y) tais que $d_{P,F_1} + d_{P,F_2} = 2$a, ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como a $>$ c, então $a^2 - c^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ e dividir a equação acima por $a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtendo (1.1). □

Proposição 1.2. *A equação de uma* ***elipse*** *cujos focos são* F_1*=(0,-c) e* F_2*=(0, c) é*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad , \textit{ onde } b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

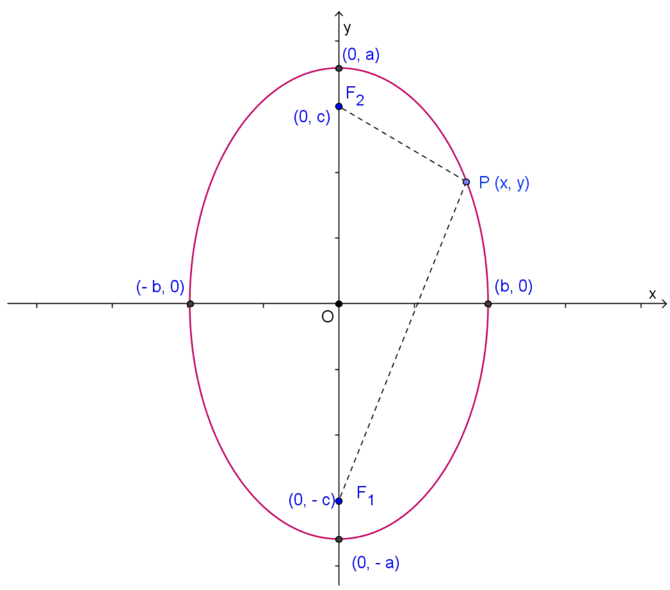


Figura 9: Elipse com focos (0, -c) e (0, c)

Demonstração. A elipse é o conjunto dos pontos P (x, y) tais que $d_{P,F_1} + d_{P,F_2} = 2$a, ou seja,

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y-c)^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = a^2 - cy$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$a^2x^2 + (a^2 - c^2)y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como a $>$ c, então $a^2 - c^2 > 0$. Assim, definimos $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ e dividimos a equação acima por $a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtendo (1.2). $\square$

Excentricidade da elipse

Algumas elipses são bem próximas a uma circunferência e outras são mais achatadas. Essa característica da elipse é determinada por um número e dado por $\frac{c}{a}$, chamado de **excentricidade**. Como $e = \frac{c}{a}$ e $c < a$, a excentricidade está entre 0 e 1 $(0 < e < 1)$.

- Se e for próximo de 0, a elipse é mais próxima a uma circunferência.
- Se e for mais próximo de 1, a elipse é mais achatada.

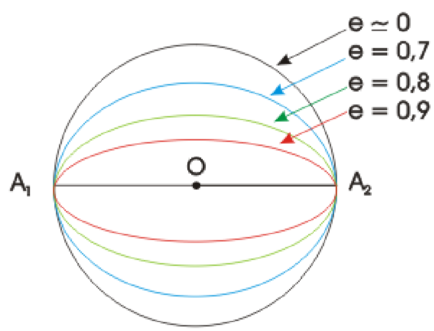


Figura 10: Excentricidade da elipse

A elipse é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice e que corta apenas uma das folhas da superfície.

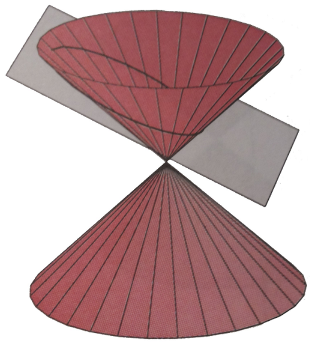


Figura 11: Elipse obtida seccionando-se um cone com um plano

1.4 Hipérbole

Definição 1.2. *Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles. Hipérbole η é o conjunto dos pontos P de α cuja diferença em valor absoluto das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $0 < 2a < 2c$).*

$$\eta = \{P \in \alpha \ / \ |PF_1 - PF_2| = 2a\}$$

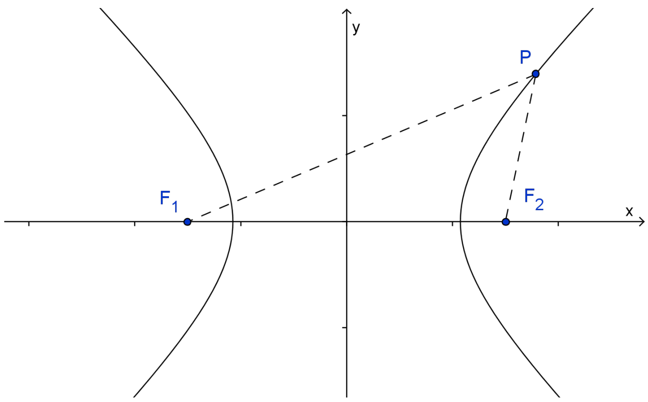


Figura 12: Hipérbole

Elementos principais

$F_1 e F_2 \longrightarrow$ focos

O $\longrightarrow$ centro

$A_1A_2 \longrightarrow$ eixo real ou transverso

$B_1B_2 \longrightarrow$ eixo imaginário

2c $\longrightarrow$ distância focal

2a $\longrightarrow$ medida do eixo real

2b $\longrightarrow$ medida do eixo imaginário

$\frac{c}{a} \longrightarrow$ excentricidade

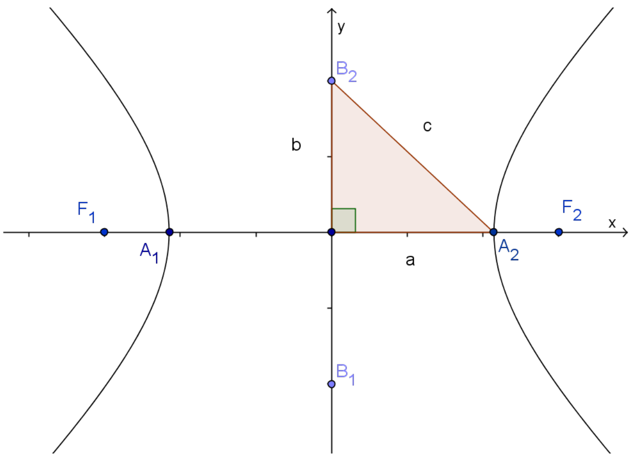


Figura 13: Elementos principais da hipérbole

Relação Notável: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Proposição 1.3. *A equação de uma* ***hipérbole*** *cujos focos são* F_1=(-c,0) *e* F_2=(c,0)

$$\text{é} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \textit{onde} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

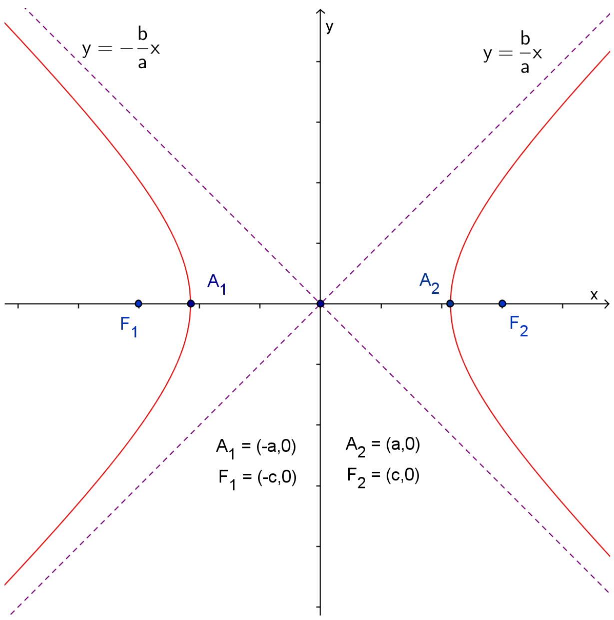


Figura 14: Hipérbole com focos (-c, 0) e (c, 0)

Demonstração. A hipérbole é o conjunto dos pontos P (x, y) tais que d_{P,F_1} - d_{P,F_2} $= \pm 2a$, ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Como a $<$ c, então $c^2 - a^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{c^2-a^2}$ e dividir a equação acima por $a^2b^2 = a^2(a^2-c^2)$, obtendo (1.3). □

Os pontos A_1 e A_2 são chamados **vértices da hipérbole**. A **excentricidade** da hipérbole é o número $e = \frac{c}{a}$. Como c $>$ a, a excentricidade de uma hipérbole é um número real não negativo maior que 1.

Proposição 1.4. *A equação de uma **hipérbole** cujos focos são F_1=(0,-c) e F_2=(0,c)*

$$é \ \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad , \ onde \ \ b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

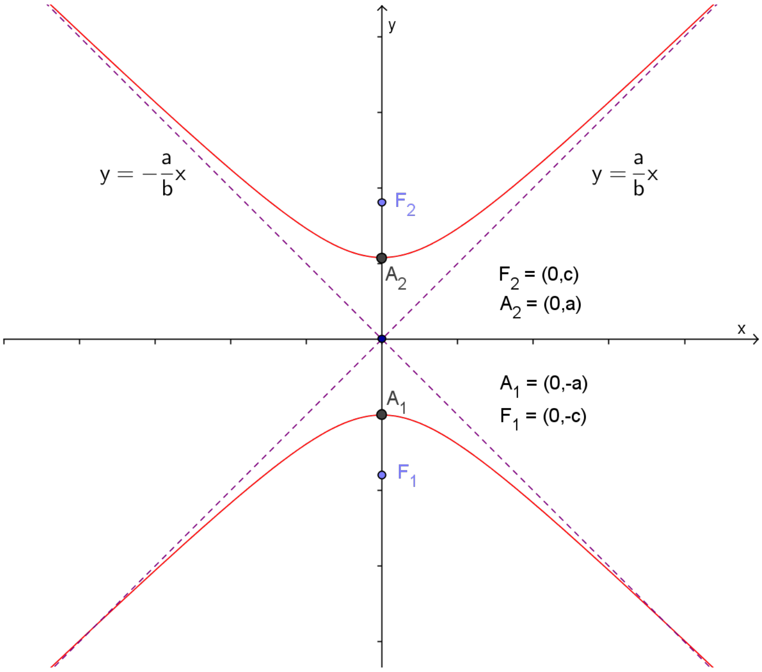


Figura 15: Hipérbole com focos (0,-c) e (0,c)

Demonstração. A hipérbole é o conjunto dos pontos P (x, y) tais que d_{P,F_1} - d_{P,F_2} $= \pm 2a$, ou seja,

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} - \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = \pm 2a$$

ou

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = \pm 2a + \sqrt{x^2 + (y-c)^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$\pm a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = a^2 - cy$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$a^2x^2 + (a^2 - c^2)y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como a < c, então $c^2 - a^2 > 0$. Assim, definimos $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ e dividimos a equação acima por $a^2b^2 = a^2(c^2 - a^2)$, obtendo (1.4). $\square$

A hipérbole é uma curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo ao eixo que não passa pelo vértice.

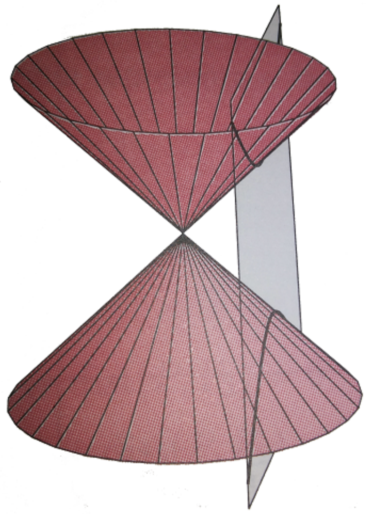


Figura 16: Hipérbole obtida seccionando-se

um cone com um plano

1.5 Parábola

Definição 1.3. *Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano α, com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d. Parábola $\wp$ é o conjunto dos pontos de α que estão a mesma distância de F e de d.*

$$\wp = \{P \in \alpha \;/\; PF = Pd\}$$

Elementos principais

F $\longrightarrow$ foco
d $\longrightarrow$ diretriz
p $\longrightarrow$ parâmetro
V $\longrightarrow$ vértice
reta VF $\longrightarrow$ eixo de simetria

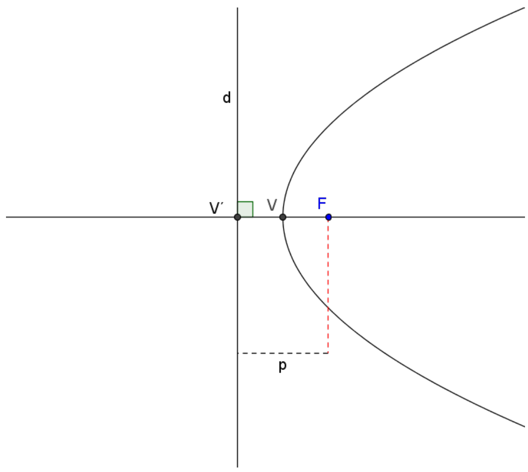


Figura 17: Elementos principais da parábola

Relação Notável: $\boxed{VF = \frac{p}{2}}$

Proposição 1.5. *A equação de uma **parábola** com foco $F = (p, 0)$ e reta diretriz*

r: x = -p é $y^2 = 4px$.

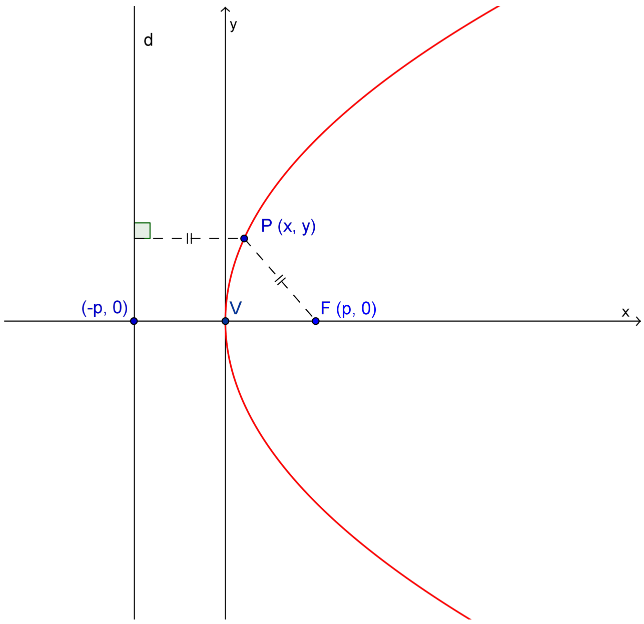


Figura 18: Parábola com foco $(p, 0)$ e

diretriz $x = -p$.

Demonstração. A parábola é o conjunto dos pontos P (x, y) tais que

$$d_{P,F} = d_{P,r} \ ,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos (1.5). □

Proposição 1.6. *A equação de uma **parábola** com foco $F = (0, p)$ e reta diretriz*

$$r\text{: } y = \text{-}p \text{ é } x^2 = 4py \ .$$

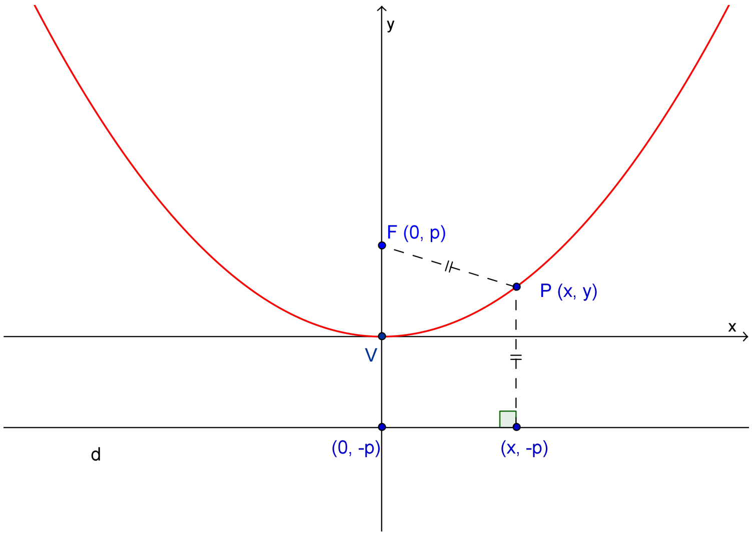


Figura 19: Parábola com foco (0,p) e diretriz y = -p .

Demonstração. A parábola é o conjunto dos pontos P (x, y) tais que

$$d_{P,F} = d_{P,r} \ ,$$

que neste caso é

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p|.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos (1.6). □

O ponto V é o ponto da parábola mais próximo da reta diretriz e é chamado de **vértice da parábola**. A parábola é a curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo a uma **reta geratriz do cone** (reta que gira em torno do eixo do cone de forma a gerá-lo).

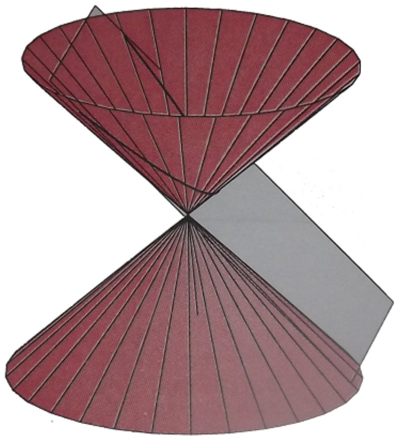


Figura 20: Parábola obtida seccionando-se

um cone com um plano

2 Geogebra: Uma ferramenta para ensino das cônicas no ensino médio.

2.1 O que é o Geogebra?

O Geogebra é um software educacional gratuito que pode ser obtido no site www.geogebra.org . É destinado ao ensino da matemática em qualquer nível, principalmente para o ensino fundamental e ensino médio. Suas ferramentas são de fácil interpretação e aplicação podendo serem utilizadas tanto em sala de aula pelo professor ou no laboratório de informática, neste caso com o auxílio de um tutorial ou com a orientação passo a passo do professor com domínio do software.

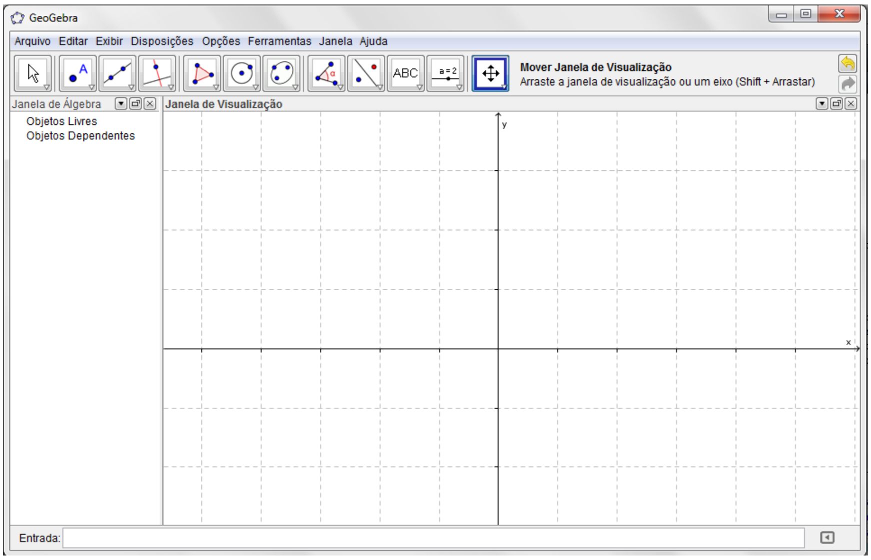


Figura 21: Ambiente geogebra

O Geogebra permite trabalhar a geometria, a álgebra e também o cálculo. O grande diferencial entre este software e outros softwares de geometria dinâmica é a possibilidade de se poder introduzir diversos comandos de um modo prático e eficaz. Permite trabalhar a matemática de três diferentes formas: Geométrica, algébrica ou através de planilha. Para este trabalho vamos nos concentrar nas formas geométrica e algébrica pois é desta forma que as cônicas são usualmente trabalhadas em sala de aula.

2.2 Construindo cônicas

2.2.1 Forma algébrica

Durante as construções algébricas utilizando o Geogebra, deveremos utilizar o campo "Entrada"para inserir as equações dos lugares geométricos pretendidos. Ressaltamos que no comando de linha, o expoente é comandado por ^ na linha da equação, o produto é indicado por $*$ e a divisão indicada por /. Vejamos alguns exemplos mais simples:

a) Elipse com centro na origem, eixo maior medindo 10 e eixo menor medindo 8.

A equação desta elipse é da forma $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. No Geogebra escrevemos no campo entrada a seguinte expressão:

$$x\char`^2/25+y\char`^2/16=1$$

O resultado obtido será o seguinte:

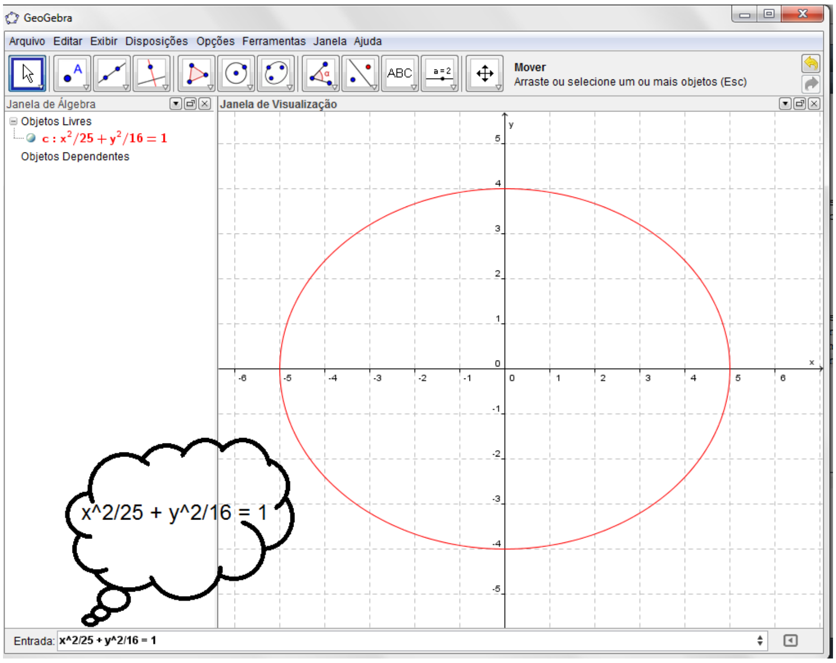


Figura 22: Elipse

b) Hipérbole com centro (3, 5), eixo real medindo 12 e eixo imaginário medindo 8.

Esta hipérbole terá equação $\frac{(x-3)^2}{36} - \frac{(y-5)^2}{16} = 1$. No Geogebra escrevemos no campo entrada a seguinte expressão:

$$(x-3)\hat{}2/36 \text{ - } (y-5)\hat{}2/16 = 1$$

O resultado obtido será o seguinte:

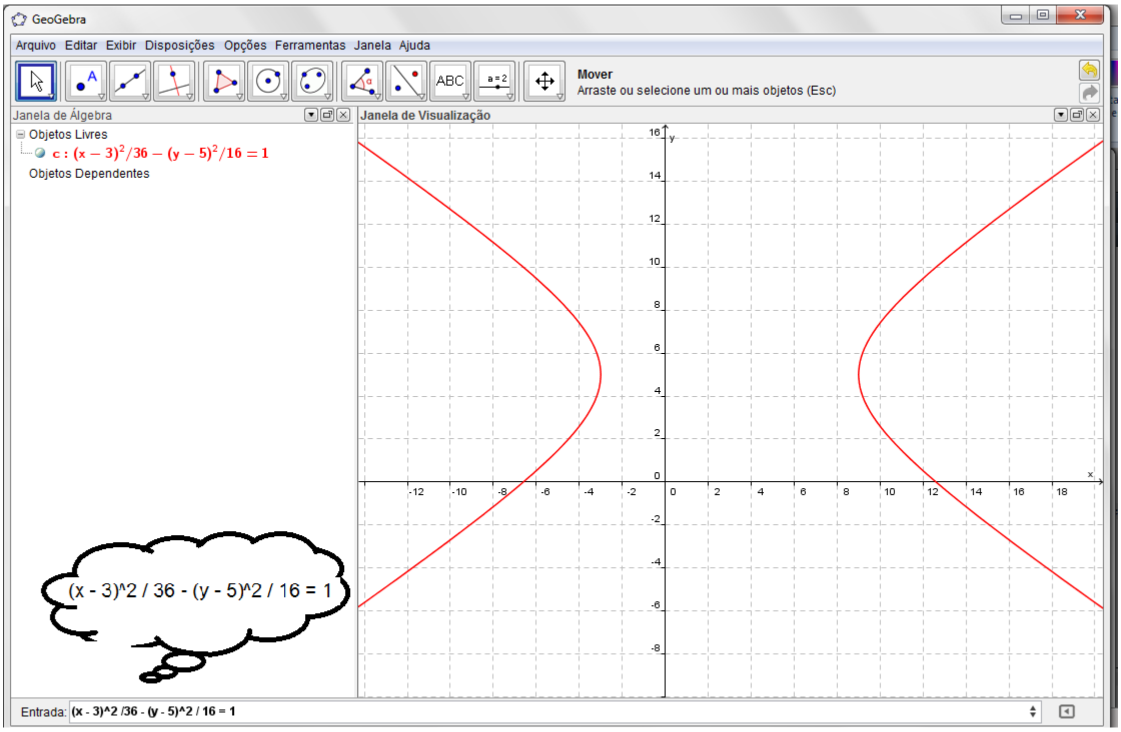


Figura 23: Hipérbole

c) Parábola de foco (2, 0) e reta diretriz x = -2.

Esta parábola terá equação da forma $y^2 = 8x$. No Geogebra devemos escrever no campo entrada a seguinte expressão:

$$y\hat{}2 = 8x$$

O resultado obtido será o seguinte:

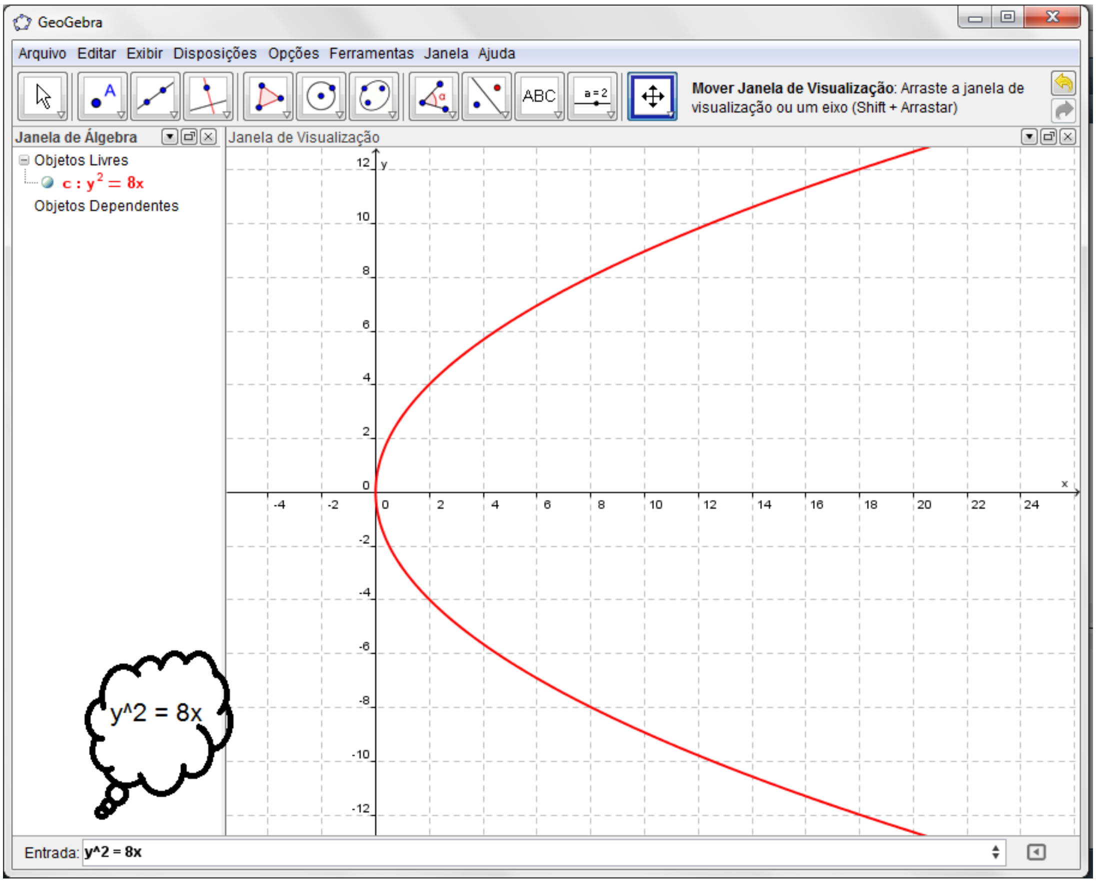


Figura 24: Parábola

2.2.2 Forma geométrica

Neste caso vamos utilizar o Geogebra na forma geométrica cujos recursos principais já estão disponíveis na sua barra de ferramentas e os conceitos geométricos podem ser explorados através deles.

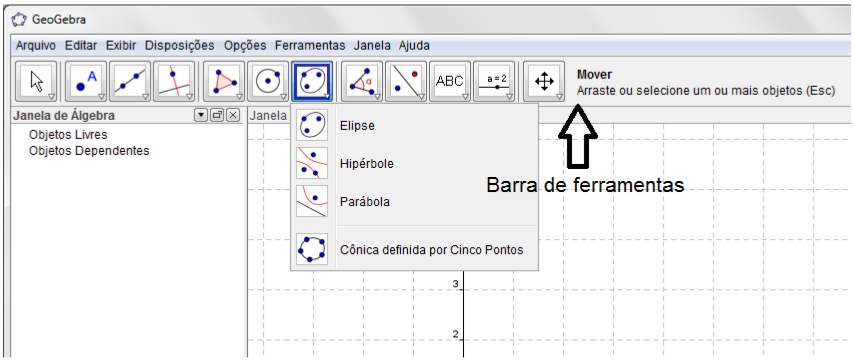


Figura 25: Barra de ferramentas do Geogebra

As construções das cônicas nesta forma deverão ser realizadas seguindo algumas orientações. É importante ressaltar que o software é bem amigável para quem já tem algum domínio em informática. Os resultados são interessantes e cabe ao professor explorar as propriedades e teoremas ali intrínsecos. Seguem alguns exemplos.

a) Construção da parábola com auxílio do Geogebra.

1. Obtenha dois pontos A e B na janela de visualização e determine uma reta passando por eles.
2. Crie um ponto C sobre a reta **a** obtida e um ponto D fora dela.
3. Construir um segmento definido pelos pontos C e D.
4. Construir a mediatriz do segmento CD.
5. Clica com o botão direito sobre a mediatriz e **habilitar rastro**.
6. Clica com o botão direito sobre o ponto C e **animar**.

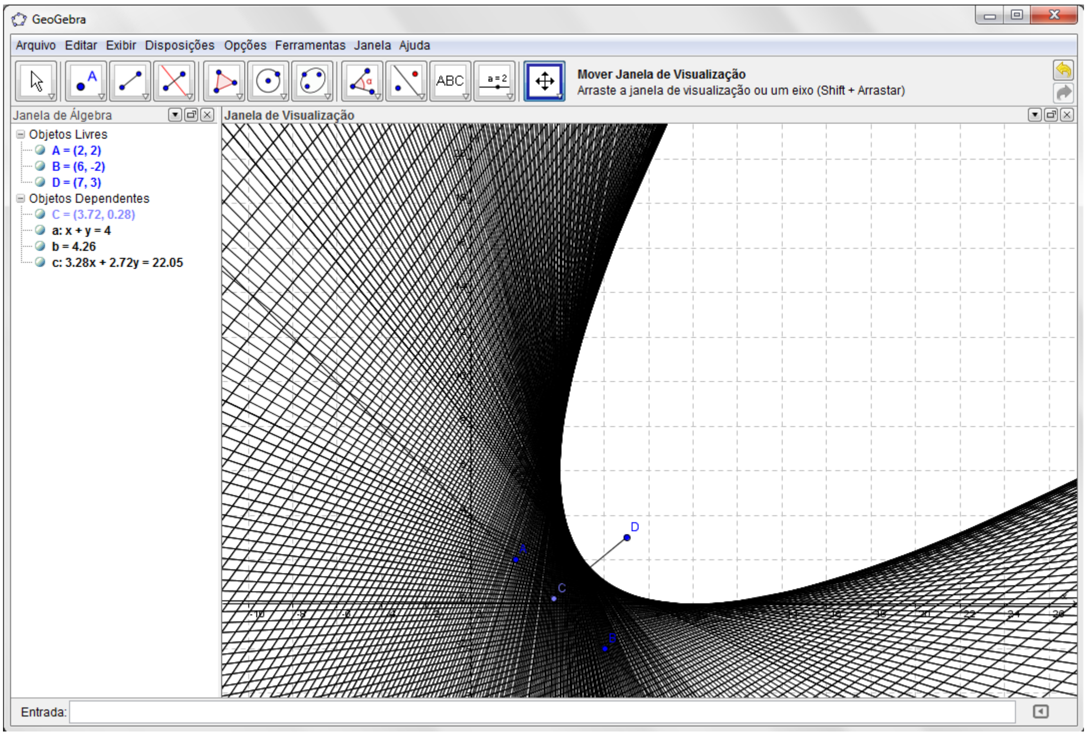


Figura 26: Parábola no Geogebra

A parábola irá se formar em alguns segundos. Para interromper a animação basta clicar com o botão direito sobre o ponto C na Janela de álgebra e desabilitar **animar**.

Os conceitos básicos para obtenção da parábola estão intrínsecos em cada passo. A reta a obtida através dos pontos A e B é a chamada reta diretriz da parábola. O ponto D obtido fora desta reta é o foco da parábola. O procedimento para obtenção desta parábola no Geogebra é denominado **A parábola como envoltória de suas tangentes** e é baseado numa importante propriedade das parábolas que podem ser obtidas por meio de suas tangentes.

Proposição 2.1. *Seja $\wp$ uma parábola de foco F e diretriz d. Um ponto X pertence a d se, e somente se, X é o simétrico de F em relação a uma reta tangente a $\wp$.*

Demonstração. Se X é o simétrico de F em relação à reta tangente a $\wp$ em P então X é a projeção ortogonal de P sobre a diretriz d e, portanto, pertence a d.

Reciprocamente, seja X um ponto pertencente à diretriz d. A perpendicular a d em X intersecta a mediatriz do segmento FX num ponto P da parábola $\wp$ e X é o simétrico

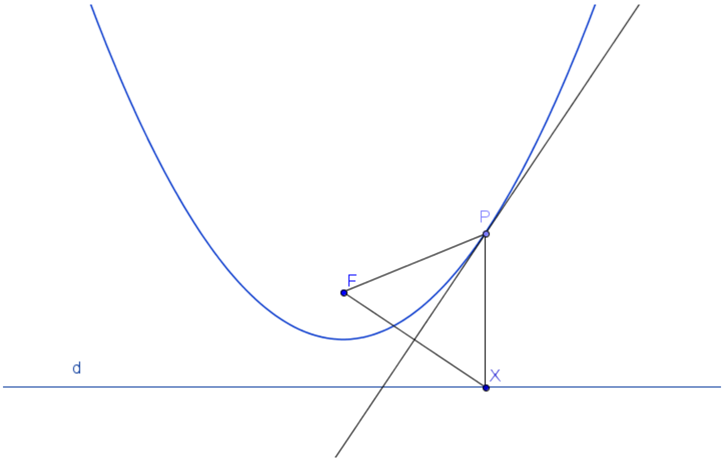


Figura 27: Proposição 2.1

de F em relação à reta tangente a $\wp$ em P.

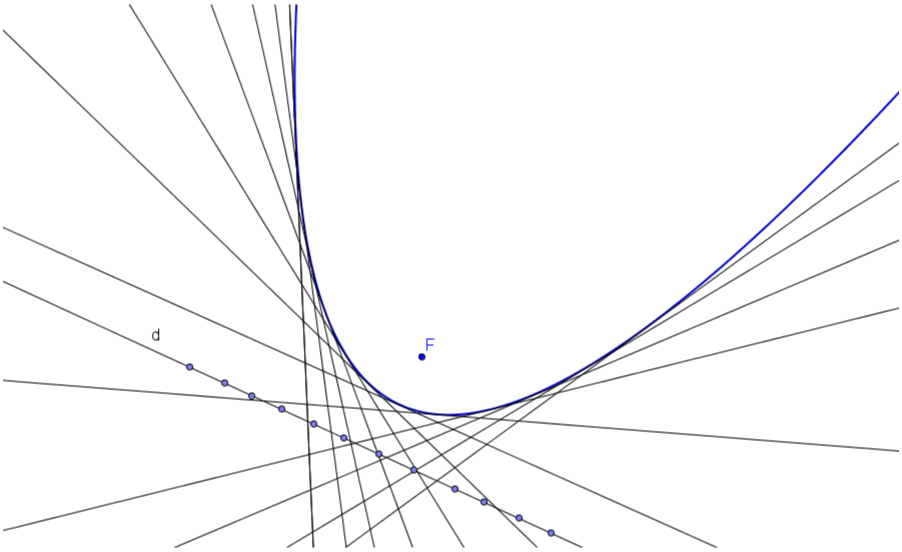


Figura 28: Proposição 2.1

A parábola é definida como a envoltória da família de suas tangentes.

$\square$

b) Construção da elipse com auxílio do Geogebra.

1. Obtenha dois pontos A e B na janela de visualização que serão os focos da elipse.
2. Determinar uma circunferência de centro A e raio maior que AB utilizando a ferramenta **círculo dado centro e raio**. Obtenha um ponto C na circunferência.
3. Construir os segmentos **AC e BC**.
4. Construir a mediatriz do segmento **BC**.
5. Determinar a interseção entre a mediatriz BC e o segmento AC. Este ponto será o ponto D.
6. Construir os segmentos BD e CD.
7. Ocultar a mediatriz e o segmento AC.
8. Habilitar rastro do segmento CD.
9. Clicar com o botão direito sobre o ponto C e habilitar *animar*.

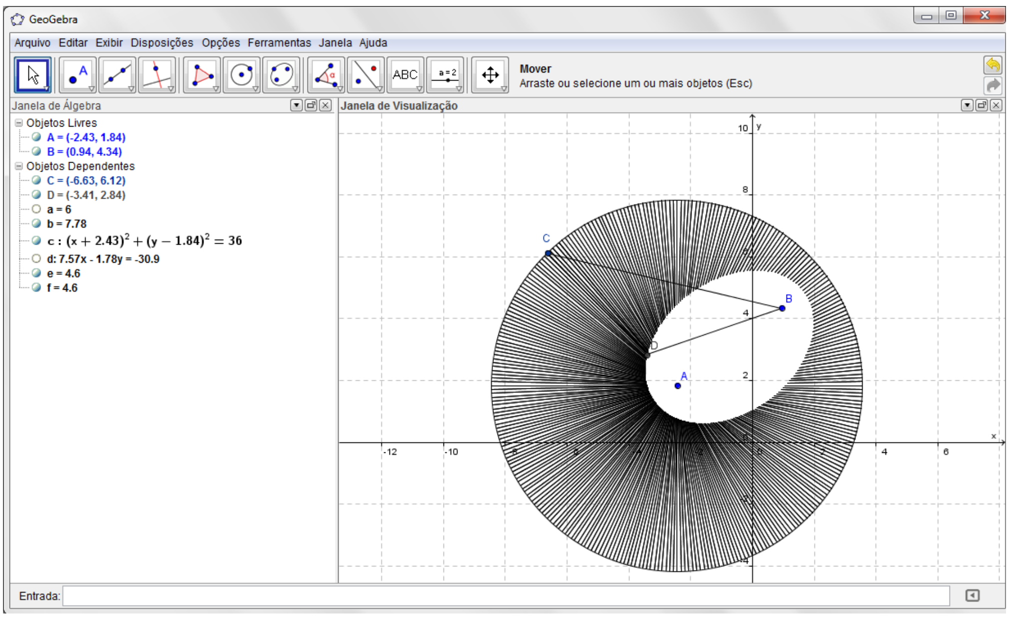


Figura 29: Elipse no Geogebra

A elipse irá se formar em alguns segundos. Para interromper a animação basta clicar com o botão direito sobre o ponto C na Janela de álgebra e desabilitar **animar**.

Os conceitos para obtenção dessa elipse podem ser observados a cada passo desta construção. Os pontos A e B, como dito, serão os focos da elipse; O raio da circunferência obtida no item 2 será o comprimento do eixo real da elipse que irá se formar. O que garante a obtenção da elipse interna à circunferência é a seguinte proposição.

Proposição 2.2. *Seja ε uma elipse de focos A e B, eixo maior 2a e uma circunferência γ de centro A e raio medindo 2a. Um ponto X pertence a γ se, e somente se, X é simétrico a B em relação a uma reta tangente a ε.*

Demonstração. Se X é simétrico a B em relação à reta tangente a ε em P, então o triângulo BPX é isósceles e $\overline{PX} = \overline{PB}$. Como $\overline{AP} + \overline{PB} = 2$a, logo $\overline{AP} + \overline{PX} = 2$a e X $\in \gamma$.

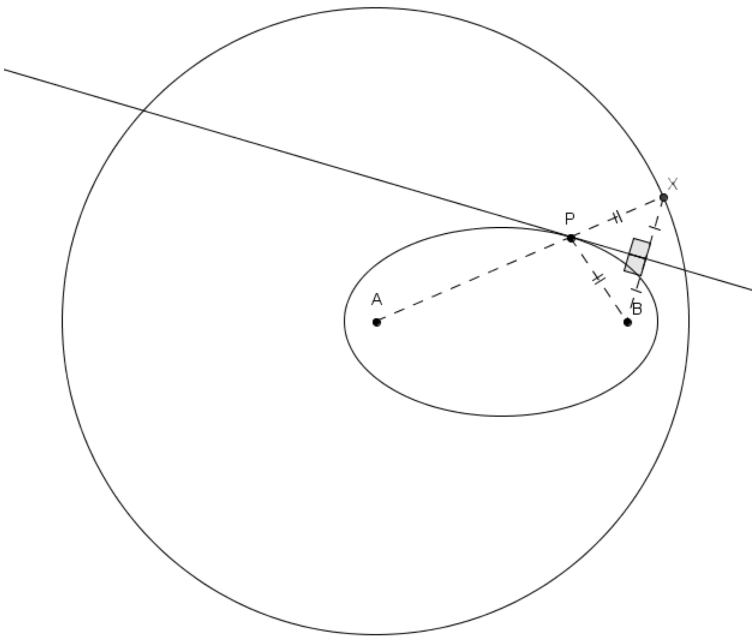


Figura 30: Proposição 2.2

A recíproca também é verdadeira. Seja X $\in \gamma$. Existe P $\in \varepsilon$ tal que $\overline{AP} + \overline{PX} =$ 2a. Como $\overline{AP} + \overline{PB} =$ 2a, temos que $\overline{PB} = \overline{PX}$ e o triângulo BPX é isósceles. Logo P $\in med_{\overline{XB}}$ e, como queríamos demonstrar, X é simétrico a B em relação a uma reta tangente a ε em P.

$\square$

A elipse se forma envolvida pelos infinitos segmentos XP que se obtém deslocando-se X sobre a circunferência.

c) Construção da hipérbole com auxílio do Geogebra.

1. Obtenha dois pontos A e B na janela de visualização que serão os focos da hipérbole.

2. Determinar uma circunferência de centro A e raio menor que AB utilizando a ferramenta **círculo dado centro e um de seus pontos**.

3. Obter um ponto D sobre a circunferência; Obter uma reta **a** passando pelos pontos A e D.

4. Obter o segmento BD.

5. Construir a mediatriz do segmento **BD**.

6. Determinar a interseção entre a mediatriz BD e a reta **a**. Este ponto será o ponto E.

7. Habilitar rastro da mediatriz do segmento **BD**.

8. Clicar com o botão direito sobre o ponto D e habilitar *animar*.

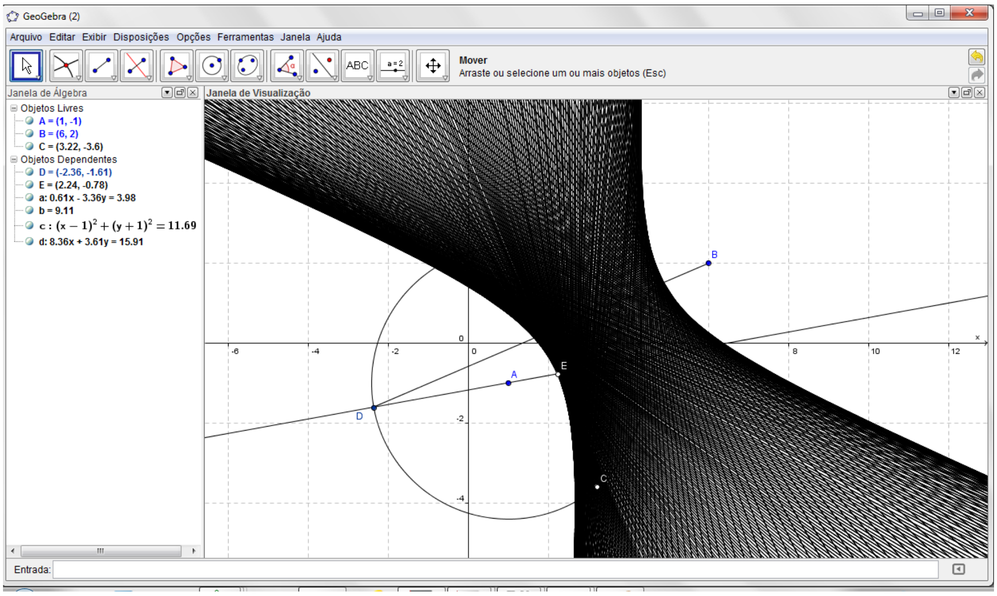


Figura 31: Hipérbole no Geogebra

A hipérbole irá se formar em alguns segundos. Para interromper a animação basta clicar com o botão direito sobre o ponto D na Janela de álgebra e desabilitar **animar**.

É importante ressaltar que o uso do software Geogebra em si não prova nenhum dos teoremas, pois, a matemática, enquanto ciência, utiliza–se do método dedutivo, no entanto, tal prática é de grande valia, pois, quando bem utilizada, facilita a compreensão do exposto por parte do educando.

3 Cônicas: Da contextualização à álgebra

Neste capítulo buscamos sugerir algumas alternativas para adentrar no tema *cônicas* no ensino médio. Como na proposta inicial deste trabalho, o seu objetivo principal era inverter a ordem da abordagem: Ao invés de sair da álgebra e no final chegar na aplicação, aqui buscamos primeiro despertar o interesse para o tema através da contextualização para em seguida trabalhar com a parte algébrica. Para isso, elegemos alguns temas que servirão de base para explicação de cada uma das cônicas: hipérbole, parábola e elipse. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio [6], o ensino da matemática deverá produzir um conhecimento efetivo, de significado próprio, não somente propedêutico. Trata-se de uma nova proposta para o Ensino Médio que,

> *... sem ser profissionalizante, efetivamente propicie um aprendizado útil à vida e ao trabalho, no qual as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente, evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa de escolaridade.* [6]

Seguindo esta proposta, buscamos convencer os nossos alunos de que a matemática não é uma ilha isolada perante à cultura, à história, às novas tecnologias, à arquitetura e outros. Faz-se necessário que as novas aprendizagens tornem-se práticas e aplicáveis no presente do educando. Seguindo um dito popular, *a primeira impressão é a que fica*, um bom apronte servirá de base para despertar o interesse junto ao educando. Como matemáticos, não devemos ficar distantes do aprendizado algébrico que se fará necessário para generalizar algumas situações, mas isso não deve ser mais ou menos importante que as informações as quais são agregadas como verdadeiras sementes do conhecimento, e estarão sendo plantadas neste campo fértil, aqui representado pela formação dos nossos educandos.

Com esse intuito, viajaremos nas curvas traçadas por Oscar Niemeyer, encontraremos soluções para as antenas parabólicas depois da era do sinal digital e terminaremos nossa viagem voando nos nostálgicos e incríveis *Dirigíveis* que, com suas formas elipsoidais, estão cotados para voltar nos dias de hoje como alternativas para transporte ecologicamente correto.

3.1 Hipérbole: Nas curvas de Oscar Niemeyer

> *Não é o ângulo reto que me atrai nem a linha reta, dura, inflexível, criada pelo homem. O que me atrai é a curva livre e sensual, a curva que encontro nas montanhas do meu país, no curso sinuoso dos seus rios, nas ondas do mar, no corpo da mulher preferida. De curvas é feito todo o universo, o universo curvo de Einstein*(Oscar Niemeyer, 1907-2012).

Com estas palavras não poderíamos esperar linhas retas de um arquiteto tão preocupado com o conjunto de suas obras e as impressões por elas deixadas. Oscar Niemeyer está presente em diversas partes do mundo, vivo em seus monumentos e nas suas construções. No Brasil são destaques o projeto arquitetônico da cidade de Brasília e o projeto arquitetônico da Lagoa da Pampulha em Belo Horizonte. São inúmeras as obras que aqui não nos cabem citá-las e sim reverenciar as suas belezas e as suas curvas. Em 1950, JK é eleito governador de Minas Gerais. A Pampulha já estava concluída e, para tudo, JK o convocava. Niemeyer era o seu arquiteto preferido. Passaram-se os tempos, JK foi eleito presidente da república. Logo, procura Oscar em sua casa em Canoas e confidencia: "*Vou construir a nova capital deste país e você vai me ajudar*". Explicando o que gostaria de fazer JK disse: "*Oscar, desta vez vamos construir a capital do Brasil.Uma capital moderna. A mais bela capital deste mundo!*". Daí em diante, a ideia de Brasília tomou conta de ambos. Israel Pinheiro ficou incumbido da construção e mesmo debaixo de muitas críticas, a construção foi a frente e se tornou o que é. A história completa desta construção pode ser encontrada na obra *As curvas do tempo - Memórias* de Oscar Niemeyer onde toda a sua vida é contada por ele próprio.

No momento, iremos ater-nos a algumas obras cujas curvas nos chamam atenção. Em particular, vamos explorar as curvas da catedral de Brasília cujo contorno traz traços hiperbólicos de fino trato que servirão de base para encontrarmos a álgebra desta cônica.

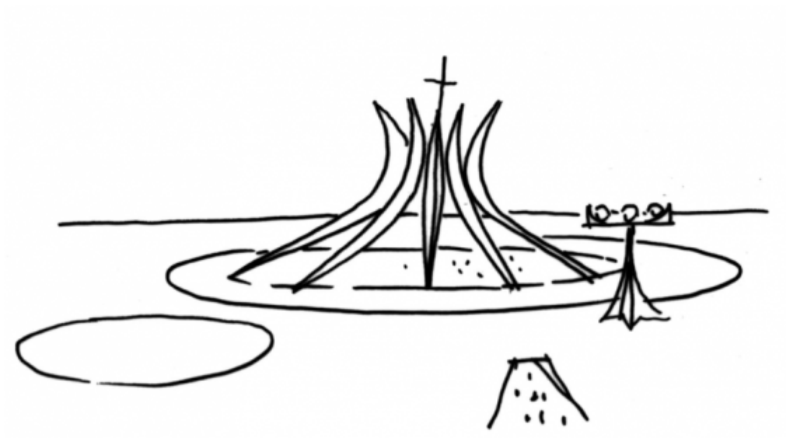


Figura 32: Croqui da Catedral de Brasília, obtida em www.avaad.ufsc.br [10]

A Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida conhecida como Catedral de Brasília, foi projetada para 4000 pessoas e seu projeto arquitetônico abrange vários outros elementos, mas aqui nos concentraremos apenas na catedral sob o ponto de vista estrutural. Sua obra foi iniciada em agosto de 1958 e em 1959 mesmo antes da inauguração da capital a sua forma estrutural de concreto na forma de hiperboloides regrado de revolução já estavam prontos.

Figura 33: Catedral de Brasília em construção. [9]

O fechamento dos pilares estavam prontos em 1967 e ela foi inaugurada em 31 de maio de 1971. Já passou por duas reformas mas as suas formas estruturais permanecem as mesmas.

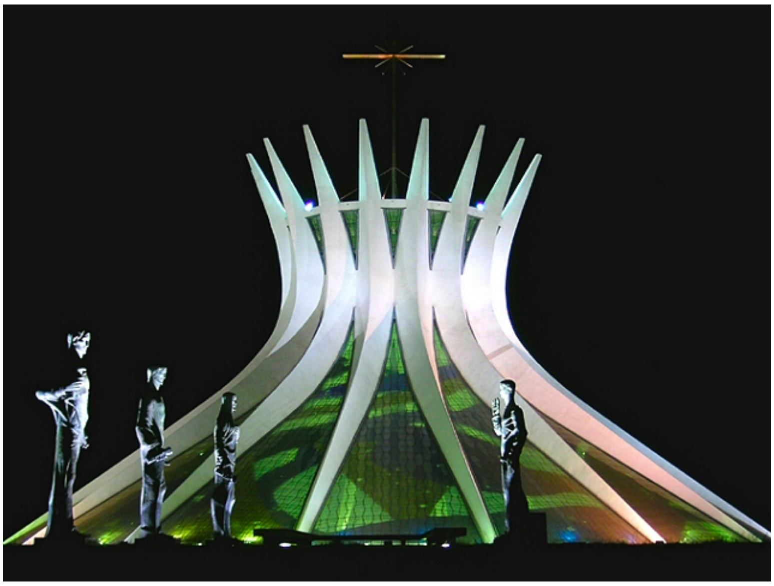


Figura 34: Catedral de Brasília [7]

Proposta para problematização

De acordo com a nossa proposta, sugerimos agora uma situação para relacionarmos a contextualização apresentada com a álgebra que é ensinada em sala de aula. Para isso apresentamos uma figura que sugere uma secção vertical da Catedral de Brasília.

A Figura 34 apresenta os elementos principais da hipérbole associada aos arcos hiperbólicos da Catedral Metropolitana de Brasília com centro no ponto **O** que também é origem do sistema cartesiano.

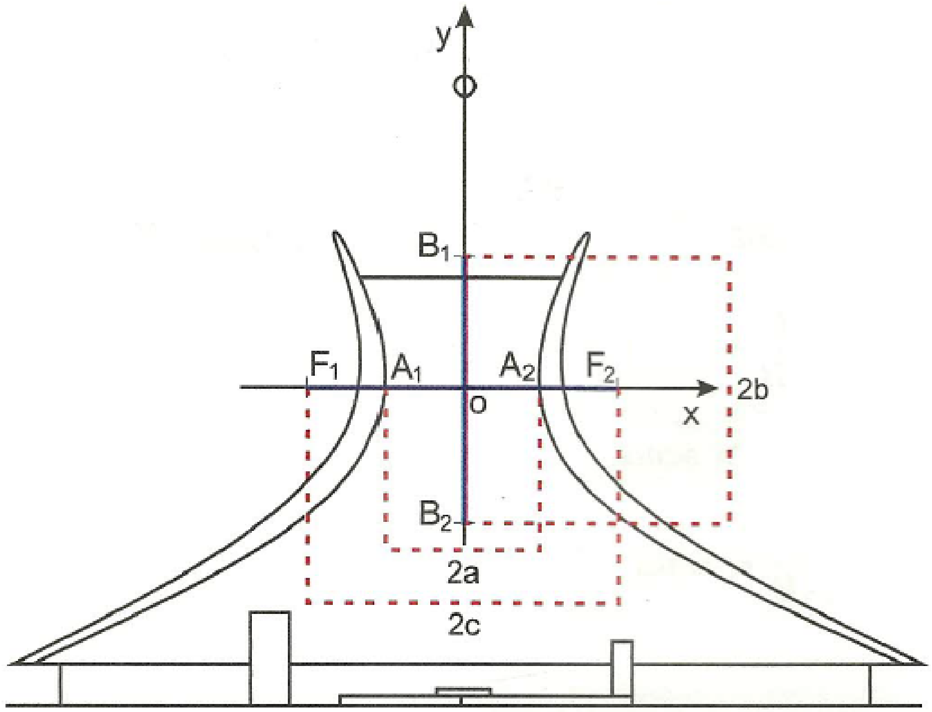


Figura 35: Corte esquemático da Catedral, representando os arcos hiperbólicos

Supondo que o eixo real (ou eixo transverso) da hipérbole mede 30 m e que a distância focal mede 50 m, determine:

a) a medida do eixo imaginário e as coordenadas dos focos.

b) a equação reduzida da hipérbole.

c) a equação geral da hipérbole.

d) a excentricidade da hipérbole.

No final deste trabalho apresentamos apenas o gabarito para estas questões por entender que elas são de fácil entendimento para o nosso leitor.

3.2 Parábola: Para onde irão as nossas antenas parabólicas?

É do conhecimento de todos que durante anos as antenas parabólicas vem sendo utilizadas para potencializar os sinais emitidos por satélites, melhorando consideravelmente as imagens reproduzidas nas TV's. Isto somente é possível devido a uma importante propriedade das superfícies parabólicas que convergem os sinais recebidos por elas em um único ponto, o foco da parábola. Neste foco localiza-se um receptor que por sua vez envia os sinais concentrados para um decoder ligado a um aparelho de televisão, proporcionando imagens limpas quase sem ruídos.

Figura 36: Antena parabólica

Porém, com a chegada do sinal digital, as antenas parabólicas tendem a ficar obsoletas, tendo em vista que o sinal digital é muito mais eficiente e suas antenas são mais compactas. Fica então uma pergunta: O que fazer com as antigas antenas parabólicas que enfeitam os lares brasileiros?

Uma boa sugestão para esta questão foi publicada na Revista Ciências do Ambiente On-Line [1] da Universidade de Campinas, onde foi apresentado um projeto para reutilização das antenas parabólicas: *A adaptação das antenas parabólicas comuns para captação de energia solar.* O projeto, segundo a publicação, ainda é economicamente inviável mas não deixa de ser uma boa proposta tendo em vista a atual busca de alternativas para obtenção de energia limpa e sem impactos ambientais. Ele é baseado na principal propriedade das superfícies parabólicas que é concentrar os raios solares que incidem sobre a sua superfície em um só ponto, o foco da parábola. Neste ponto é instalado uma placa de captação fotovoltaica concentrada cuja capacidade de geração deve ser compatível com todo o sistema. A superfície parabólica é revestida por um material refletor parecido com um espelho flexível. Por fim, é necessário conectar o sistema à rede elétrica. Para isso é necessário a utilização de um inversor, que vai transformar a corrente contínua fornecida pela placa fotovoltaica em alternada com frequência de 60Hz, padrão da rede elétrica brasileira, sem a necessidade da instalação de baterias de armazenamentos o que deixa o projeto mais econômico.

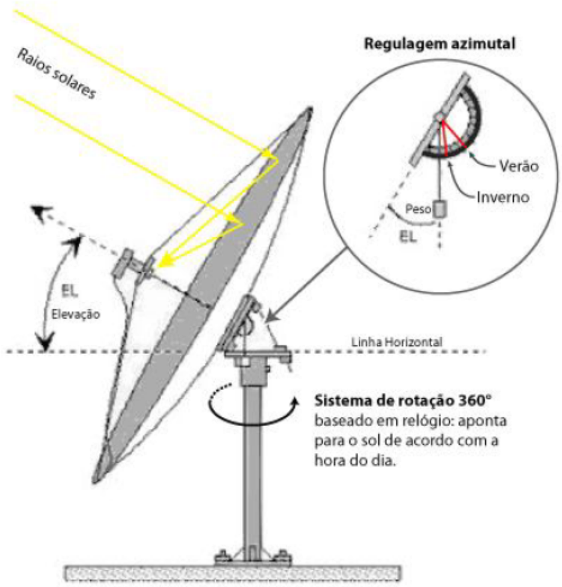


Figura 37: Esquema do projeto

O sistema não é estático pois direciona-se de acordo com a posição do sol com movimentos sobre o seu próprio eixo de 360º na horizontal e 90º na vertical visando otimizar a incidência de raios solares.

O valor para a adaptação da antena parabólica em antena de captação solar, segundo dados fornecidos pelo projeto, é de R$ 2.110,00 e a economia mensal de energia alcançada seria de R$ 16,58, o que torna o projeto inviável para os valores de época, tendo em vista que a vida útil do sistema é de dez anos, tempo estimado para deterioração. Porém, para as áreas de difícil acesso e até mesmo com dificuldades de obtenção de energia elétrica, ele seria uma solução interessante.

Figura 38: Imagem real do sistema obtida em [1]

Proposta para problematização

Suponhamos que uma antena parabólica esteja direcionada paralelamente com a superfície plana conforme a figura. Fixamos sobre ela o plano de coordenadas cartesianas xOy de forma que se tenha foco sobre o ponto (3, 2) e reta diretriz x = 4. Vamos determinar a equação cartesiana desta parábola.

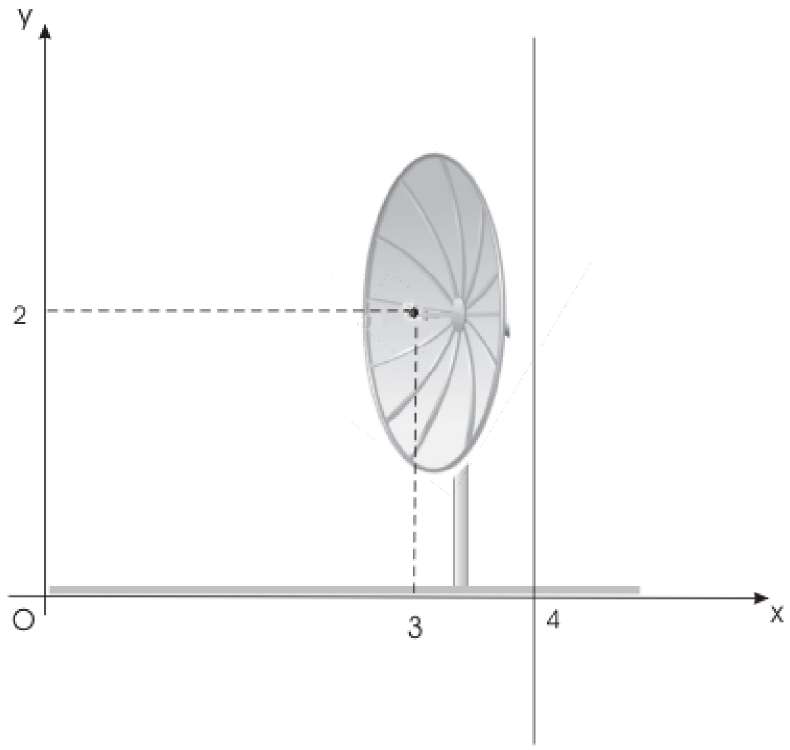


Figura 39: Esquema da proposta.

Soluçao: Temos $F(3,2)$; Seja P(x,y) um ponto qualquer da curva que estamos procurando e seja $Q(4,y)$ um ponto qualquer da diretriz. Da definição de parábola como lugar geométrico dos pontos cuja distância ao foco é igual à distância até a diretriz, temos:

$$d_{P,F} = d_{P,Q}$$

aplicando os valores fornecidos no enunciado

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-y)^2}$$

onde, elevando os dois membros da igualdade ao quadrado obtemos

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 8x + 16.$$

Reduzindo os termos semelhantes da equação vamos obter

$$2x = 3 - y^2 + 4y$$

de onde

$$x = -\frac{y^2}{2} + 2y + \frac{3}{2}.$$

Agora, completando quadrados na equação teremos:

$$x = -\frac{1}{2}(y^2 - 4y - 3) = -\frac{1}{2}[(y-2)^2 - 7]$$

que pode ser escrito na forma

$$x - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}(y-2)^2$$

chamada de forma canônica da equação da parábola. Esta forma deixa explícita as coordenadas do vértice da parábola que é o ponto $V(\frac{7}{2}, 2)$.

3.3 Elipse: Dirigíveis, formas cônicas que voam.

A história dos dirigíveis começa a ser contada à partir do ano de 1852 quando Henri Giffard construiu o primeiro dirigível motorizado, o qual apresentava um formato de charuto com 44 metros de comprimento, com bolsa preenchida com gás e hélice motorizada por um motor a vapor de 3 cavalos de força (2,2 kW). Mais tarde, em 1900, o Conde Ferdinand von Zeppelin, da Alemanha, inventou o primeiro dirigível rígido [8].

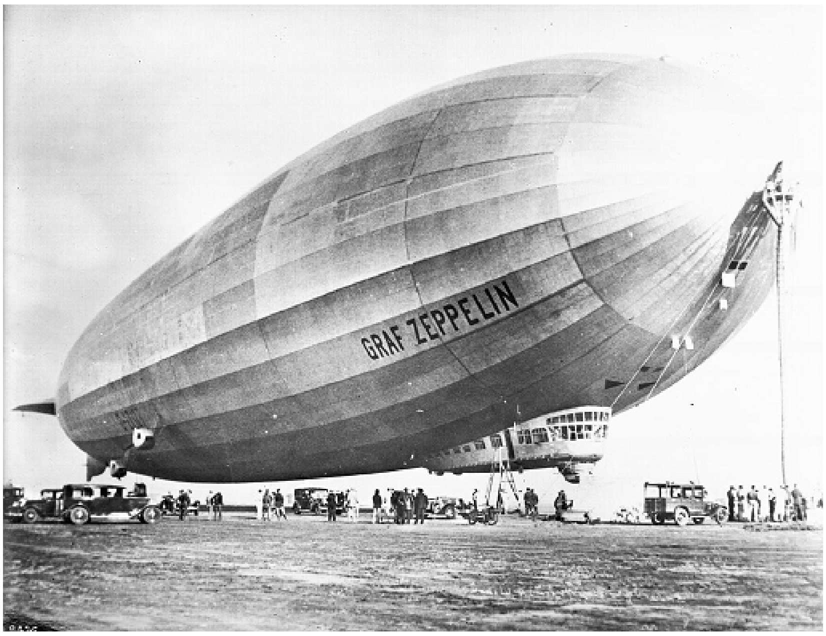


Figura 40: Foto do dirigível obtida em: www.google.com.br

Os dirigíveis atravessaram épocas e assumiram posição de destaque no turismo de alto luxo até que um terrível acidente ocorrido na tarde de 6 de maio de 1937 em Lakehurst, nos EUA, interrompeu a sua trajetória e tirou do ar esta impressionante forma matemática.

Foram 38 mortos no local, mais de um terço dos seus tripulantes. Outros foram socorridos mas não resistiram às queimaduras e vieram a falecer após o acidente nos hospitais. O gás hidrogênio que sustentava o dirigível no ar, era altamente inflamável e levou-o às chamas em poucos segundos.

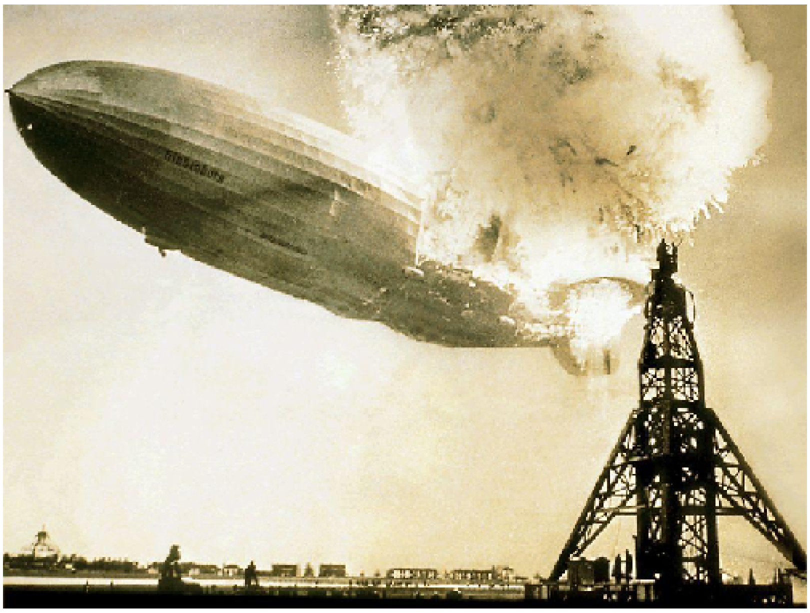


Figura 41: Foto do dirigível em chamas, obtida em: www.google.com.br

Após o acidente, o gás hidrogênio foi substituído pelo gás hélio que não é inflamável, mas mesmo assim o projeto dos dirigíveis perdeu força. Nos dias atuais ele volta a ser cogitado como alternativa viável para transporte de cargas, com data marcada para implantação. Paulo Vicente Caleffi, diretor de gestão da Bertolini, presidente da Federação das Empresas de Logística e Transporte de Cargas no Estado (Fetransul) e diretor da Airship, explica que pretende fazer o primeiro teste com o cargueiro ADB-3-30 em julho de 2016 [12]. O projeto é experimental mas ganha força com a atual situação das malhas rodoviárias e ferroviárias do país que beiram o caos.

Matematicamente, o que nos chama a atenção nos dirigíveis é o seu envelope, feito de material altamente resistente, que recebe em seu interior o gás hélio proporcionando a flutuação da aeronave. Visto lateralmente, o contorno do envelope nos lembra uma elipse. Fixando o seu eixo maior e por ele fazendo uma rotação de 360º devemos obter uma elipsoide de revolução. Podemos dizer que os dirigíveis tratam-se de uma evolução dos antigos balões cujas formas esféricas permitiam apenas controlar a sua altura sendo guiados pelas vontades dos ventos. Os dirigíveis são dotados de motores propulsores que tem por finalidade deslocá-lo para frente e para trás. Sua velocidade poderá ser de até 115 km/h. Para que isso ocorra e para que não haja um impedimento aerodinâmico, a forma elipsoidal do seu envelope é uma necessidade. Ela é dotada na ponta (nariz) de estruturas reforçadas que permitem a ancoragem e a passagem do ar em torno do envelope. Comparado com o transporte rodoviário, o ganho será enorme tendo em vista que o dirigível poderá viajar por muito tempo em linha reta sem os constrangimentos habituais das estradas e ferrovias brasileiras.

Figura 42: Foto do dirigível atual, obtida em: www.google.com.br.

Proposta para problematização

A figura abaixo sugere a vista lateral de um dirigível em pleno voo.

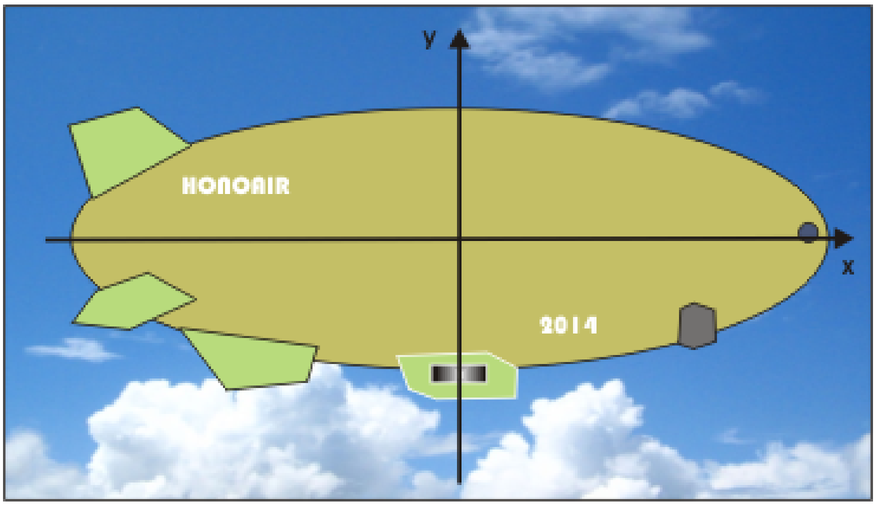


Figura 43: Proposta para problematização.

Na figura o contorno do envelope é uma elipse cujo eixo maior mede 120 m e a distância focal é 96 m. Determine:

a) a medida do eixo menor da elipse e as coordenadas dos focos.

b) a equação reduzida da elipse.

c) a equação geral da elipse.

d) a excentricidade da elipse.

Em anexo, apresentamos apenas o gabarito para estas questões por entender que elas são de fácil entendimento para o nosso leitor.

4 Conclusão

Com a realização deste trabalho, percebemos que todo conteúdo a ser ensinado, se devidamente contextualizado, enriquece o ambiente de aprendizagem e faz com que o educando veja com outros olhos a necessidade da sua educação. Vista por muitos como uma ciência pura, pronta e acabada, a educação matemática consegue abrir novas janelas para outros olhares ao sugerirmos uma nova abordagem. É muito saudável para o educando perceber que o educador consegue ter domínio não só da sua disciplina, mas também de fatos históricos e atuais que o cercam. Nós educadores, devemos estar preparados para este desafio que é dar vida e sentido ao que se ensina. Temos que nos preparar a todo momento para cada novo conteúdo ministrado em sala de aula. Os novos educandos estão sempre abertos para novidades mesmo que estas estejam calçadas em pedras passadas. De acordo com os parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio, a matemática deve deixar de ser a ciência do amanhã para poder apresentar soluções para a realidade do educando. Não devemos nos tardar em apresentar, através da matemática, soluções para problemas que nos permeiam.

A utilização das novas tecnologias em sala de aula mostra-nos que, apesar de resolver inúmeros problemas, o conhecimento acadêmico formal se faz, e se fará necessário por muito tempo. Para o domínio da máquina, devemos ter domínio do conhecimento. Sem este dueto, máquina-conhecimento, qualquer tecnologia irá se perder através do mal uso. O bom dos recursos computacionais é que podemos focar nos conceitos enquanto que o computador processa os cálculos. O programa GEOGEBRA é muito interessante e os seus resultados impressionam a todos. Mas o que seria dele se fosse utilizado por um leigo sem conhecimentos básicos em geometria? Restariam apenas e somente imagens como visto.

Estamos em 2014, tempos de soluções ecologicamente e economicamente viáveis. Sempre que possível devemos apresentar soluções novas para problemas antigos. Isto pode ser feito por nós, educadores, a todo momento. Não precisamos ser doutores do tema para apresentar em um ambiente de aprendizagem, alguma novidade para buscar resolver problemas antigos. Levantemos os temas e escutemos as opiniões.

Quando buscamos na história da construção de Brasília, formas matemáticas que nos chamam atenção e atravessam os tempos, encontramos a figura de Oscar Niemeyer que com sua genialidade e com seu trabalho se faz presente em diversas partes do mundo que hoje se dobram diante das suas curvas. Quem diria que uma solução tecnológica usadas para as imagens de tv, poderia se tornar um problema para a sociedade em tão pouco tempo. A reutilização das antenas parabólicas, apesar de, por enquanto, economicamente inviável, já aponta para solução de um problema futuro que em breve, com o avanço das tecnologias, poderá viabilizar-se economicamente. Os transportes rodoviários e ferroviários estão esbarrando no colapso. Muito do que nos afeta economicamente é fruto do alto custo dos transportes. Os dirigíveis estão de volta e com eles quem sabe a logística de transporte poderá ser repensada.

Durante a realização deste trabalho, pudemos perceber que como aconteceu com o tema cônicas alguns conteúdos matemáticos poderão ter novas abordagens. Ao buscarmos motivos para contextualização do tema, encontrarmos pessoas, recursos e informações que podem encher uma sala de aula e que por si, já mudariam os caminhos dos nossos educandos seja pelos seus exemplos, seja pelas suas contribuições. Impressiona-nos a vontade de aprofundar em novos assuntos e isso nos leva a atender os anseios dos nossos alunos, ávidos do conhecimento e abertos para o aprender. Retorno às palavras de um professor Doutor em matemática que em 2013, na sua última avaliação para uma turma de mestrandos, deixou os seguintes dizeres:

"Educar não é encher um balde; Educar é como acender uma lâmpada"

E a lâmpada se acendeu ...

5 Apêndice

Respostas para problematização da hipérbole.

a) 2b = 40; $f_1(25,0)$ e $f_2(-25,0)$

b) $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{400} = 1$

c) $16x^2 - 9y^2 - 3600 = 0$

d) $e = \frac{5}{3}$

Respostas para problematização da elipse.

a) 2b = 72; $f_1(48,0)$ e $f_2(-48,0)$

b) $\frac{x^2}{3600} + \frac{y^2}{1296} = 1$

c) $9x^2 + 25y^2 - 32400 = 0$

d) $e = \frac{4}{5}$

Referências

[1] Adaptação de antenas parabólicas comuns para captação de energia solar. Disponível em: http://www2.ib.unicamp.br/revista/be310/index.php/be310/issue/view/10. Acesso em 11 fev. 2014.

[2] ALVES, Sérgio. *A parábola revisitada.* Colóquio de Matemática da UFMS. Disponível em http://www.coloquiodematematica.ufms.br/conteudo/material/mc08.pdf. Acesso em: 23/01/2014.

[3] BARROSO, Juliane Matsubara. *Conexão com a matemática, volume único.* 1ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 2012.

[4] BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. *Curso de Matemática: volume único.* 3ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 2003.

[5] BOYER, Carl B. *História da Matemática.* 2ª Edição. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2003.

[6] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio parte III. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica: Brasilia (DF), 2006.

[7] Catedral de Brasília. Disponível em: http://es.wikipedia.org/wiki/Catedral-de-Brasilia. Acesso em 04 fev. 2014.

[8] Como funcionam os dirigíveis. Disponível em: http://viagem.hsw.uol.com.br/dirigiveis.htm. Acesso em 13 fev. 2014.

[9] Construção da Catedral. Disponível em: http://incriveisobras.blogspot.com.br 2011/06/catedral-de-brasilia.html. Acesso em 04 fev. 2014.

[10] Croqui da Catedral. Disponível em: http://www.avaad.ufsc.br/moodle/file.php/27/ catedral-brasilia-projeto-17-0-863-564.png. Acesso em 04 fev. 2014.

[11] Dirigível. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Dirigivel. Acesso em 13 fev. de 2014.

[12] Empresa avalia uso de dirigível para transporte de cargas pelo país. Disponível em: http://zerohora.clicrbs.com.br. Acesso em 13 de fev. de 2014.

[13] IEZZI, Gelson *Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica.* 5ª edição. São Paulo: Editora Atual, 2005.

[14] PEIXOTO, Hugo C. *Tópicos de Geometria Analítica: Parábola* [TCC - Mestrado]. Goiânia: UFG, 2013.

[15] REIS, Genésio Lima dos; SILVA, VAldir Vilmar da. *Geometria Analítica.* 2ª edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1996.

[16] SANTOS, Reginaldo J. *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* 1ª edição. Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.