UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
CAMPUS DE BAURU

PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

Andresa Maria Justulin

UM ESTUDO SOBRE AS RELAÇÕES ENTRE ATITUDES, GÊNERO E DESEMPENHO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM ATIVIDADES ENVOLVENDO FRAÇÕES

BAURU
2009

ANDRESA MARIA JUSTULIN

UM ESTUDO SOBRE AS RELAÇÕES ENTRE ATITUDES, GÊNERO E DESEMPENHO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM ATIVIDADES ENVOLVENDO FRAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, Área de Concentração em Ensino de Ciências, Faculdade de Ciências, UNESP -Universidade Estadual Paulista - Campus de Bauru, como requisito à obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência.

Orientador: Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola

BAURU
2009

Justulin, Andresa Maria.
Um estudo sobre as relações entre atitudes, gênero e desempenho de alunos do Ensino Médio em atividades envolvendo frações / Andresa Maria Justulin, 2009.
250 f.

Orientador: Nelson Antonio Pirola

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2009

1. Atitudes (psicologia). 2. Solução de problemas. 3. Desempenho. 4. Educação Matemática. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. II. Título.

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE BAURU
FACULDADE DE CIENCIAS DE BAURU

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ANDRESA MARIA JUSTULIN, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DO(A) FACULDADE DE CIENCIAS DE BAURU.

Aos 03 dias do mês de abril do ano de 2009, às 09:00 horas, no(a) Sala 05 da Pós-graduação, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA do(a) Departamento de Educação / Faculdade de Ciências de Bauru, Profa. Dra. MÁRCIA REGINA FERREIRA DE BRITO do(a) Departamento de Psicologia Educacional / Universidade Estadual de Campinas, Profa. Dra. MARIA DO CARMO DE SOUSA do(a) Departamento de Metodologia do Ensino/ Universidade Federal de São Carlos, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a argüição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de ANDRESA MARIA JUSTULIN, intitulada "Um estudo sobre as relações entre atitudes, genero e desempenho de alunos do ensino médio em atividades envolvendo frações". Após a exposição, a discente foi argüida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA

Márcia Regina F. de Brito
Profa. Dra. MÁRCIA REGINA FERREIRA DE BRITO

Profa. Dra. MARIA DO CARMO DE SOUSA

À pequena Bianca e ao Rafael,
minhas dádivas, meus sobrinhos.

AGRADECIMENTOS

Ao final deste trabalho, percebo que a concretização deste sonho só foi possível graças a muitas pessoas:

A Deus, por ter me dado, além da oportunidade de realizar um sonho – o mestrado, ter me concedido força para levantar a cabeça e olhar adiante nos momentos de tristezas e dificuldades.

Ao Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola, meu orientador e professor desde a graduação, por todos os seus conhecimentos compartilhados, incentivo e atenção durante toda minha trajetória acadêmica.

Aos meus pais, João Batista e Lourdes, que, na honestidade, humildade e simplicidade, criaram seus filhos e mostraram o que é ser grande e forte realmente. Pai, um dia você sonhou que seus filhos pudessem cursar uma faculdade: hoje lhe agradeço por me apoiar em cada momento.

À Andréa e ao Carlos, meus irmãos, por todo o carinho e compreensão. Eu nunca me esquecerei de cada palavra de apoio e força. Quanto orgulho tenho de vocês!

À Bianca e ao Rafa, meus sobrinhos, que, por serem crianças, me mostraram o valor de um sorriso e de uma amizade verdadeira. Amo vocês!

A toda a minha família: meus primos, tios, tias, avós, cunhados, pela compreensão nas ausências. Vocês me deram força em cada palavra de saudade!

Aos amigos da pós-graduação, pelo apoio e companheirismo em todos os eventos e momentos em que estivemos juntos.

Aos professores da Pós-Graduação, pelas valiosas discussões promovidas nas disciplinas ministradas.

Às funcionárias da pós-graduação, Ana Grijo, Andressa e Toninha, pela atenção e carinho em todos os momentos.

À Profª Drª Irene Mauricio Cazorla, da UESC- BA, por toda atenção, paciência e ajuda no tratamento estatístico deste trabalho.

À Profª Salete Rossi, pela ajuda e paciência na correção ortográfica e gramatical deste projeto.

À Profª Elinara e ao Marcelo, pelo auxílio nas questões referentes à língua inglesa.

Aos amigos que pude encontrar na Diretoria de Ensino de Jaú, na Oficina Pedagógica, durante o tempo da "Bolsa Mestrado". Obrigada por todo o carinho com que me acolheram e por tudo o que me ensinaram: lições de vida, lições de educadores!

Às diretoras, coordenadoras e professores das escolas estaduais Ephigênia Cardoso Machado Fortunato e Idalina Vianna Ferro, que me acolheram gentil e prontamente para a realização desta pesquisa.

Aos alunos participantes da pesquisa, que concordaram em realizar as atividades com seriedade e atenção.

Às professoras doutoras Márcia Regina Ferreira de Brito e Maria do Carmo de Sousa, pelas valiosas sugestões e orientações dadas na banca de qualificação.

Por último agradeço aos meus amigos. A todas as pessoas que passaram pela minha vida, que me acolheram, que mesmo se assustando com minha sinceridade por vezes exagerada não desistiram de mim. Obrigada por "me levarem ao céu ou por me darem um pedacinho de terra firme". A todos vocês, espero que se lembrem que "o valor das coisas não está no tempo que elas duram, mas na intensidade com que acontecem. Por isso existem momentos inesquecíveis, coisas inexplicáveis e pessoas incomparáveis." (Fernando Pessoa)

O homem nasceu para aprender,

aprender tanto quanto a vida lhe permita.

João Guimarães Rosa

RESUMO

A pesquisa teve por objetivo investigar as relações entre o desempenho na solução de problemas e exercícios sobre frações e algumas variáveis afetivas como: as atitudes em relação à Matemática, as atitudes em relação a frações, o gênero e a série. Participaram da pesquisa 95 estudantes do Ensino Médio (1ª, 2ª e 3ª séries) de uma escola pública pertencente à Diretoria de Ensino de Jaú. Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram: escala de atitudes em relação à Matemática, prova de Matemática de algoritmo, prova de Matemática conceitual, prova envolvendo problemas e escala de atitudes em relação a frações. Esta última foi, ainda, aplicada em 373 estudantes do Ensino Médio e, em seguida, testada e validada. O alfa de Cronbach, que mede a fidedignidade do instrumento, foi de 0,9443, considerado muito bom. Após a correção das provas, cinco participantes foram selecionados e submetidos ao método do “pensar em voz alta”. Os resultados do tratamento estatístico indicaram que as correlações mais fortes foram entre as notas na prova de algoritmo e dos problemas (r (95) = 0,714; p = 0,000), entre as escalas de atitudes em relação à Matemática e em relação a frações (r (94) = 0, 678; p = 0,000) e, em menor grau, entre a nota dos problemas e a escala de frações (r (94) = 0, 532; p = 0,000). Com relação ao gênero, não foram encontradas diferenças significativas. Observou-se também que o desempenho geral tende a melhorar conforme a série, ao contrário do que acontece com as atitudes em relação à matemática. A análise qualitativa dos protocolos obtidos indicou que os alunos apresentam uma facilidade maior em resolver exercícios padronizados ao invés de solucionar problemas, o que pode ser um reflexo da como o ensino da Matemática escolar tem se processado de forma mecânica, com a supervalorização da resolução de exercícios em detrimento do trabalho com a solução de problemas, como aponta a literatura especializada em Educação Matemática.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Desempenho. Atitudes. Frações. Solução de Problemas.

Este estudo recebeu apoio financeiro da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo através do Projeto Bolsa Mestrado.

ABSTRACT

The research had as its objective to investigate the relations between the performance in the solution of problems and exercises about fractions and some emotional variables such as: the attitudes in relation to mathematics, the attitudes in relation to fractions, the genre and the grade. 95 students of High School (1st, 2nd and 3rd grades) from a public school belonging to the Secretary of Education of Jaú, participated in the research. The instruments used for the collection of data were the following: scale of attitudes in relation to mathematics of algorithm, test of conceptual mathematics, test involving problems and scale of attitudes in relation to fractions. This last one was still applied in 373 students from High School and, then, tested and validated. Cronbach's alpha which measures the faithfulness of the instrument was 0,9443, considered a very good result. After correcting the tests, 5 participants were selected and submitted to the method of "thinking in loud voice". The results of the statistic treatment indicated that the strongest correlations were between the marks in the test of algorithm and of the problems ($r(95) = 0{,}714$; $p = 0{,}000$), between the scales of attitudes in relation to mathematics and in relation to fraction ($r(94) = 0{,}532$; $p = 0{,}000$) and in smaller degree, between the mark of the problems and the scale of fractions ($r(94) = 0{,}532$; $p = 0{,}000$). In relation to the genre, no significant differences were found. Also, it was observed that the general performance tends to increase according to the grade, in contrast of what happens to the attitudes in relation to mathematics. The qualitative analysis of the protocols obtained indicated that the students showed a greater facility in solving standardized exercises instead of solving problems, which can be a reflex of the way how the teaching of the school mathematics has processed itself in a mechanical way, with the super valuation of the resolution of exercises in detriment of the work with solution of problems, as the literature specialized in Mathematics Education points out.

Key-words: Mathematic Education. Performance. Attitudes. Fraction. Solution of Problems.

This study received financial support from the Education Department of São Paulo State through the project Master Scholarship.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> *Não é a Matemática per se que produz atitudes negativas. Aparentemente, elas se desenvolvem ao longo dos anos escolares, muito relacionadas a aspectos pontuais: o professor, o ambiente na sala de aula, o método utilizado, a expectativa da escola, dos professores e dos pais, a autopercepção do desempenho, etc.*
>
> *Márcia R. F. Brito*

A Educação Matemática é um campo científico cujas pesquisas têm concorrido para o avanço teórico e metodológico dessa área, além de contribuir para a melhoria do ensino da matemática escolar. Alguns trabalhos como Pirola (1995), Alves (1999), Dobarro (2007) entre outros, verificaram que muitos alunos saem da escola sem o desenvolvimento de habilidades básicas em matemática. Dessa forma, o desempenho dos estudantes do Ensino Médio encontra-se comprometido pela falta de domínio de conceitos matemáticos elementares, como o de Números Racionais.

Além da Matemática e da Educação, outros campos do conhecimento se interseccionam para compreender as relações entre as diferentes variáveis que interagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Entre eles destacamos a psicologia da Educação Matemática, que colabora, segundo Brito (2001, p. 51), com "o entendimento sobre como as pessoas aprendem e ensinam a Matemática".

As pesquisas em Psicologia da Educação Matemática buscam investigar, entre outros aspectos, os fatores afetivos, cognitivos e comportamentais. O estudo dos fatores psicológicos corrobora com a percepção e identificação de variáveis afetivas que podem interferir no desenvolvimento do indivíduo e em sua aprendizagem e desempenho escolar (DOBARRO, 2007).

Muitas vezes, no processo educacional, pode-se cometer o equívoco de trabalhar a afetividade somente nas séries iniciais e não achar necessário trabalhá-la no ensino médio. Entretanto parece necessário, conforme apontam os Parâmetros Curriculares Nacionais/ Temas Transversais (BRASIL, 1998c, p. 187), que "... mais do que informações e conceitos, a escola se proponha a trabalhar com atitudes, com formação de valores, com o ensino e aprendizagem de procedimentos". Dessa forma, as diversas disciplinas devem dar atenção não apenas aos conteúdos, mas, inclusive, aos fatores afetivos que podem contribuir com o desempenho do aluno e, por isso, devem ser considerados e desenvolvidos em sala de aula.

A escolha de uma pesquisa envolvendo atitudes em relação à Matemática teve origem em minha própria experiência como aluna e professora do Ensino Fundamental e Médio. Durante os meus anos de escolaridade no Ensino Fundamental e no CEFAM (Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério), foi possível perceber que muitos colegas tinham aversão à Matemática, sentiam ansiedade, medo ou total ódio a tudo o que envolvesse números. Com isso, os fatores afetivos relacionados ao ensino de Matemática chamaram-me a atenção. No Ensino Superior, a partir de um projeto de iniciação científica, foram identificados alguns dos motivos que levariam os alunos a evitar a área de exatas e, com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), foi realizada uma pesquisa (JUSTULIN e PIROLA, 2005) para investigar as atitudes em relação à Matemática na Educação Infantil. Nesse estudo, foi elaborada uma escala de atitudes, do tipo likert[1], composta por 16 proposições para identificar o direcionamento das atitudes em relação à Matemática, com base na escala de atitudes validada por Brito (1996). Os resultados apontaram que as crianças tinham atitudes positivas em relação à matemática, sendo que as meninas apresentaram as mais favoráveis.

Em contrapartida, atuando como professora nas aulas de Matemática para o Ensino Médio, foi possível observar que alguns estudantes apresentavam pouca motivação em aprender conteúdos matemáticos, julgando serem estes difíceis e complicados. A situação torna-se pior com a introdução da Química e da Física, que utilizam cálculos matemáticos. No Ensino Fundamental, os educandos, frequentemente, não vislumbravam a importância e presença do conteúdo matemático em suas vidas e sempre indagavam o professor sobre a utilidade e necessidade de aprender os conteúdos matemáticos.

O Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, de acordo com a LDB 9394 de 1996, com duração mínima de três anos, deve (ou deveria) aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento dos estudos e preparação do aluno para o exercício profissional.

A matemática no Ensino Médio tem um valor formativo que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, sendo também uma ferramenta para a vida cotidiana e

---

[1] Escalas do tipo Likert usam o método somativo. São compostas por proposições cujas possibilidades de resposta variam do discordo totalmente até o concordo totalmente. O participante escolhe uma delas, de acordo com seu sentimento ou opinião. Ao final, como metade das proposições é de natureza negativa e as outras positivas, o valor das atitudes é a soma dos pontos de cada uma delas. (valor 1 para o discordo totalmente e assim sucessivamente).

para outras atividades diárias. Deve ser vista pelo adolescente não apenas como um conjunto de técnicas e estratégias a serem aplicadas em outras áreas do conhecimento e na atividade profissional, mas como uma ferramenta para a interpretação do mundo.

Nessa etapa de escolaridade, o aluno deve dominar os conteúdos do Ensino Fundamental e aprofundá-los. Somente com o domínio dos fatores cognitivos, afetivos e sociais, e não apenas de conteúdos, poderá, de acordo com o PCN do Ensino Médio, parte III, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, entender, por exemplo, que "A compreensão da matemática é essencial para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional" (BRASIL, 1999, p. 41). Muitos alunos percebem a matemática como um sistema de regras ou de símbolos descontextualizados e inúteis.

Uma análise das avaliações governamentais sobre o desempenho em Matemática de alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio mostra baixos índices das escolas públicas nas provas de Matemática do SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) e SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica). Dos estudantes avaliados na 3ª série do Ensino Médio nas provas do SAEB de 2005 e SARESP de 2007, mais de 60% obtiveram resultados abaixo do nível básico, de acordo com São Paulo (2008c, p. 25).

Os resultados insatisfatórios apontam para a urgência de elaboração de políticas públicas eficientes e urgentes, buscando a melhoria do desempenho dos alunos e da qualidade de ensino, mas também servem para mostrar aos professores, formadores e pesquisadores em educação como está a aprendizagem dos alunos em Matemática.

Um dos eixos metodológicos da Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008b) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999) e que não tem apresentado bons resultados em avaliações oficiais é a solução de problemas. Os documentos oficiais citados acima destacam a importância dessa estratégia de ensino não apenas nas aulas de Matemática, e, ao estabelecer a área Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, reafirmam a necessidade de um trabalho multidisciplinar. As propostas apontam para uma abordagem das ciências da natureza com base na solução de problemas. Dessa forma, as disciplinas, de maneira articulada, abarcariam conhecimentos da Matemática.

> Os alunos, confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções;

> desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1999, p. 105)

Na psicologia educacional, diversos autores como Mayer (1992), Pozo (1998), Sternberg (1992, 1994 e 2000), Pirola (2000), Brito (2006) analisaram a solução de problemas e afirmaram a importância desse conteúdo nos currículos escolares.

Polya (1986) afirmou que "Resolver problemas é uma atividade humana fundamental. De fato, a maior parte do nosso pensamento consciente relaciona-se com problemas". Embora a resolução de problemas seja entendida, atualmente, como um eixo metodológico do ensino de Matemática, esse tema tem se constituído como a etapa final do processo do ensino de conteúdos matemáticos, enfatizando a aplicação de conceitos. É preciso, porém, entender que a solução de problemas é o início da atividade matemática em que o aluno é estimulado, diante de um problema, a levantar conjecturas, elaborar procedimentos e estratégias, organizar seu raciocínio e utilizar conceitos já aprendidos.

A resolução de problemas pode contribuir para a formação do estudante, motivando-o e fazendo com que mobilize conceitos aprendidos e conhecimentos prévios. Deve-se ressaltar que o fator afetivo pode influenciar o desempenho do aluno e sua valorização poderá refletir em melhoria do ensino.

Brito (1996) compilou referências importantes ao tema gênero, atitudes e a aprendizagem de Matemática. A autora destaca que existe uma crença segundo a qual os indivíduos do gênero masculino teriam habilidades matemáticas mais desenvolvidas do que os do gênero feminino, e que, no ambiente escolar, isso se reflete até na escolha profissional.

A autora estudou e fez um vasto levantamento bibliográfico sobre as atitudes em relação à Matemática; validou e testou uma escala de atitudes elaborada por Aiken e Dreger (1961) e mostrou que os estudantes do Ensino Fundamental investigados em sua pesquisa parecem apresentar atitudes positivas em relação à Matemática.

Alguns conteúdos parecem provocar nos alunos certa aversão. É o caso das frações. Esse assunto aparece nas séries iniciais do Ensino Fundamental, mas é abordado até no Ensino Médio[2]. Alguns trabalhos como Oliveira (1996), Prado (2000) e Catalani (2002) apontaram que alunos e professores têm encontrado dificuldade em relação ao ensino de

[2] O currículo de matemática da rede estadual de ensino estabelece que, ainda no Ensino Fundamental (na 4ª série), os alunos adquirem as primeiras noções de números fracionários e, daí em diante, podem realizar operações (soma, subtração, multiplicação, potenciação etc), sendo capazes de solucionar equações e problemas envolvendo frações.

frações. Embora os números fracionários estejam presentes no cotidiano, parece que os estudantes não gostam ou não se sentem familiarizados ao trabalhar com eles.

Essas pesquisas concentram-se nos aspectos cognitivos da aprendizagem ao abordar o ensino de frações. Ao propor uma (re)criação dos conceitos matemáticos dos racionais através da história da matemática ou o ensino através dos diversos significados de frações (medidas, parte-todo, quociente, número e operador multiplicativo), é possível notar uma despreocupação com os fatores afetivos dos estudantes. No entanto, estes são essenciais para que o aluno perceba esses conceitos matemáticos como ferramentas úteis para interpretar o mundo a sua volta.

Os resultados do SARESP[3] (2007) apontam algumas deficiências no ensino de frações. Um problema proposto para a 4ª série do Ensino Fundamental, solicitava:

> Em um concurso, o melhor goleiro foi eleito com 34 de um total de 85 votos. A fração que representa esta votação é:
>
> a) $\frac{34}{119}$ c) $\frac{34}{85}$
>
> b) $\frac{85}{119}$ d) $\frac{85}{34}$

Figura 1 - Problema aplicado para a 4ª série do Ensino Fundamental no SARESP (2007)

A situação-problema exigia que o aluno conhecesse o conceito de numerador e denominador, ou seja, que o aluno dominasse a escrita simbólica $\frac{a}{b}$. Os resultados indicaram que 17% dos participantes assinalaram a letra d, o que indica um entendimento equivocado da relação parte-todo. A falta de compreensão dessa relação faz com que o aluno não considere o denominador como sendo o todo do inteiro e o numerador como as partes, o que implica no não conhecimento da forma de representação adequada. O número de acertos variou de 60% a 70% dos alunos avaliados.

Na 6ª série do Ensino Fundamental, os resultados são piores, apenas 10% dos alunos foram capazes de resolver problemas envolvendo operação com frações (Figura 2). A habilidade avaliada foi “Resolver situação-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números racionais” (SÃO PAULO, 2007, p. 27). No entanto, ao analisar conceitualmente, pode-se perceber que, para o aluno resolver corretamente o

[3] SARESP - Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

problema, o mesmo deveria apresentar o domínio da soma e multiplicação de frações, além dos conceitos de equivalência e número misto.

> Robson utilizou $\frac{3}{4}$ de 1 litro de tinta para pintar a sala de sua casa. Sabendo que o restante da casa equivale a 3 vezes a área pintada da sala, quantos litros de tinta ele precisará para pintar os outros cômodos?
>
> a) $2\frac{1}{4}$ b) $\frac{9}{12}$
>
> c) $3\frac{3}{4}$ d) $\frac{12}{4}$

Figura 2 - Problema aplicado para a 6ª série do Ensino Fundamental no SARESP (2007)

A resposta correta é a letra A, mas um número significativo de alunos (39% e 40%, respectivamente) assinalou as alternativas B e C. Tal equívoco pode indicar que, na letra B, os alunos desconhecem a multiplicação de fração ou ainda, na letra C, que os sujeitos confundem as operações com a representação de número misto. Outra dificuldade pode ser a falta de compreensão do enunciado do problema que acarretaria na identificação incorreta da operação a ser realizada. Os trabalhos de Alves (1999), Pirola (2000) ao abordarem a solução de problemas aritméticos e geométricos constataram que os estudantes equivocavam-se no estágio da obtenção da informação matemática.

Já no Ensino Médio (3ª série), nenhuma questão do SARESP (2007) avaliou diretamente as habilidades dos alunos em solucionar problemas ou realizar operações com frações. Conforme a escala de proficiência em matemática estabelecida[4], os estudantes desta série deveriam atingir um intervalo entre 350 e 400 pontos, ou seja, deveriam ser capazes de (em relação ao eixo Números, Operações, Relações e Funções):

- Identificar a representação de uma fração ou porcentagem;
- Resolver uma expressão numérica envolvendo números decimais e fracionários;
- Resolver problemas envolvendo operações com frações e porcentagem
- Transformar porcentagem para a forma de fração;
- Calcular o quociente entre duas expressões algébricas simples

[4] Inicialmente estabelecida pelo SAEB e também utilizada pelo SARESP

No entanto, se os alunos não apresentam um bom desempenho no Ensino Fundamental em frações, possivelmente, surgirão dificuldades em outros conceitos que envolvem os números racionais. A ideia de função, as relações trigonométricas são exemplos de conteúdos que envolvem ideias estabelecidas e construídas no Ensino Fundamental e que são utilizadas no Ensino Médio.

Tendo em vista que os alunos concluintes da Educação Básica devem estar aptos a resolver exercícios e solucionar problemas envolvendo frações, e considerando que os fatores afetivos exercem influências sobre a aprendizagem, a presente pesquisa procura investigar as atitudes e identificar os principais procedimentos utilizados pelos alunos do Ensino Médio na solução de problemas, bem como os entendimentos dos estudantes sobre frações, buscando responder ao seguinte problema de pesquisa:

Quais as relações entre as atitudes, o gênero, o desempenho e os procedimentos utilizados por alunos do ensino médio em atividades envolvendo frações?

Para responder esse problema geral, foram investigadas as seguintes questões:

- Como se apresentam as atitudes dos alunos do Ensino Médio em relação à Matemática?
- Existem diferenças significativas entre gênero e atitudes em relação à Matemática?
- Qual o desempenho dos estudantes do Ensino Médio em atividades envolvendo frações?
- Quais procedimentos são utilizados pelos alunos na solução de exercícios e problemas?
- As atitudes e o desempenho dos estudantes do ensino Médio variam de acordo com a série? Como? Há uma relação entre essas variáveis?

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos, sendo que o Capítulo 1 refere-se ao Ensino Médio, abarcando um pouco de sua Constituição histórica e o enfoque que os números racionais receberam em algumas propostas curriculares. Destaca também a Matemática e seus objetivos dentro do Ensino Médio atual.

O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica do trabalho, sendo composto de três partes. A primeira aborda a questão das atitudes em relação à Matemática. A segunda parte enfoca a solução de problemas. A terceira trata das frações, abarcando a origem dos números fracionários e o ensino das frações.

O Capítulo 3 mostra algumas pesquisas constantes da literatura pertinente sobre afetividade, abordando questões relativas a gênero, atitudes, influências na formação de atitudes, dentre outras. Sobre as frações são apresentados trabalhos que expõem algumas metodologias de ensino. Quanto à solução de problemas, algumas pesquisas retratam as principais dificuldades encontradas pelos alunos e professores para trabalharem esse conteúdo.

O Capítulo 4 traz a metodologia da pesquisa, destacando os sujeitos, instrumentos e procedimentos para a coleta de dados. Nele se estabelecem algumas categorias de análise para as entrevistas realizadas.

O Capítulo 5 expõe alguns resultados obtidos a partir dos instrumentos aplicados aos participantes. Nesse capítulo, além de se realizarem algumas análises quantitativas por meio de um software estatístico, também se evidencia um tratamento qualitativo, observando os procedimentos utilizados nas atividades que envolvem frações. A discussão dos resultados e conclusões finais do estudo constam no Capítulo 6.

CAPÍTULO 1 - SOBRE O ENSINO MÉDIO E O ENFOQUE DOS NÚMEROS RACIONAIS EM ALGUMAS PROPOSTAS CURRICULARES

Neste breve retrato da educação brasileira, enfocaram-se suas principais reformas curriculares e o Ensino Médio. Em seguida, abordou-se o currículo atual e os objetivos da Matemática presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Com isso, buscou-se caracterizar as diversas finalidades atribuídas a esse nível de ensino e as várias abordagens de ensino e aprendizagem da Matemática.

Os números racionais e, mais especificamente, o ensino das frações, também passaram por diversos enfoques nos Guias Curriculares, Propostas Curriculares do Estado de São Paulo e Parâmetros Curriculares Nacionais. Foram destacadas as várias interpretações e metodologias de ensino propostas nos documentos acima citados.

1.1 Sobre a história do Ensino Médio

Uma das preocupações dos portugueses ao chegarem ao Brasil foi a colonização e, com ela, a instrução e catequização dos colonos e dos primitivos habitantes desta terra. Instituiu-se, então, no país, a Educação Jesuítica. Desse modo, a educação oficial passou a ser de responsabilidade dos jesuítas, que trouxeram à colônia, em 1599, o *Ratio Atque Institutio Studiorum Societatis Jesu.* Com esse código educacional, o ensino brasileiro seguiu, por mais de duzentos anos, a tradição clássico-humanista (MIORIM, 1998, p. 81). Destaca-se ainda que as ciências exatas não eram valorizadas pelos jesuítas.

A partir de 1792, com a Reforma Pombalina, foram criadas as “aulas régias”. Eram aulas de disciplinas isoladas e tinham por objetivo preencher a lacuna deixada pela eliminação da estrutura escolar jesuítica. As aulas régias eram ministradas em locais diferentes, espalhados pelo país e não apresentavam um planejamento escolar. Além disso, as aulas de Matemática, que tratavam de aritmética, álgebra e geometria, eram pouco freqüentadas, o que levou o governo a lançar punições para estudantes e “pessoas curiosas” que não se alistassem na disciplina.

É importante destacar que existiam na colônia várias modalidades de educação:

> Ensino público – refere-se àquele oferecido nas escolas mantidas pelo Estado ou por ‘associações subordinadas a este’. Neste estudo, também é tratado como aquele praticado na ‘escola pública estatal’.
> Ensino particular – refere-se àquele que era oferecido nos colégios particulares ou na casa dos mestres, que recebiam crianças e jovens para ensinar-lhes os conhecimentos estabelecidos.
> Educação doméstica – era aquela que ocorria na Casa do aprendiz; na esfera privada, na qual os pais contratavam, mediante sua livre escolha, os mestres, os conteúdos, as habilidades a serem ensinadas aos filhos, no tempo e disposição exclusivamente determinados pela Casa. Essa modalidade de educação tinha como agentes, já caracterizados anteriormente, os professores particulares, os preceptores, os parentes ou agregados e, ainda, padres que ministravam aulas-domésticas (VASCONCELLOS, 2005, p.17).

A educação doméstica constituiu-se uma prática comum às elites, principalmente para as meninas “que elaboravam ou aprimoravam sua educação na Casa. Os meninos (...) eram encaminhados para uma das instituições existentes: particulares, religiosas ou oficiais, onde concluíam a formação secundária” (Ibidem, p. 42).

A autonomia cultural brasileira começa a formar-se com os primeiros estabelecimentos de Ensino Superior e a criação de várias instituições como: Imprensa Régia, o Museu Real, o Jardim Botânico, a Biblioteca Real, o Observatório Astronômico e o Banco do Brasil.

Em 1837, Bernardo Pereira de Vasconcelos, inspirado na organização dos colégios franceses, criou a primeira escola secundária pública da cidade do Rio de Janeiro, o Colégio Pedro II.

Os planos de ensino do Colégio Pedro II passaram por várias reformas, ora predominando o ensino clássico, ora o científico. As matemáticas sempre estiveram presentes, variando o número de horas destinado ao seu ensino.

Benjamin Constant traduziu as ideias positivistas de Auguste Comte em sua reforma, oficializada pelo dec. nº 981, de 8/11/1890, que tinha como princípios, a liberdade, a laicidade do ensino e a gratuidade da escola primária. Uma das reais intenções era tornar os níveis de ensino “formadores” e, ao término do curso, o aluno era submetido ao “exame de madureza”.

O Colégio Pedro II passou, com a Reforma de 1890, a ser denominado de Colégio Nacional. O ensino tornou-se enciclopédico, pois, ao invés de uma formação científica, ocorreu o acréscimo das matérias científicas às tradicionais.

Em 1915, a reforma Carlos Maximiliano estabeleceu os objetivos do ensino secundário. Os alunos deveriam ser preparados para o vestibular, já que se buscava a formação de uma elite letrada.

A reforma João Luís Alves, em 1925, instituiu o ensino secundário como prolongamento do ensino primário e introduziu no currículo a disciplina Organização Moral e Cívica.

Em 1928, a congregação do Colégio Pedro II apresentou uma proposta de alteração da seriação do curso secundário em que estavam presentes todas as ideias modernizadoras do Movimento Internacional da Matemática. A visão de Matemática desse grupo estava ligada à concepção empírico-ativista do processo de ensino e aprendizagem subjacente ao paradigma escolanovista. No ensino de Matemática, passaram a ser consideradas atividades envolvendo a "ação, a manipulação ou experimentação... fundamentais e necessárias para a aprendizagem" (FIORENTINI, 1995, p. 9).

Em 1931, a Reforma Francisco Campos tentou estruturar o ensino secundário e introduziu as ideias modernizadoras presentes na proposta do Colégio Pedro II. Dessa forma, o Ensino Secundário passou a ter caráter "eminentemente educativo", ultrapassando o caráter propedêutico que sempre tivera. Por meio dessa reforma, ficaram estabelecidos na educação secundária brasileira "o currículo seriado, a freqüência obrigatória, dois ciclos, um fundamental e o outro complementar, e a exigência de habilitação neles para o ingresso no ensino superior" (ROMANELLI, 1990, p. 135)

A reforma unificou as disciplinas matemáticas, fundindo a "Álgebra com a Aritmética e com a Geometria" (SILVA, 2006, p.11) sob o título de **Matemática**, que era ministrada através de 3 (três) aulas por semana em cada série, nas cinco séries do Ensino Fundamental. No curso complementar, destinado apenas aos candidatos à matrícula em Medicina, Farmácia e Odontologia, eram ministradas 4 (quatro) aulas da disciplina *Matemática,* em uma das duas séries que compunham o curso; e, para os candidatos aos cursos de Engenharia ou Arquitetura, eram 6 (seis) aulas por semana em cada série, nos dois anos do curso.

Para a Reforma de 1942, o ministro Gustavo Capanema concedeu espaço às discussões prévias, para que os diversos grupos chegassem a um consenso. A Reforma, apoiada nos princípios escolanovistas, consagrou a constituição de 1937 e, por meio de quatro decretos-leis, estruturou os ramos do Ensino Técnico-Profissional e o Ensino Secundário Propedêutico.

Com o lançamento do foguete russo Sputnik, em 1957 e o período da guerra fria, o Movimento da Matemática Moderna pretendeu recuperar e melhorar a qualidade do ensino da matemática, com base na ideia de conjunto, estrutura, grupo e linearidade.

Uma comparação feita por Gustave Choquet, em 1956, mostra a insatisfação com o ensino da época: "(...) os professores de Matemática são como guardas de museus que mostram objetos empoeirados pelos quais a maior parte das pessoas não tem interesse" (apud CHARLOT, 1986, p. 16)

No Brasil, as novas ideias foram difundidas, principalmente, por meio das atividades do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – GEEM (1961), cujo principal representante foi Osvaldo Sangiorgi, e também por outros grupos de estudos distribuídos por todo o país.

Algumas críticas foram feitas ao ensino da Matemática com base no M.M.M.. Baseavam-se na ênfase exagerada na teoria dos conjuntos e estruturas algébricas, que produziu uma formalização e abstração da Matemática.

Com a transformação do Brasil em uma nação industrializada, no período da ditadura militar, com o objetivo de "modernizar" o sistema educacional brasileiro, foram firmados acordos entre os governos brasileiros e o norte-americano através da USAID (Agência Norte-americana para o Desenvolvimento Nacional), chamados de MEC/USAID. Por meio desses acordos, chega ao país a Pedagogia Tecnicista, que busca suprir a necessidade de mão-de-obra qualificada para as novas indústrias.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) 5692/71 promove a reforma do ensino de 1º e 2º graus através da obrigatoriedade do ensino primário de 8 (oito) anos, da gratuidade do ensino ministrado pela rede oficial de ensino e da introdução do ensino profissionalizante no país.

O governo Sarney, a partir de 1985, propõe "educação para todos" e promove vários planos para "socorrer" a educação popular que apresentava índices péssimos. De acordo com Xavier (1994, p. 285), "Em 1987 existiam 17.456.348 analfabetos com 15 anos ou mais no país, e 41,4% das pessoas com 10 anos ou mais permaneciam menos de 4 anos na escola". Com isso, as escolas recebem toda a camada popular que até então apresentava poucas oportunidades de estudo.

A LDBEN 9394/96, promulgada no governo de Fernando Henrique Cardoso, iniciou mudanças necessárias no sistema educacional brasileiro. Foram elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM), buscando nortear a educação nacional. Este último documento considera o Ensino Médio composto por três áreas do conhecimento:

- Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias,
- Linguagens, Códigos e suas tecnologias
- Ciências Humanas e suas tecnologias.

Esse retrato histórico procura mostrar como o nível de Ensino Médio sofreu mudanças de objetivos e de perfil ao longo do tempo. A Matemática parece ter sido pouco valorizada até o final do século XIX, talvez por influência da tradição clássico-humanista. Somente no século XX, com ideários e propostas oriundas de educadores do Colégio Pedro II, o currículo incorpora disciplinas científicas. O Ensino da Matemática, entretanto, preocupou-se somente com os conteúdos de ensino e muito pouco com o aluno e suas características cognitivas, afetivas e sociais. O Movimento da Matemática Moderna e o Tecnicismo são exemplos da valorização exagerada da técnica operatória e da álgebra. Algumas consequências dessa formação matemática podem ser encontradas na escola atualmente. O professor encontra dificuldades em trabalhar com a solução de problemas em sala de aula, o que pode ser justificado pela sua formação que também foi enfatizada pelo uso do algoritmo matemático. Com isso, a solução de problemas em matemática ainda encontra-se na maioria das vezes, como contextualização da técnica.

1.2 O Ensino Médio atual

Ao longo da história da educação brasileira, verifica-se que ao Ensino Médio foram atribuídas diversas finalidades e denominações. Algumas mudanças decorreram dos ideários pedagógicos e em virtude das características dos alunos que as escolas receberam, principalmente com a democratização da escola e o ingresso das camadas populares.

O Ensino Médio atual, caracterizado como a etapa final da Educação Básica, apresenta duração mínima de 3 (três) anos e tem como objetivo a formação do cidadão, a preparação para o mundo do trabalho e para a continuidade dos estudos.

Com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) 9394/96, foram atribuídas como finalidades do Ensino Médio:

> I. a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II. a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III. o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV. a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (art 35)

A legislação de ensino garante ainda, carga horária mínima de 800 (oitocentas) horas e 200 (duzentos) dias letivos, a adoção de metodologia de ensino[5] e avaliação que estimule a iniciativa dos estudantes, a possibilidade de organização em séries ou ciclos e o ensino de uma língua estrangeira moderna.

Ao final do Ensino Médio, o educando, de acordo com a LDBEN 9394/96, deverá demonstrar:

> I. domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna;
> II. conhecimento das formas contemporâneas de linguagem;
> III. domínio dos conhecimentos de Filosofia e de Sociologia necessários ao exercício da cidadania.

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para o Ensino Médio, estabelecidas pela Resolução CNE/CEB nº 03/1998, propõem que este nível de ensino seja coerente com princípios estéticos, políticos e éticos, abrangendo a *Estética da Sensibilidade,* a *Política da Igualdade* e a *Ética da Identidade.*

Além disso, a Base Nacional Comum do currículo do Ensino Médio, conforme aponta o artigo 10 das DCNEM, será organizada nas seguintes áreas de conhecimento:

I. Linguagens, Códigos e suas Tecnologias;

II. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias;

III. Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Algumas ações para o fortalecimento do Ensino Médio estão sendo realizadas. É o caso do PRODEB (Programa de Equalização das Oportunidades de Acesso à Educação Básica) e do PNLEM (Programa Nacional do Livro do Ensino Médio), além de publicações de livros de apoio ao professor em sala de aula, como o “São Paulo Faz Escola”, que pretendeu organizar o currículo no estado.

Ao contrário do Ensino Fundamental, que busca a formação geral do aluno, o Ensino Médio passou por dualidades históricas. As diversas tendências analisadas por meio de algumas políticas públicas conferiram a essa etapa de ensino um caráter extremamente profissionalizante ou lhe atribuíram a função de preparação para o vestibular, ou seja, o Ensino Médio dirigiu-se àqueles que seguiriam estudos superiores para concluir suas formações pessoais e profissionais.

A LDBEN 9394/96 aponta que possibilitar o Ensino Médio a todos é direito da cidadania. Conforme relatório da Reunião Internacional sobre Educação para o século XXI,

---

[5] Conforme Inciso II, Artigo 36, Seção IV (Do Ensino Médio) da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB nº 9394/96

os educandos devem não apenas aprender conteúdos distantes e compartimentalizados, mas também aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a conviver e aprender a ser.

> O Ensino Médio, atendida a formação geral, incluindo a preparação básica para o trabalho, poderá preparar para o exercício de profissões técnicas, por articulação com a educação profissional, mantida a independência entre os cursos (DCNEM, art. 12, §2º, 1998a)

O Ensino Médio atual tem uma nova característica para atender alunos com perfis bem diferentes. Dessa forma, a escola deve aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental e garantir uma formação mais ampla, que possa preparar para o mundo do trabalho, o que nem sempre tem sido feito satisfatoriamente.

1.3 A Matemática no Ensino Médio

A Matemática carrega a crença de ser a disciplina de que os alunos menos gostam. Alguns dados obtidos no SARESP de 2007 (SÃO PAULO, 2008c, p. 22) indicam que, na 3ª série do Ensino Médio, aproximadamente 40% dos alunos estão abaixo do nível considerado médio. Apenas 21,1% encontram-se no nível adequado e 0,1% dos alunos tem desempenho avançado, demonstrando conhecimentos e domínio dos conteúdos, competências e habilidades acima do requerido para o último ano da Educação Básica. Ao analisar esses dados, deve-se ter cuidado para não concluir precipitadamente que o desempenho dos estudantes pressupõe atitudes negativas em relação à Matemática.

O currículo atual da Matemática destaca os conteúdos, enfatizam-se os aspectos cognitivos dos alunos, enquanto os aspectos afetivos são tratados num segundo plano e de forma bastante superficial.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999, p. 93) estabeleceram as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, dentro das categorias *representação e comunicação, investigação e compreensão e contextualização sócio-cultural.* Na primeira categoria, o estudante deverá ser capaz de ler e interpretar textos de Matemática, transcrever a linguagem corrente para a linguagem simbólica, dentre outras. Quanto à segunda categoria, o aluno se tornará apto a identificar o problema, selecionar estratégias e interpretar os resultados obtidos, além de produzir argumentos convincentes. Com relação ao aspecto sócio-cultural, o aluno deverá aplicar o conhecimento em situações reais, entender a Matemática como uma construção humana e utilizar adequadamente instrumentos como calculadoras e computadores.

Dessa forma, quanto ao ensino de frações, o estudante deveria estar apto a trabalhar com problemas envolvendo quantidades discretas e contínuas. Os números racionais através dos decimais, frações e porcentagem, além de serem percebidos pelo aluno em seu cotidiano, devem apresentar seus conceitos e técnicas operatórias compreendidos. Assim, o estudante utilizará a matemática como ferramenta e poderá percebê-la como construção humana, presente em diversas situações cotidianas.

A Matemática tem como objetivos no Ensino Médio, de acordo com os PCNEM (BRASIL, 1999, p.42), permitir:

- A compreensão de conceitos, estratégias e procedimentos que possibilitem o prosseguimento dos estudos e uma formação científica geral;
- O uso dos conhecimentos matemáticos em diferentes situações cotidianas;
- A análise de informações oriundas de diversas fontes e o uso de ferramentas matemáticas para expressar opiniões próprias;
- O desenvolvimento do raciocínio, da capacidade de resolver problemas, de se comunicar e do espírito criativo e crítico.
- A utilização de procedimentos de resolução de problemas;
- A expressão oral, escrita e gráfica da Matemática, além da valorização da precisão da linguagem matemática;
- O estabelecimento de conexões entre os diversos temas matemáticos e entre esses e os de outras áreas do currículo;
- O reconhecimento de representações equivalentes de um mesmo conceito;
- O desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação e do sentimento de segurança em relação à capacidade matemática.

Com base nas finalidades e objetivos do ensino da Matemática no Ensino Médio, nota-se uma preocupação em articular os conceitos adquiridos na escola com a vida do aluno. Além disso, a Matemática aparece como uma ferramenta para interpretar o mundo, através da compreensão de sua linguagem.

Os estudantes, entretanto, não conseguem vislumbrar a relação da Matemática com suas vidas. Uma das possíveis causas pode ser a abstração do ensino, que impede os alunos de entender a Matemática como uma construção humana e os leva a percebê-la como um conjunto de técnicas operatórias. A falta de valorização dos aspectos afetivos dos estudantes, como suas atitudes, crenças e concepções acerca da Matemática, parece relacionar-se com desempenho e utilização dessa ciência pelo educando.

1.4 Os Números Racionais em algumas Propostas Curriculares

Algumas das propostas do governo do Estado de São Paulo a respeito do ensino dos números racionais, sugeridas nos anos de 1975, 1978, 1991 e 2008, apresentam diferenças na forma de introduzir o conjunto dos números racionais. Os guias Curriculares de 1975 parecem centrar o ensino na definição e na simbolização fracionária. As demais propostas aproximam-se quanto à forma de trabalho, buscando resgatar algumas situações cotidianas em que o aluno utiliza a ideia de fração.

Nos Guias Curriculares, o ensino de frações iniciava-se na 4ª série e aprofundava-se na 6ª série do Ensino Fundamental. Eram sugeridas atividades para revisão dos conceitos que o aluno já havia estudado, como recortar folhas em partes iguais, pintar a parte de uma figura que representa um número racional, distribuir igualmente objetos para várias pessoas, dentre outras. O aluno deveria concluir, ao final da 6ª série, que:

> ... o símbolo $\frac{a}{b}$, com a, b $\in$ N e b $\neq 0$, que recebe o nome de **fração**, representa o quociente **a** por **b.** (SÃO PAULO, 1975, p.56)

A ênfase na simbolização parece contradizer algumas observações que os Guias Curriculares Nacionais traziam, como a de construção de um novo conjunto – os Racionais. A ênfase na operacionalidade, conforme aponta Prado (2000), provavelmente ocasionava o entendimento da fração como símbolo pelo estudante, perdendo a ideia de conjunto.

> Consideramos importante destacar no estudo dos campos numéricos o fato de que a introdução de um novo campo está ligada ao problema da impossibilidade de certas operações serem efetuadas, sem restrições, no campo anterior. Assim o fato da subtração não ser possível em N, quando o segundo termo é maior que o primeiro, origina a criação dos inteiros. O mesmo acontece com a divisão, quando passamos dos inteiros para os racionais e, parcialmente, com a radiciação, quando passamos dos racionais, para os reais. (SÃO PAULO, 1975, p. 177)

A construção de um novo campo numérico em decorrência da impossibilidade de realizar certas operações, que aparece como observação nos Guias Curriculares, provavelmente perdia-se atrás dos verbos "reconhecer, inferir, simplificar, determinar, concluir, comparar, efetuar, verificar, ler e operar" (PRADO, 2000, p.44), que reafirmam a ênfase na operacionalidade e não no conceito de fração.

A partir de 1986, com a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 1º grau, o estudo dos números racionais é iniciado na 3ª série do Ensino Fundamental. Os conteúdos propostos para esta série são:

> Conceito de número racional
> Representação fracionária
> Conceito de frações equivalentes
> Comparação de frações de mesmo denominador ou de mesmo numerador
> Adição e subtração de frações de mesmo denominador ou de frações que podem ser facilmente transformadas em outras equivalentes
> Representação decimal, de um número racional
> Comparação de números racionais na forma decimal
> (SÃO PAULO, 1991, p. 43)

Para a 4ª série, além da multiplicação e divisão dos números racionais, é introduzido o conceito de porcentagem como fração de denominador 100. Para a 6ª série são propostos os seguintes conteúdos:

> A noção de número racional relativo
> Comparação, ordem e representação geométrica
> Operações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação
> Propriedade das operações
> (SÃO PAULO, 1991, p. 95)

Na 8ª série é abordada a representação fracionária de dízimas periódicas e na 7ª série os números racionais não são abordados.

A Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008b, p.52) estabelece que as frações sejam abordadas na 5ª série por meio de representação, comparação e ordenação e através das operações, inclusive com números decimais. A ampliação desses conteúdos ocorre na 6ª série através de representações e operações com decimais e frações. E, diferentemente da Proposta anterior, já na 7ª série são abordadas as transformações das dízimas periódicas em fração geratriz.

A atual proposta abrange quatro blocos temáticos: números, geometria, medidas e tratamento da informação. Os números racionais seriam contemplados no eixo denominado números que tem por objetivo:

> A ampliação da ideia do campo numérico por meio de situações significativas que problematizem essa necessidade. Tais situações podem estar apoiadas na história

> (...) ou ainda em situações concretas de medida, onde se pode articular desde a relação entre notação decimal e fracionária de um número até a ampliação para o campo real... (SÃO PAULO, 2008b, p.45)

Essa ideia contempla a necessidade de o aluno perceber os números e a própria Matemática como construção humana que buscou a resolução de problemas do cotidiano. Dessa forma, através da contextualização ou da história do conceito, o professor poderá promover situações mais significativas para o estudante.

Em nível federal, a partir de 1996, com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), é lançada uma nova proposta que aborda os números racionais a partir do 2º Ciclo (3ª e 4ª séries) do Ensino Fundamental. Um dos conceitos a serem trabalhados no 3º ciclo (5ª e 6ª série) envolve o

> ... reconhecimento de números racionais em diferentes contextos – cotidianos e históricos – e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador. (BRASIL, 1998b, p. 71)

As orientações curriculares desse documento indicam que os alunos chegam ao terceiro ciclo "sem compreender os significados associados a esse tipo de número e, tampouco os procedimentos de cálculo..." (Ibidem, p.101). São apontadas algumas dificuldades dos estudantes, como: várias escritas fracionárias para o mesmo número decimal, a comparação entre racionais ser diferente do que acontece nos naturais, dentre outras.

São sugeridas situações-problema por meio de notícias de jornais, Atlas, guias de cidade, receitas, bulas de remédios e problemas históricos. Além disso, é proposto ao professor o estabelecimento de conexões entre os vários conceitos abordados, conforme figura 3. Dessa forma, é possível perceber que os conteúdos podem relacionar-se, tornando-se significativos para o aluno.

As diferentes interpretações para as frações aparecem divididas em: relação parte-todo, quociente, razão e operador. A partir da relação parte-todo, que pode ser trabalhada em contextos contínuos e discretos, podem ser abordados os números racionais e sua forma decimal e fracionária. A fração como razão relaciona-se com a ideia de escala e com probabilidade. Esta pode envolver o conceito de porcentagem e a construção de gráficos. Outra interpretação de frações como operador aborda relações numéricas atuando como multiplicador-divisor de um conjunto discreto, por exemplo.

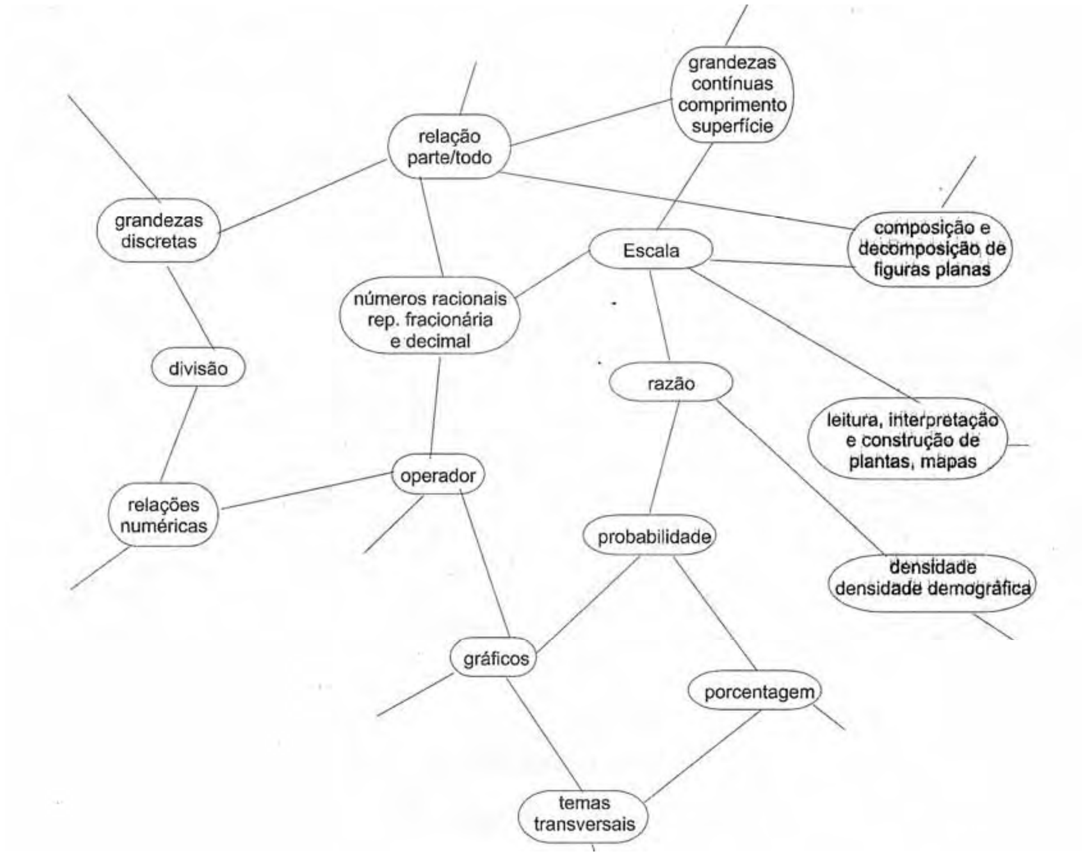


Figura 3 - Número Racional: significados
Fonte: Brasil (1998b, p. 139)

O conjunto dos racionais é abordado de modo a valorizar a técnica operatória e manipulação de materiais como auxiliar na construção do conceito de fração. O foco das propostas oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) parece realmente preocupar-se com a forma simbólica $\frac{a}{b}$, que passa pela construção do campo dos racionais.

Para que o estudante compreenda a técnica do MMC (Mínimo Múltiplo Comum), por exemplo, ele deve conhecer o que é razão e proporção. Além disso, é preciso que o aluno diferencie esses conceitos e dessa forma, compreenda o significado de fração equivalente.

Destaca-se que embora a forma simbólica $\frac{a}{b}$ seja a mesma, os diferentes conceitos de fração, razão e proporção, historicamente, originaram-se de questionamentos distintos. As frações surgiram da necessidade de se operar com as sobras, as razões a partir de relações que podem ser escritas por meio de uma fração e as proporções da igualdade de duas razões. O MMC envolve a ideia de frações equivalentes ou de uma proporção. Assim, se o estudante não compreende esses conceitos, provavelmente, utilizará a técnica como uma regra, chegando a um resultado mesmo sem saber o porquê.

No Ensino Médio, o conceito de números racionais já deve estar construído, de modo que é possível investigar quais entendimentos os alunos apresentam e verificar se dominam a técnica operatória e se são aptos a solucionar adequadamente problemas envolvendo frações.

Este primeiro capítulo teve por objetivo apresentar uma breve descrição do Ensino Médio e as modificações ao longo das várias reformas curriculares. Tentou-se mostrar que esse nível de ensino mudou os objetivos ao longo da história, como curso profissionalizante, propedêutico, voltado à educação das elites ou à população em geral, até obter os moldes atuais, objetivando uma formação geral e prolongamento do Ensino Fundamental. Ficou claro, neste capítulo ainda, o papel da Matemática no currículo atual, bem como um estudo da abordagem das frações no currículo a partir dos Guias Curriculares de 1975.

CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Atitudes em relação à Matemática

O termo atitude é originário do latim e a definição deste é, geralmente, encontrada em dicionários relacionada a uma disposição, confundida frequentemente com comportamento e com motivação.

Segundo Brown (1954 apud BRITO, 1996), o termo *atitude* foi usado pela primeira vez como um conceito psicológico por W. Thomas e F. Znaniecki no livro “The Polish Peasant in Europe and America” (Chicago: University of Chicago Press), publicado em 1918, e descrevia o processo de aculturação do camponês da Polônia. A partir disso, o termo atitude adquire um caráter cognitivo.

Brito (1996), em sua tese de livre docência, realizou um amplo estudo sobre as atitudes em relação à Matemática e mostrou que a literatura especializada envolvendo este tema traz várias definições diferentes para o conceito de atitudes, variando de acordo com o autor e a época.

Klausmeier (1977) afirmou que a atitude seria um conceito que pode ser definido, e, portanto, visto tanto como um constructo mental quanto como uma entidade pública. Para ele, entidade pública é entendida como a informação organizada que corresponde aos significados presentes em dicionários, enciclopédias e em outros livros. Por outro lado, o conceito como constructo mental é idiossincrático, refere-se à informação acumulada pelo indivíduo ao longo de sua vida, de acordo com experiências de aprendizagem e pelo seu próprio desenvolvimento. Assim, a atitude possui atributos relevantes e irrelevantes como todos os conceitos. Para o autor,

> A palavra atitude é usada para designar tanto disposições emocionais matizadas de indivíduos, como também entidades públicas identificáveis, que são usadas para comunicar significados entre indivíduos que falam a mesma língua. Assim, consideramos a atitude como tendo um referente individual e um público (p. 413).

Outros autores, como Bloom (1974 apud BRITO, 1996), definem atitudes como uma disposição do indivíduo para “olhar” algo de maneira positiva ou negativa. O autor afirma que as experiências de sucesso e fracasso na escola levam ao desenvolvimento de atitudes negativas ou positivas.

Nesta pesquisa, atitude será entendida como na definição dada por Brito (1996):

> Atitude é uma disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo. Além disso, apresenta componentes de domínio afetivo, cognitivo e motor (p.11).

As atitudes não são gerais e possuem sempre um referente, ou seja, é sempre “atitude em relação a” e, sendo um evento interno, aprendido, com componentes cognitivos e afetivos que variam em intensidade, é dirigida a um objeto específico.

O ensino de atitudes deveria fazer parte dos objetivos escolares de todos os níveis de ensino. De acordo com Brito (1996), somente a compreensão das atitudes em relação à matemática inserida na realidade social dos alunos por parte dos professores permitirá um avanço na construção de atitudes mais positivas.

> O Ensino de Matemática não deveria simplesmente expandir o conhecimento dos estudantes em Matemática, mas deveria também incentivar a coragem intelectual e as disposições ou um conjunto de atitudes pessoais positivas que capacita e habilita os alunos. Esta visão é admirável e digna dos melhores esforços de qualquer professor de Matemática. Isto significa também o abandono radical da concepção tradicional de Matemática e requer mudança na visão de professores e alunos. Atitudes positivas são baseadas em experiências positivas. Se os estudantes devem aprender a beleza e a importância da Matemática, eles devem ter essa experiência no ensino e demonstrá-la no decorrer da avaliação. Por isso, a adoção dessa visão necessita de reforma tanto no ensino como na avaliação (Judith Collison, 1992 apud BRITO, 1996, p.288).

A formação de atitudes positivas para qualquer disciplina parece motivar o estudante, fazendo com que o mesmo se interesse pelos conteúdos tratados. Para Coll (1998), “as atitudes guiam os processos perceptivos e cognitivos que conduzem à aprendizagem de qualquer tipo de conteúdo educacional seja conceitual, procedimental ou atitudinal” (p.136).

Krutetskii (1976) e Klausmeier (1977) reafirmam que as atitudes são uma espécie de “condição necessária” para que o indivíduo tenha um bom aproveitamento na realização de uma tarefa. O último autor aponta que, se um indivíduo possui uma atitude favorável em relação a alguma coisa, procurará se aproximar dela e irá defendê-la, enquanto aquele que tem uma atitude desfavorável irá evitá-la (p.417).

2.1.1 Atitudes e suas características

Klausmeier (1977), em seus estudos sobre as atitudes, mostrou que o conceito de atitude possui cinco características relevantes:

1. Aprendibilidade:

Todas as atitudes são aprendidas. O indivíduo aprende a se comportar intencionalmente ou não, de modo favorável ou desfavorável, em relação a um objeto, ideia ou pessoa. Por exemplo, uma pessoa pode apresentar um comportamento desfavorável à política mesmo sem conhecer as bases informacionais de suas atitudes ou sem saber quando aprenderam essas atitudes e, assim, se mostrar incrédulo ou indiferente a qualquer relação ou ocasiões que envolvam o ato político.

2. Estabilidade:

Essa característica refere-se à duração ou permanência de uma atitude, que pode durar, mudar ou desaparecer, de acordo com a situação. O gosto, as atitudes e os valores são diferenciados a partir da estabilidade.

O gosto refere-se a algo específico, como gostar de um tipo de música. Os valores são mais gerais, como o valor da música para o homem. As atitudes estão no meio dos dois, por exemplo, a atitude de não gostar de um determinado tipo de música, como MPB.

As atitudes tornam-se mais cristalizadas na idade adulta, mas podem ser modificadas durante toda a vida. É claro que algumas delas são difíceis de serem mudadas, mas essa instabilidade pode ocorrer sempre.

3. Significado Pessoal – Societário

As atitudes interferem nas relações entre uma pessoa e outras ou entre uma pessoa e coisas. Assim, se uma pessoa apresenta predisposição para um intercâmbio amigável e amistoso com as outras pessoas, elas revelarão entusiasmo na relação. Caso contrário, o indivíduo pode experimentar certo isolamento ou rejeição.

Dentro da comunidade escolar, os alunos geralmente se aproximam por partilharem de atitudes comuns e formam as chamadas “panelinhas” ou “grupinhos”.

4. Conteúdo Afetivo – Cognitivo

O componente *cognitivo* de atitude refere-se ao conteúdo informacional, ou seja, a ideia que tem do fato, sua concepção a respeito deste, existindo uma indissociação entre esses componentes. O componente *afetivo* refere-se às emoções que um indivíduo tem em relação ao objeto da atitude, sendo essa relação apreciada ou evitada.

5. Orientação Aproximação – Evitamento

Quando as atitudes são favoráveis em relação a um objeto, elas, provavelmente, conduzirão o sujeito a uma aproximação, caso contrário, o sujeito irá evitá-lo ou apresentar comportamentos negativos em relação a ele. Assim, se os indivíduos têm uma atitude negativa em relação à religião, certamente eles não frequentarão a igreja. Se tiverem uma forte atitude positiva em relação ao meio ambiente, defenderão campanhas de preservação e conservação da natureza.

Em resumo, esses atributos descritos, são mostrados na figura a seguir:

sem consciência	⟵	**aprendibilidade**	⟶	intencionalidade
temporário	⟵	**estabilidade**	⟶	permanente
baixo	⟵	**significado**	⟶	alto
afetivo alto	⟵	**conteúdo**	⟶	cognitivo alto
aproximação alta	⟵	**orientação**	⟶	esquiva alta

Figura 4 - Atributos definidores de atitudes extraídos de Klausmeier (1997 p. 414).

2.1.2 Algumas diferenciações

As atitudes e valores, na maioria dos trabalhos em Educação Matemática, são tomados como sinônimos, mas há diferenças entre eles quanto aos componentes cognitivos e afetivos. Termos como concepção, crenças, opiniões e valores comumente são confundidos com atitudes.

As CRENÇAS estariam mais próximas dos componentes cognitivos, ao passo que as atitudes estariam próximas do componente afetivo, como foi apresentado nos trabalhos de Shirley, Koballa e Simpson (1988 apud BRITO, 1996). As crenças e as atitudes são aprendidas, bidirecionais (gostar / não gostar), sendo que as crenças são mais estáveis, duradouras e resistentes do que as atitudes.

Os VALORES, de acordo com Brito (1996), podem ser considerados mais complexos, amplos e abrangentes que as atitudes e mais limitados pela cultura, sendo unidirecionais. Os valores se diferenciam das atitudes pela carga de apelo moral e ético, estando vinculado ao julgamento moral que envolve o certo / errado. Os valores são mais estáveis e não oscilam entre dois pólos.

ATITUDE é tratada como

> uma disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo. Além disso, apresenta componentes de domínio afetivo, cognitivo e motor. (BRITO, 1996, p. 11)

OPINIÃO é mais afetiva que a crença e mais cognitiva que a atitude.

CONCEPÇÃO é entendida como

> a maneira própria de cada indivíduo elaborar, interpretar ou representar suas ideias e agir de acordo com as mesmas. É construída a partir das experiências individuais que são influenciadas por uma série de variáveis do ambiente (conhecimentos, valores, experiência prática, componente emocional). (MORON e BRITO, 2001, p. 266)

No contexto escolar, os sujeitos apresentam opiniões e crenças com relação à Matemática (por exemplo, a crença de que a Matemática é difícil ou de que os meninos têm mais habilidades matemáticas do que as meninas). Os professores que atribuem valores exagerados à disciplina (Matemática), como a única que desenvolve o raciocínio e treina a mente, podem influir nas atitudes dos alunos, levando-os a gostar ou não de resolver problemas ou de raciocinar sobre situações matemáticas.

2.1.3 As variáveis afetivas

O desempenho dos alunos está diretamente relacionado ao “gostar” da disciplina; assim, é provável que os alunos que apresentam atitudes positivas em relação à Matemática consigam um desempenho melhor do que aqueles que nutrem um sentimento de aversão à Matemática.

McLeod e Adams (1989) tiveram como cerne de suas pesquisas o estudo das variáveis afetivas que mais interferem no desempenho dos alunos, destacando como importantes:

- ***Confiança:*** é uma das variáveis afetivas mais importantes, pois o educando que apresenta confiança nos estudos possui interesse em estudar; além disso, ela pode influir em sua escolha profissional.
- ***Ansiedade:*** essa variável pode indicar falta de confiança. A ansiedade que não é dirigida a um determinado objeto, mas ao um conjunto de fatores, pode interferir em sua aprendizagem. A álgebra é um campo matemático em que muitas pesquisas indicam um alto nível de ansiedade dos alunos.
- ***Atribuições de sucesso ou fracasso:*** o professor deve considerar as diferenças individuais, tomando o erro do aluno como um indício do seu nível conceitual e trabalhando a partir disso, propondo situações diversas e valorizando conquistas, ao invés de classificar seus alunos.
- ***Utilidade:*** A percepção de que a Matemática é útil e presente na vida cotidiana, aparentemente, provoca no aluno maior interesse e possibilita a aprendizagem mais facilmente. Entretanto, nem todos os conteúdos matemáticos podem ser relacionados com o cotidiano, mas essa relação pode despertar o interesse do aluno e, no decorrer da escolaridade, gerar confiança no educando, que desenvolverá atitudes positivas em relação à Matemática.

Tão importante quanto os aspectos cognitivos, as variáveis afetivas apontadas interferem muito no desempenho do aluno. Assim, se o estudante julgar não ser capaz de aprender, se considerar o conteúdo pouco importante para sua vida ou ainda apresentar um alto grau de ansiedade gerado por falta de confiança em matemática, poderá ter um desempenho ruim e atitudes negativas.

O Ensino de Matemática apresenta fatores emocionais que são de ordens primárias e secundárias. A primária relaciona-se com aspectos da personalidade do indivíduo e a secundária com causas externas ao sujeito.

As atitudes em relação à Matemática são geradas por fatores externos e, portanto, são secundárias. A necessidade de abstração na matemática pode ser destacada como uma das causas do aparecimento da ansiedade e de atitudes negativas nos alunos. “As atitudes mais negativas são encontradas na sétima e oitava séries, que são as séries onde o ensino de Matemática, particularmente a álgebra, passa a exigir uma capacidade de abstração cada vez maior do estudante” (BRITO, 1996, p.295).

Além desses fatores, a *influência* dos pais e amigos e as interferências mútuas entre as atitudes dos professores e dos alunos são de igual relevância no surgimento das atitudes em relação à Matemática. Dienes (1970 apud ARDILES, 2007, p.10), destacou que a maneira como os professores ministram suas aulas pode ser um dos motivos para que muitas pessoas não gostem de Matemática.

2.1.4 As atitudes e os professores

As atitudes dos professores podem influenciar as atitudes de seus alunos. Se os professores apresentarem atitudes positivas em relação à disciplina que lecionam e buscarem formas eficazes de ensinar o conteúdo, possivelmente despertarão o interesse do aluno, o motivarão e contribuirão para o surgimento de atitudes positivas.

Aiken e Dreger (1961 apud BRITO, 1996) enfatizaram que as atitudes dos professores têm grande influência nas de seus alunos e em seu desempenho; professores impacientes, hostis e que não dominam o conteúdo podem influir no surgimento de atitudes negativas no educando.

A própria postura do professor em sala de aula, por meio de suas falas e ideologias, pode corroborar na formação de atitudes positivas ou negativas e na atribuição de rótulos aos alunos. Sztajn (1997) afirma que as percepções que professores têm sobre os papéis sociais e o que os alunos precisam para viver na sociedade em que se encontram moldam suas práticas escolares no ensino da Matemática.

Klausmeier (1977) aponta que muitas pessoas, mesmo não apresentando atitudes positivas em relação à Matemática, escolhem a área de educação para atuarem profissionalmente. Parece evidente que esse professor não conseguirá estimular e motivar o aluno, já que não atribui finalidades para a disciplina. Nas séries iniciais, esse problema é visto com maior frequência. Alguns professores escolhem o Magistério ou a Pedagogia por ser um curso com poucas disciplinas da área de exatas, no entanto, irão lecionar “fundamentos de” Matemática para o Ensino Fundamental.

> Se por qualquer razão os futuros professores não parecem capazes de se interessar pela área de conteúdo, pelo ensino em geral e pela vida real do dia a dia numa sala de aula com os alunos, e se não podem deliberadamente modificar suas próprias atitudes, estes devem buscar uma outra carreira. Assim, os futuros professores devem buscar compreender como são vitais suas próprias experiências em prática de ensino, tornando-se não só capazes de aprender meios de aplicar técnicas e métodos

> reais, mas também capazes de avaliar suas próprias atitudes e sentimentos com relação ao ensino (KLAUSMEIER, 1977).

Além disso, nos próprios cursos de formação, atribui-se pouca importância à formação de atitudes nos futuros professores. É necessário que os currículos valorizem o aspecto afetivo, inclusive nos futuros professores, incentivando-os, motivando-os e fazendo-os refletir sobre a profissão, o conhecimento, os futuros alunos e a disciplina que irão lecionar.

Ao abordar os Números Racionais e mais especificamente o ensino de frações, o professor pode encontrar dificuldades em trabalhar de forma a interpretar "o desenvolvimento do conceito de fração como movimento dinâmico de sua forma e conteúdo no sentido de incremento do conhecimento" (CATALANI e MOURA, 2004, p.5), por ter um contato maior com abordagens que valorizem apenas a forma (símbolo e suas operações) em detrimento do conteúdo (significados).

2.1.5 A questão das atitudes, o gênero e os familiares

As atitudes dos pais em relação à Matemática podem afetar as atitudes de seus filhos e o excesso de expectativa dos pais pode levar os estudantes a desenvolver um alto grau de ansiedade. Trabalhos como Macedo (1994), Gonçalez (2000) e Paula (2008) estudaram, dentre outras variáveis, como a família pode influenciar as atitudes e escolhas dos indivíduos.

> Como as experiências dos adultos podem modificar as concepções das crianças; quais elos existentes entre as atitudes e o comportamento; qual a relação entre as crenças dos adultos sobre as crianças e os seus efeitos; como estas crenças servem de parâmetros para o desenvolvimento da criança; qual a relação entre tais julgamentos e o nível de desenvolvimento da criança? A ideia geral de que a percepção global dos pais pode contribuir para o desenvolvimento cognitivo é comum para muitos programas de pesquisa sobre as crenças dos pais (MACEDO, 1994, p.125).

Esse autor apontou que, para a psicologia social, a família é revestida de importância, dado que é o primeiro ambiente com que a criança tem contato e onde se dá a sua socialização primária. Os primeiros contatos com elementos matemáticos ocorrem no ambiente familiar e as primeiras impressões provavelmente irão interferir na formação de atitudes e seus componentes afetivos, cognitivos e sociais.

Os pais devem estar atentos no tratamento dado às crianças, sempre "auxiliar os filhos na realização de atividades que envolvam o raciocínio matemático, independente do gênero"

(GONÇALEZ, 2000, p.31). Dessa forma, as crianças poderão sentir-se capazes de realizar atividades diversas, independentemente de algumas crenças como a de que os meninos são melhores em Matemática.

Updegraff, Mchale e Crouter (1996 apud BRITO, 1996) estudaram os papeis desempenhados pelos pais no desenvolvimento acadêmico dos filhos e verificaram que as garotas que tinham orientações dos pais apresentaram alto nível de desenvolvimento, enquanto aquelas que tinham única ou majoritariamente a supervisão da mãe apresentavam pior desenvolvimento em Matemática e Ciências. Quanto aos meninos, não foram encontradas diferenças significativas.

Alguns trabalhos encontrados na literatura educacional a respeito das diferenças entre os gêneros com relação às atitudes e habilidades matemáticas, como os de Araújo (1999), Postigo, Pérez Echeverría e Sanz (1999), afirmam a existência de diferenças, mas estas têm pouca importância ao longo da vida dos estudantes, ressaltando ser este mais um problema cultural. Para Brito (1996),

> Culturalmente, são atribuídos "rótulos" aos indivíduos e afirmações que não são confirmadas através de pesquisas passam a ser consideradas como verdadeiras. Assim, cristalizou-se a ideia de que a habilidade verbal é uma característica feminina e a habilidade matemática é uma característica masculina. Dentro desta concepção, os homens deveriam apresentar alta habilidade matemática e baixa habilidade verbal enquanto as mulheres apresentariam alta habilidade verbal e baixa habilidade matemática (p.75).

Os contextos familiares caracterizam-se por diferentes processos e implicações para os meninos e meninas. As implicações das diferenças de gêneros e interesses, aspirações de carreira e desempenho têm merecido várias pesquisas que relatam que os sujeitos do sexo feminino são menos confiantes em suas habilidades matemáticas e procuram menos as carreiras relacionadas com a área de exatas, conforme Araújo (1999). A adolescência tem sido identificada como a fase em que os estudantes sofrem maior pressão familiar em relação às expectativas de estudos e carreira. Esse período é marcado por mudanças no desempenho, na motivação e interesse.

Embora a maioria dos trabalhos encontre pouca relação entre gênero e desempenho, aponta-se que algumas diferenças entre os gêneros se acentuam em determinadas tarefas ou habilidades como nos cálculos e na solução de problemas.

Algumas variáveis, como as condições sócio-econômicas, a etnia, a escola e o professor, podem aumentar as diferenças na escolha da carreira profissional, nas crenças pessoais e provocar um desenvolvimento maior de atitudes negativas em relação à Matemática por parte de alunos do gênero feminino.

2.1.6 Escalas de atitudes em relação à Matemática

Existem vários métodos que permitem o estudo e a compreensão das atitudes. As técnicas mais comuns para se acessarem as atitudes são:

> ... escalas diferenciais (Thurstone), escala de postos ou classificações (Rating Scales), escalas de classificação somativa, escalas de diferencial semântico, inventários de interesse, hierarquia de preferências ou 'ranking', técnicas projetivas, observação antropológica, entrevistas, dados observacionais controlados, análise de conteúdo de depoimentos, etc... (BRITO, 1996, p.31).

Aiken (1961, 1963, 1970) contribuiu intensamente para o estudo das atitudes. Desde o final da primeira metade da década de setenta, os trabalhos de Aiken aparecem citados em praticamente todos os estudos sobre atitudes em relação à Matemática e Ciências.

Algumas escalas de atitudes em relação à matemática tratam o fenômeno como um componente (gostar) em relação ao seu oposto (não gostar). Essas são escalas unidimensionais, de acordo com Aiken (1963) e Dutton (1954 apud BRITO, 1996), e não incluem sentimentos com relação aos componentes e razões da escolha de uma alternativa.

As escalas multidimensionais buscam verificar a existência e intensidade das atitudes em relação à Matemática, através dos seus vários componentes. Incluem proposições referentes ao método, aos professores, à solução de problemas, dificultando a manifestação clara do sentimento com relação a uma dimensão específica.

De acordo com Brito (1996), a atitude é um afeto enquanto "disposição do indivíduo em relação a". Assume aspecto multidimensional quando se volta para um objeto, evento ou coisa, porque essas situações apresentam inúmeros componentes.

A Matemática é uma disciplina complexa e envolve uma diversidade de conteúdos. O educando, certamente, apresenta sentimentos diferentes com relação a eles, podendo gostar de geometria, mas sentir aversão à álgebra ou aos cálculos longos. São encontrados, entretanto, de acordo com Aiken, citado em Brito (1996), estudos sobre as atitudes com relação a conteúdos específicos ou a alguns tipos de problemas matemáticos.

É possível elaborar escalas compostas de proposições mais gerais e, assim, medir o sentimento com relação à disciplina como um todo. O sujeito exprimirá o resultado de suas experiências matemáticas de maneira geral, isso porque, se algum aspecto particular da disciplina (por exemplo, a álgebra) for muito aversivo, certamente será generalizado, passando o aluno a não gostar da disciplina como um todo.

2.2 Solução de problemas

A solução de problemas vem ocupando espaço entre as discussões de educadores matemáticos, desde o início da década de 80. Atualmente, constitui-se um dos eixos norteadores do currículo. Entretanto existem diversos significados e definições para o que seria resolver ou solucionar um problema.

O dicionário Houaiss da Língua Portuguesa, da editora Objetiva, traz uma série de significados para a palavra *problema*: 1. Assunto controverso, ainda não satisfatoriamente respondido, em qualquer campo do conhecimento, e que pode ser objeto de pesquisas científicas ou discussões acadêmicas <*p. metafísicos*> <*p. do descobrimento do Brasil*> 2. Obstáculo, contratempo, dificuldade que desafia a capacidade de solucionar de alguém <*o secretário quis saber dos moradores quais os p. mais agudos*> 3. Situação difícil; conflito < *ela vive cheia de problemas*> 4. Mau funcionamento crônico de alguma coisa, que acarreta transtornos, pobreza, miséria, desgraças etc., e que exigiria grande esforço e determinação para ser solucionado <*o p. da seca no Nordeste brasileiro*> <*o p. das drogas*> <*o p. das endemias*> 5. Distúrbio, disfunção orgânica ou psíquica <*o p. digestivo*> <*p. comportamental*> 6. Pessoa, coisa ou situação incômoda, preocupante, fora do controle etc. <*essa menina é um p.*> <*esse carro é um p.*> < *como resolver o p. do mofo dos armários*> 7. Questão levantada para inquirição, consideração, discussão, decisão ou solução <*o professor deu uma lista de problemas*> 8. MAT. **tarefa de calcular uma ou várias quantidades desconhecidas, denominadas *incógnitas*, relacionadas a outras conhecidas, os *dados* (...)** (2001, grifo nosso).

Essas definições são diversas e variam conforme a área em que a palavra está sendo empregada. No dicionário, são encontrados os diversos significados utilizados pelo senso comum. Em um desses, problema é confundido ou considerado sinônimo de exercício matemático. Entretanto, a maioria dos autores parece concordar com a definição de Lester (1983 apud POZO, 1998), que identifica um problema como “uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”. Essa mesma definição é compartilhada por alguns pesquisadores, como Pozo (1998) e Sternberg (1992).

Na sala de aula, é comum os alunos não considerarem os problemas matemáticos como “problemas verdadeiros” ou como semelhantes aos problemas que enfrentam na vida real. Com isso, os conhecimentos aprendidos na escola pouco facilitam suas atividades cotidianas.

O matemático Polya (1986), no livro *A arte de resolver problemas*, destaca a solução de problemas como uma tarefa presente no dia a dia de todo ser humano:

> Resolver problemas é uma atividade humana fundamental. De fato, a maior parte do nosso pensamento consciente relaciona-se com problemas. A não ser quando nos entregamos a meros devaneios ou fantasias, os nossos pensamentos dirigem-se para um fim, procuramos meios, procuramos **resolver um problema.** (p. 139)

É importante ensinar os estudantes a solucionar problemas, sendo essa competência necessária nas diversas áreas do conhecimento. Autores como Mayer (1992), Pozo (1998), Sternberg (1992, 1994 e 2000) e Brito (2006) analisaram várias pesquisas envolvendo solução de problemas, enfocando inclusive a evolução histórica do tema na Psicologia e áreas correlatas, e afirmam a necessidade de um currículo baseado na solução de problemas.

Pirola (2000) apontou a necessidade da transferência dos conteúdos matemáticos aprendidos para situações e áreas diversas. De acordo com o autor, “(...) no trabalho com solução de problemas junto aos alunos, não basta apenas o domínio dos conteúdos (conceitos e princípios), mas também a transferência daquilo que foi aprendido para novas situações” (p. 67). Dessa forma, ao aprender frações, por exemplo, o aluno deverá perceber que, em outras situações, poderá utilizar-se do seu rol de conhecimento. O mesmo ocorrerá com outras disciplinas que fazem uso da Matemática, como a Química, a Física, etc.

Os alunos deverão perceber a solução de problemas como uma oportunidade de se refletir sobre uma situação matemática. Quando o professor valoriza excessivamente os algoritmos e a abstração, essa transferência para novas situações não ocorre, e o aluno parece ficar com a impressão de que a Matemática constitui-se de tópicos isolados e, às vezes, desconexos.

2.2.1 Algumas diferenciações

De acordo com Brito (2006), o ponto de partida para se solucionar um determinado problema é sempre uma situação desconhecida que faz com que o indivíduo mobilize sua estrutura cognitiva, buscando os elementos necessários para chegar à solução.

Muitas confusões e divergências ocorrem para definir a solução de problemas e as etapas que envolvem a mesma. Uma situação-problema só se configura como um problema quando o estudante é motivado a encontrar o estado final.

> A solução de problemas é entendida como uma forma complexa de combinação dos mecanismos cognitivos disponibilizados a partir do momento em que o sujeito se depara com uma situação para a qual precisa buscar alternativas de solução. Pode ser definida como um processo cognitivo que visa transformar uma dada situação uma situação dirigida a um objetivo, quando o método óbvio de solução não está disponível para o solucionador, apresentando quatro características básicas: é cognitiva, é um processo, é dirigida a um objetivo e é pessoal, pois depende do conhecimento prévio do indivíduo. (BRITO, 2006, p.18)

Para resolver exercícios, geralmente contamos com a ajuda de algoritmos ou técnicas que acabam sendo repetidas pelos alunos inúmeras vezes e apresentam sempre um método óbvio de solução. Essa seria a característica fundamental para a diferenciação entre problemas e exercícios. Echeverría (1998, p. 49) afirma que "os exercícios servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos para a posterior solução de problemas (...) dificilmente podem servir para a aprendizagem e compreensão de conceitos.".

Se o estudante não possui recursos cognitivos, caso não tenha aprendido certo conteúdo, pode ocorrer, de acordo com Echeverría e Pozo (1998), que uma mesma situação represente para uma pessoa um problema e para a outra um mero exercício, se esta já adquiriu mecanismos que possibilitem chegar à solução rapidamente.

> (...) Consertar um circuito elétrico é um simples exercício para algumas pessoas, mas um problema complexo e trabalhoso para outras. Da mesma forma, interpretar a informação contida num gráfico ou isolar uma incógnita numa equação matemática pode representar um problema, um exercício, ou nenhuma das duas coisas, para alunos com diferentes conhecimentos e atitudes (p.16).

Dessa forma, conforme aponta Lima (2001), um problema pode nunca ser adequado a **todos** os alunos de uma classe, pois os estudantes sempre apresentarão conhecimentos diversos sobre um mesmo assunto e estágios de desenvolvimento intelectual diferenciados. Portanto o professor deve estar atento na escolha de problemas adequados e procurar motivar os educandos.

No ensino de frações, se a maioria dos alunos não apresentar o domínio das técnicas operatórias, não compreender o constructo de fração como razão, por exemplo, encontrará dificuldades em entender porcentagem, probabilidades e em resolver problemas mais complexos envolvendo frações. É necessário destacar, conforme discutido no capítulo anterior, que existem diferenças conceituais entre fração, razão e proporção. Os estudantes devem diferenciar corretamente esses conceitos para compreender o MMC, por exemplo.

O ensino da Matemática deve dar atenção à aplicação direta dos algoritmos e resolução de exercícios. Mas o ensino de solução de problemas deve ser priorizado, pois ultrapassa o caráter mecânico e, ao se constituir em desafios para os educandos, pode, conforme Boavida (1992), envolvê-los de forma que construam o conhecimento de maneira duradoura.

Para Echeverría e Pozo (1998), ensinar a resolver problemas "não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta" (p. 14).

Entretanto, embora as atuais propostas educacionais enfatizem um ensino por meio da solução de problemas, os livros didáticos utilizados em sala de aula ainda apresentam os problemas de maneira direta e acabada, não estimulando a criatividade, mas sim criando no aluno a sensação de que ele necessita de um procedimento para obter a resposta desejada. São frequentes situações como essa na álgebra e até na geometria. O PCN (Matemática: 5ª a 8ª série) critica a forma como a solução de problemas é abordada em sala de aula:

> A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações. (BRASIL, 1998b, p. 40)

Em contrapartida, uma abordagem adequada de frações por meio da solução de problemas estimularia o aluno a levar conjecturas para obter uma resposta. No livro "O Homem que Calculava", por exemplo, o autor Malba Tahan descreve, em um dos episódios, a História de três irmãos que discutiam a divisão de uma herança de 35 camelos em que metade cabia ao mais velho, a terça parte para o irmão do meio e a nona parte para o irmão mais moço. Diante da impossibilidade de realizar essa divisão que não resultaria em números inteiros, o personagem Beremiz – o homem que calculava – acrescentou o seu camelo e realizou a divisão que satisfez a todos: 18 camelos ao irmão mais velho, 12 camelos ao irmão do meio e 4 (quatro) camelos ao mais novo. Do total, ainda sobraram 2 (dois) camelos que ficaram para ele como prêmio por ter solucionado esse problema.

O trabalho com situações-problema, principalmente se estiverem relacionadas com a realidade sócio-cultural do estudante poderá motivar os alunos. Cabe destacar que a solução de problemas envolve situações desafiadoras e para a qual o aluno não tem uma resposta imediata.

Outra ideia bastante confusa e que merece ser discutida é a de tarefa escolar. É comum serem tratados como sinônimos o exercício e a tarefa escolar em que o aluno está envolvido. Silva (2000b) define tarefas escolares como “as atividades planejadas, elaboradas ou propostas pelos professores ou indicadas nas apostilas adotadas, e realizadas na classe ou em casa pelos alunos, referindo-se a conteúdos escolares, objetivando a aprendizagem dos mesmos”. Assim, ao propor um problema ou exercício para o aluno, essas tarefas realizadas por ele são atividades intencionais e previamente organizadas pelo professor.

2.2.2 O Pensamento e a solução de problemas

As etapas que o pensamento percorre durante a solução de um problema foram tratadas por diversos autores. Problemas pertencentes às Ciências Sociais podem apresentar mais do que uma solução, enquanto que, pela estrutura e conhecimento, nas Ciências da Natureza e Matemática, há uma solução única.

Independentemente da área de conhecimentos, de acordo com Echeverría e Pozo (1998), a solução de um problema envolve recordar, estar atento e relacionar elementos na estrutura cognitiva. Entretanto, essas habilidades apresentadas devem estar numa ordem para que se consiga obter êxito na solução do problema.

Polya (1986) estabelece que o processo da solução de um problema envolve quatro passos necessários. Primeiramente, deve ocorrer a *compreensão do problema*, o entendimento das palavras, da linguagem e da situação para que ocorra a *concepção de um plano*. Em seguida, o indivíduo *executa o plano*, ou seja, verifica se aquilo que pretendia resolve o problema ou não. O último passo constitui-se de uma *visão retrospectiva* do problema, em que se verifica o resultado obtido e sua compatibilidade com o enunciado e seus elementos.

Sternberg (2000) destaca que as pessoas só se interessam em resolver problemas quando é preciso superar obstáculos para se atingir um determinado objetivo. Além disso, descreve um ciclo de resolução de problemas, ou seja, esquematiza alguns recursos utilizados para solucionar um problema. São eles:

1. Identificação do problema - Buscar a que se refere o problema a ser resolvido;
2. Definição e representação do problema - Definir suficientemente bem o problema. Esta etapa é crucial, pois qualquer erro ou imprecisão pode dificultar sua resolução.
3. Formulação da estratégia - Buscar estratégias que possam ser utilizadas para resolver problemas, tais como: a análise, que consiste na decomposição do problema em elementos manuseáveis, e a síntese, que trata da organização de elementos em algo útil ou o pensamento convergente ou divergente.
4. Organização da informação - Refere-se a preparar a informação para que seja executada da melhor forma a estratégia.
5. Alocação de recursos - Envolve tempo, equipamento, espaço e outras variáveis. Nesta etapa, reside a principal diferença entre os especialistas e os iniciantes na resolução de problemas.
6. Monitorização - Nesta etapa, os solucionadores de problemas fazem uma verificação se estão no caminho certo ou não.
7. Avaliação - Analisar se a resposta realmente serve para o problema proposto. Os erros ou equívocos são comuns nesta etapa, pois os alunos geralmente não conferem a coerência entre a resposta e o problema e encontram, muitas vezes, respostas inconvenientes ou absurdas para o mesmo.

Mayer (1992) apontou ainda cinco tipos de conhecimentos imprescindíveis para a solução de problemas:

a) Conhecimento lingüístico: envolve a compreensão da língua materna e seus elementos;
b) Conhecimento factual: refere-se aos conceitos envolvidos no problema;
c) Conhecimento de esquema: conhecimento dos tipos de problema e suas especificidades;
d) Conhecimento de estratégias: trata-se de como desenvolver um plano, de como um problema será tratado;
e) Conhecimento de Algoritmo: refere-se aos algoritmos utilizados, aos processos de cálculo.

Nessa direção, através de uma longa revisão da literatura e com base nos resultados de pesquisas do PSIEM (Grupo de Pesquisas em Psicologia da Educação Matemática), Brito (2006, p. 29) elencou os seguintes itens como importantes para a solução de problemas:

a) A compreensão do texto;
b) A representação do problema;
c) A categorização do problema;
d) A estimativa da solução;
e) O planejamento da solução;
f) A auto-avaliação do procedimento;
g) A auto-avaliação do cálculo;
h) A redação da resposta, que exige do educando a releitura da proposição do problema.

Se o aluno não passar por essas etapas durante a solução de um problema, certamente encontrará algumas dificuldades para obter resultados satisfatórios. As etapas apresentadas para solucionar um problema parecem ser fundamentais para se obter êxito. Dessa forma, ensinar o aluno a planejar as etapas de solução de um problema influenciará não apenas em seu desempenho, como também em suas atitudes.

2.3 As frações e seu desenvolvimento histórico

A palavra *Fração* tem origem do latim Frangere e significa quebrar, ou seja, uma parte de um todo. A ideia inicial que as crianças aprendem já no Ensino Fundamental (4ª série) é que a fração é uma parte do todo. É comum o uso de materiais manipulativos e de representações como pizza ou chocolate para indicar a divisão em partes iguais e a retirada de partes desse todo.

O ensino das frações, de acordo com Prado (2000), deve ser centrado "na (re)criação dos conceitos matemáticos, destacando como elemento importante para esta o caminho do movimento da história do conceito" (p. 56). Seria ideal que as crianças passassem pela mesma lógica do desenvolvimento do conceito de fração. Dessa forma, e por meio da experiência com situações envolvendo frações ao longo da escolaridade, o aluno vai compreendendo a linguagem, os símbolos e torna esses elementos significativos.

A linguagem matemática foi construída pelos homens e torna-se fundamental que os alunos entendam esse processo e sintam-se integrantes do mesmo.

> A linguagem matemática não é arbitrária, arbitrários são os seus símbolos que são o suporte, os veículos de linguagem do pensamento. A linguagem matemática é uma criação coletiva, e não de um grupo, que se generaliza e não se prende a um determinado momento e local. Mas isto não implica que o seu ensino também tenha de ser arbitrário, imediatista e utilitarista. Atrás da aparência aleatória e fortuita existe um movimento histórico e cultural. É este que constitui ao mesmo tempo, o objetivo e a estratégia do ensino. Não nascemos com os símbolos, precisamos de um movimento que os tornem significativos para nós, que os integrem na nossa cultura. É desenvolvendo a cultura do símbolo que este se integrará a nossa cultura, a nossa leitura de mundo. (PRADO, 2000, p.18)

A forma (os símbolos) constitui-se o refinamento do conhecimento sobre frações que a humanidade elaborou desde as suas origens. O conteúdo (significado) é o sentido atribuído pelos homens, a partir dos seus problemas, o que levou ao desenvolvimento dos símbolos.

Os livros didáticos em sua maioria trazem ainda um grande formalismo e apresentam uma Matemática mecanicista. A história dos Números Racionais é pouco tratada ou utilizada apenas como ilustração e não como (re)construção, conforme Prado (2000).

A notação matemática, de modo geral, é pouco significativa para o aluno e por isso precisa ser resgatada. As frações, cuja notação usa uma barra separando, horizontalmente ou de maneira oblíqua, dois números ou letras, tornaram-se comuns somente no século XVI.

2.3.1 A origem dos números fracionários

Os números fracionários, assim como os outros números, surgiram a partir da necessidade humana. As frações nem sempre foram tratadas como números, sendo a notação atual atribuída aos hindus. Em seguida, os árabes também começaram a usar a barra horizontalmente para separar numerador e denominador, e essa notação tornou-se comum a partir do século XVI.

Boyer (1979) afirmou que, na Idade da Pedra, os homens não conheciam as frações. Somente a partir da Idade do Bronze, o ser humano pareceu necessitar do conceito de fração e de uma representação, ainda que primitiva, para este.

Com os egípcios, as frações têm seus primeiros usos e representações. Entretanto, eles apenas conheciam as frações unitárias, ou seja, de denominador igual a 1, e exprimiam todas as outras frações como soma das anteriores. (Por exemplo: $\frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$).

Caraça (1951) atribui a necessidade de criação de um novo campo numérico às relações entre medição, propriedade privada e o estado. Uma das histórias narradas por ele trata da origem da geometria e se relaciona com o surgimento dos números fracionários. Conta-se que o rei Sesóstris dividiu as terras do Egito entre a população e cada um deveria pagar certo tributo ao Estado conforme o tamanho de sua propriedade. Com as chuvas, se o Rio Nilo subisse e ocupasse parte das terras, o proprietário deveria procurar o rei para que este mandasse medidores para os lotes inundados, e pagariam impostos conforme o que havia ficado de terra.

Os Egípcios utilizavam alguns símbolos para representar os numerais. Por exemplo:

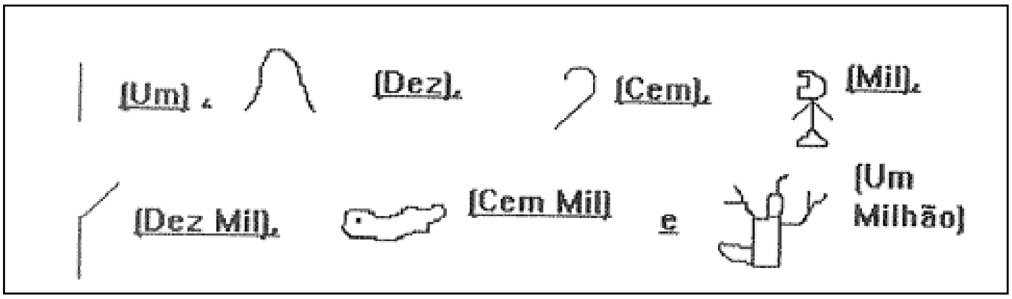
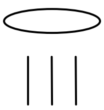
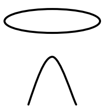
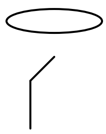


Figura 5 - Extraída de Oliveira (1996)

Para representar as frações, que eram sempre unitárias, os egípcios faziam uma figura oval sobre os símbolos. Assim:

 $\frac{1}{3}$  $\frac{1}{10}$  $\frac{1}{10000}$

Os egípcios consideravam a fração $\frac{2}{3}$ especial nos processos aritméticos. Para calcular $\frac{1}{3}$ de um número, primeiro encontravam o valor de $\frac{2}{3}$ dele e depois, calculavam a metade do resultado encontrado.

O *Papiro de Rhind* (1750 a.C.) traz um conteúdo bastante interessante sobre os números fracionários e suas operações, bem como equivalência de frações, proporções e regra de três. Apresenta ainda uma tabela[6] onde $\frac{2}{n}$, n ≠ 0 é a soma de frações unitárias para os valores ímpares de 5 a 101.

Os gregos consideravam as frações como uma relação entre dois números inteiros. Para diferenciar do inteiro correspondente usavam um acento. Lima e Brito (2001) exemplificam: "Assim $\frac{1}{34}$ se escrevia λδ‘ o que poderia ser confundido com o número $30\frac{1}{4}$".

Os babilônios[7] foram os primeiros a tratar as frações como racionais. Como o sistema de numeração babilônico era de base 60, convertiam as frações em sexagesimais (ou seja, o denominador era uma potência de 60).

2.3.2 O Ensino de frações

Os trabalhos de Oliveira (1996), Lima (1996), Prado (2000), Bezerra (2001), Catalani (2002), Rodrigues (2005), Merlini (2005), apontam dificuldades dos estudantes com o conceito de fração. Algumas das falhas no entendimento dos alunos sobre esse conceito devem-se à complexidade e à forma de abordagem, que, muitas vezes, enfatiza a operacionalidade técnica. Com isso, o estudante pode desenvolver aversão a esse conceito e à Matemática, o que frequentemente o impede de compreender, desenvolver raciocínios e solucionar um determinado problema proposto.

Existem alguns enfoques que podem ser encontrados nos diversos trabalhos que investigam esse conceito[8]: a ênfase no ensino por meio de materiais manipulativos, pesquisa experimental, sequências ou metodologias de ensino e formação de professores.

---

[6] Cf Boyer (1979)
[7] Cf Lima e Brito (2001)
[8] Cf Catalani (2002)

Na primeira forma de abordagem do ensino de frações, a aprendizagem ocorreria através da percepção, do contato dos alunos com objetos que representariam frações e, a partir disso, o estudante compreenderia o conceito de fração. Com o passar do tempo, essa forma de ensino começou a ser bastante criticada e voltou-se a atenção para a lógica e a linguagem. Na tentativa de evitar o enfoque experimental sobre o ensino e com o avanço das pesquisas construtivistas, novas metodologias, métodos, modelos e seqüências didáticas que buscavam a melhoria do ensino de frações começaram a ser adotadas.

A partir dessas pesquisas, alguns autores dão indícios de que o conhecimento do professor a respeito de frações e a forma de ensiná-lo podem levar a uma aprendizagem fragmentada ou pautada em aspectos mecânicos.

Assim, destaca-se a importância da formação do professor, principalmente de 1ª a 4ª séries; os cursos para essa finalidade não possuem uma preocupação específica com a Matemática, e os professores deles egressos são os responsáveis pela formação inicial do aluno. Sem dúvida, é uma questão que merece ser discutida, buscando-se novos rumos e soluções que favoreçam a aprendizagem.

Quanto ao aspecto da concepção dos professores sobre o ensino de frações e suas influências na prática pedagógica, Teixeira, com base nos trabalhos de Nóvoa sobre formação docente, afirma:

> Os professores podem ter tido suas concepções influenciadas pelos livros didáticos, que costumam apresentar um alto número de situações/questões, envolvendo o significado parte-todo e operador multiplicativo. Ou ainda essas concepções podem ser originadas no momento de formação do professor, na época em que eram ainda alunos do Ensino fundamental (2008, p. 175).

Lima (1996) corrobora com a ideia de que o domínio dos conceitos por parte do professor pode ajudar na aprendizagem do aluno. A autora, no entanto, afirma que “a ideia de ´parte de alguma coisa´ deve ser a chave para o ensino de frações” (p. 24).

Oliveira (1996), Nacarato et al (2004), Santos (2005), Rodrigues (2005), Maciel e Câmara (2007) citam os trabalhos de Kieren (1976, 1981, 1993). Para este autor e outros como Behr et al. (1983), Nunes e Bryant (1997), a ideia de fração como parte de alguma coisa é apenas uma das várias interpretações para esse conceito.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, assim como os diferentes pesquisadores, de acordo com Nacarato et al (2004), apontam quatro significados centrais ao estudo das frações: quociente, razão, parte-todo e operador. A maioria dos trabalhos utiliza como referencial teórico os trabalhos de Kieren.

Kieren (1976, 1981 apud MACIEL E CÂMARA, 2007), afirmou que, para a compreensão de frações, é necessário incorporá-las dentro do campo dos racionais. O autor propôs, em 1976, que os números racionais possuem cinco subconstructos: a relação parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Em trabalhos posteriores, de acordo com Malaspina (2007), Kieren (1993, p. 57) passa a entender que a relação parte-todo inclui-se nos constructos quociente, operador e medida.

Nunes e Bryant (1997), com base nesses estudos, destacaram a existência de uma confusão entre os conceitos de fração e divisão. Para os autores, esse problema se esclarece quando as quantidades contínuas são abordadas, já que o resultado das divisões em quantidades contínuas são frações e não subconjuntos. Já uma divisão qualquer, pode ocorrer entre quantidades discretas que relacionam números inteiros, por exemplo, a divisão de balas para um grupo de crianças. Dessa forma, as frações seriam números no campo dos quocientes, produzidos por divisões, e não por união com números inteiros. As frações, muitas vezes, poderiam ser consideradas como um caso particular de divisão.

Nunes et al. (2003) identificam, como significados centrais e que devem ser levados em consideração no ensino e aprendizagem de frações, os seguintes:

- Medidas
- Parte-todo
- Quociente
- Número
- Operador multiplicativo

Neste trabalho, para análise dos instrumentos de pesquisa, a relação parte-todo será considerada como um dos significados atribuídos às frações. A sua inclusão nas análises seguintes é importante pela sua presença em abordagens de livros didáticos e no PCN.

Um esclarecimento importante – que muitos livros didáticos não o fazem e até mesmo professores sentem dúvidas – é sobre a definição de fração, razão e divisão. É importante destacar que, embora esses conceitos se relacionem na construção dos números racionais, eles são distintos. Brolezzi (1996) apresentou em sua tese um triângulo de significado do Número Racional, que trouxe esses três principais conceitos:

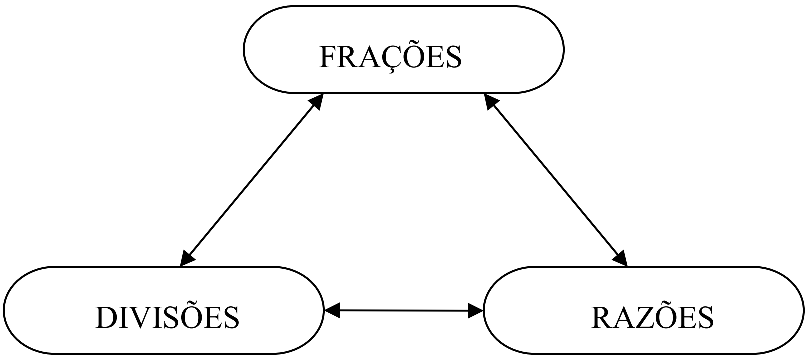


Figura 6 - Triângulo, apresentado por Brolezzi (1996, p. 56), de significado do Número Racional

De acordo com Boyer (1979), as frações surgiram no Egito antigo pela necessidade de contagem e medição de terras. O conceito de razão surgiu na Grécia para a comparação entre dois comprimentos. A ideia de divisão e a representação decimal surgem na Mesopotâmia, que apresentava uma Matemática mais desenvolvida do que o Egito.

A definição atual de número racional (ou uma fração ordinária), após as construções humanas ao longo do tempo é:

> Um número que pode ser colocado na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$.

2.3.3 Os diferentes significados das frações

- **Fração como Número**

A fração pode significar um número racional, escrito na forma $\frac{a}{b}$, ou como decimal. Esse número, assim como os inteiros ou naturais expressam quantidades que podem ser representadas na reta numérica[9].

As atividades que solicitam que o aluno transforme frações em números decimais ou que represente na reta numérica uma determinada fração são exemplos do uso de fração como número.

[9] Cf Moutinho (2005)

- **Fração como Medida**

De acordo com Lins e Silva (2007, p. 10), uma das formas de entender o conceito de fração é “que elas são o resultado de se medir alguma coisa, usando como referência uma parte da unidade”. A quantidade é medida pela relação entre essas duas variáveis.

As frações como medida aparecem, frequentemente, na culinária. Um exemplo disso é a composição de um suco de laranja em que são necessárias duas medidas do concentrado da fruta para cinco medidas de água. Neste caso, são envolvidas quantidades contínuas.

Outro exemplo desse significado das frações é a probabilidade de ocorrência de um determinado evento. As variáveis envolvidas são discretas. Por exemplo: Em uma rifa escolar, foram feitos 300 bilhetes para concorrer a um aparelho de DVD. Minha família comprou 25 bilhetes. Qual a probabilidade de ganharmos o prêmio?

É importante ressaltar que, ao relacionar as frações com medidas, o aluno deixa de ver apenas como um símbolo que “junta dois números”. Há uma associação entre as ideias de medida e de número, da mesma forma como são introduzidos os números decimais[10].

- **Fração como parte-todo**

A ideia de parte de um todo, que está fortemente associada às frações, é entendida como uma partição de um todo em n partes iguais. A clássica representação de um chocolate a ser dividido entre as crianças ilustra esse caso.

Um equívoco bastante comum, que a ideia de fração como medida traz, pode ser verificado no exemplo a seguir:

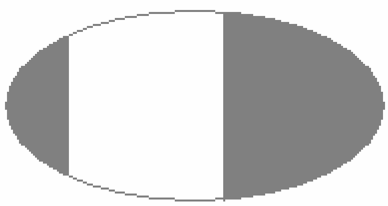


Figura 7 - Divisão em partes não iguais

[10] Cf Lins e Silva (2007)

Muitos alunos podem pensar que o inteiro foi dividido em três partes e destacadas apenas duas. Assim, a fração correspondente deveria ser $\frac{2}{3}$. Entretanto, do ponto de vista matemático, as partes devem ser iguais!

- **Fração como quociente**

Esse significado está presente nas situações em que a fração aparece com a ideia de divisão ou partilha. Pode ainda ser considerado como uma extrapolação da relação parte-todo nas situações em que o número de partes a serem tomadas é maior que as partições feitas no todo. Neste caso, são apresentados os números decimais que também podem ser considerados de acordo com Oliveira (1996) como um caso particular da relação parte-todo.

As frações como quociente podem representar quantidades discretas ou contínuas. Um exemplo de problema apresentado à 5ª série do Ensino Fundamental, envolvendo esse significado, refere-se à divisão do leite: “Para dividir igualmente 40 litros de leite entre 10 famílias, quanto deverá receber cada família? (IEZZI et al, 2005, p. 187)”. Outros exemplos como repartir balas, palitos ou lápis entre crianças abordam a divisão com quantidades discretas.

- **Fração como razão**

A razão pode ser entendida como “uma relação entre grandezas da mesma espécie” ou como um “quociente entre dois números”. De acordo com Lins e Silva (2007), quando se trata de figuras semelhantes, usamos a primeira ideia, mas com referência às porcentagens, por exemplo, as razões são tratadas como divisão.

O exemplo a seguir, extraído do livro didático ”Matemática e Realidade” da 6ª série, ilustra o uso de frações como razão: “Um agricultor colheu 240 Kg de batatas do tipo A, dos quais 12 Kg eram de má qualidade. Ele colheu também 360 Kg de batatas do tipo B, dos quais 16 Kg eram inaproveitáveis. Qual tipo de batata traz mais vantagens para o agricultor? (IEZZI et al, 2005, p. 211)”

Ao calcular ou aproximar duas situações, pode-se comparar, e, dessa forma, avaliar qual situação é mais vantajosa:

- Nas batatas tipo A, as perdas foram de $\frac{12}{240} = \frac{1}{20}$. Assim, em 20 Kg de batatas boas, era desperdiçado apenas 1 Kg.
- Nas batatas tipo B, as perdas foram de 16 Kg em 360 Kg. Como $\frac{16}{360} = \frac{2}{45}$, tem-se que a cada 45 Kg bons perderam-se 2 Kg.

Desse modo, conclui-se que as batatas tipo B são mais vantajosas.

Behr et al (1983) diferenciam ainda o sub-constructo taxa de número racional da ideia de fração como razão. Essa taxa expressa uma relação que não necessariamente se estabelece entre quantidades de mesma espécie. O conceito de velocidade ou de aceleração são exemplos da taxa de razões, em que as grandezas não são iguais.

Para Romanatto (1997, p. 70), "(...) o que distingue taxa de razões é que as taxas podem ser adicionadas, subtraídas enquanto que as razões não o são". Assim, não faz sentido realizarmos operações com razões, ao contrário do que ocorre com as taxas de razões. Na física, ao estudar o conteúdo velocidade, pode-se adicionar, subtrair e até dividir para encontrar a velocidade média ou instantânea, por exemplo.

- **Fração como operador**

Esse significado atribui à fração um papel de transformador, algo que atua sobre um número e o modifica. Dienes (1975 apud OLIVEIRA, 1996) considera que, para determinar $\frac{2}{3}$ de algo, deve-se realizar duas operações sucessivas; com isso concebe o significado do operador como uma sucessão de divisões e multiplicações.

As porcentagens podem ser consideradas como exemplos em situações em que se pretende definir determinados acréscimos ou descontos sobre o valor da mercadoria. O livro "Tudo é Matemática", da 5ª série do Ensino Fundamental, traz o seguinte problema: "A classe de Joana está organizando uma excursão. Nela vão 80% dos alunos da classe. Se a classe tem 35 alunos, quantos alunos dessa classe vão participar da excursão? (DANTE , 2007, p. 157)". A solução envolve a divisão de 80 por 100 e depois a multiplicação por 35, ou a multiplicação dos alunos da classe que irão participar da excursão por 80, seguido pela divisão por 100.

Entretanto, deve-se ressaltar que o conceito de porcentagem surgiu na época do Império Romano (27 a.C a 476 d.C), bem após o domínio das frações no Egito Antigo.

A divisão de uma herança, por exemplo, é uma situação em que as frações assumem o significado de operador. A partir de uma certa quantia da herança, os herdeiros terão direito somente a uma parte. Assim, se forem 5 pessoas, a parte que cabe a cada um deles será de $\frac{1}{5}$ do valor total da herança.

Segundo Nunes et al (2003), ainda não existem pesquisas suficientes que englobem a diversidade e complexidade de conceitos envolvidos. Desse modo, não se pode classificar de maneira absoluta quais significados ou distinções são centrais e quais não o são.

Quanto às implicações, em sala de aula, desses diversos significados, o PCN (Matemática: 5ª a 8ª série) ressalva que

> Na perspectiva do ensino não é desejável tratar isoladamente cada uma dessas interpretações. A consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo do terceiro e quarto ciclos, que possibilite análise e comparação de variadas situações-problema (BRASIL, 1998b, p. 103).

A construção do número fracionário exige um grande período de tempo. Esse conteúdo é abordado, conforme propõe o PCN de Matemática, desde o Ciclo II (3ª e 4ª séries) e se estende até o final do Ensino Fundamental. Assim, o aluno deverá ter diferentes contatos com experiências que mostrem a necessidade e permitam a compreensão desse novo campo numérico.

A compreensão dos diferentes significados de frações e as formas de abordagem poderão influenciar a aprendizagem de conceitos no Ensino Médio, bem como as atitudes dos alunos. Assim, se o aluno não teve um entendimento adequado de fração como operador multiplicativo, poderá apresentar dificuldades em aprender funções, por exemplo, já que também se refere a uma transformação. Por outro lado, abordagens que enfatizem a manipulação de objetos ou apenas enfoquem a técnica operatória poderão propiciar concepções equivocadas ou atitudes desfavoráveis em relação à Matemática.

CAPÍTULO 3 - REVISÃO DE LITERATURA

Esta revisão de literatura foi realizada com a finalidade de apresentar estudos que abordam o tema das atitudes em relação à Matemática, as pesquisas envolvendo solução de problemas e os trabalhos sobre números racionais e o ensino de frações.

As fontes de dados foram bibliotecas digitais de diferentes universidades, com destaque para a UNICAMP, a USP e a PUC/ SP. Foram consultados também trabalhos na base Scielo e portal Capes para buscar informações complementares sobre alguns referenciais teóricos utilizados em algumas pesquisas.

3.1 As pesquisas sobre atitudes

As atitudes dos alunos em relação à Matemática têm sido foco de estudos na psicologia e na Educação Matemática desde meados do século XX.

Sobre o medo dos alunos em relação à Matemática, Gough (1954 apud BRITO, 1996) enfatizou que, além de gerar atitudes negativas, deve ser tratado cuidadosamente evitando o que denominou de “Mathemaphobia” (Fobia à Matemática). Nesse sentido, Papert (1980) destacou que o “medo” dos alunos em relação à Matemática dificulta a aprendizagem de conceitos relacionados com ela:

> Embora essas auto-imagens negativas possam ser superadas, na vida de um indivíduo elas são extremamente fortes e auto-reforçáveis. Se as pessoas acreditam muito firmemente que não podem entender matemática, quase certamente conseguirão abster-se de tentar executar qualquer coisa que reconheçam como matemática. A consequência de tal auto-sabotagem é o insucesso pessoal, e cada fracasso reforça a convicção original. E tais convicções podem ser ainda mais insidiosas quando assumidas não só por indivíduos, mas por toda a nossa cultura (p.63).

O medo da Matemática e as convicções individuais sobre o fracasso em aprender conteúdos relacionados à disciplina podem interferir no sucesso pessoal. Alguns trabalhos apontam que o que existe é mais uma crença de que os alunos não gostam de Matemática alimentada por práticas pedagógicas inadequadas e influências de familiares e dos próprios professores.

O estudo realizado por Brito (1996) apresentou um amplo detalhamento das pesquisas feitas até então e concluiu que, ao contrário do que comumente é afirmado, a Matemática não é a disciplina que provoca maior ansiedade e atitudes negativas nos alunos. Isso seria mais uma crença, e algumas situações provocadas pelo professor ou a falta de material adequado poderiam desenvolver atitudes negativas nos educandos.

Alguns resultados sobre as atitudes em relação à Matemática, obtidos por essa autora, nesse grupo de estudo, indicam que, nas séries iniciais, as atitudes são mais positivas. Ao final do Ensino Fundamental, as atitudes tendem a ser negativas, quando são introduzidos alguns conteúdos abstratos e algébricos, e voltam a ser positivas no Ensino Médio.

3.1.1 Trabalhos publicados no Brasil

As atitudes em relação à Matemática têm sido estudadas de maneira mais intensa pelo Grupo de Pesquisa sobre *Psicologia da Educação Matemática* (PSIEM) da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

O grupo analisa as crenças, valores e atitudes em relação à matemática e as relações com a aprendizagem e desempenho. As variáveis afetivas, como a confiança e a ansiedade, assim como as influências dos professores, pais, amigos e métodos são consideradas no estudo sobre como são formadas as atitudes dos alunos e a direção destas (positiva ou negativa).

Os estudos são desenvolvidos em diferentes graus de ensino, desde a Educação Infantil ao Nível Superior, e são realizados preferencialmente em escolas da rede pública de ensino.

As linhas de pesquisa do PSIEM são: atitudes, gênero e matemática, habilidades, solução de problemas e formação de conceitos.

Brito, coordenadora do PSIEM, em sua tese de Livre Docência (1996) com o título “Um Estudo Sobre as Atitudes em Relação à Matemática em Estudantes de 1º e 2º Graus”, compilou uma ampla literatura sobre as atitudes e através de análise dos dados obtidos em 4 (quatro) escolas da região de Campinas, concluiu que neste grupo , ao contrário do que as pessoas afirmam, os estudantes apresentam atitudes positivas em relação à Matemática, sendo que o número de sujeitos que preferem a Matemática é bastante próximo daqueles que preferem o Português.

Moron (1999) estudou a existência e o tipo de atitudes em relação à Matemática nos professores de Educação Infantil. Em sua dissertação de mestrado, cujo título foi "Um estudo exploratório sobre as concepções e as atitudes dos professores de Educação Infantil em relação à Matemática", usou um questionário e uma escala de atitudes do tipo Likert, em estudo realizado na cidade de Bauru com 402 professores da Educação Infantil, em uma primeira etapa, e seis professores, posteriormente. Utilizou-se um questionário para obter informações pessoais e uma escala de atitudes em relação à Matemática, inicialmente. Na segunda etapa foi realizada uma entrevista com seis professores do grupo de 402, selecionados por critérios pré-estabelecidos. Foi detectada uma tendência para atitudes positivas, e, ao contrário do que é comumente afirmado, esses professores não optaram pelo magistério por não gostar de matemática. A autora constatou que "os professores com atitudes positivas e os professores com atitudes negativas não apresentam concepções muito diferentes a respeito do ensino de matemática"

O trabalho de doutorado de Araújo (1999) investigou as "influências das habilidades e das atitudes em relação à Matemática e a escolha profissional". Os participantes da pesquisa foram 145 alunos da 3ª série do Ensino Médio, de uma escola pública e de uma particular, e 233 estudantes universitários. Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram: questionário, escala de atitudes, teste com 10 questões de álgebra e uma série de problemas algébricos. Os resultados evidenciaram que a área de Exatas apresentou melhor desempenho em relação às demais. Os sujeitos da escola particular tiveram melhor desempenho, porém atitudes mais negativas se comparados com os alunos da escola pública. Os alunos indicaram a necessidade de um trabalho que torne a Álgebra mais significativa para o indivíduo, independentemente de sua escolha profissional.

Outro estudo com enfoque nas atitudes em relação à Matemática foi conduzido por Gonçalez (1995), que desenvolveu sua dissertação de mestrado tratando das "Atitudes (des)favoráveis com relação à Matemática". Foram sujeitos 295 alunos do antigo curso Magistério e 203 professores do Ensino Fundamental (1ª a 4ª séries). Os instrumentos utilizados foram: uma escala de atitudes do tipo likert composta por 22 afirmações, elaborada por Dutton (1968) e um questionário pessoal. Os resultados apontaram atitudes negativas em relação à matemática por parte dos estudantes e positivas por parte dos professores. No doutorado sob o título "Relações entre a família, o gênero, o desempenho, a confiança e as atitudes em relação à Matemática", Gonçalez (2000) contribuiu de maneira efetiva no estudo das influências que os estudantes sofrem e que afetam o desenvolvimento de atitudes (positivas ou negativas) em relação à matemática. Nessa pesquisa, participaram 121 estudantes das terceiras, quartas e oitavas séries das redes particular e municipal de ensino e seus respectivos pais. Os instrumentos foram três escalas de atitudes, atas de notas e questionários. De acordo com a pesquisadora, os dados indicaram que o nível de confiança está relacionado com o desempenho e que os pais exercem pouca influência na formação das atitudes dos filhos.

Pacheco (1995) realizou seu trabalho com estudantes universitários. Verificou o tipo de atitudes em relação ao cálculo, utilizando a escala de atitudes elaborada por Aiken (1969), revista por Aiken e Dreger (1971) e adaptada por Brito em 1993. Foram sujeitos da pesquisa, 86 alunos de graduação de uma Universidade pública do interior do estado do Paraná. Os dados foram submetidos a um tratamento estatístico, usando o SPSS **(**Statistical Package for Social Science) e a análise fatorial (ANOVA), e indicaram que as atitudes desse grupo estudado diferem significativamente quando agrupados de acordo com notas na disciplina, grau de escolaridade dos pais, atenção às aulas e hábitos de estudo. O autor validou ainda uma escala de atitudes em relação ao cálculo diferencial e integral, composta por 25 itens, do tipo multidimensional (com seis fatores). O coeficiente alfa ($1< \alpha < 0$) encontrado, que indica a fidedignidade da escala, foi de 0,78.

Outros estudos procuraram verificar se o uso do computador no ensino da matemática provocava mudanças nas atitudes dos alunos em relação a ela, como é o trabalho de Silva (2003), que investigou se o uso do LOGO contribuía para a melhoria do desempenho e para o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à Matemática. Foram participantes da pesquisa 113 alunos da 8ª série e 106 da 4ª série do Ensino Fundamental. Os resultados apontaram que os estudantes ficam mais motivados e passam a valorizar e participar mais das aulas de geometria.

A pesquisa de doutorado de Viana (2005) investigou "O componente espacial da habilidade matemática de alunos do Ensino Médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à Matemática e à geometria". Foram sujeitos 177 alunos de Ensino Médio de uma escola particular. Os instrumentos utilizados foram duas provas tipo lápis e papel, um teste psicológico de raciocínio espacial e duas escalas de atitudes em relação à Matemática e à geometria. Os resultados evidenciaram que as atitudes em relação à Matemática e à geometria estavam relacionadas. O desempenho em geometria relacionou-se com o raciocínio espacial, com o componente da habilidade matemática e com as atitudes em relação à geometria.

Com relação ao uso de jogos, o desempenho e as atitudes em relação à Matemática, Jesus (1999) analisou um grupo de 104 alunos, de 11 a 13 anos, de uma 5ª série de uma escola pública da baixada santista. Utilizou uma escala de atitudes e uma prova de matemática. Os sujeitos foram divididos em dois grupos: um experimental e um grupo de controle. Quanto ao desempenho e pontuação na escala de atitudes em relação à matemática, os resultados indicaram que o grupo experimental apresentou diferenças significativas em relação ao grupo de controle. Dessa forma, o uso de jogos em sala de aula parece favorecer o desempenho e o surgimento de atitudes positivas no ensino da matemática.

A pesquisa de doutorado de Jesus (2005) analisou "As atitudes e o desempenho em operações aritméticas do ponto de vista da aprendizagem significativa". Os sujeitos foram 149 alunos de 6ª série, da cidade de Santos/ SP. Os instrumentos utilizados foram escalas de atitudes em relação à Matemática e provas de matemática envolvendo operações com números naturais e inteiros. Numa primeira etapa, os alunos foram submetidos a uma prova de matemática e à escala de atitudes em relação à Matemática. Na segunda etapa, realizada 90 dias depois, foram aplicadas duas provas de matemática e a escala de atitudes em relação à matemática. Os professores dos alunos foram submetidos a uma entrevista semi-estruturada. Os resultados apontaram correlação entre o desempenho em operações com números naturais e inteiros e atitudes em relação à Matemática e uma correlação altamente significativa entre desempenho em operações aritméticas com naturais e com números inteiros. Constatou-se que não houve diferenças significativas entre desempenho nas operações e gênero.

O trabalho de Silva (2000b) investigou as variáveis atitudinais e o fracasso em Matemática entre alunos de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental. Foram sujeitos 552 alunos e dez professores de Matemática. Por meio de um questionário, escala de atitudes e entrevistas, constatou-se que os professores não se relacionam com o fracasso dos seus alunos. Os alunos evidenciaram pouca importância à utilidade da Matemática no dia a dia. Os resultados apontaram ainda, relações entre as atitudes e a autopercepção de desempenho em matemática, as explicações do professor, a nota dos alunos, a atenção às explicações e a preferência por disciplina.

Outro estudo investigou as concepções, crenças e atitudes em relação à Matemática de professores de 1ª a 4ª série do Ensino Fundamental. Ardiles (2007) realizou sua pesquisa com 122 professores das séries iniciais da rede pública de ensino. Os resultados indicaram concepções construtivistas, crenças instrumentalistas acerca da Matemática e atitudes positivas. Foram verificadas diferenças de concepções e crenças em função do tempo de exercício do magistério e do tipo de instituição (pública ou particular) formadora.

Paula (2008) investigou as relações entre as atitudes em relação à Matemática dos pais e as atitudes, desempenho e crenças de autoeficácia apresentadas pelos alunos. Foram sujeitos

22 alunos de 5ª série do Ensino Fundamental. Os instrumentos utilizados foram: um questionário de autoeficácia matemática, a prova do SARESP 2005 e uma escala de atitudes em relação à Matemática. Para os pais foi aplicado um questionário e uma escala de atitudes para pais; também foi realizada uma entrevista. Alguns resultados apontaram ausência de relação entre a crença de autoeficácia e o desempenho dos alunos, uma baixa correlação entre atitudes e desempenho, uma correlação moderada entre atitudes dos pais e atitudes dos alunos e uma correlação alta e significativa entre atitudes dos pais e desempenho dos filhos em Matemática.

Com relação às atitudes e o ensino de estatística, Cazorla et al (1999) elaboraram e validaram uma escala de atitudes em relação à estatística (EAE), utilizando a escala de atitudes elaborada por Aiken em 1969, revista por Aiken e Dreger (1971) e adaptada por Brito em 1993. A escala compõe-se de 20 itens, sendo 10 afirmações que expressam atitudes negativas e 10 positivas. O instrumento foi aplicado a 1154 estudantes de 15 cursos de graduação de duas universidades do estado de São Paulo. Alguns resultados apresentaram que não foram encontradas diferenças significativas por gênero, mas sim por área do conhecimento (a área de humanas apresentou atitudes significativamente mais negativas do que a área de Saúde e Exatas, que não apresentaram diferenças).

Vendramini (2000) realizou um estudo com 319 estudantes do ensino superior. Utilizou os seguintes instrumentos: escala de atitudes em relação à Matemática, prova de estatística e uma prova de matemática. O objetivo dessa pesquisa foi verificar as relações entre as habilidades matemáticas, a aprendizagem dos conceitos estatísticos e as atitudes em relação à Estatística. Alguns resultados indicaram que 24,5% conseguiram identificar características do conceito de estatística e que, quanto melhor o desempenho na solução de problemas, e mais positivas as atitudes em relação à Matemática, melhor era o desempenho do sujeito em estatística.

Silva (2000a) também estudou as atitudes em relação à estatística. Foram sujeitos dessa pesquisa, 643 estudantes de cursos das diversas áreas que cursavam a disciplina Estatística. Os instrumentos utilizados foram: um questionário, uma escala de atitudes em relação à Estatística (EAE) e uma escala de atitudes em relação à Matemática. A área de humanas apresentou atitudes negativas e críticas à Estatística. As variáveis mais significativas na determinação das atitudes em relação à estatística foram: atitudes em relação à matemática, autopercepção do desempenho em Matemática e em Estatística e desempenho na disciplina Estatística. Os dados indicaram, ainda, que 53,3% dos alunos apresentaram atitudes positivas em Estatística e reconheciam sua importância e utilidade.

O trabalho de doutorado de Cazorla (2002) estudou os fatores que interferem na leitura de gráficos estatísticos. Foram sujeitos 814 estudantes universitários que cursavam a disciplina Estatística. Os instrumentos foram: um questionário, escalas de atitudes em relação à Matemática e à Estatística, três provas (uma de Matemática, uma de Estatística e outra de aptidão verbal). Os resultados indicaram que o gênero masculino apresentou atitudes mais positivas e desempenho melhor nas provas cognitivas, com exceção da prova verbal.

Com relação à introdução da álgebra, Loos (1998), na Universidade Federal de Pernambuco, estudou o papel da ansiedade nesse conteúdo em alunos de sexta e sétima séries do Ensino fundamental de uma escola pública federal. Concluiu, dentre outras coisas, que, neste grupo de participantes, as atitudes mais negativas estavam presentes nos alunos da sexta série, quando se dá a introdução da álgebra; que as relações entre ansiedade e desempenho foram verificadas e que o excesso de ansiedade tendia a bloquear o indivíduo frente a situações de impasse; também ressaltou a importância de a equipe pedagógica "ver" o aluno de uma forma mais global, percebendo que as dificuldades e o prazer em aprender passam pelo crivo do desejo.

Os estudos abordando as variáveis afetivas e suas relações têm sido realizados não apenas em Educação Matemática. No Ensino de Ciências, são encontradas algumas pesquisas na área de Física, Química e Biologia. Esses trabalhos estudam as relações entre gênero e desempenho frente a conteúdos específicos, como a História da Ciência ou à disciplina como um todo.

Menegotto (2006), em sua dissertação de Mestrado, "Atitudes de Estudantes do Ensino Médio em Relação à Física", utilizou como instrumento um questionário informativo e uma escala adaptada de acordo com o trabalho de Talim (2004). Foram sujeitos 125 alunos de três salas do Ensino Médio. Alguns resultados indicam que os estudantes valorizam a Física e que, quando os professores não contextualizam o ensino dessa disciplina, os alunos apresentam dificuldade no entendimento dos conceitos.

Scoaris, Pereira e Santin Filho (2007) elaboraram um questionário que pretendeu avaliar as atitudes em relação ao uso da História da Ciência no Ensino de Ciências. O instrumento, do tipo likert, é composto de trinta e três afirmativas e passou por testes estatísticos de validação. Os sujeitos foram 201 estudantes universitários, dos cursos de licenciatura em Física, Química, Matemática, Biologia e Geografia. Os resultados identificaram não só quais cursos atribuem maior importância à História da Ciência, como também o perfil desse conhecimento apresentado por cada um deles.

Na revisão de literatura sobre as atitudes em relação à Matemática é possível perceber que estas influenciam diretamente o desempenho dos sujeitos em Matemática. Além disso, o gênero dos participantes não é uma variável que influencia diretamente o desempenho ou a formação de atitudes dos estudantes.

Quanto à elaboração de escalas de atitudes, pode-se perceber que foram adaptadas e validadas algumas escalas buscando-se medir atitudes em relação a diversos conteúdos matemáticos. Dentre esses, destacam-se a estatística (CAZORLA et al, 1999), o cálculo diferencial e integral (PACHECO, 1995), a Geometria (BRITO e VIANA, 2004), entre outros. No entanto, na Física e em áreas correlatas também podem ser encontradas escalas de atitudes (MENEGOTTO, 2006; SCOARIS, PEREIRA e SANTIN FILHO, 2007).

3.2 As pesquisas sobre a solução de problemas

O número de pesquisas envolvendo a solução de problemas apresentou um aumento considerável, devido ao fato de ter se tornado um eixo norteador da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1992, 2008), juntamente com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997),

Com relação ao ensino de álgebra e solução de problemas, Alves (1999) estudou a influência da habilidade matemática e outros fatores sobre o desempenho dos concluintes do Ensino Médio na solução de problemas algébricos. A pesquisa foi dividida em duas etapas: na 1ª, participaram 53 sujeitos e, na 2ª, 9 (nove) estudantes. A análise dos resultados apontou que os alunos encontram dificuldades na obtenção da informação matemática (o enunciado) e que os componentes da habilidade matemática analisados e as atitudes não determinavam o desempenho na solução de problemas algébricos.

Utsumi (2000) estudou as estudou as atitudes e habilidades envolvidas em problemas algébricos. Os sujeitos foram 256 estudantes das sextas, sétimas e oitava séries do Ensino Fundamental. Os instrumentos compunham-se de um questionário, uma escala de atitudes em relação à Matemática e um teste matemático. Para uma segunda etapa, foram selecionados os alunos com melhor desempenho por série aos quais se aplicaram vários testes para investigar os diversos componentes da habilidade matemática. Os resultados mostraram que as variáveis série, reprovação, hábitos de estudo, compreensão dos problemas matemáticos e autopercepção do desempenho estavam relacionados às atitudes dos alunos.

Quintiliano (2005) estudou as relações entre o conhecimento declarativo e o conhecimento de procedimentos na solução de problemas algébricos, e as influências que esses conhecimentos produzem no aluno. Foram sujeitos da pesquisa 96 alunos da última série do Ensino Fundamental e os instrumentos utilizados foram: um questionário informativo, uma prova para investigar o conhecimento declarativo através de questões que envolviam os conceitos de equação, expressão algébrica, variável e incógnita, e uma prova para avaliar o conhecimento de procedimento utilizado em situações problema que deveriam utilizar alguns procedimentos algébricos. Os resultados obtidos apontaram uma correlação positiva moderada, indicando uma tendência de que quanto maior a nota atribuída no conhecimento declarativo, maior era a nota no conhecimento de procedimentos.

Um outro estudo desenvolvido na área de solução de problemas matemáticos foi conduzido por Spaletta (1998), que pesquisou o desempenho dos estudantes do curso de Engenharia Elétrica da UNICAMP, na disciplina Cálculo I e o desempenho em problemas que avaliam a reversibilidade como componente da estrutura da habilidade matemática. Utilizou 91 sujeitos, distribuídos entre os cursos Diurno e Noturno. A análise estatística dos dados mostrou relações entre o desempenho em Cálculo I e nos problemas matemáticos.

Com relação à solução de problemas geométricos, a pesquisa de doutorado de Pirola (2000) investigou os diversos tipos de conhecimento e as dificuldades apresentadas, tendo como sujeitos 124 estudantes do curso de Habilitação Específica do Magistério (HEM) e de 90 alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade do interior de São Paulo. Foram utilizados, na coleta dos dados, um questionário informativo, contendo questões a respeito da vida escolar dos alunos, e uma prova contendo dez problemas elaborados a partir dos utilizados por Krutetskii (1976). Os resultados apontaram diferenças significativas entre os participantes dos dois cursos analisados nessa pesquisa, na utilização adequada de princípios e conceitos, bem como no desempenho dos sujeitos.

Com relação à solução de problemas e os tipos de mente matemática definidos por Krutetskii, Dobarro (2007) identificou possíveis relações existentes entre o desempenho em problemas de Matemática e os componentes viso-pictóricos e lógico-verbais da habilidade matemática. O estudo fundamentado na teoria de Krutetskii (1976) analisou os tipos de arranjos matemáticos da mente e investigou as relações entre os constructos afetivos, as atitudes em relação à Matemática e autoeficácia matemática com o desempenho dos estudantes. Participaram da primeira etapa da pesquisa 213 alunos do Ensino Médio. Em seguida, foram selecionados dois sujeitos com desempenho altamente satisfatórios para participarem do método “pensar em voz alta”.

Outros estudos investigaram a solução de problemas e suas intersecções com as diversas variáveis. A pesquisa de Lima (2001) estudou as relações entre flexibilidade de pensamento e criatividade. Foram sujeitos 307 estudantes de sexta, sétima e oitava séries. Um dos resultados evidenciou que as variáveis - série, escolaridade da mãe, horas de estudo, entendimento dos problemas em sala de aula, distração em aula, disciplina preferida, disciplina de que menos gosta e qual retiraria da escola - relacionam-se às notas dos sujeitos.

Gomes (1998) investigou as diferentes estratégias de solução de problemas realizadas por sujeitos com níveis de escolaridade diferentes. Foram sujeitos da pesquisa professores da rede estadual de ensino, professores do Ensino Superior, futuros professores (dos cursos de Matemática, Pedagogia e Magistério), alunos de 8ª série e 3ª série do Ensino Médio de Maringá/PR e sujeitos de escolaridade limitada do município de Piacatu/ SP. Utilizaram-se, como instrumentos de pesquisa um questionário, uma prova de matemática e uma entrevista sobre a escola e a matemática. Os resultados indicaram que a relação escolaridade/ êxito na solução de problemas foi bastante tênue, de acordo com a análise da autora. Dessa forma, o grau de escolaridade não pode ser usado como medida para inferir a competência em solução de problemas envolvendo alguns conceitos de matemática elementar.

Alves (2005) buscou compreender e analisar as relações entre a memória, os conhecimentos declarativo e de procedimento e o desempenho na solução de problemas matemáticos. Foram sujeitos dessa pesquisa 177 estudantes do primeiro e último ano do ciclo II do Ensino Fundamental e último ano do Ensino Médio. Alguns resultados apontaram a relação entre memória matemática e desempenho na solução de problemas.

A partir da revisão de literatura envolvendo a solução de problemas, foi possível perceber uma preocupação em investigar relações entre diversas habilidades e o desempenho na solução de problemas. Além disso, outros trabalhos (QUINTILIANO, 2005; ALVES, 2005) estudaram as diferenças entre conhecimento declarativo e de procedimento na solução de problemas. Outros trabalhos (ALVES, 1999; PIROLA, 2000), ao investigar os estágios pelos quais os estudantes passam ao resolver um problema, conforme proposto por Krutetskii (1976), apontaram dificuldades na obtenção da informação matemática através do enunciado.

3.3 As pesquisas sobre frações

Lima (1996) realizou um estudo do conceito de fração, tendo como sujeitos estudantes do antigo curso do Magistério e professores de 1ª a 4ª séries. O referencial teórico utilizado nesse trabalho foi a teoria significativa de Ausubel. Foram sujeitos da pesquisa 19 alunas do Magistério e 7 professoras do Ensino Fundamental. Os instrumentos utilizados foram um questionário pessoal - teste matemático envolvendo problemas e aplicações de frações - e o mapeamento cognitivo, em que os participantes deveriam colocar os vários componentes envolvidos no conceito de fração numa estrutura previamente fornecida e composta pelas palavras: frações, representação, ordenação e equivalência de frações, próprias, impróprias, aparentes, número misto e números decimais. Os dados indicaram que professores e alunos do Magistério não apresentam uma boa compreensão do conceito de fração e que o nível de conhecimento e habilidade dos sujeitos é o mesmo. O mapeamento cognitivo evidenciou lacunas na hierarquia da formação de conceitos.

Oliveira (1996) analisou a aprendizagem de frações na 5ª série do Ensino Fundamental, comparando dois métodos de ensino: o convencional utilizado pela professora (definição do conceito, desenhos na lousa e exercícios no caderno) e o método experimental proposto por Maranhão e Imenes (1985, 1986) que é explicitado em seu trabalho. Foram sujeitos da pesquisa 58 alunos. A professora pesquisadora concluiu que os alunos desse grupo submetidos ao método diferenciado de ensino tiveram um melhor desempenho nas avaliações em comparação às crianças que aprenderam frações através do método convencional.

A abordagem de ensino de frações proposta por Prado (2000) e Catalani (2002) diferencia-se das demais por enfocar o movimento da história do Conceito. O primeiro trabalho foi uma investigação-ação ou pesquisa-ação intervencionista realizada com alunos de 5ª série. Foram elaboradas atividades de pesquisa com base na teoria da (re)criação dos conceitos matemáticos, a medição e a fração. O trabalho foi fundamentado em Caraça (1984), na análise da formação dos elementos do conceito matemático; em Hogben (1958), quanto à formação da linguagem das grandezas; em Aleksandrov (1994), quanto à relação entre matemática e cotidiano; e em Sacristán (1998), nos elementos de mudança da prática docente. Os dados foram coletados durante o 2º e 3º bimestre letivos, no decorrer das 5 aulas semanais. Os resultados apontaram que os alunos não apresentam conhecimento experiencial de medição, que o docente tem sua prática baseada na operacionalidade matemática e que as mudanças só poderão ocorrer quando o professor formar-se no conhecimento científico.

Catalani (2002) investigou alunos de 4ª série (10 a 11 anos) e analisou "como suas elaborações sobre o conceito de fração estão relacionadas à proposta do desenvolvimento conceitual tratado sob o enfoque da dialética forma e conteúdo". Foram aplicadas atividades problematizadoras sobre o aspecto contínuo das grandezas quanto à enumeração. Os resultados evidenciam que as ações de contar e medir elaboraram o pensamento e a linguagem matemática e que, de maneira própria, as crianças criam para si o movimento da forma e do conteúdo. A pesquisa de mestrado pretendeu diferenciar-se daquelas que estudam o conceito de fração na forma simbólica $\frac{a}{b}$, que, de acordo com a autora, impede o aluno de recriar o movimento conceitual da fração e elaborar uma nova leitura de mundo.

Um grande número de trabalhos integrou o projeto "A formação, desenvolvimento e ensino do conceito de fração", desenvolvido entre a Oxford Brookes University (sob a coordenação de Terezinha Nunes) e o Centro das Ciências Exatas e Tecnologia da PUC/SP. O projeto aborda seis dissertações de mestrado e duas teses de doutorado. A maioria das pesquisas aborda a construção do conceito de fração utilizando como referencial teórico as ideias de Vergnaud e a teoria dos campos conceituais. Os conceitos, de acordo com esse teórico, pode ser definido por uma terna de conjuntos representada por C = (S, I, R). As situações que dão sentido ao conceito seriam a referência (S), as invariantes (I) dão sentido à operacionalidade (propriedades, relações) e R é o conjunto das representações simbólicas do conceito.

Bezerra (2001) investigou 39 alunos de uma 3ª série do Ensino Fundamental. Os sujeitos foram divididos em um grupo experimental (GE) e um grupo de controle (GC). O primeiro participou de uma sequência didática elaborada pelo pesquisador, abordando a ideia de fração como parte-todo e quociente, privilegiando a construção do conceito por meio de situações-problema. Os grupos foram submetidos a um pré-teste e, após a aplicação das atividades, realizou-se um pós-teste. Os dados obtidos foram submetidos a uma análise qualitativa e quantitativa. Os resultados indicaram um desempenho melhor do grupo experimental e evidenciaram que o conceito de fração torna-se mais motivador e significativo para o aluno quando abordado por meio de situações-problema, presentes no dia a dia.

Merlini (2005) realizou um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries sobre fração e seus diferentes significados. Os participantes da pesquisa foram 120 alunos de duas escolas públicas. Os instrumentos foram questionários pessoais envolvendo o conceito de fração seguido de entrevistas clínicas com 12% da amostra. Os resultados apresentaram desempenhos inferiores a 25% e verificaram que a abordagem que se faz de fração (os diferentes significados propostos por Nunes et. al, 2003) não garante a construção do conceito pelo aluno.

Moutinho (2005) investigou as concepções apresentadas (com relação aos cinco significados de fração propostos por Nunes et. al, 2003) por alunos de 4ª e 8ª séries frente a problemas que abordam o conceito de fração. Foram sujeitos dessa pesquisa 65 alunos da 4ª série e 58 estudantes da 8ª série de uma escola da rede pública de ensino. Os dados indicaram que a concepção que prevalece na 4ª série é a de fração como parte-todo; já os alunos da 8ª série recorreram mais às técnicas operatórias. O desempenho da oitava série foi inferior ao da quarta série, o que pode torna necessária à realização de um trabalho mais amplo com o campo conceitual da fração, com base nos diversos significados.

Rodrigues (2005) abordou os aspectos do conceito de fração relativos aos significados parte-todo e quociente que não foram apropriados pelos alunos após a aprendizagem formal dos números racionais. Participaram dessa pesquisa 13 alunos de 8ª série, 31 alunos da 3ª série do Ensino Médio e 29 alunos do Ensino Superior da área de Exatas. Aplicou-se um instrumento composto por 48 questões envolvendo frações com os dois significados investigados, em três níveis de dificuldade. Os resultados evidenciaram dificuldades nos seguintes aspectos: o papel da unidade nos problemas fracionários, situações envolvendo grandezas discretas e alguns aspectos conceituais da construção dos racionais, como a inclusão dos inteiros.

Malaspina (2007) realizou uma pesquisa de mestrado com alunos de uma 2ª série do Ensino Fundamental investigando os efeitos que cada um dos quatro significados de fração propostos por Nunes et. al (2003) traz para a aprendizagem desses alunos. Os 61 sujeitos participantes foram divididos em um grupo experimental e um grupo de controle. A metodologia utilizada foi dividida em duas etapas: na primeira, foram aplicados três testes-diagnósticos (pré-teste, intermediário e pós-teste). Na segunda etapa, dividiram-se os alunos do grupo experimental em quatro subgrupos, aos quais foram ensinados dois significados de fração. Os dados foram submetidos a um tratamento estatístico com o SPSS, verificando o percentual de acerto, e foi realizada também uma análise qualitativa, verificando os erros desses alunos. Os resultados indicaram efeitos distintos na aprendizagem inicial de fração, dependendo do significado utilizado para introduzir esse conceito.

Outros estudos abordam o conhecimento ou concepção do professor e as relações com o ensino de fração. Santos (2005) realizou um estudo diagnóstico com professores que atuam no Ensino Fundamental sobre os significados do conceito de fração. Participaram da pesquisa 67 professores de sete escolas da rede pública estadual de ensino da cidade de São Paulo. Foi solicitado, num primeiro momento, que os professores elaborassem seis problemas envolvendo o conceito de fração e, depois, que solucionassem esses mesmos problemas. Os resultados indicaram a valorização do significado de fração como operador multiplicativo na elaboração dos problemas e também da aplicação de um conjunto de técnicas e regras (que o autor denominou de algoritmo) na solução dos mesmos. Não foram encontradas diferenças significativas na elaboração e solução dos problemas entre os professores polivalentes (1ª a 4ª série) e os especialistas. Foram encontrados indícios de que a concepção dos professores pode ter sofrido influências da Educação Básica pela qual passaram.

Ainda tendo como foco os estudos relativos ao professor e ensino de Números Racionais, Silva (2005), em sua tese de doutorado intitulada "Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série", utilizou a metodologia da pesquisa-ação. Inicialmente foram 15 professores participantes; depois de algumas desistências por motivos particulares restaram 9. Uma nova professora e uma aluna de Licenciatura em Matemática foram incluídas no grupo de participantes. O fundamento teórico baseou-se na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999). Foram encontradas mudanças de concepções desse conteúdo e em suas práticas de ensino. Os resultados evidenciaram modificações no discurso dos professores a respeito da aprendizagem de seus alunos e a forma de observá-los em ação. Além disso, mostrou-se a necessidade de que os cursos de formação estimulem os professores a desenvolverem autonomia e reflexão sobre o conteúdo e suas práticas pedagógicas.

Outro estudo, realizado por Canova (2006), investigou as crenças, concepções e competências de professores que atuavam de 1ª a 4ª séries (polivalentes) a respeito do conceito de fração. O fundamento teórico baseou-se nas ideias de Vergnaud, Nunes e Ponte. O instrumento investigativo utilizado foi composto de 29 questões divididas em quatro partes que analisavam o perfil, as crenças, as concepções e as competências dos professores. Além disso, foram realizadas análises clínicas com 10% dos participantes. Os sujeitos foram 51 professores do ciclo I e II do Ensino Fundamental de três escolas municipais da cidade de Osasco-SP. Alguns resultados mostraram que as crenças dos docentes não sofriam influências de suas práticas, o que não acontecia com as concepções. Quanto à competência, os desempenhos não foram adequados entre os cinco significados de fração e os invariantes. As evidências apontaram à necessidade de ampliação do campo conceitual da fração desses professores.

Quanto às pesquisas sobre frações, essa breve revisão de literatura permite constatar que o viés de abordagem das pesquisas difere bastante. Um primeiro grupo (PRADO, 2000; CATALANI, 2002) propõe a (re) construção histórica do conceito de fração, passando pela diferenciação entre conceitos de razão e proporção. Outro grupo de trabalhos, ligados à PUC, enfatiza a forma simbólica $\frac{a}{b}$ e seus diferentes significados (medidas, parte-todo, quociente, número e operador multiplicativo).

Considerações

Através da revisão de literatura, foi possível evidenciar que as pesquisas envolvendo conceitos fracionários não abordam questões relativas à afetividade do aluno. Os estudos envolvendo solução de problemas procuram investigar as estratégias utilizadas pelos alunos, além das relações entre o tipo de mente matemática e o desempenho em Matemática.

Quanto às pesquisas envolvendo a afetividade, elas aparecem ligadas ao PSIEM da UNICAMP/Campinas, mas também são encontrados trabalhos na área ligados à Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e à Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) no departamento de Psicologia.

O presente trabalho buscou verificar os procedimentos utilizados em atividades envolvendo frações, identificando o uso da técnica operatória (MMC) e dos conceitos fracionários, bem como seus diversos significados. Além disso, pretendeu relacionar as atitudes em relação à Matemática e a Frações com o desempenho, o gênero e a série.

Essa pesquisa diferenciou-se das demais apresentadas no sentido de não apenas apresentar metodologias de ensino ou investigar os significados das frações (parte-todo, medidas, número, quociente, razão, operador), mas procurar relacionar aspectos afetivos no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais.

.

CAPÍTULO 4 - SUJEITOS, MÉTODOS, MATERIAL E PROCEDIMENTOS

4.1 Sujeitos

Participaram da pesquisa 95 estudantes de uma escola pública estadual pertencente à Diretoria de Ensino da Região de Jaú. A escola foi selecionada, por conveniência, considerando-se o número de alunos e o fato de possuir todas as séries do Ensino Médio no mesmo período. Os sujeitos estavam distribuídos entre a primeira (31), a segunda (37) e a terceira série (26) do Ensino Médio, no período da manhã.

A escola onde a pesquisa foi realizada situa-se num bairro próximo ao centro e comporta aproximadamente 600 alunos do Ensino Médio, distribuídos em 17 classes – 6 de 1º ano, 6 de 2º ano e 5 de 3º ano – nos períodos da manhã e da noite. A escola participante apresentou, em 2007, um IDESP[11] (Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo) de 1,90 na 3ª série do Ensino Médio. Esse índice varia de 1 a 10 e avalia a qualidade das escolas paulistas, sendo o índice estadual de 1,41.

Quanto ao IDESP por disciplina, em relação à Matemática, a escola participante da pesquisa apresentou um índice de 1,39 na 3ª série do Ensino Médio. A média estadual da disciplina é de 0,82. (SÃO PAULO, 2008a, p.12).

4.2 Método

Ao analisar o desempenho dos alunos do Ensino Médio em atividades envolvendo frações, verificaram-se os conceitos de fração apresentados, as estratégias ou procedimentos fornecidos para solucionar os exercícios e problemas, suas atitudes em relação à Matemática e as atitudes em relação a frações. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB nº 9394/96, este nível de ensino deve aprofundar os conhecimentos adquiridos ao longo do Ensino Fundamental e preparar para o mundo do trabalho. Assim, esperou-se que os sujeitos conseguissem realizar as operações e solucionar corretamente os problemas, além de valorizarem a importância desse conteúdo em atividades cotidianas e/ou mercado de trabalho.

---

[11] Para mais detalhes, consulte: Programa de Qualidade da Escola, São Paulo, 2008a. Disponível também em: <http://www.idesp.edunet.br>.

A pesquisa teve um caráter quanti-qualitativo. Em uma primeira fase, foi realizada uma análise das correlações e das diversas variáveis como desempenho, gênero, série, atitudes em relação à atemática e atitudes em relação a frações. O software estatístico utilizado nesta pesquisa foi o SPSS Statistical Package for Social Science (NORUSIS, 1993). Numa segunda fase, realizou-se uma entrevista com cinco sujeitos previamente selecionados, utilizando o "pensar em voz alta" (VAN SOMEREN, BARNARD, SANDBERG, 1994; BRITO, 2002 apud DOBARRO, 2007, p. 67). Os protocolos das entrevistas foram analisados qualitativamente, com base em algumas categorias de análise estabelecidas, as quais serão descritas no item 4.5.

4.3 Instrumentos

Foram utilizados, na presente pesquisa, os seguintes instrumentos:

1. **Questionário informativo** sobre a vida escolar e opiniões dos estudantes sobre a Matemática e as atividades desenvolvidas na disciplina. Este instrumento, composto por 15 (quinze) questões foi adaptado do questionário proposto por Brito (1996). (ANEXO A)

2. **Escala de Atitudes em relação à Matemática (adaptada e validada por Brito, 1996)** do tipo likert de 4 pontos, composta por 21 questões. Dez proposições referem-se às atitudes negativas e dez às atitudes positivas. A pontuação máxima da escala é 80 pontos, atribuídos conforme o critério seguinte:

- Para as proposições que se referiam às atitudes positivas:
Concordo totalmente - 4 pontos
Concordo - 3 pontos
Discordo - 2 pontos
Discordo totalmente - 1 ponto

- Para as proposições que se referiam às atitudes negativas:
Discordo totalmente - 4 pontos

Discordo - 3 pontos

Concordo - 2 pontos

Concordo totalmente - 1 ponto

A última afirmação não faz parte da escala original proposta por AIKEN e DREGER (1961) e AIKEN (1963), mas foi acrescentada por Brito (1996) durante sua adaptação e validação com o objetivo de analisar a autopercepção do aluno a respeito de seu desempenho em matemática. (ANEXO B)

3. Escala de Atitudes em relação à Fração

Com o objetivo de verificar as atitudes dos alunos em relação a frações com ênfase na solução de problemas envolvendo esse conceito, foi adaptada uma escala com base nos trabalhos de Brito (1996). Essa é uma escala do tipo likert que apresenta as opções Concordo totalmente, Concordo, Discordo totalmente e Discordo, cuja pontuação varia de 20 a 80 pontos. Os pontos são atribuídos da mesma maneira descrita na escala anterior. As proposições que avaliaram atitudes positivas foram:

03- Eu acho “frações” muito interessante e gosto das aulas sobre isso.

04- Frações é um conceito fascinante e divertido.

05- Problemas com frações me fazem sentir seguro(a) e são, ao mesmo tempo, estimulante.

09- O sentimento que tenho com relação a Frações é bom.

11- “Frações” é um conteúdo que eu aprecio grandemente.

14- Eu gosto realmente de frações.

15- “Frações” é um dos conteúdos que eu realmente gosto de estudar na escola.

18- Eu fico mais feliz em aulas sobre frações que em aulas de qualquer outro conteúdo.

19- Eu me sinto tranquilo(a) quando soluciono problemas sobre frações e gosto muito desse conteúdo.

20- Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação a frações: Eu gosto e aprecio problemas com esse conteúdo.

As demais afirmações verificaram as atitudes negativas dos estudantes em relação à fração. Também foram dez as proposições que se referiam às atitudes negativas:

01- Eu fico sempre sob uma terrível tensão quando resolvo problemas que envolvem frações.
02- Eu não gosto de frações e me assusta ter que trabalhar esse conceito.
06- "Dá um branco" na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando resolvo problemas com frações.
07- Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço para resolver problemas de frações.
08- Conteúdos com frações me deixam inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente.
10- Problemas com frações me fazem sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.
12- Quando ouço a palavra Fração, eu tenho um sentimento de aversão.
13- Eu encaro problemas sobre frações com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz de solucionar problemas
16- Pensar sobre a obrigação de resolver um problema com frações me deixa nervoso(a).
17- Eu nunca gostei de solucionar problemas sobre frações, e esse é o conteúdo que me dá mais medo.

A proposição 21 - “Não tenho um bom desempenho para solucionar problemas sobre frações” - avaliou a autopercepção do aluno quanto ao seu desempenho em frações e atividades relacionadas a esse conceito. (ANEXO C)

4. Prova de Matemática (algoritmo)

O objetivo dessa prova matemática foi avaliar o desempenho e procedimento matemático, em que foi solicitado o uso do Mínimo Múltiplo Comum (MMC). Krulik e Reis (1997) destacam que os exercícios algorítmicos “... podem ser resolvidos com um procedimento passo-a-passo, frequentemente um algoritmo numérico” (p. 34).

A prova elaborada para o presente estudo foi composta por 10 itens que abordavam os seguintes conteúdos:

- Adição de frações

a) $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}$

b) $\frac{3}{10}+\frac{1}{4}$

- Subtração de frações

c) $\frac{2}{6}-\frac{1}{6}$

d) $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$

- Multiplicação de frações

e) $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$

f) $\frac{10}{15}\cdot\frac{7}{4}$

- Divisão de frações

g) $\frac{4}{5}:\frac{2}{5}$

h) $\frac{3}{8}:\frac{9}{2}$

- Expressões fracionárias envolvendo várias operações

i) $\frac{3}{4}-\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}\right)+\frac{1}{5}$

j) $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}$

As questões foram retiradas de livros didáticos do Ensino Fundamental, aprovados e presentes no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que traziam os conteúdos apresentados acima. (APÊNDICE C). Optou-se por esse tipo de avaliação, pela familiaridade dos estudantes com esse tipo de exercício.

5. **Prova de Matemática (Conceitual e procedimentos diversos[12])** composta por 3 (três) itens. O primeiro solicitava que o aluno fizesse soma e subtração de frações utilizando um recurso diferente do MMC. O segundo pedia que o estudante respondesse o que ele entendia por fração e que fornecesse exemplos. O último exercício solicitava que o aluno escrevesse a fração a partir de um desenho hachurado. (APÊNDICE D)

6. **Prova matemática para avaliar o desempenho na solução de problemas** (APÊNDICE E). Este instrumento, composto por 7 problemas, envolvia as várias operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com frações e sua representação gráfica. Os problemas foram retirados de livros didáticos do Ensino Fundamental.

7. **"Pensar em voz alta"** com cinco sujeitos selecionados por conveniência, a partir do desempenho geral encontrado pela média da prova de Matemática (técnica) e da prova de problemas. Durante a entrevista, o participante descreveu como estava realizando o procedimento e, quando necessário, o pesquisador interveio para esclarecer possíveis dúvidas.

8. **Levantamento de opinião (APÊNDICE F)** realizado com 4 (quatro) professores do Ensino Médio e que ministram ou já ministraram aula para os participantes desta pesquisa. O objetivo deste instrumento foi resgatar as dificuldades dos alunos do Ensino Médio e qual a importância dada por esses professores em relação ao conceito de fração.

---

[12] Entende-se por Procedimentos Diversos ou Procedimentos Alternativos, as soluções ou diferentes caminhos percorridos pelos estudantes, quando solicitada a solução do exercício sem o uso do MMC.

4.4 Procedimentos

A coleta dos dados foi realizada em duas etapas distintas após a autorização do diretor da unidade escolar, de alguns professores que cederam suas aulas para a aplicação dos instrumentos de pesquisa e da assinatura do termo de consentimento livre e esclarecido pelo aluno ou responsável.

1ª etapa

Essa primeira etapa foi dividida em três sessões. Na primeira, os alunos deveriam responder o questionário pessoal, a escala de atitudes em relação à Matemática e realizar a prova de Matemática através do recurso do MMC.

Os alunos responderam cada instrumento, que lhes era entregue apenas quando todos tivessem terminado o anterior. O professor da sala acompanhou a aplicação das provas e auxiliou na ordem da sala, pois os alunos não deveriam comunicar-se durante a realização das avaliações. A duração das atividades da primeira sessão de atividades foi de cerca de 50 minutos.

Na segunda sessão, os estudantes realizaram a prova de Matemática, na qual era solicitado que não resolvessem através de MMC e, em seguida, solucionaram os problemas. A duração das atividades também foi de cerca de uma aula (50 minutos).

A seguir, foi feita a correção das provas. O questionário e a prova de Matemática (parte conceitual e procedimento diversos) receberam uma análise qualitativa. Os critérios para a correção da prova de Matemática (algoritmo), de acordo com o quadro 1, foram:

Quadro 1 - Critérios para a correção da prova de Matemática (algoritmo)

Pontos	Características observadas na solução
0	Deixou em branco/ Não fez Não realizou corretamente o MMC
0,5	Realizou corretamente o MMC, mas forneceu a resposta incorreta Resposta correta, mas procedimento incorreto
1,0	Realizou corretamente o MMC e forneceu corretamente a resposta

Cada questão valia no máximo 1 (um) ponto e a nota máxima da prova era dez.

Para a correção dos problemas aplicados, a nota foi distribuída conforme o grau de dificuldade na resolução dos mesmos. A nota total da prova foi dez e esse valor foi distribuído de acordo com o quadro 2.

Quadro 2 - Pontuação para a correção da prova de Matemática (Problemas)

Exercícios	Pontos
1	1,0
2 a	1,0
2. b.	0,5
3	1,0
4 a.	0,5
4 b.	0,5
4 c.	1,0
5	1,0
6 resolução	1,0
6 representação	0,5
7 a.	1,0
7 b.	1,0

Após a correção das provas foram selecionados alguns alunos, de acordo com o desempenho obtido (média entre a prova Matemática de algoritmo e a prova de problemas):

- 2 participantes com nota inferior à média geral
- 2 participantes com nota superior à média geral
- 1 participante com nota aproximadamente entre a média dos 4 sujeitos selecionados

Na terceira sessão, foi aplicada a escala de atitudes em relação a frações, cuja duração foi de aproximadamente 20 minutos. Para a validação da escala, participaram 373 sujeitos de duas escolas da mesma cidade, selecionadas por conveniência.

Os participantes, ao responderem as duas escalas, possibilitaram o estudo de possíveis correlações e análise das atitudes em relação à Matemática e a Frações.

2ª Etapa

Os participantes selecionados para o "pensar em voz alta", foram orientados a resolver a prova Matemática (algoritmo), a prova de Matemática (Conceitual e procedimentos diversos) e a Prova de Matemática de problemas novamente. Para isso, uma prova em branco foi fornecida e solicitou-se que o aluno explicasse cada procedimento que realizava, como se estivesse "pensando em voz alta" e, se fosse preciso, o pesquisador iria interrogá-lo para obter, da forma mais precisa, o modo como estava raciocinando e realizando o procedimento.

> O "pensar em voz alta" é um método pelo qual o sujeito é solicitado a verbalizar, enquanto soluciona um problema, e essa solicitação é repetida, se necessário, durante todo o processo de solução do problema, como uma maneira de encorajar o sujeito a relatar, de maneira precisa, os procedimentos que está executando. O pesquisador pode formular questões para o sujeito de forma a esclarecer os procedimentos que estão sendo utilizados e as relações entre eles.

> O método consiste em solicitar aos sujeitos que pensem em voz alta enquanto estão solucionando um problema e, posteriormente analisar os protocolos verbais resultantes (BRITO, 2001 apud LIMA, 2001, p.54).

O "pensar em voz alta", sugerido por Krutestskii (1976), foi utilizado em várias pesquisas, como as de Araújo (1999), Utsumi (2000), Lima (2001) e Dobarro (2007). O objetivo da utilização desse método é buscar uma melhor compreensão do pensamento do aluno quando o mesmo está diante de uma tarefa de solução de problemas.

Durante a resolução das provas, as falas dos participantes foram gravadas em áudio e transcritas para a obtenção dos protocolos que foram submetidos à análise qualitativa. Com a obtenção dos protocolos e das soluções das provas realizadas pelos alunos, também foram estabelecidas algumas categorias de análise:

4.5 Plano de análise dos dados

Dos instrumentos descritos anteriormente foram extraídas as categorias de análise. Para a análise da prova Matemática (algoritmo), como se esperava que os estudantes resolvessem e apresentassem mais facilidade com o uso da técnica do MMC, qualitativamente, classificaram-se os exercícios por operação a ser realizada e desempenho:

<u>Prova Matemática (algoritmo)</u>

- Adição e Subtração

- Utilizou corretamente o MMC;
- Utilizou de forma incorreta o MMC;
- Utilizou de forma parcialmente correta o MMC

- Multiplicação

- Realizou a multiplicação corretamente (numerador por numerador e denominador por denominador)
- Realizou a multiplicação corretamente e simplificou o resultado
- Realizou de forma parcialmente correta a multiplicação
- Utilizou o MMC (Fatorou os denominadores, dividiu o número encontrado pelo denominador e multiplicou pelo numerador)

- Utilizou outro procedimento

- Divisão

- Colocou uma fração sobre outra e realizou a multiplicação dos meios e extremos
- Utilizou a “regra do peixinho”
- Inverteu a segunda fração e realizou uma multiplicação
- Utilizou o MMC
- Realizou outro procedimento

- Várias operações

- Respeitou os parênteses, a ordem, e realizou as operações corretamente
- Respeitou os parênteses, não respeitou a ordem e não realizou corretamente as operações.
- Respeitou os parênteses e a ordem, realizou algumas operações incorretamente.
- Não respeitou os parênteses e a ordem das operações, mas realizou corretamente as operações.
- Não respeitou os parênteses e a ordem das operações e realizou incorretamente as operações.

Além desses aspectos, foi observado se o estudante simplificou as frações ou se apenas forneceu imediatamente o resultado.

Nesta segunda parte da prova matemática, a partir dos protocolos, foram listadas as possibilidades de solução apresentadas pelos participantes:

<u>Prova Matemática (Conceitual e de procedimentos diversos)</u>

- Exercícios de adição e subtração sem o uso do MMC

- Utilizou equivalência de frações
- Representou por meio de desenho (corretamente)
- Representou por meio de desenho (incorretamente)
- Apresentou várias formas como transformação em decimais e desenho
- Utilizou o MMC
- Transformou em números decimais

- Somou/ Subtraiu numeradores e denominadores
- Multiplicou numeradores e denominadores

- Definição de fração e exemplos

Observou-se a definição dada pelo sujeito e o exemplo, identificando qual significado de fração estava sendo considerado:

- Fração como parte-todo
- Fração como medida
- Fração como quociente
- Fração como número
- Fração como razão
- Fração como operador

- Exercício envolvendo a forma simbólica $\left(\frac{a}{b}\right)$ de uma fração a partir de uma figura apresentada

Figura A

- Reconheceu que a fração é a divisão do inteiro em partes iguais
- Não reconheceu que a fração é a divisão do inteiro em partes iguais
- Tentou juntar os pedaços destacados

Figura B

- Escreveu corretamente a fração, onde o denominador significa o número de partes divididas e o numerador o número de partes destacadas, mas não simplificou
- Realizou a simplificação da fração obtida

<u>Prova Matemática (problemas)</u>

- Quanto ao **enunciado:**

- o aluno compreendeu o enunciado e obteve a informação matemática de modo adequado.
- o aluno não compreendeu o enunciado e não soube extrair a informação matemática.
- Na maioria das vezes compreendeu o enunciado.

- Quanto aos **procedimentos** (estratégias utilizadas)**:**

- Utilizou desenho
- Fez por tentativa e erro
- Utilizou MMC

- Quanto ao **resultado:**

- o aluno verificou o resultado obtido, analisando se este apresentou coerência.
- o aluno não verificou a coerência do resultado obtido.

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DOS DADOS

5.1 Gênero/ Idade/ Série

Os 95 alunos participantes da pesquisa distribuíam-se entre os gêneros e as séries investigadas, conforme a tabela a seguir.

Tabela 1- Distribuição dos sujeitos de acordo com gênero e série

Série Gênero	1º ano	2º ano	3º ano
Masculino	16	17	15
Feminino	16	20	11
Total	32	37	26

A idade dos sujeitos participantes variou dos 14 aos 19 anos, sendo que a maioria dos alunos encontra-se na idade apropriada para a série que frequentam. Assim, no 1º ano, a maioria dos estudantes tem 15 anos; na 2ª série, 16; e os concluintes do Ensino Médio têm 17 anos, conforme tabela abaixo:

Tabela 2 - Distribuição dos sujeitos de acordo com a série e a idade

Série Idade	1º ano	2º ano	3º ano	Total
14	6	0	0	6
15	23	5	0	28
16	2	29	7	38
17	1	3	17	21
18	0	0	0	0
19	0	0	2	2
Total	32	37	26	95

5.2 Análise descritiva do questionário

Quanto ao número de reprovações de cada sujeito, pode-se perceber que a porcentagem foi bastante pequena 7,37%. Na escola em que foi realizada a coleta de dados existe a possibilidade de o estudante ser reprovado apenas em disciplinas, não ficando retido na série anterior. Alguns alunos apontaram que ficaram em dependência; destes, a maioria eram alunos da 1ª série do Ensino Médio.

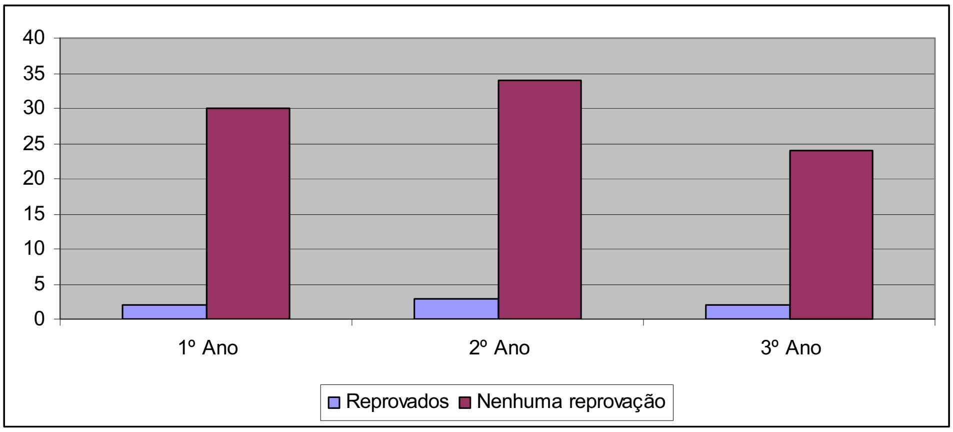


Figura 8 - Reprovação ao longo da trajetória escolar, de acordo com série

Dos 7 (sete) alunos reprovados, 6 (seis) foram reprovados apenas uma vez na mesma série e 1 (um) estudantes foi reprovado duas vezes. Quanto aos componentes curriculares da retenção escolar, muitos não se lembraram da disciplina em que foram reprovados:

Tabela 3 - Distribuição dos sujeitos de acordo com a série e disciplina de retenção escolar

	Componente curricular		
Série em que ficou retido	**Não lembra**	**Matemática**	**total**
1ª Série	1	1	2
2ª Série	3		3
3ª Série	2		2
Total	6	1	7

Quanto à percepção do próprio desempenho em relação ao desempenho dos outros estudantes, a maioria dos alunos considerou suas notas nas provas como estando na média. No 2º ano do Ensino Médio, conforme indica a tabela abaixo, quase um terço dos alunos apontaram que suas notas geralmente se encontram acima da média da sala.

Tabela 4 - Distribuição dos sujeitos de acordo com seus desempenhos em relação à média da classe.

Notas em relação à média da classe				
	1º ano	**2º ano**	**3º ano**	**Total**
Acima da nota da maioria da classe	4	12	5	21
Igual à nota da maioria da classe	22	24	14	60
Menor que a nota da maioria da classe	5	1	6	12
Não respondeu	1	0	1	2

De maneira geral, constata-se que 22,11% dos sujeitos consideram que seus desempenhos encontram-se acima da média da classe, e 12,63% dos estudantes avaliam que suas notas estão abaixo da média.

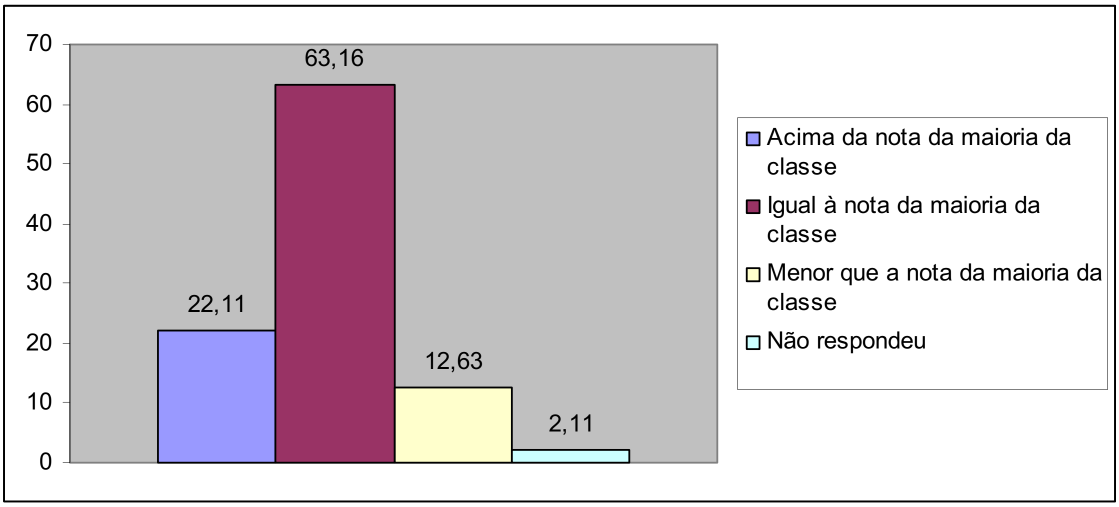


Figura 9 - Porcentagem dos alunos de acordo com o desempenho dos sujeitos em relação à média da classe.

O questionário solicitava também que os estudantes apontassem a disciplina de que mais gostavam e a de que menos gostavam. A Matemática foi indicada como a de que os alunos menos gostam, mas aparece em segundo lugar nas disciplinas favoritas. Isso indica uma distribuição bimodal, em que um grupo gosta muito e outro não gosta.

Tabela 5 - Disciplina favorita e disciplina que os alunos menos gostam

	Disciplina que menos gosta	**Disciplina Favorita**
Todas	4	4
Nenhuma	1	0
História	19	7
Filosofia	0	4
Matemática	28	12
Português	7	9
Biologia	5	5
Ed. Física	0	30
Inglês	19	4
Geografia	3	7
Física	3	2
Arte	3	10
Química	3	0

No gráfico abaixo, podem-se visualizar melhor as disciplinas indicadas pelos alunos como as de que eles mais/ menos gostam. Somente a disciplina Ciências não foi citada pelos alunos, o que se justifica, talvez, pelo fato de o componente curricular ser substituído pela Física, Química e Biologia.

As disciplinas de que os alunos mais/ menos gostam apresentaram divergências por série.

Os alunos do 1º ano, conforme gráfico abaixo, parecem não gostar de Matemática e Inglês. Apresentam, no entanto, grande preferência por Educação Física.

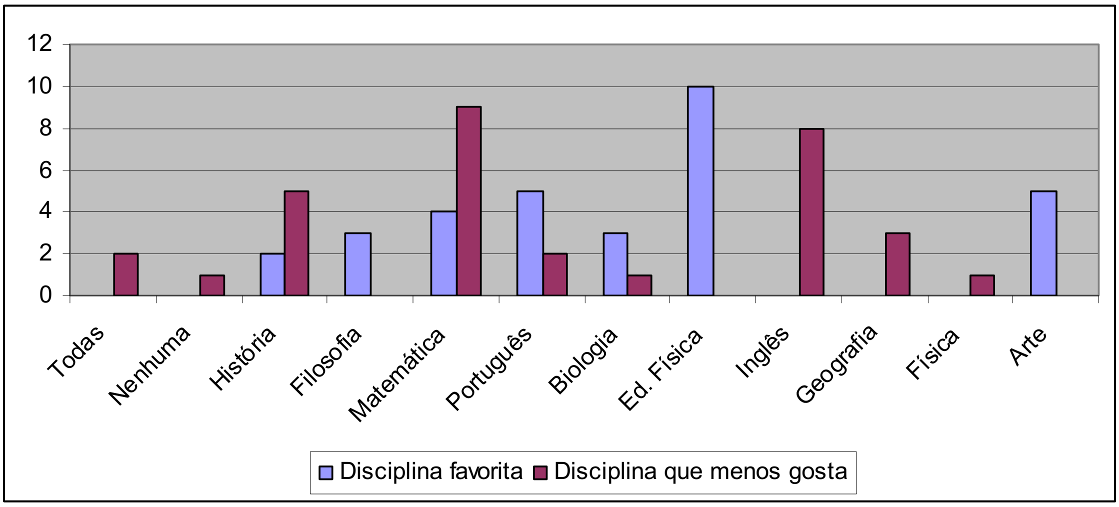


Figura 10 - Distribuição dos sujeitos do 1º Ano de acordo com disciplina de que mais e menos gostam

Já os alunos do 2º ano apresentam uma grande preferência por Educação Física e, em seguida, pela Matemática. As disciplinas de que menos gostam são Inglês e História. É importante destacar que nenhum aluno apontou a disciplina Inglês como favorita; o mesmo ocorreu com Química. Ao contrário, Geografia não foi indicada por nenhum estudante como a disciplina de que menos gosta.

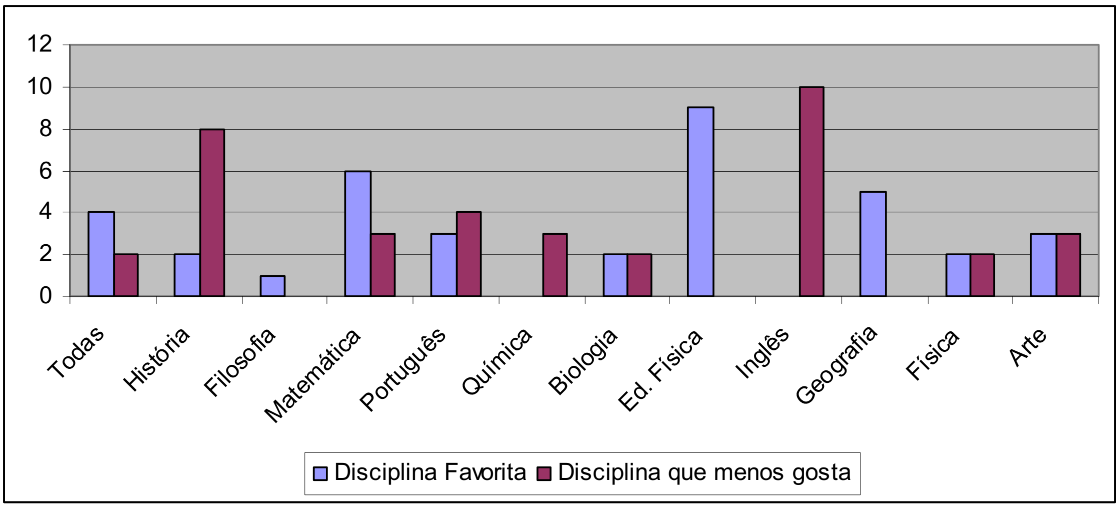


Figura 11 - Distribuição dos sujeitos do 2º Ano de acordo com disciplina de que mais e menos gostam

No 3º ano, o quadro geral muda novamente. Os sujeitos, na sua maioria, apontam que não gostam de Matemática. Quanto à disciplina favorita, Educação Física confirma sua preferência pelos alunos.

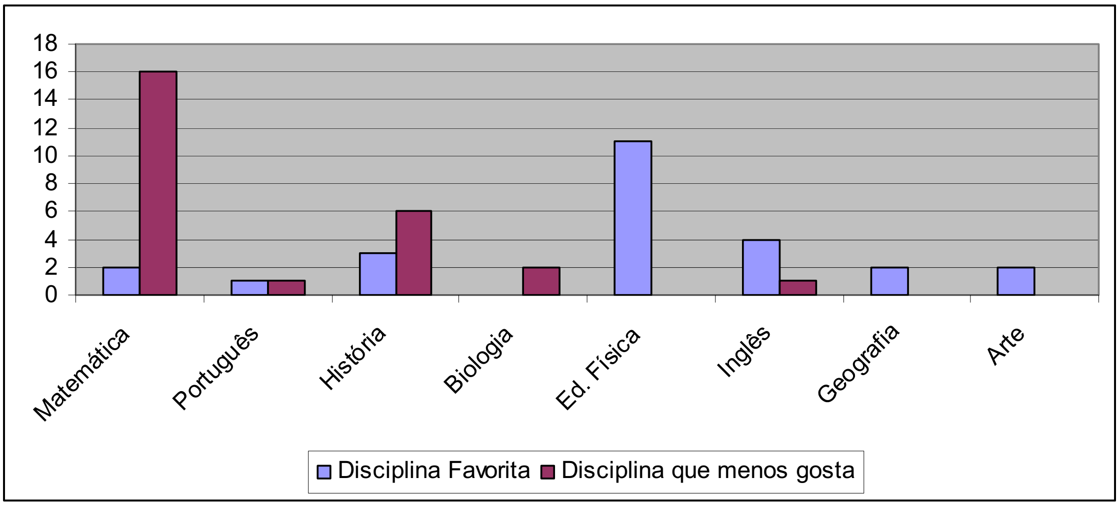


Figura 12 - Distribuição dos sujeitos do 3º Ano de acordo com disciplina de que mais e menos gostam

Houve algumas divergências em relação ao conteúdo preferido de acordo com a série. O primeiro e o segundo ano apontaram Equação de 2º grau como preferidos, enquanto que o terceiro nem citou esse conteúdo. Os alunos citaram, em sua maioria, os últimos conteúdos estudados, talvez, por se lembrarem destes com mais facilidade. O último ano do Ensino Médio indicou conteúdos mais fundamentais como soma, subtração, divisão e multiplicação como favoritos, o que parece indicar certa relação com a utilidade cotidiana dos mesmos.

Tabela 6 - Distribuição dos sujeitos de acordo com o conteúdo favorito e a série (continua)

Conteúdos preferidos em Matemática	**1º ano**	**2º ano**	**3º ano**	**Total**
Álgebra	0	0	3	3
Aritmética (soma, adição, subtração, multiplicação)	3	3	8	14
Probabilidade	0	0	4	4
Geometria	0	0	4	4
Equações	0	1	3	4
Matrizes	0	6	2	8
Polinômios	0	0	2	2
Logaritmos	0	7	1	8
PA e PG	6	0	1	7
Análise Combinatória	0	0	1	1
Determinantes	0	0	1	1
Nenhum	3	1	2	6
Equação de 1º grau	0	5	0	5
Equação de 2º grau	20	15	0	35
Regra de três	0	1	0	1

Tabela 6 (continuação) - Distribuição dos sujeitos de acordo com o conteúdo favorito e a série

Conteúdos preferidos em Matemática	**1º ano**	**2º ano**	**3º ano**	**Total**
Gráficos	0	1	0	1
Não lembro/ Não sei	0	1	0	2
Teorema de Pitágoras	3	0	0	3

Quanto aos conteúdos de que os sujeitos menos gostaram em Matemática ao longo da escolaridade, a Geometria, a Trigonometria e as Progressões apresentaram maior número de indicações.

Destaca-se que parece existir uma relação entre a série e conteúdo estudado com as preferências dos alunos. A maioria dos participantes indicou conteúdo da série que cursavam ou da anterior, talvez por se lembrarem mais facilmente. O 3º ano, por exemplo, apontou Geometria como conteúdo de que menos gostam. A 2ª série indicou a Trigonometria. O 1º ano citou PA e PG.

Tabela 7 - Distribuição dos sujeitos de acordo com a série e o conteúdo que menos gostaram em Matemática

Conteúdos que menos gostou	**1º ano**	**2º ano**	**3º ano**	**Total**
Geometria	4	7	9	20
Função do 1º grau	0	0	1	1
Trigonometria	0	15	5	20
Logaritmo	0	6	7	13
Polinômio	1	0	1	2
Matrizes	0	0	1	1
Determinantes	0	0	1	1
PA e PG	18	1	2	21
Todos	1	1	3	5
Os que não vou usar no futuro	0	1	0	1
Porcentagem	0	1	0	1
Não lembro	0	1	0	1
Funções	1	1	0	2
Matéria de π	0	1	0	1
Bissetriz	0	1	0	1
Potências	0	1	0	1
Equação de 2º grau	2	1	0	3
Teorema de Pitágoras	1	0	0	1
Frações	5	0	0	5
Gostei de todos	2	0	0	2

A última questão solicitava que o aluno assinalasse uma disciplina para ser retirada do currículo escolar. De modo geral, História e Matemática aparecem em primeiro lugar e, em seguida, aparece a alternativa “Nenhuma”, podendo indicar que grande parte dos sujeitos valoriza os diversos conhecimentos e sua importância no currículo.

Destaca-se que os alunos do 2º ano apresentaram atitudes mais positivas em relação à importância atribuída ao conjunto das disciplinas, sendo que 8 estudantes da série citada não tiraram nenhum componente curricular.

Tabela 8 - Distribuição dos sujeitos de acordo com série e disciplina que tiraria da escola

Disciplinas	1º ano	2º ano	3º ano
Todas as matérias	1	0	1
Nenhuma	7	8	1
Matemática	5	3	10
Português	0	0	1
Ciências	1	0	0
Educação Física	0	0	0
Geografia	2	0	0
Física	2	0	2
Arte	0	2	3
Química	3	3	1
Filosofia	0	8	1
História	4	8	6
Biologia	2	1	0
Inglês	5	4	0

De maneira geral, conforme gráfico abaixo (Figura 13), percebe-se que somente Educação Física não foi citada nenhuma vez para ser retirada da escola. As disciplinas de Ciências e Português receberam uma pequena pontuação. Com relação à Matemática, as séries apresentaram divergências: No 3º ano, 10 alunos retiraram a Matemática, já no 2º Ano apenas 3 apontaram essa disciplina, e no 1º ano, 5. Dessa forma, não há unanimidade, mas de maneira geral, a Matemática é citada por 18 participantes. A disciplina História apresenta menos variações: foi indicada por 4 sujeitos no1º, 8 alunos no 2º, e 6 no 3º, totalizando 18.

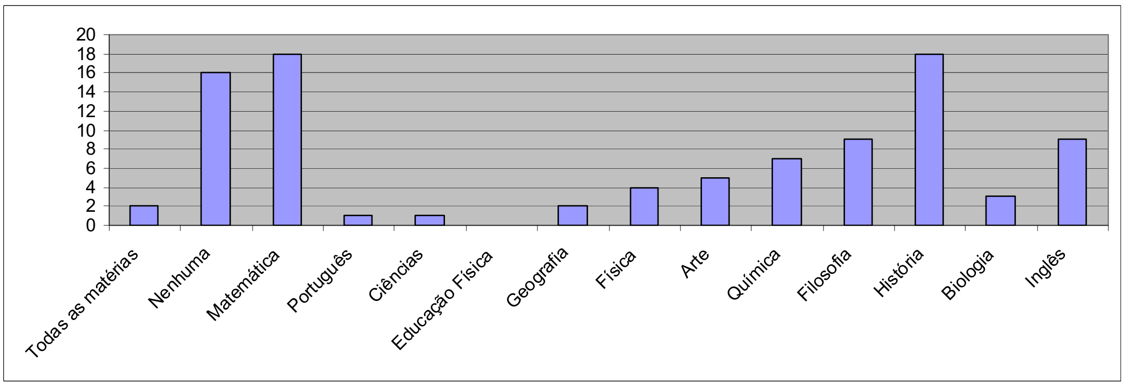


Figura 13 - Disciplina que seria retirada da escola de acordo com os sujeitos

5.3 Análise descritiva da prova de Matemática

<u>1ª Parte (Técnica)</u>

Na 1ª Parte da prova foi solicitado aos alunos que resolvessem, se necessário, os exercícios através do recurso do MMC. O objetivo era verificar se os estudantes conheciam e aplicavam corretamente a técnica operatória. Durante a correção da prova foram utilizados os critérios descritos na metodologia e para cada questão o aluno poderia: acertar totalmente, acertar parcialmente, errar, deixar em branco, escrever "Não sei" ou "Não Lembro".

As questões **a** ($\frac{4}{9}+\frac{1}{9}$), **b** ($\frac{3}{10}+\frac{1}{4}$), **c** ($\frac{2}{6}-\frac{1}{6}$), **d** ($\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$) que envolviam adição e subtração de frações apresentaram o maior número de acertos. O número de acertos nas letras **a** e **c**, que tinham denominadores iguais, foi superior a 70%, enquanto nas demais foi inferior a 50% .

O número de erros aumentou consideravelmente nas questões que envolviam divisão. A questão **g** ($\frac{4}{5}:\frac{2}{5}$) apresentou 34 acertos e a **h** ($\frac{3}{8}:\frac{9}{2}$) apresentou 33 erros. Esse número reduzido de acertos nas questões envolvendo divisão de frações pode indicar a falta de conhecimento da técnica operatória. Muitos alunos dividiram os numeradores e denominadores, outros ainda fizeram o MMC (fatoraram os denominadores, dividiram pelo denominador e multiplicaram pelo numerador) e em seguida, dividiram numerador por numerador e denominador por denominador.

As questões que envolviam multiplicação também não apresentaram um desempenho desejável por parte dos alunos. A questão **f** ($\frac{10}{15}\cdot\frac{7}{4}$) apresentou 17 erros e 42 acertos, mas a questão **e** **(**$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$) foi solucionada de maneira incorreta por 43 participantes. A maioria dos estudantes que errou essa questão não indicou o procedimento realizado, apresentou uma resposta incorreta ou realizou um procedimento incorreto, como inverter uma das frações antes de multiplicar.

Nas questões **i** ($\frac{3}{4}-\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}\right)+\frac{1}{5}$) e **j** ($\frac{2}{3}:\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}$), os alunos encontraram dificuldades. Muitos não respeitaram a ordem das operações, outros não consideraram os parênteses ou, ainda, apresentaram erros nos sinais. A média geral de acerto nessas questões foi de 0,09 e 0,18, respectivamente, em uma escala de zero a um.

Tabela 9 - Distribuição dos sujeitos de acordo com a questão e desempenho

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Acertou totalmente	77	43	72	39	35	42	37	21	7	14
Acertou parcialmente	2	3	1	16	1	3	2	3	3	2
Errou	5	28	8	15	43	17	34	33	27	16
Não lembro	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6
Não sei	2	3	3	4	2	4	4	4	9	9
Branco	9	18	11	21	14	29	18	34	43	48

Nota: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J referem-se às questões da Prova de Matemática (algoritmo). (APÊNDICE A)

2ª Parte

Na análise dos procedimentos, encontrou-se, na divisão de frações, a denominada **Regra do Peixinho.** Essa regra é um procedimento, uma técnica operatória, assim como o MMC ou outro artifício, que fornece de modo prático uma resposta, mesmo sem o conhecimento do conceito. Muitos alunos escreveram ou indicaram essa maneira de resolver, que consiste em multiplicar o numerador da 1ª fração pelo denominador da 2ª. O número obtido será o numerador da nova fração. Em seguida, multiplica-se o denominador da 1ª pelo numerador da segunda, obtendo-se o denominador da nova fração. O desenho formado durante esse processo é o de um peixe, conforme mostra a figura a seguir:

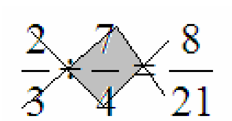


Figura 14 - A regra do peixinho

As questões da 2ª parte da prova de Matemática foram classificadas em "acertou/errou" e, em seguida, foi analisado o procedimento utilizado pelo participante. Considerou-se correta a resposta obtida por meio de um processo em que se utilizou o conceito de fração. Dessa forma, se o estudante usou a técnica operatória, o MMC, seu procedimento foi classificado como errado.

Na questão **a** $(\frac{3}{10}+\frac{1}{4})$ esperou-se que o aluno utilizasse as frações equivalentes ou representação gráfica para chegar à reposta. Entretanto, apenas 12 alunos acertaram o resultado e desenvolveram o procedimento de maneira adequada. Seis estudantes transformaram em decimais, 3 (três) utilizaram as frações equivalentes e o restante não indicou o procedimento claramente.

Deixaram a questão em branco 23 alunos, o que representa cerca de 25% do total. Quanto aos erros, foram encontrados os seguintes:

1. O estudante somou os numeradores e denominadores (16,84%)
2. O estudante realizou o MMC, mesmo não sendo permitido – o que pode significar que não entendeu o solicitado ou não sabia fazer de outra forma (14,74%)
3. O estudante obteve uma resposta errada, mas não indicou o procedimento (11,58%)
4. O estudante utilizou desenho, mas os inteiros eram diferentes (7,37%)
5. O estudante somou os numeradores e multiplicou os denominadores/ Utilizou a regra do peixinho/ Utilizou representação inadequada (como somar bolinhas com quadradinhos) (2,11% cada)
6. O estudante descreveu um procedimento sem lógica/ Multiplicou em cruz e somou/ Somou os numeradores e subtraiu os denominadores/ Somou o numerador, fatorou os denominadores e somou/ Somou os numeradores e conservou o maior denominador/ Multiplicou a 1ª fração por 3 e a 2ª por 4. (1,05% cada)

A tabela abaixo indica os principais procedimentos apresentados no exercício 1 a $(\frac{3}{10}+\frac{1}{4})$

Tabela 10 - Distribuição dos acertos/erros e procedimentos utilizados no exercício 1.a (continua)

Acertou/ Errou – Principais Procedimentos	1. a
Errou. Somou os numeradores e multiplicou os denominadores	2
Errou. Somou os numeradores e denominadores	16
Errou. Utilizou desenho, mas os inteiros eram diferentes	7
Errou. Procedimento sem sentido	1
Errou. Realizou MMC	14
Errou. Utilizou a regra do peixinho	2

Tabela 10 (continuação) - Distribuição dos acertos/erros e procedimentos utilizados no exercício 1.a

Acertou/ Errou – Principais Procedimentos	**1. a**
Errou. Multiplicou em cruz e somou	1
Errou. Somou ao numeradores e subtraiu os denominadores	1
Errou. Somou o numerador, fatorou os denominadores e somou	1
Errou. Somou os numeradores e conservou o maior denominador	1
Errou. Multiplicou a 1ª fração por 3 e a 2ª por 4	1
Errou. Não indicou o procedimento	11
Errou. Utilizou representações (bolinhas, quadrados, etc)	2
Em branco	23
Acertou, mas não indicou o procedimento	3
Acertou. Utilizou frações equivalentes	3
Acertou. Transformou em decimais	6

Dentre os procedimentos utilizados, o gráfico abaixo (Figura 15) indica as porcentagens dos erros cometidos pelos sujeitos durante a resolução dos exercícios.

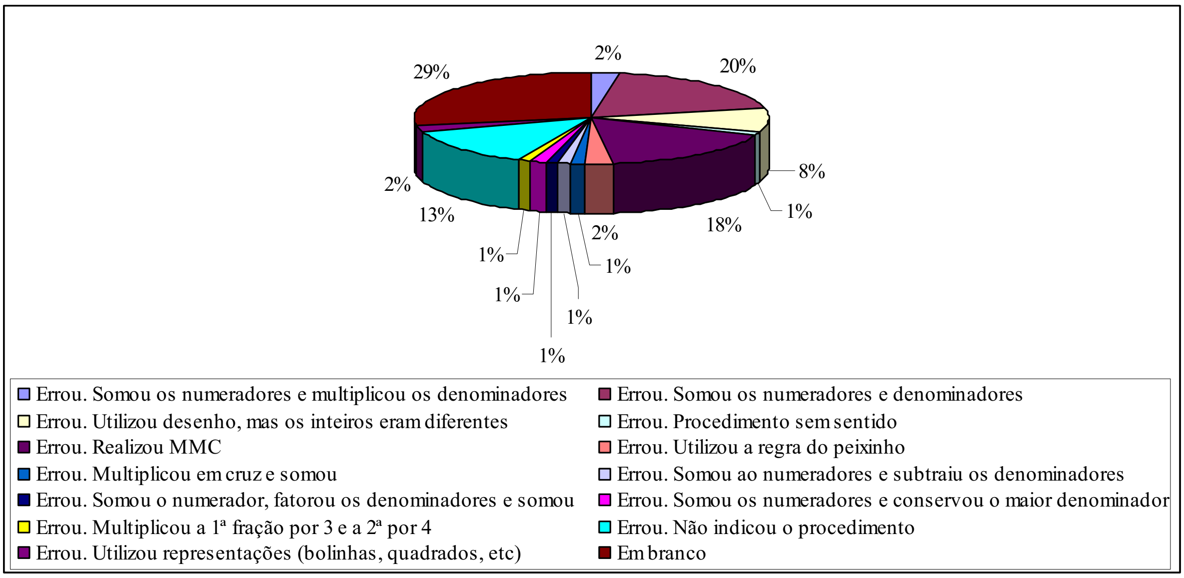


Figura 15 - Porcentagem dos tipos de erros apresentados no exercício

A porcentagem dos acertos, de acordo com o procedimento utilizado, pode ser visualizada na Figura 17:

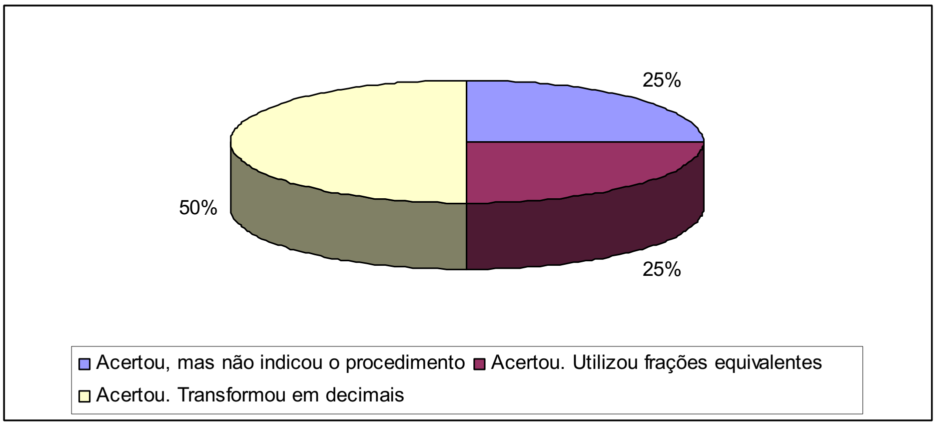


Figura 16 - Distribuição dos acertos de acordo com o procedimento utilizado no exercício 1.a

A questão **b** ($\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$) solicitou que os alunos fizessem a subtração de frações sem utilizar o recurso do MMC. O número de acertos novamente foi de 12 (doze). O número de respostas em branco aumentou, representando 27,37% do total.

Os erros encontrados assemelham-se aos apresentados no exercício 1 a (anterior). A tabela 11 indica os seguintes:

1. O estudante subtraiu os numeradores e denominadores (17,89%)
2. O estudante utilizou o recurso do MMC (15,79%)
3. O estudante utilizou desenho, mas os inteiros eram diferentes/ Não indicou o procedimento (5,26%)
4. O estudante subtraiu os numeradores e multiplicou os denominadores/ Tentou desenhar, mas não concluiu as ideias (3,16%)
5. O estudante utilizou a "Regra do Peixinho"/ Utilizou procedimento incorreto (2,11%)
6. O estudante subtraiu os numeradores, fatorou os denominadores e somou/ Subtraiu os numeradores e somou os denominadores/ Não concluiu/ Multiplicou em cruz e somou tudo (1,05%)

A tabela 11 indica os principais procedimentos apresentados no exercício 1 b ($\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$):

Tabela 11 - Distribuição dos acertos/erros e procedimentos utilizados no exercício 1.b

Acertou/ Errou - Principais Procedimentos	**1b**
Errou. Subtraiu os numeradores e denominadores	17
Errou. Subtraiu os numeradores e multiplicou os denominadores	3
Errou. Tentou desenhar, mas não concluiu as idéias	3
Errou. Utilizou MMC	15
Errou. Subtraiu os numeradores, fatorou os denominadores e somou	1
Errou. Utilizou desenho, mas os inteiros eram diferentes	5
Errou. Subtraiu os numeradores e somou os denominadores	1
Errou. Não concluiu	1
Errou. Não indicou o procedimento	5
Errou. Procedimento incorreto	1
Errou. Utilizou a regra do peixinho	2
Errou. Multiplicou em cruz e somou tudo	1
Errou. Procedimento incorreto	1
Em branco	26
Acertou, mas não indicou o procedimento	6
Acertou. Transformou em decimais	3
Acertou. Utilizou frações equivalentes	3
Acertou parcialmente. Transformou em decimais, mas errou a resposta	1

A questão 1**c** ($\frac{3}{25}+\frac{2}{5}$) apresentou resultados semelhantes aos da questão 1a, que solicitava adição de frações. Entretanto, apenas 9 (nove) alunos acertaram a resposta, indicando que o índice de acertos diminuiu.

Aproximadamente 24% dos sujeitos deixaram o exercício em branco.

Em relação aos principais erros, 16,84% dos alunos somaram numeradores e denominadores e 14, 37% utilizaram o MMC.

Tabela 12-Distribuição dos acertos/erros e procedimentos utilizados no exercício 1.c (continua)

Acertou/ Errou - Principais Procedimentos	**1c**
Errou. Somou numeradores e denominadores	16
Errou. Somou os numeradores e multiplicou os denominadores	2
Errou. Somou os numeradores e dividiu os denominadores	1
Errou. Somou os numeradores e conservou o maior denominador	2
Errou. Somou os numeradores, fatorou os denominadores e somou	1
Errou. Multiplicou em cruz e somou tudo	1
Errou e não indicou o procedimento	12
Errou. Utilizou MMC	14
Errou. Utilizou desenho, mas os inteiros eram diferentes	7
Errou. Utilizou a regra do peixinho	3
Errou. Utilizou representação (bolinhas, quadrados, etc)	1
Errou. Subtraiu numeradores e denominadores	1
Errou. Transformou em decimais, mas errou a soma	1
Errou. Procedimento incorreto	1

Tabela 12 (continuação) - Distribuição dos acertos/erros e procedimentos utilizados no exercício 1.c

Acertou/ Errou - Principais Procedimentos	**1c**
Acertou. Utilizou frações equivalentes	4
Acertou. Transformou em decimais	5
Deixou em branco	23

A 2ª questão (Escreva o que você entende por fração e dê exemplos) apresentou respostas que evidenciaram diferentes significados atribuídos às frações. Muitos alunos não conseguiram dar exemplos e outros, apenas descreveram o procedimento técnico utilizado nos problemas ou exercícios que envolvem frações. Esse fato, provavelmente, ocorre pela forma como o conceito fração é abordado e que muitas vezes se resume à aplicação da técnica para se obter rapidamente um resultado.

Um número relativamente alto de sujeitos (21) deixou a questão em branco. Outros 4 (quatro) alunos escreveram que não lembravam o conceito de fração e 5 (cinco) estudantes apenas deram exemplos ou realizaram uma representação.

Uma grande parte dos alunos (11) relacionou a fração com uma divisão. Um sujeito entendeu que as frações são razões, o que se reporta à ideia de divisão. Outro aluno respondeu que fração "É uma parte pequena de um número".

Outra ideia de fração refere-se ao todo e suas partes. 25 (vinte e cinco) sujeitos afirmaram que "Fração é uma parte de um todo", o que pode levar a alguns equívocos se o inteiro não for dividido em partes iguais. Somente 5 (cinco) alunos indicaram que " é o todo dividido em partes iguais". A ideia de fração como parte-todo é comumente trazida nos livros didáticos e aparece estereotipada através da divisão de pizzas e chocolates.

> Uma forma comum de apresentar as crianças às frações é mostrar-lhes *todos* divididos em *partes*, alguns dos quais distinguidos do resto, por exemplo, pintados. As crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. (NUNES e BRYANT, 1997, p. 191)

Os autores afirmam que a forma de apresentação das frações por meio do significado de fração como parte-todo pode fazer com que as crianças aparentem um conhecimento que de fato não possuem.

Outros participantes indicaram que as frações representam "partes quebradas" cuja divisão resulta em número decimal. Essa ideia foi apontada por 8 (oito) alunos.

Quatro estudantes indicaram que "Fração é uma conta que faz MMC" e outro afirmou ser uma conta que subtrai.

Alguns alunos parecem não ter conseguido se expressar ou apresentaram dificuldades para definir ou conceituar frações. 4 (quatro) sujeitos responderam que "pode representar muitas coisas". 2 (dois) afirmaram não entender nada.

Tabela 13 - Distribuição dos sujeitos de acordo com a definição de Fração

Conceito de fração	**Nº de alunos**
Não me lembro	4
Apenas deu exemplos e desenhou	5
Representa algo que não é inteiro	2
Em branco	21
É uma parte de um todo	25
É uma conta que faz MMC	4
É o todo dividido em partes iguais	5
É uma divisão que se coloca para não ficar com números com vírgula	1
Fração é a metade da metade	1
Pode representar muitas coisas	4
É uma parte pequena de um número	1
É uma divisão	11
É uma razão	1
É igual aos números decimais, mas representado de outra maneira	2
É uma maneira de representar número com vírgula	2
Representa números inteiros ou com vírgula por meio de divisão	1
É uma conta que subtrai	1
É um número dividido por outro, sem resultado exato	1
Não entendo nada	2
É uma quantidade consumida por uma parte que se quer saber o valor	1

A 3ª questão trazia dois desenhos divididos em partes e solicitava que os alunos indicassem a fração correspondente. O primeiro desenho (Figura 17) apresentou um todo dividido em partes não iguais. Diante da definição de frações, somente um aluno apontou que não seria possível indicar a fração correspondente à área hachuarada, já que <u>as partes não são iguais.</u>

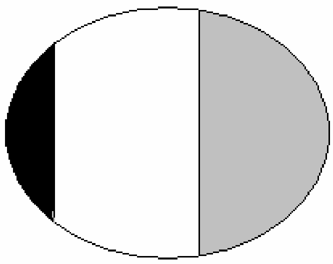


Figura 17 -Representação do exercício 3.a

O restante dos sujeitos participantes da pesquisa, ou seja, 94 (noventa e quatro estudantes) responderam de maneira equivocada essa questão. 17% dos estudantes não consideraram as duas regiões da figuras, mas somente a parte em preto. 11% responderam $\frac{2}{3}$, justificando de maneira parecida com a do aluno que participou da entrevista:

S_1: Então seria 2/3, porque ele dividiu em 3 e pegou 2.

Alguns alunos tentaram subdividir a figura de maneira a deixar as partes iguais, mas como a forma era oval isso não seria possível. Diante dessas dificuldades, 26% dos sujeitos deixaram o exercício em branco.

Tabela 14 - Distribuição das respostas do exercício 3.a de acordo com os sujeitos

Questão 3.a	**Nº de alunos**
Respondeu ¼	2
Respondeu 2/3	10
Respondeu 2/4	1
Respondeu 1/5+2/5	1
Respondeu ½	20
Respondeu 1/5	3
Respondeu 1/7	1
Respondeu 1/8	1
Respondeu 1/9	1
Respondeu 4/9	1
Respondeu 1/12	1
Respondeu 3 /5	3
Respondeu 3	2
Respondeu 1/3	16
Respondeu ¾	1
Respondeu 3/2	2
Respondeu 4/7	2
Respondeu 50/30/10	1
Acertou	1
Deixou em branco	25

O baixo número de acertos pode levar ao questionamento sobre o tipo de quantidade (discreta ou contínua) que o aluno foi acostumado a identificar. Na ideia de fração como quociente, por exemplo, seria possível que o estudante, ao trabalhar com quantidades discretas como balas ou parafusos, representasse adequadamente a fração. Entretanto, destaca-se que ao trabalhar com quantidades contínuas, como áreas ou pedaços de pizza ou chocolate, por exemplo, essas porções devem ser iguais.

Outra interpretação para o baixo desempenho dos participantes neste exercício é que os alunos acharam que deveriam apresentar uma fração como resposta. Ou seja, por não estarem acostumados ou habituados a trabalhar com questões abertas, os estudantes buscaram uma resposta, mesmo sem refletir sobre o conceito ou situação apresentada.

O gráfico abaixo (Figura 18) indica a porcentagem dos sujeitos de acordo com as respostas apresentadas por eles na questão 3.a:

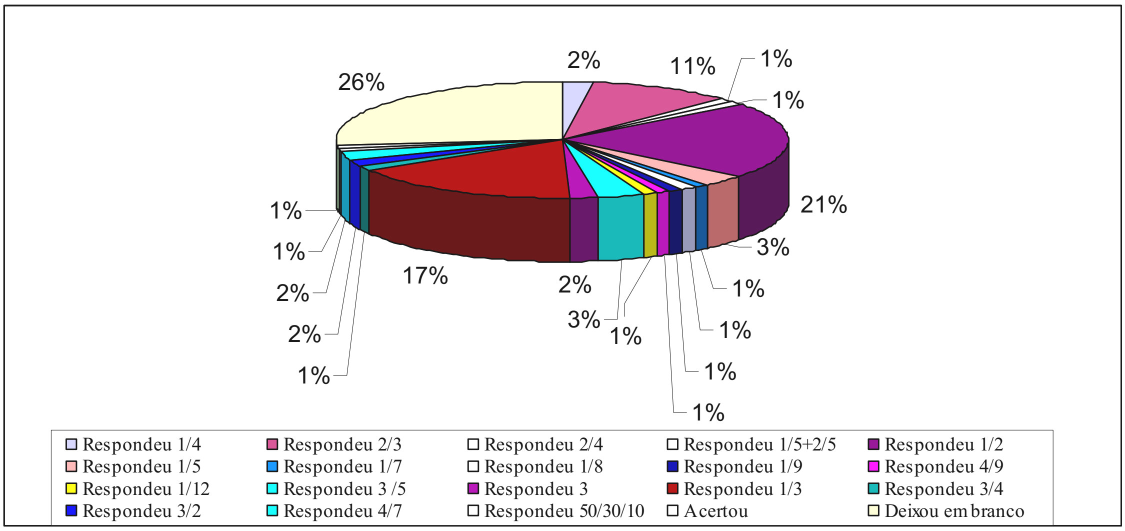


Figura 18 - Distribuição das porcentagens de acordo com as respostas apresentadas no exercício 3.a

A questão B (Figura 19) apresentou um retângulo dividido em 4 (quatro) partes e destacadas apenas 2 (duas):

Figura 19 - Desenho do exercício 3.b

Setenta e três sujeitos acertaram essa questão. Destes, 41 (quarenta e um) responderam $\frac{2}{4}$, não fornecendo a resposta de modo simplificado (fração irredutível). A ausência da simplificação de uma fração pode dar indícios de que o aluno não domina totalmente a ideia de frações equivalentes.

Seguindo-se a análise da questão 3.b, percebem-se algumas respostas sem sentido como $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{1}$ ou 2. Além disso, nove alunos deixaram a questão em branco e um sujeito escreveu “Não Sei”.

Tabela 15 - Distribuição das respostas do exercício 3.b de acordo com os sujeitos

Questão 3.b	**Nº de alunos**
Respondeu ¼	1
Respondeu 1/3	6
Respondeu 4/2	2
Respondeu 2/2	1
Deixou em branco	9
Respondeu 3/1	1
Respondeu 2	1
Acertou	32
Acertou, mas não simplificou	41
Escreveu Não sei	1

O gráfico abaixo (Figura 20) indica a porcentagem dos sujeitos de acordo com as respostas apresentadas por eles na questão 3.b:

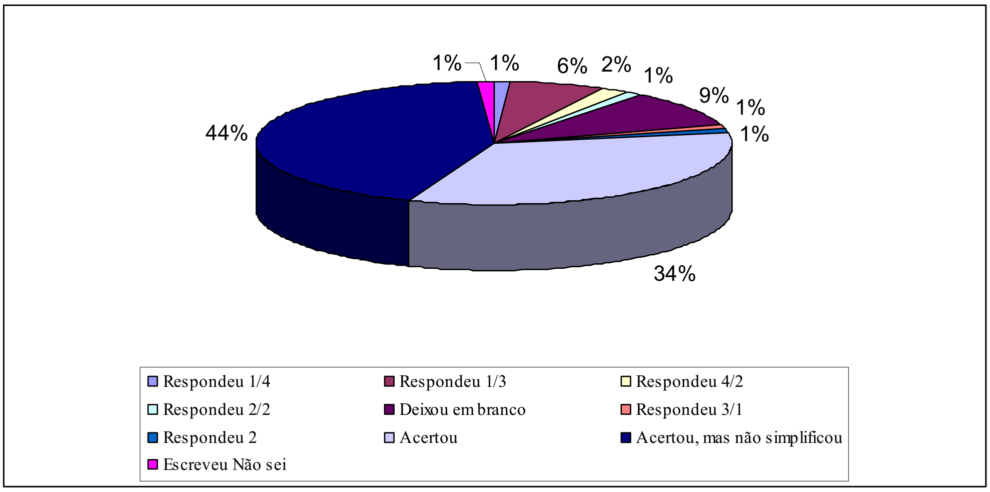


Figura 20 - Distribuição das porcentagens de acordo com as respostas apresentadas no exercício 3.b

3ª Parte – Problemas

O objetivo da 3ª Prova de Matemática aplicada aos sujeitos foi verificar o desempenho e os procedimentos utilizados na solução de problemas. Nas situações-problema, além do domínio da operacionalidade, foram observadas as estratégias de solução apresentadas pelos estudantes.

Na solução de problemas, os alunos do 3º ano apresentaram o melhor desempenho em relação às séries avaliadas. De maneira semelhante à prova de algoritmo (técnica), os alunos da 1ª série obtiveram as piores notas e o pior desempenho.

A tabela 16 mostra como os sujeitos responderam cada problema. O **problema 1**[13] exigiu que o aluno realizasse a soma de frações. Muitos participantes deixaram "em branco", 13 alunos erraram, 35 acertaram parcialmente (identificaram a operação, mas não souberam efetuar a adição de frações, por exemplo) e 28 solucionaram corretamente o problema.

O **problema 2** [14]foi solucionado corretamente por 46 sujeitos e parcialmente por 26. Apenas 7 alunos erraram e 16 deixaram em branco.

Já o **problema 3**[15] não foi solucionado adequadamente por 30 alunos, e se destacou como o que apresentou o maior número de erros. Esse problema envolveu subtração de frações, mas possivelmente, os estudantes encontraram dificuldades na obtenção da informação matemática.

Tabela 16 - Distribuição dos sujeitos de acordo com problema e resposta

PROBLEMAS	1	2	3	4	5	6	7
Acertou totalmente	28	46	26	5	8	12	9
Acertou parcialmente	35	26	16	32	4	22	14
Errou	13	7	30	25	34	24	25
Não lembro	0	0	0	0	0	0	0
Não sei	0	0	0	0	2	0	1
Branco	19	16	23	33	47	37	46

O **problema 4**[16] foi solucionado corretamente por 5 participantes e não foi solucionado por 33 alunos que deixaram-no "em branco".

---

[13] 1) Pela manhã um caminhoneiro percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e à tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ele percorreu nos dois períodos?

[14] 2) Elvira gasta $\frac{4}{9}$ do seu salário com aluguel e $\frac{1}{9}$ com alimentação.

a) Que fração do salário ela gastou no total?
b) Depois de pagas essas duas despesas, que fração do salário sobrou?

[15] 3) Roberta iniciou uma viagem com $\frac{5}{6}$ do tanque de gasolina abastecido e gastou durante essa viagem o equivalente a $\frac{1}{2}$ do tanque. A gasolina que sobrou equivale a que fração do tanque?

[16] 4) Ontem, dormi $\frac{1}{4}$ das 24 horas do dia, e estudei $\frac{1}{36}$ do tempo que estive acordado.

No **problema 5**[17], os estudantes obtiveram o pior resultado: 8 acertaram, 4 acertaram parcialmente, 34 erraram e 47 deixaram em branco. Para que o aluno solucionasse adequadamente esse problema, ele deveria dominar a ideia de fração como operador multiplicativo. Assim, deveria calcular $\frac{1}{5}$ das loiras do total $\frac{3}{4}$ das meninas.

O **problema 6**[18] tratou da divisão de frações. 37 participantes não fizeram ou não souberam solucionar o problema. O número de alunos que errou o problema foi 24, sendo que apenas 12 obtiveram a resposta adequada. De maneira semelhante, o **problema 7**[19] apresentou um baixo número de acertos, somente 9. Aproximadamente metade dos participantes (46) deixaram o problema sem solução.

Ao analisar esses dados, nota-se que os estudantes apresentam dificuldades no domínio das frações como operador multiplicativo. Dessa forma, situações como determinar $\frac{1}{4}$ de 24 horas do dia foram resolvidas por um número reduzido de alunos.

5.4 Validação da escala de Atitudes em relação a frações

Para validar a escala de atitudes em relação à fração e com o objetivo de analisar possíveis correlações entre as diversas variáveis envolvidas nesse estudo, utilizou-se o software estatístico SPSS. Para a validação da escala participaram 373 sujeitos, incluindo-se os sujeitos participantes de todas as etapas da pesquisa.

---

a) Que fração das 24 horas do dia eu estive acordado?
b) Que fração das 24 horas do dia eu estudei?
c) Quanto tempo eu estudei?

[17] 5) Em uma classe $\frac{3}{4}$ dos alunos são meninas e $\frac{1}{5}$ das meninas são loiras. As meninas loiras representam que fração do total de alunos da classe?

[18] 6) Paulo quer dividir $\frac{1}{3}$ de um chocolate em 4 partes iguais. Que fração do chocolate representará cada uma dessas partes? Faça uma figura para representar essa divisão.

[19] 7) Num filme de TV, o mordomo assassinou seu patrão, por que achava que iria receber $\frac{1}{4}$ da herança. No entanto, o patrão deixou $\frac{2}{5}$ da herança para serem igualmente divididos entre os oito empregados da casa (um dos quais é o mordomo). O resto da herança, segundo o testamento, deveria ser doado à polícia.
a) Que fração da herança foi destinada ao mordomo?
b) Quantas vezes a quantia destinada ao mordomo cabe na que ele achava que iria receber?

Em primeiro lugar, ao se analisarem as correlações das proposições, verifica-se a possibilidade da utilização da análise fatorial, pois esse é um dos pressupostos dessa técnica estatística. Para isso foi utilizado o teste de esfericidade de Bartlett, que, segundo Pereira (1999), testa a hipótese de que a matriz de correlação é a matriz identidade, isto é, que não há correlação entre as proposições. O valor qui-quadrado aproximado foi de 4759,038 com p=0,000 o que permite concluir que a matriz de correlação é apropriada para utilizar esta técnica multivariada.

O outro pressuposto é a adequação da amostra, medida pelo teste de Kaiser-Meyer-Oklin, KMO = 0,958, considerado excelente, pois está acima de 0,900 (Ibid, 1999).

Com esses dois pressupostos validados, foi utilizado o modelo fatorial dos componentes principais, que permite resumir a maioria das informações originais (variâncias) em um número finito de fatores. Além disso, foi utilizada a rotação Varimax, que, conforme Sharma (apud SILVA, 2000a), é uma operação que possibilita obter a estrutura fatorial na qual cada variável tende a carregar altamente em um só fator.

Para extrair os fatores de um conjunto de variáveis, existem dois critérios, o primeiro é que os autovalores sejam maiores que um, e o segundo é que sejam os fatores que respondem pela maior variância obtida. A Tabela 17 mostra esses dados.

Tabela 17 - Estatísticas das proposições da escala e resultados da análise fatorial

Análise descritiva				Análise fatorial			
Proposições	Nº de sujeitos	Média	Desvio padrão	Fator	Autovalor	variância total explicada %	variância total explicada % acumulada
A1	373	2,46	0,81	1	9,868	49,342	49,342
A2	373	2,49	0,82	2	2,184	10,921	60,263
A3	373	2,22	0,75	3	0,875	4,375	64,639
A4	373	1,96	0,69	4	0,763	3,813	68,452
A5	373	1,97	0,66	5	0,628	3,141	71,593
A6	373	2,34	0,81	6	0,564	2,820	74,413
A7	373	2,40	0,74	7	0,547	2,735	77,148
A8	373	2,45	0,85	8	0,511	2,555	79,703
A9	373	2,19	0,67	9	0,471	2,353	82,056
A10	373	2,60	0,84	10	0,448	2,242	84,298
A11	373	2,00	0,68	11	0,412	2,062	86,360
A12	373	2,55	0,74	12	0,399	1,996	88,355
A13	373	2,47	0,76	13	0,386	1,932	90,288
A14	373	1,94	0,72	14	0,334	1,672	91,959
A15	373	1,92	0,69	15	0,326	1,628	93,588
A16	373	2,46	0,72	16	0,299	1,495	95,083
A17	373	2,63	0,79	17	0,286	1,430	96,513
A18	373	1,73	0,62	18	0,278	1,389	97,901
A19	373	2,00	0,68	19	0,239	1,194	99,095
A20	373	1,99	0,67	20	0,181	0,905	100,000

Os fatores **1** e **2** explicam 60,3% da variância total, sendo que o primeiro respondeu por 49,3% e o segundo por 10,9%. Os outros autovalores respondem por menos do que 5% da variância, portanto foram descartados. A decisão por admitir os dois fatores é reforçada pelo critério do valor dos autovalores que devem ser maiores do que um, como ilustrado pelo "screeplot", na Figura 21.

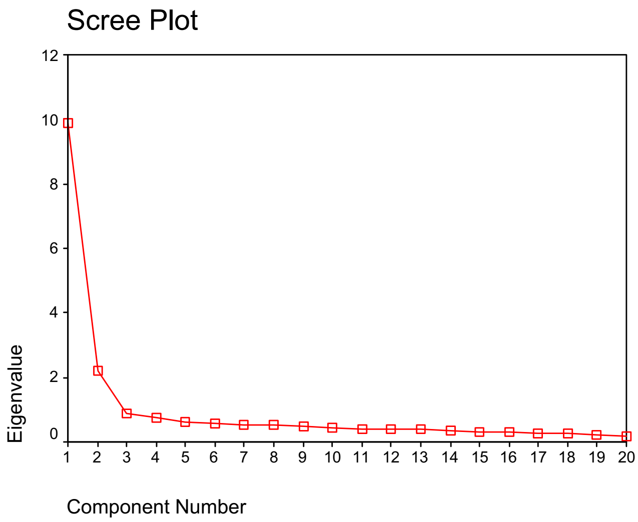


Figura 21 - Gráfico dos autovalores (screeplot).

A Tabela 18 mostra as cargas fatoriais de cada proposição e a Figura 22 ilustra a distribuição espacial das proposições, que permite concluir a presença da unidimensionalidade da escala, que tem dois pólos opostos, as proposições negativas e as positivas, que são classificadas perfeitamente em dois grupos.

Tabela 18 - Matriz dos componentes fatoriais, inicial e com rotação Varimax, da escala de atitudes em relação a frações (continua)

Natureza	Proposição	Inicial		Rotação Varimax	
		Fator 1	Fator 2	Fator 1	Fator 2
N	**A1-**Eu fico sob uma terrível tensão quando resolvo problemas que envolvem frações	0,593	0,364	0,181	0,672
N	**A2-**Eu não gosto de frações e me assusta ter que trabalhar esse conceito	0,746	0,164	0,429	0,632
P	**A3-**Eu acho "frações" muito interessante e gosto das aulas sobre isso	0,763	-0,306	0,764	0,302
P	**A4-**Frações é um conceito fascinante e divertido	0,687	-0,403	0,776	0,180

Tabela 18 continuação – Matriz dos componentes fatoriais, inicial e com rotação Varimax, da escala de atitudes em relação a frações

Natureza	Proposição	Inicial		Rotação Varimax	
		Fator 1	Fator 2	Fator 1	Fator 2
P	**A5-**Problemas com frações me fazem sentir seguro(a) e é, ao mesmo tempo, estimulante	0,648	-0,274	0,659	0,246
N	**A6-**"Dá um branco" na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando resolvo problemas com frações	0,657	0,435	0,178	0,767
N	**A7-**Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço para resolver problemas de frações	0,617	0,496	0,107	0,784
N	**A8-**Conteúdos com frações me deixam inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente	0,766	0,227	0,401	0,691
P	**A9-**O sentimento que tenho com relação a Frações é bom	0,762	-0,175	0,674	0,397
N	**A10-** Problemas com frações me fazem sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída	0,661	0,311	0,266	0,680
P	**A11-**"Frações" é um conteúdo que aprecio grandemente	0,700	-0,305	0,718	0,260
N	**A12-**Quando eu ouço a palavra Fração, eu tenho um sentimento de aversão	0,661	0,223	0,327	0,616
N	**A13-**Eu encaro problemas sobre frações com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz de solucionar problemas	0,663	0,383	0,218	0,734
P	**A14-**Eu gosto realmente de frações	0,801	-0,321	0,802	0,318
P	**A15-**"Frações" é um dos conteúdos que eu realmente gosto de estudar na escola	0,786	-0,349	0,811	0,287
N	**A16-**Pensar sobre a obrigação de resolver um problema com frações me deixa nervoso(a)	0,745	0,367	0,289	0,779
N	**A17-**Eu nunca gostei de solucionar problemas sobre frações e esse é o conteúdo que me dá mais medo	0,700	0,324	0,286	0,716
P	**A18-**Eu me sinto mais feliz em aulas sobre frações de qualquer outro conteúdo	0,509	-0,384	0,634	0,07
P	**A19-**Eu me sinto tranqüilo(a) quando soluciono problemas sobre frações e gosto muito desse conteúdo	0,759	-0,263	0,732	0,331
P	**A20-**Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação a frações: Eu gosto e aprecio problemas com esse conteúdo	0,750	-0,333	0,774	0,274

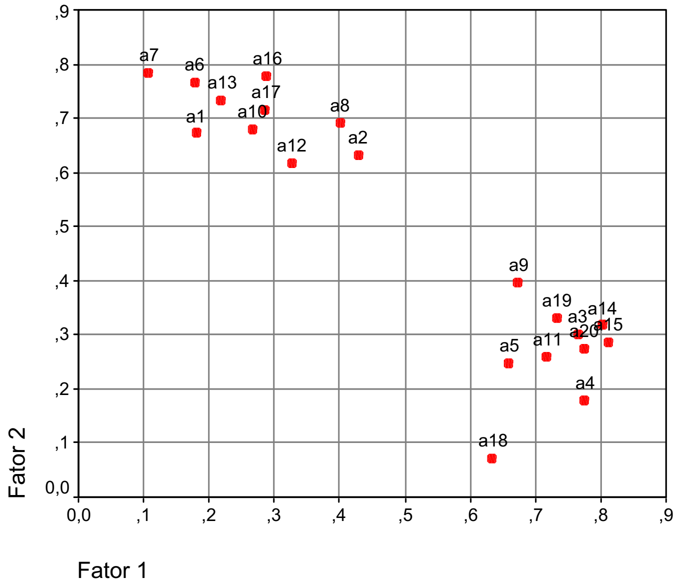


Figura 22 - Gráfico de dispersão das proposições da escala de atitudes em relação a Frações segundo as cargas fatoriais.

5.4.1 Análise de confiabilidade da escala

A análise de confiabilidade de escala foi realizada utilizando o coeficiente Alfa de Cronbach[20]. A tabela 19 mostra a análise descritiva das proposições, cuja média varia de 1,72 a 2,60, indicando uma tendência às atitudes negativas. Quanto à pontuação da escala, valores das proposições tomam valores 1, se forem muito negativas, e 4, se forem muito positivas.

Tabela 19 - Análise descritiva das proposições da escala de atitudes em relação a frações (continua)

Proposição	Média	Desvio padrão	Número de Sujeitos
A1	2,4558	0,8107	373
A2	2,4933	0,8185	373
A3	2,2172	0,7539	373
A4	1,9625	0,6907	373

[20] O coeficiente α de Cronbach estima a confiabilidade interna de um questionário que se aplica em uma pesquisa. Como os itens de um questionário utilizam a mesma escala de medição, o coeficiente tem valor de 0 a 1 e é calculado a partir da seguinte equação:

$$\alpha = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} S_i^2}{S_t^2}\right)$$, onde k é o número de itens do questionário, S_i^2 é a variância do item i e S_t^2 é a variância total do questionário. (FREITAS e ARICA, 2008).

Tabela 19 (continuação) - Análise descritiva das proposições da escala de atitudes em relação a frações

Proposição	Média	Desvio padrão	Número de Sujeitos
A5	1,9651	0,6569	373
A6	2,3351	0,8117	373
A7	2,4021	0,7399	373
A8	2,4504	0,8525	373
A9	2,1877	0,6697	373
A10	2,6032	0,8413	373
A11	2,0027	0,6780	373
A12	2,5523	0,7446	373
A13	2,4692	0,7565	373
A14	1,9410	0,7160	373
A15	1,9196	0,6870	373
A16	2,4584	0,7196	373
A17	2,6300	0,7913	373
A18	1,7265	0,6224	373
A19	2,000	0,6839	373
A20	1,9866	0,6699	373

A menor média encontrada foi na proposição A18, "Eu fico mais feliz em aulas sobre frações que em aulas de qualquer outro conteúdo", o que pode ser justificado pela tendência a atitudes negativas em relação a esse conteúdo.

O coeficiente de alfa de Cronbach foi de 0,9443, que é considerado muito bom. Além disso, esse coeficiente varia de 0,9400 a 0,9445 quando uma proposição é deletada (Tabela 20), ou seja, quase nenhuma variação é observada, indicando que todos os itens são igualmente importantes na formação da escala.

Tabela 20 - Distribuição dos coeficientes Alfa de Cronbach da escala de atitudes em relação a frações, quando a proposição foi deletada (continua)

Proposição	Média da escala se a proposição for deletada	Variância da escala se a proposição for deletada	Correlação item corrigido – total	Alfa de Cronbach se a proposição for deletada
A1	42,3029	96,4644	0,5616	0,9433
A2	42,2654	94,0396	0,7153	0,9406
A3	42,5416	94,9909	0,7150	0,9406
A4	42,7962	97,0068	0,6307	0,9420

Tabela 20 (continuação) - Distribuição dos coeficientes Alfa de Cronbach da escala de atitudes em relação a frações, quando a proposição foi deletada

Proposição	Média da escala se a proposição for deletada	Variância da escala se a proposição for deletada	Correlação item corrigido – total	Alfa de Cronbach se a proposição for deletada
A5	42,7936	97,8793	0,5965	0,9425
A6	42,4236	95,3846	0,6321	0,9421
A7	42,3566	96,8967	0,5918	0,9426
A8	42,3083	93,1708	0,7394	0,9402
A9	42,5710	96,1757	0,7187	0,9407
A10	42,1555	95,0456	0,6286	0,9422
A11	42,7560	96,9699	0,6467	0,9418
A12	42,2064	96,3632	0,6258	0,9421
A13	42,2895	96,0719	0,6353	0,9419
A14	42,8177	95,0258	0,7541	0,9400
A15	42,8391	95,6676	0,7385	0,9404
A16	42,3003	95,3666	0,7244	0,9405
A17	42,1287	95,0855	0,6709	0,9414
A18	43,0322	100,0366	0,4531	0,9445
A19	42,7587	96,0492	0,7123	0,9408
A20	42,7721	96,3969	0,7009	0,9410

5.5 Análise das atitudes em relação a frações

As atitudes parecem se formar, principalmente, pela negação de sentimentos negativos, do que pela afirmação de sentimentos positivos. Na tabela 21 percebe-se a discordância dos sujeitos em todas as proposições negativas, com exceção da afirmação 17, "Eu nunca gostei de solucionar problemas sobre frações e esse é o conteúdo que me dá mais medo".

Tabela 21 - Distribuição da porcentagem dos sujeitos de acordo nas proposições da escala de atitudes em relação a frações (continua)

Natureza	Proposição	CT	C	D	DT	Total
Negativa	A1 - Eu fico sempre sob uma terrível tensão quando resolvo problemas que envolvem frações.	10,4	35,2	44,3	10,1	100,0
Negativa	A2 - Eu não gosto de frações e me assusta ter que trabalhar esse conceito.	10,7	38,0	41,2	10,2	100,0

Tabela 21 (continuação) - Distribuição da porcentagem dos sujeitos de acordo nas proposições da escala de atitude em relação a frações

Natureza	Proposição	CT	C	D	DT	Total
Positiva	A3 - Eu acho “frações” muito interessante e gosto das aulas sobre isso.	16,0	50,7	29,3	4,0	100,0
Positiva	A4 - Frações é um conceito fascinante e divertido.	24,8	55,5	18,7	1,1	100,0
Positiva	A5 - Problemas com frações me fazem sentir seguro (a) e é, ao mesmo tempo, estimulante.	21,3	63,2	13,3	2,1	100,0
Negativa	A6- "Dá um branco" na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando resolvo problemas com frações.	7,7	32,5	45,6	14,1	100,0
Negativa	A7 - Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço para resolver problemas de frações.	7,2	34,4	50,1	8,3	100,0
Negativa	A8 - Conteúdos com frações me deixam inquieto (a), descontente, irritado (a) e impaciente.	12,0	33,3	42,7	12,0	100,0
Positiva	A9 - O sentimento que tenho com relação a Frações é bom.	13,9	54,9	30,1	1,1	100,0
Negativa	A10 - Problemas com frações me fazem sentir como se estivesse perdido (a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.	14,4	40,8	35,7	9,1	100,0
Positiva	A11 - “Frações” é um conteúdo que eu aprecio grandemente.	20,8	60,5	16,5	2,1	100,0
Negativa	A12 - Quando eu ouço a palavra Fração, eu tenho um sentimento de aversão.	9,6	42,1	42,4	5,9	100,0
Negativa	A13 - Eu encaro problemas sobre frações com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz de solucionar problemas.	8,8	37,1	46,7	7,5	100,0
Positiva	A14 - Eu gosto realmente de frações.	26,4	55,7	15,5	2,4	100,0
Positiva	A15 - “Frações” é um dos conteúdos que eu realmente gosto de estudar na escola.	25,7	59,4	12,6	2,4	100,0
Negativa	A16 - Pensar sobre a obrigação de resolver um problema com frações me deixa nervoso(a).	6,1	40,5	46,1	7,2	100,0
Negativa	A17 - Eu nunca gostei de solucionar problemas sobre frações e esse é o conteúdo que me dá mais medo.	11,5	47,7	32,8	8,0	100,0
Positiva	A18 - Eu fico mais feliz em aulas sobre frações que em aulas de qualquer outro conteúdo.	36,0	56,3	6,9	0,8	100,0
Positiva	A19 - Eu me sinto tranqüilo (a) quando soluciono problemas sobre frações e gosto muito desse conteúdo.	21,6	58,9	17,6	1,9	100,0
Positiva	A20 - Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação a frações: Eu gosto e aprecio problemas com esse conteúdo.	21,1	61,6	15,2	2,1	100,0

Nota: CT (Concordo Totalmente), C (Concordo), D (Discordo) e DT (Discordo Totalmente)

O percentual de sujeitos que concordam com as proposições negativas varia de 60 a 40%, de acordo com a figura 23. É possível observar que quase 60% dos estudantes concordam com o sentimento de medo e apenas 40% concordam com a afirmação "'Dá um branco' na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando resolvo problemas com frações".

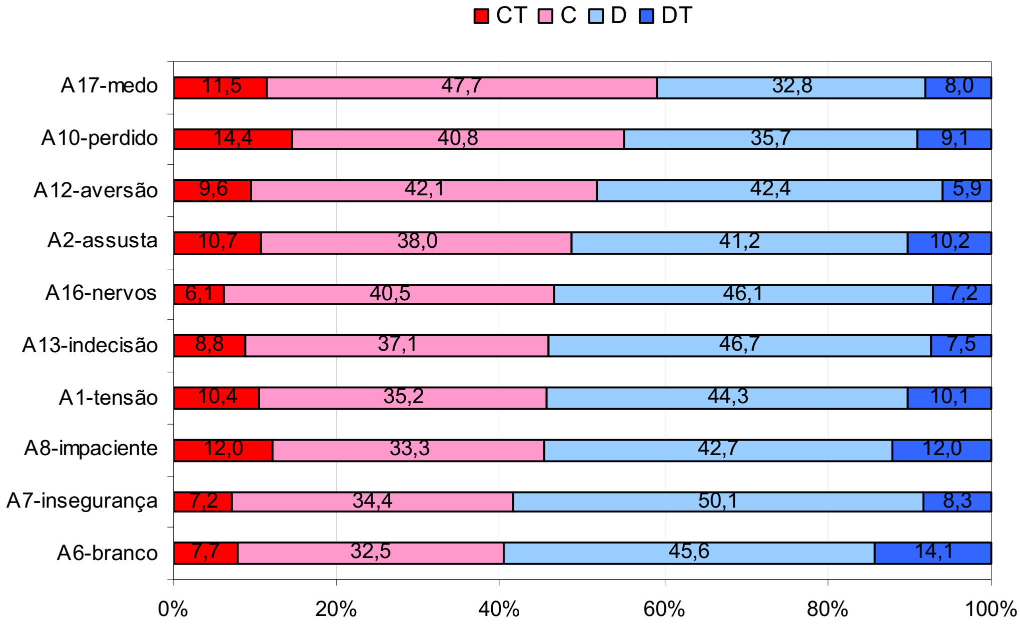


Figura 23 - Distribuição percentual dos sujeitos nas proposições negativas, ordenada de forma decrescente.

A Figura 24 mostra que apenas um terço concorda que a Matemática é interessante e 30% dos sujeitos afirmaram ter um sentimento bom. Nas outras proposições positivas, o percentual é inferior a um quinto dos participantes.

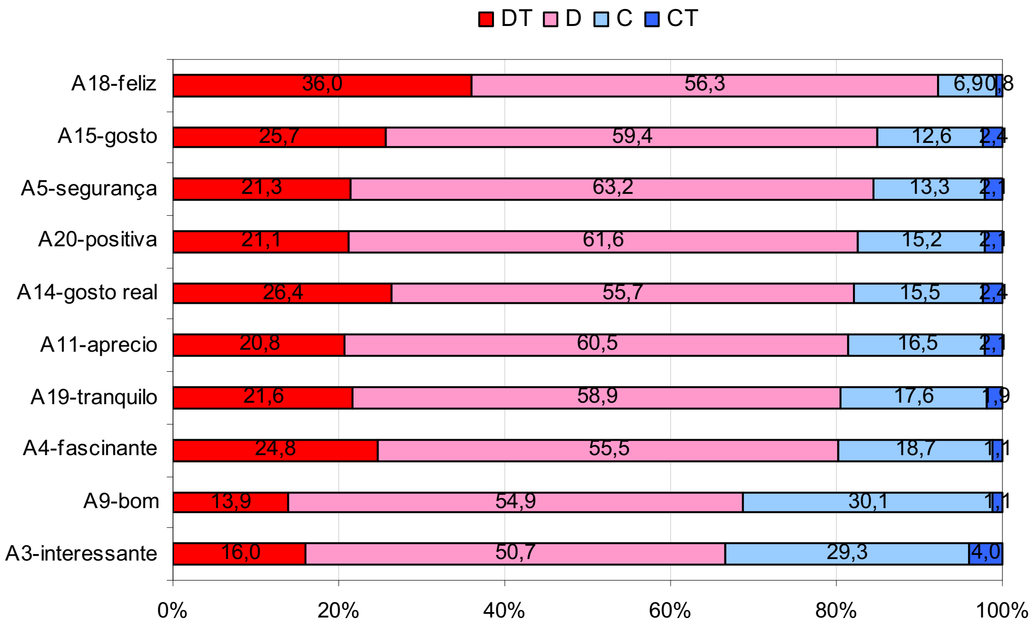


Figura 24 - Distribuição percentual dos sujeitos nas proposições positivas, ordenada de forma decrescente.

A Figura 25 ilustra a distribuição da pontuação na escala, que tende a ser negativa. A pontuação média foi de 44,6, com desvio padrão de 10,5 pontos. Tomando como referência o ponto médio de 50, verifica-se que esse grupo mostra atitudes mais negativas do que positivas.

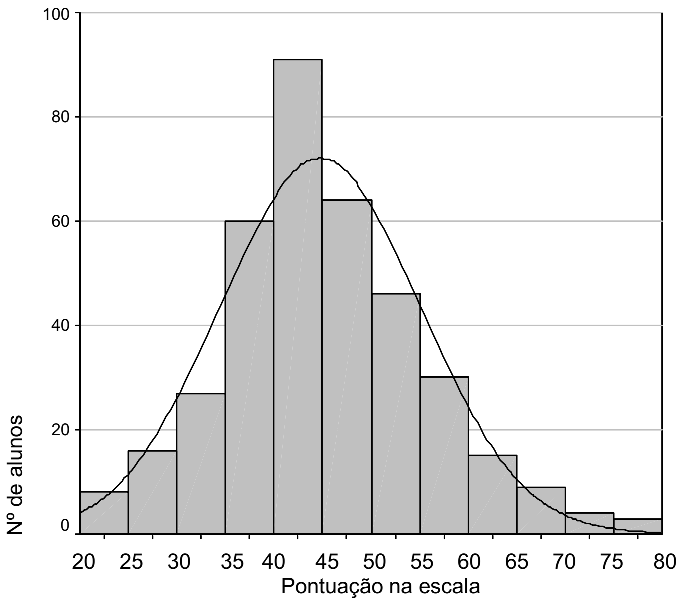


Figura 25 - Distribuição da pontuação na escala de atitudes em relação à fração.

Na proposição 21, “Não tenho um bom desempenho para solucionar problemas sobre frações”, a maioria dos participantes indicou que os seus desempenhos não são bons. A figura 26 ilustra a porcentagem de cada grupo (Concordo totalmente, Concordo, Discordo, Discordo totalmente), de acordo com a autopercepção dos sujeitos quanto ao próprio desempenho.

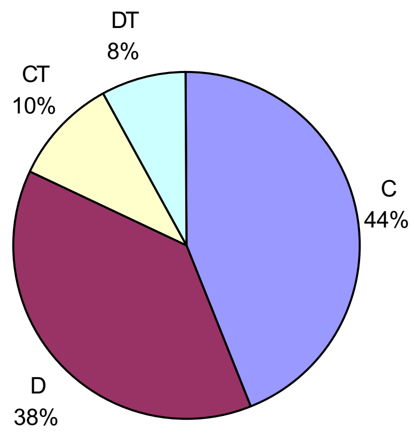


Figura 26- Distribuição dos sujeitos segundo autopercepção de desempenho.

As atitudes estão intimamente relacionadas com a autopercepção de desempenho, isto é, alunos que se percebem com bom desempenho apresentam atitudes mais positivas, como mostram os resultados da análise de variância ($F(3,368) = 81,369$; $p = 000$). Além disso, todos os quatro grupos apresentam médias diferentes, de acordo com o teste de comparações múltiplas de Duncan, conforme Tabela 22 e Figura 27.

Tabela 22 - Estatísticas da pontuação da escala em relação à autopercepção.

	Categoria	Nº de alunos	Média (*)
1	DT	38	32,4 a
2	D	164	41,1 b
3	C	140	50,0 c
4	CT	30	56,2 d

(*) médias com letras iguais não diferem segundo o teste de Duncan.

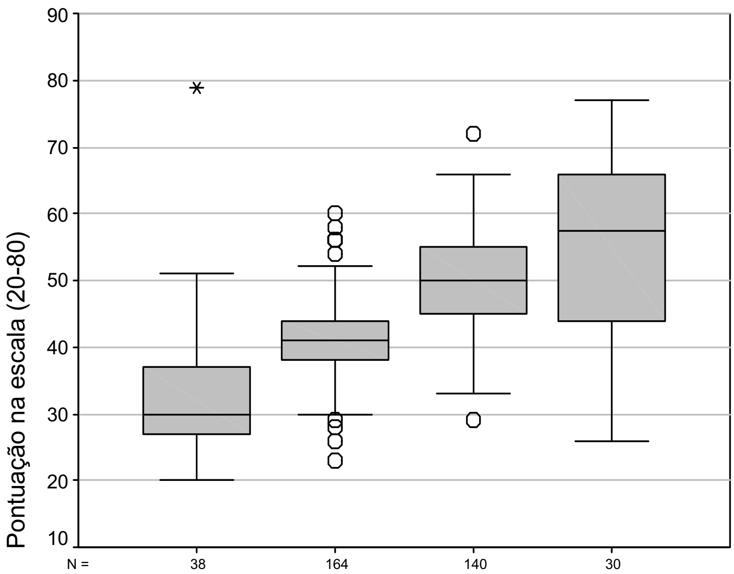


Figura 27 - Atitudes em relação a frações, segundo autopercepção de desempenho.

5.6 Algumas correlações entre desempenho, série, gênero e atitudes em relação à Matemática

5.6.1 Atitudes em relação à Matemática

A pontuação na escala de atitudes variou de 22 a 78 pontos, com uma média de 49,51 e desvio padrão de 14,48 pontos, numa escala de 20 a 80 pontos. A afirmação 21, "Não tenho um bom desempenho em Matemática", foi analisada separadamente e pretendeu avaliar a percepção do participante sobre seu desempenho em Matemática.

Como pode ser observado na Figura 28, trata-se de uma distribuição bimodal, pois um grupo não gosta muito (pontuação menor que 50) e outro gosta mais (pontuação acima de 50).

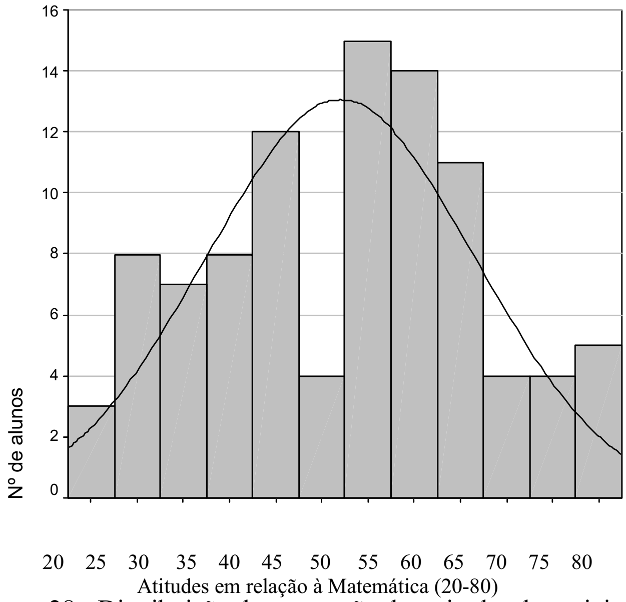


Figura 28 - Distribuição da pontuação das atitudes dos sujeitos.

A Tabela 23 apresenta as médias e desvio padrão das atitudes em relação à Matemática por série e gênero. As Figuras 29 e 30 ilustram as relações entre as atitudes/ série/ gênero e desempenho/série/gênero. Para verificar as diferenças significativas entre as diversas variáveis envolvidas, neste momento, foi aplicado o teste F (Análise de Variância)[21]. Quanto ao nível médio das atitudes por série, foi encontrada diferença significativa ($F(2,89) = 7,938$; $p = 0,001$), mas não por gênero ($F(1,89) = 0,429$; $p = 0,514$), embora pareça haver uma ligeira interação entre série e gênero ($F(2,89) = 2,954$; $p = 0,057$). Destaca-se que o nível de significância utilizado em toda a análise foi $\alpha = 0,05$.

Observa-se que, em média, os alunos da 3ª série gostam menos de Matemática do que os alunos da 1ª e 2ª série e que as meninas na 1ª série gostam mais de matemática do que as alunas da 3ª série.

Tabela 23 - Estatísticas das atitudes em relação à Matemática. (continua)

Série	Gênero	N	Média	Desvio padrão
1ª série	Masculino	17	49,12	13,44
	Feminino	15	56,80	15,40
	Total	32	52,72	14,68
2ª série	Masculino	18	55,44	11,42
	Feminino	19	50,05	10,12
	Total	37	52,68	10,97

21 A análise de variância (ANOVA) é um método para testar a igualdade de três ou mais médias populacionais, baseado na análise de variâncias amostrais (TRIOLA, 1999 apud DOBARRO, 2007).

Tabela 23 (continuação) - Estatísticas das atitudes em relação à Matemática

Série	Gênero	N	Média	Desvio padrão
3ª série	Masculino	15	44,33	16,58
	Feminino	11	36,55	13,74
	Total	26	41,04	15,65
Total	Masculino	50	49,96	14,28
	Feminino	45	49,00	14,84
	Total	95	49,51	14,48

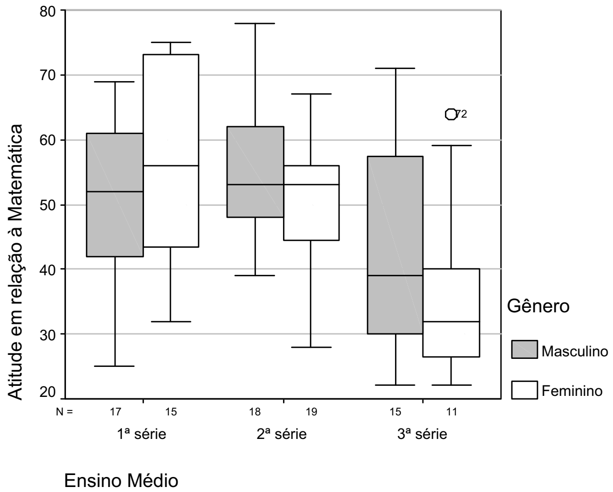


Figura 29 - Atitudes em relação à Matemática por série e gênero.

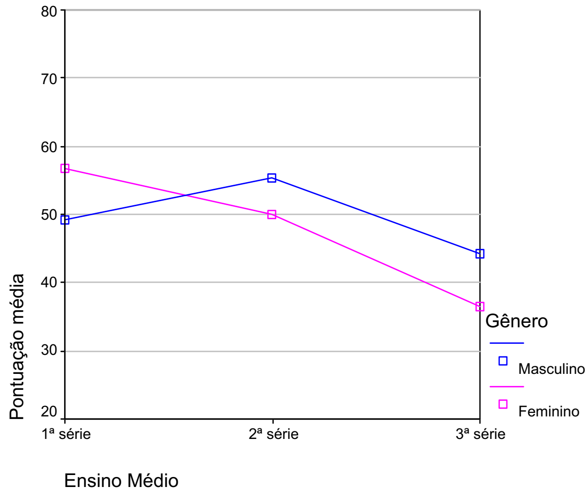


Figura 30 - Média das atitudes em relação à Matemática por série e gênero.

5.6.2 Desempenho na prova de Matemática

A nota foi composta pela média simples de duas notas: a nota nas questões do algoritmo e as notas nos problemas, ambas numa escala de zero a dez.

A nota na prova variou de 0 a 9,5 pontos; sendo que a média foi de 3,58 e o desvio padrão de 2,65 pontos, numa escala de 0 a 10 pontos. Como pode ser observado na Figura 31, trata-se de uma distribuição muito assimétrica, concentrada nas menores notas, havendo uma grande concentração abaixo da nota cinco.

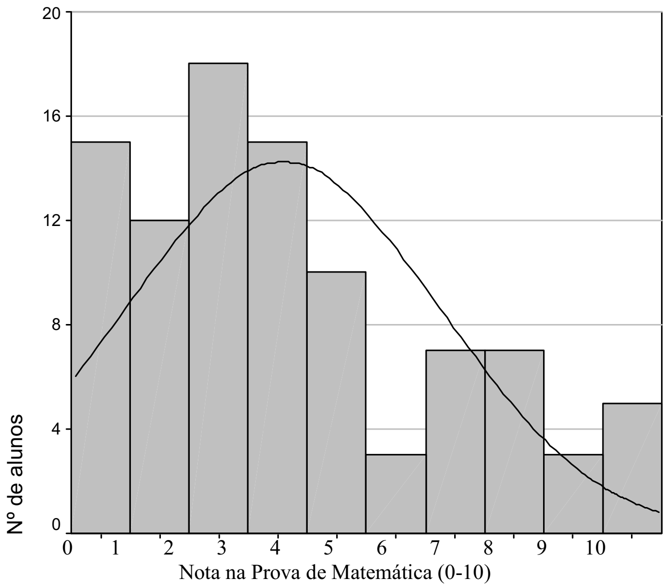


Figura 31 - Distribuição da nota na Prova de Matemática.

A Tabela 24 apresenta as médias e desvio padrão das notas na prova de Matemática por série e sexo, e as Figuras 32 e 33 mostram claramente essas variáveis. Quanto ao nível médio da nota por série, foi encontrada diferença significativa ($F(2,89) = 15,554$; $p = 0,000$), ligeiramente por gênero ($F(1,89) = 3,745$; $p = 0,056$), não havendo indícios de interação entre série e gênero ($F(2,89) = 1,698$; $p = 0,189$).

Observa-se que, em média, os alunos da 3ª série se saíram melhor que os alunos da 1ª e 2ª série e que o desempenho dos meninos avança ligeiramente mais do que o das meninas.

Tabela 24 - Estatísticas da nota na prova de Matemática

Série	Gênero	N	Média	Desvio padrão
1ª série	Masculino	17	2,1324	2,3000
	Feminino	15	2,2667	2,4302
	Total	32	2,1953	2,3243
2ª série	Masculino	18	3,7222	2,3993
	Feminino	19	2,9342	1,8254
	Total	37	3,3176	2,1316
3ª série	Masculino	15	6,5500	2,1696
	Feminino	11	4,4773	2,4583
	Total	26	5,6731	2,4787
Total	Masculino	50	4,0300	2,8805
	Feminino	45	3,0889	2,3105
	Total	95	3,5842	2,6547

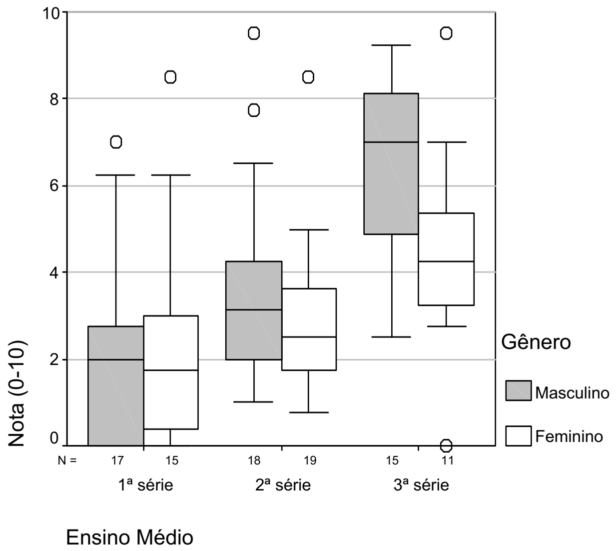


Figura 32 - Desempenho na prova de Matemática por série e gênero.

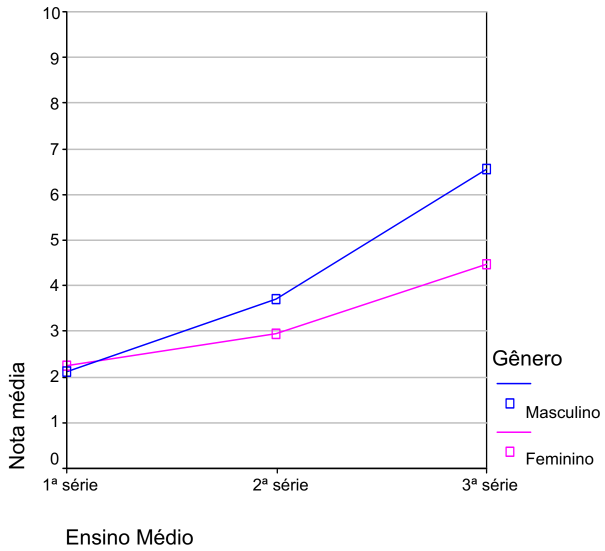


Figura 33- Média no desempenho na Prova Matemática por série e gênero.

Analisando o desempenho nas duas provas, conforme mostra a Tabela 25, observa-se que os alunos apresentaram melhor desempenho na prova de algoritmo (Figura 34) do que na prova contendo os problemas (Figura 35), na qual a maioria dos alunos obteve notas abaixo de cinco.

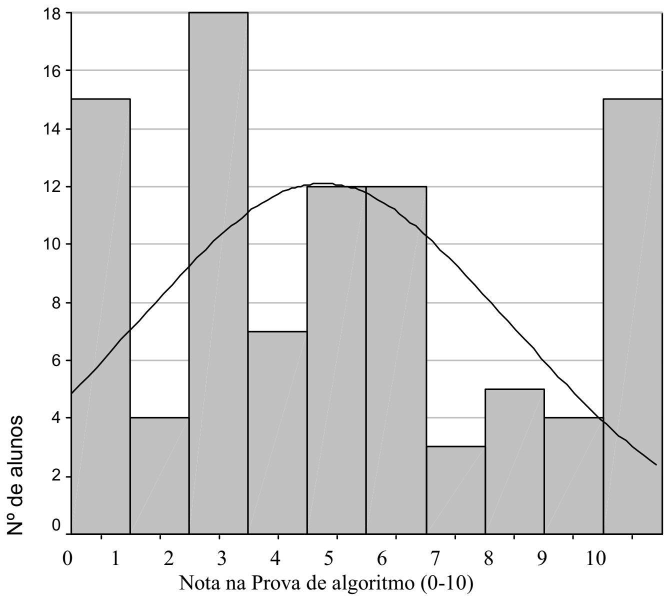


Figura 34 - Nota no desempenho na prova de algoritmo.

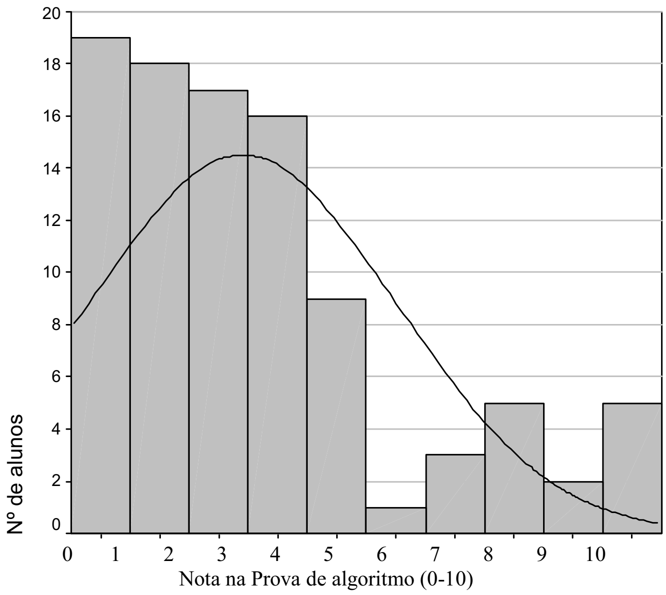


Figura 35 - Nota no desempenho na prova de problemas.

Tabela 25- Estatísticas da nota na prova de Matemática.

Prova	N	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão
Algoritmo	95	0	10	4,2632	3,1249
Problemas	95	0	10	2,9053	2,6060

A análise do desempenho na prova de algoritmo mostra que as diferenças por série (F(2,89) = 27,043; *p* = 0,000) foram significativas, mas não foram encontradas diferenças por gênero (F(1,89) = 0,754; *p* = 0,388), nem interação série e gênero (F(2,89) = 1,816; *p* = 0,169), de acordo com a figura 36.

O desempenho na prova de problemas, além da diferença entre as séries (F(2,89) = 4,428; *p* = 0,015), foi encontrada diferença por gênero (F(1,89) = 7,449; *p* = 0,008), mas não foi encontrada interação (F(2,89) = 1,456; *p* = 0,239), conforme figura 37.

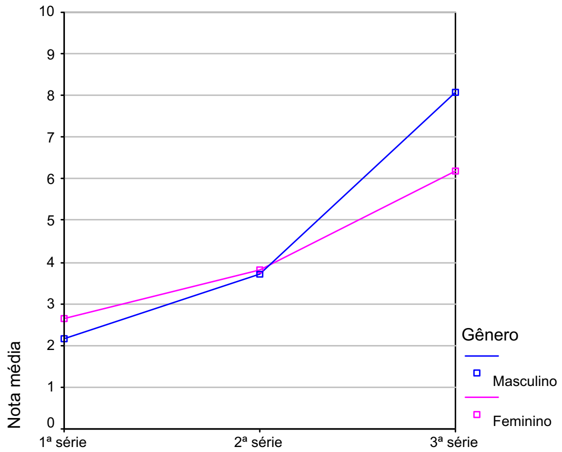


Figura 36 - Nota média na prova com questões de algoritmo, por série e gênero.

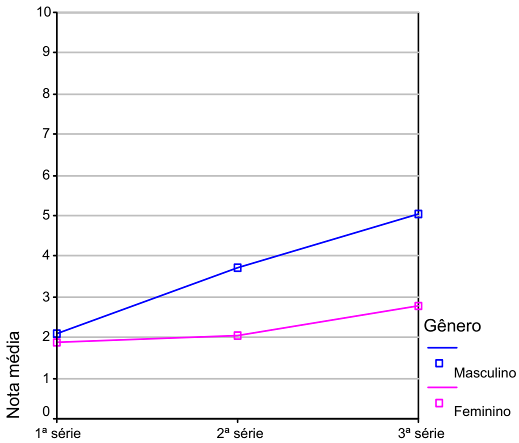


Figura 37 - Nota média na prova de Problemas, por série e gênero.

A Figura 38 ilustra a relação entre as notas nessas provas, de forma conjunta e separada por série. Primeiramente, foram analisadas todas as séries de forma conjunta, e pode-se observar uma relação linear (r (95) = 0,714; p = 0,000). Essa relação, na 1ª série, é ligeiramente mais forte (r (32) = 0,840; p = 0,000), porém se observam dois grupos de alunos, aqueles que têm um baixo desempenho nas duas notas, que é maioria, e cinco alunos que mostram um bom desempenho. Na 2ª série (r (37) = 557; p = 0,000), essa correlação é mais fraca, pois observam-se alunos que tiveram nota baixa na prova do algoritmos e que obtiveram notas razoáveis nos problemas e vice-versa. Já na 3ª série (r (26) = 0,771; p = 0,000), a maioria dos alunos foi bem na prova dos algoritmos, mas variaram muito na nota de problemas.

Utilizando-se a análise de regressão para modelar essas diversas relações, obtem-se equações com um coeficiente de determinação R^2 indica que as pontuações em Y relacionam-se com as variações em X. Assim, por exemplo, a equação que relaciona a nota nos problemas (y) e nota nos algoritmos (y), na 1ª série (Figura 38), é dada por $y = 0{,}7573x + 0{,}1895$ e que cerca de 70% das variações das pontuações na prova de algoritmo, implicam em notas maiores na prova de problemas.

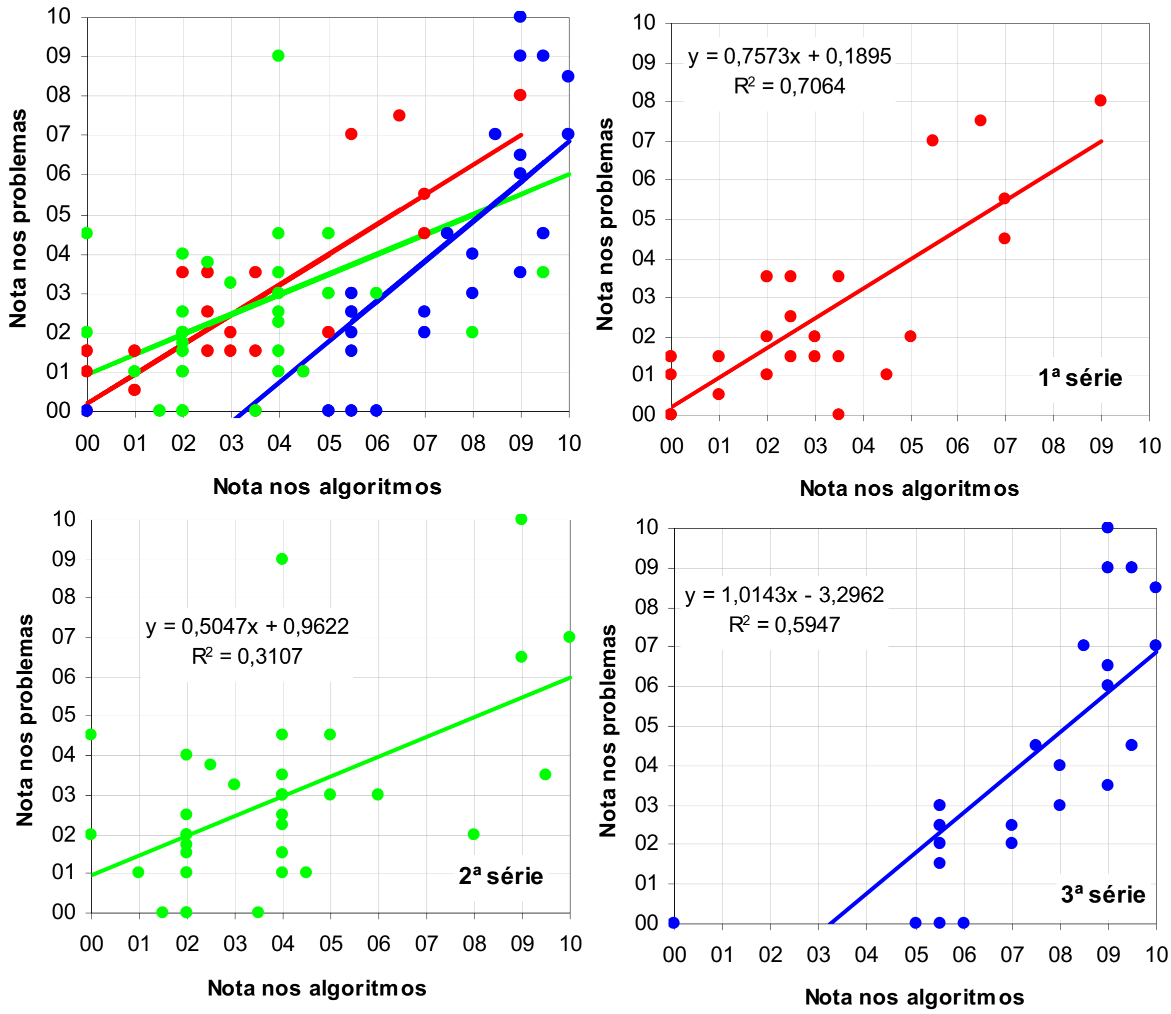


Figura 38- Relação entre as notas em algoritmo e problemas por série.

A Figura 39 mostra que não existem diferenças na relação por gênero, embora os homens tenham um desempenho ligeiramente superior, como já foi visto anteriormente.

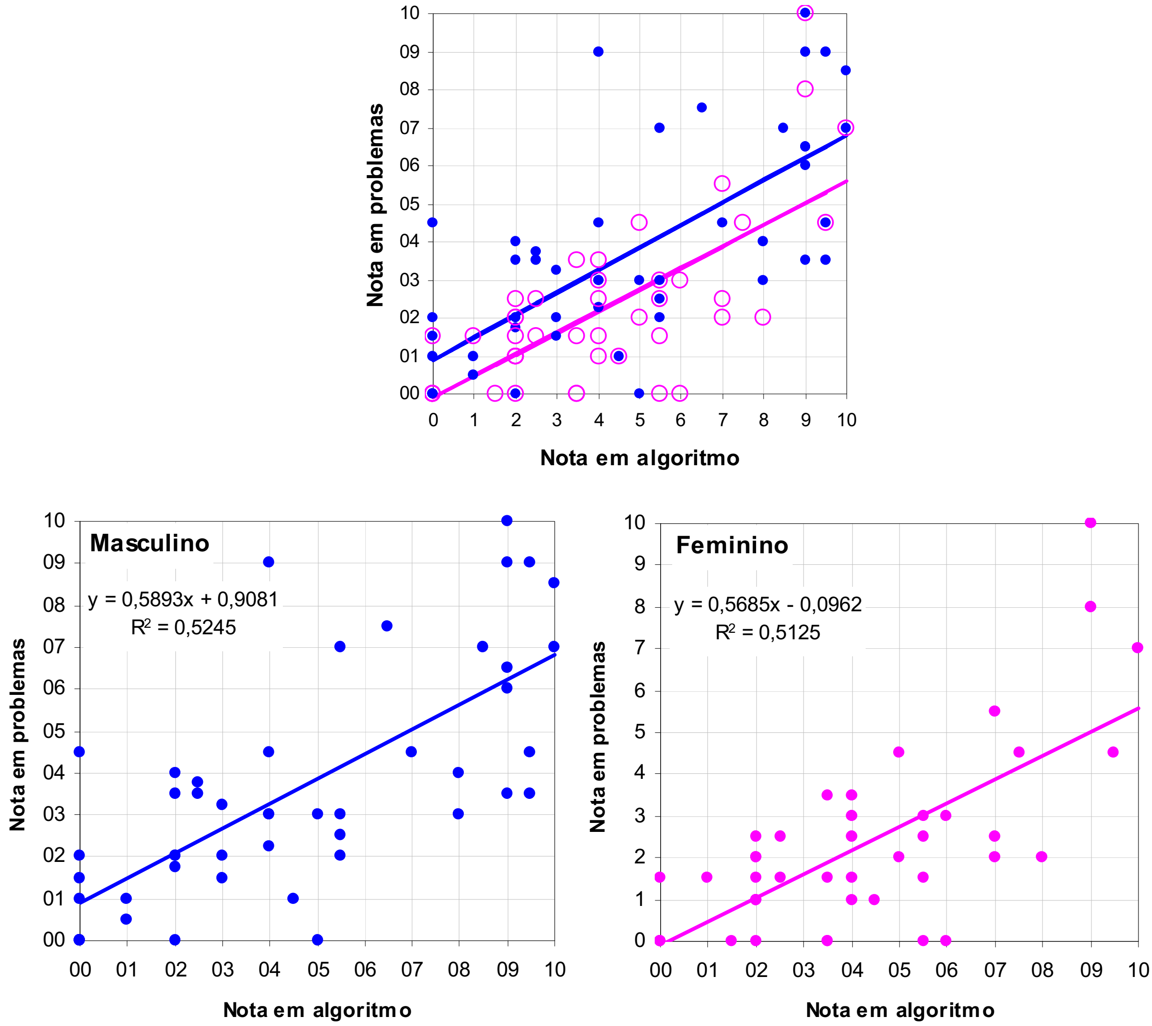


Figura 39 - Relação entre as notas em algoritmo e problemas por gênero.

5.6.3 Relação entre as atitudes e o desempenho na Prova de Matemática

As análises da pontuação na escala de atitudes e na prova de Matemática de forma separada deram indícios de que há uma relação dessas variáveis por série e, mais tenuemente, com gênero.

A correlação geral entre essas variáveis foi muito baixa, embora significativa (r = 0,305; p = 0,003), como mostra a Figura 39. Contudo, ao se analisar essa correlação por série, observa-se uma correlação mais forte. Na 1ª série (nuvem de pontos vermelhos), essa correlação foi de 0,598 (p = 0,000). Na 2ª série (nuvem de pontos verdes), a correlação foi de 0,594 (p = 0,000); e, na 3ª série (nuvem de pontos azuis), a correlação foi de 0,620 (p = 0,000).

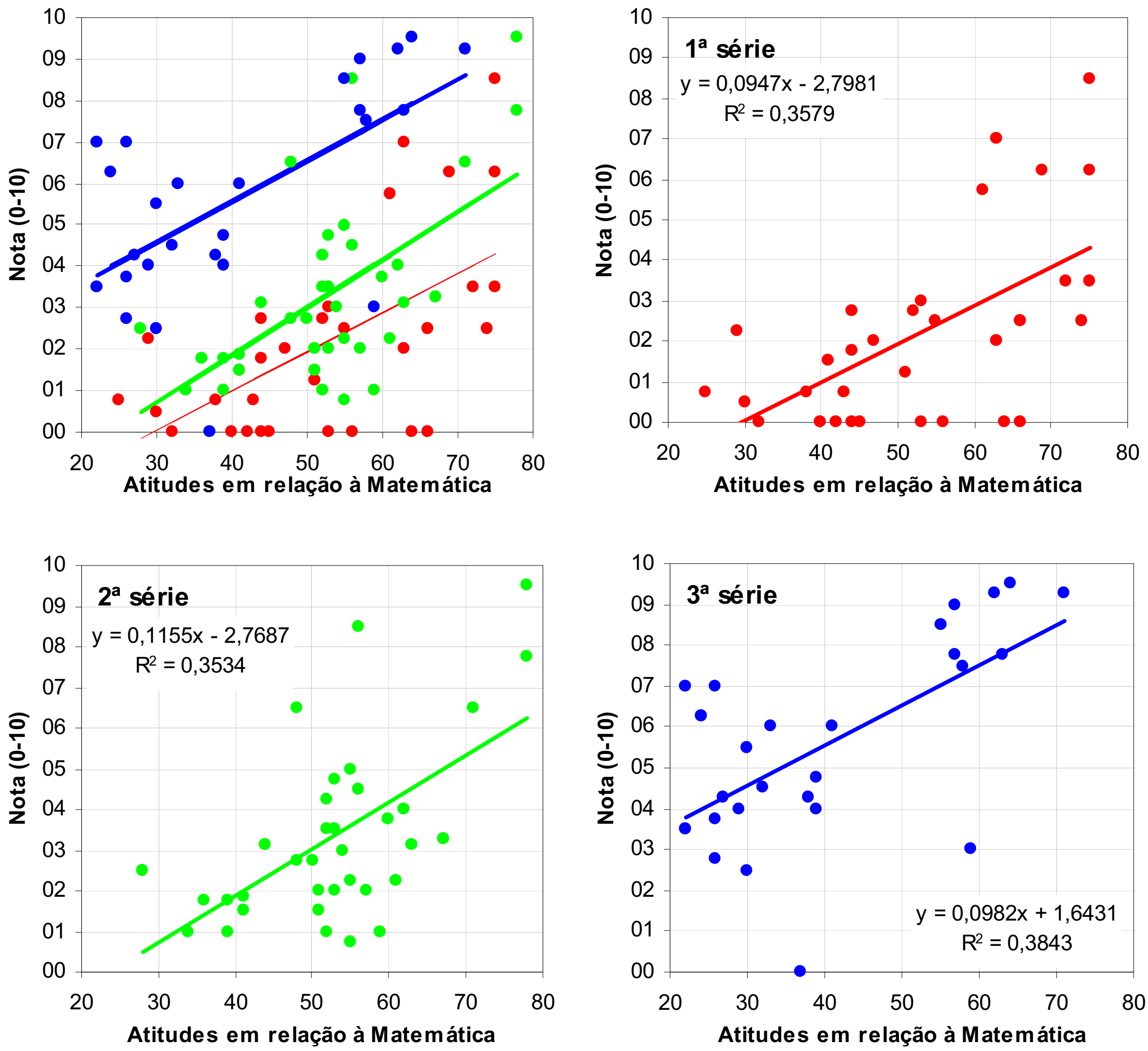


Figura 40 - Relação entre as atitudes e desempenho na prova, por série.

Ao se analisar essa correlação por gênero, Figura 41, não se observa uma tendência clara entre essas variáveis, a correlação para o gênero masculino foi muito baixa (r(50)=0,356; p = 0,011) e para o gênero feminino menor ainda (r(45) = 0,240; p = 0,112).

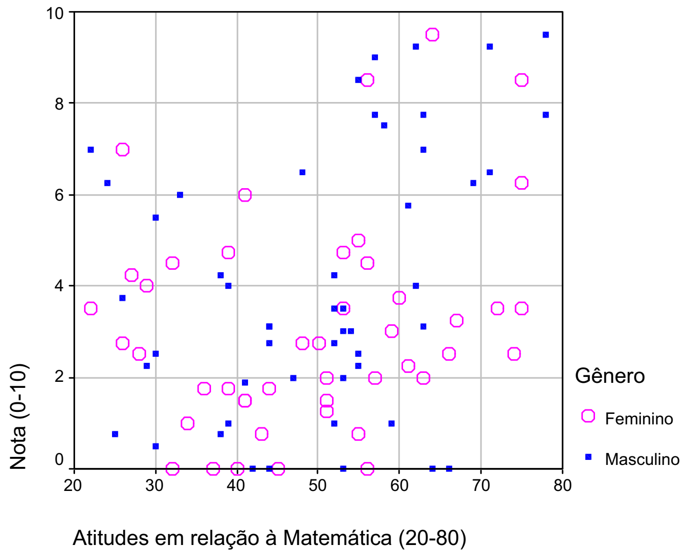


Figura 41 - Relação entre as atitudes e desempenho na prova, por gênero.

Contudo, quando se analisa a relação dessas duas variáveis por gênero, dentro de cada série, pode-se observar uma tendência mais clara, pois, na primeira série, as mulheres tendem a ter uma atitude mais positiva, porém um desempenho inferior (Figura 42). A equação obtida por meio da análise de regressão para os sujeitos do gênero feminino está situada no canto inferior direito de cada figura, a outra equação representa o gênero masculino.

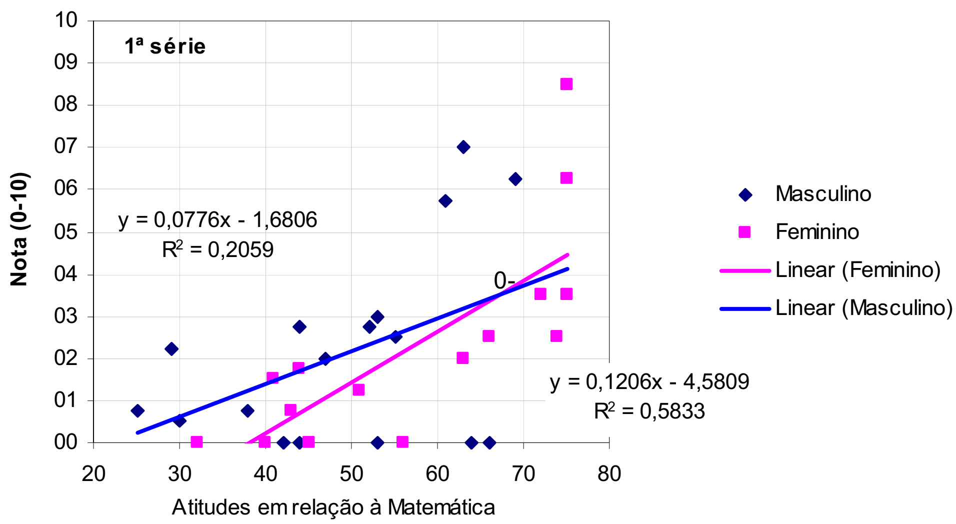


Figura 42 - Relação entre as atitudes e desempenho na prova, na 1ª série, por gênero.

Na segunda série, não há uma tendência clara para os dois gêneros (Figura 43), e, na terceira série (Figura 44), observam-se dois grupos bem diferenciados, os que gostam de Matemática e vão bem nas provas e os que não gostam tanto e vão medianamente nas provas, sendo que três mulheres fogem do padrão.

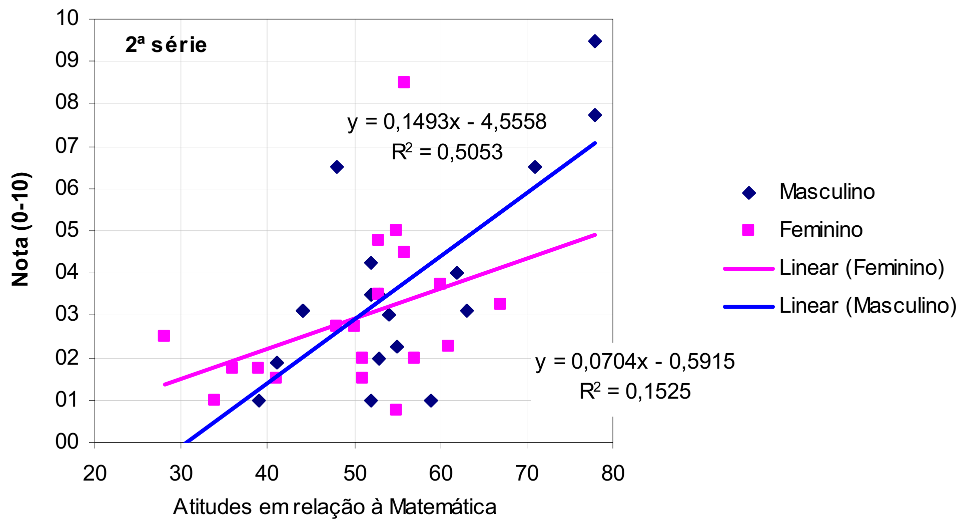


Figura 43 - Relação entre as atitudes e desempenho na prova, na 2ª série, por gênero.

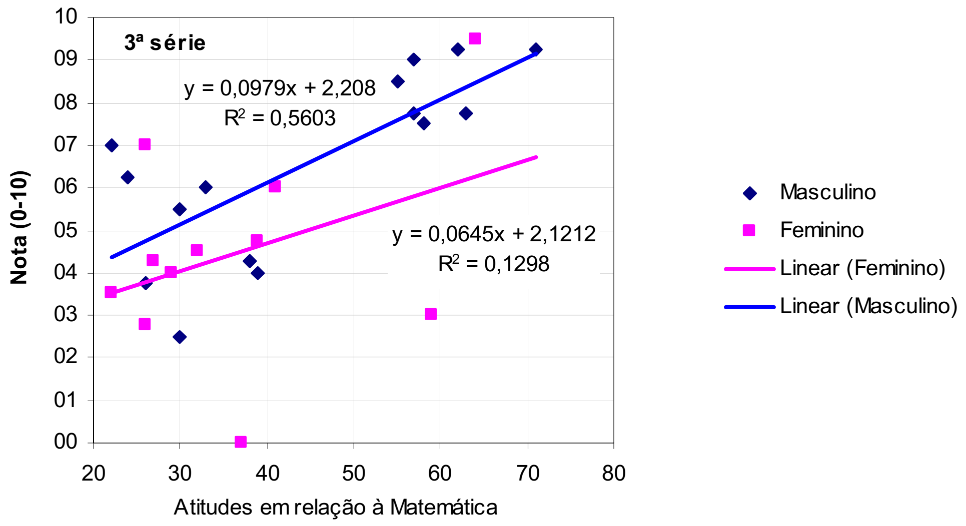


Figura 44 - Relação entre as atitudes e desempenho na prova, na 3ª série, por gênero.

Em suma, pode-se concluir que o desempenho na prova está mais correlacionado com o desempenho na prova de algoritmos do que na solução de problemas; que o desempenho melhora segundo a série, principalmente, na terceira série, e que a média das atitudes em relação à Matemática diminuem conforme a série, sendo que entre as meninas essa diminuição é mais acentuada.

5.6.4 Análise das escalas de atitudes

A pontuação na escala de atitudes em relação à Matemática teve uma média de 49,51 (DP = 14,48), maior que a pontuação média da escala de frações, cuja média foi de 45,26 (DP = 9,52), conforme Tabela 26. A Figura 45 ilustra a distribuição da pontuação nas duas escalas.

Tabela 26 - Estatísticas da pontuação das escalas de atitudes

Escala	Número de sujeitos	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo
atemática	95	49,51	14,48	22	78
Frações	94	45,26	9,52	26	74

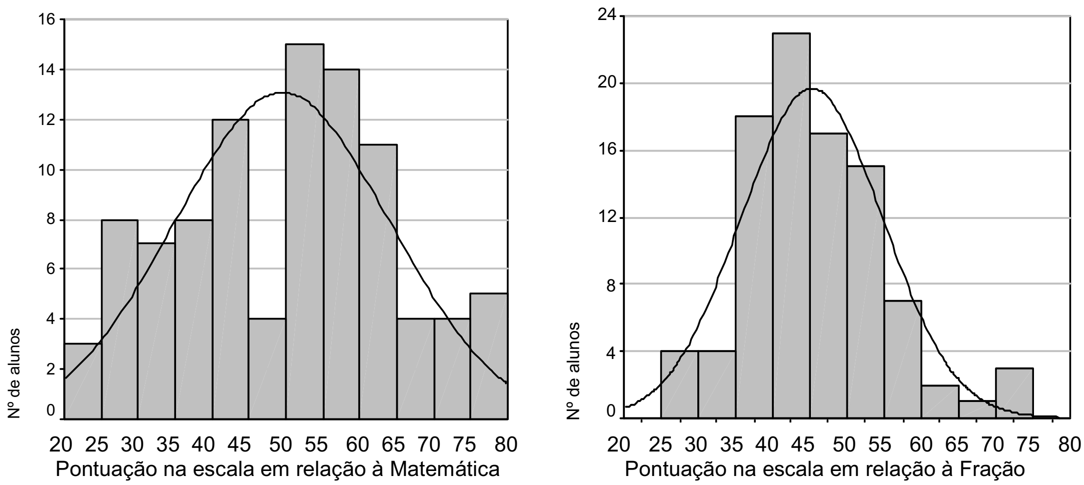


Figura 45 - Distribuição da pontuação nas duas escalas.

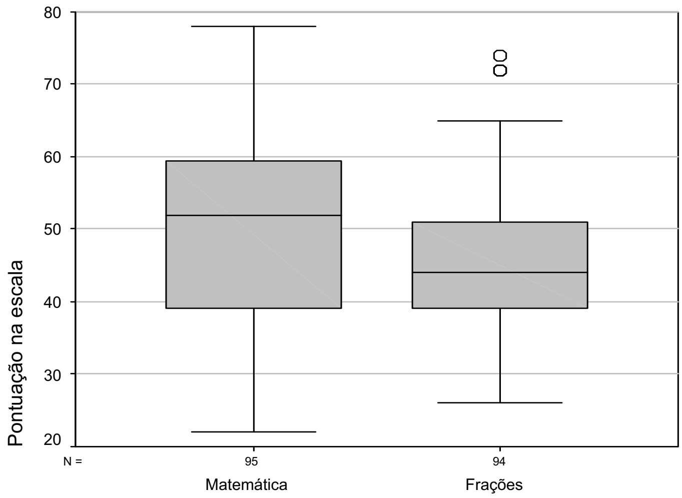


Figura 46 - Distribuição da pontuação nas duas escalas.

Os resultados do teste *t-student*[22] indicam não haver diferença significativa entre os gêneros na pontuação média na escala de atitudes em relação à Matemática ($t(93) = -0{,}321$; $p = 0{,}749$), nem na pontuação média da escala de frações ($t(92) = 0{,}514$; $p = 0{,}514$), como mostram a Tabela 27 e a Figura 47.

Tabela 27 - Estatísticas da pontuação nas escalas de atitudes por gênero

Escala	Gênero	N	Média	Desvio padrão
Escala_Matemática	Feminino	45	49,00	14,84
	Masculino	50	49,96	14,28
Escala_Frações	Feminino	44	44,57	8,48
	Masculino	50	45,86	10,40

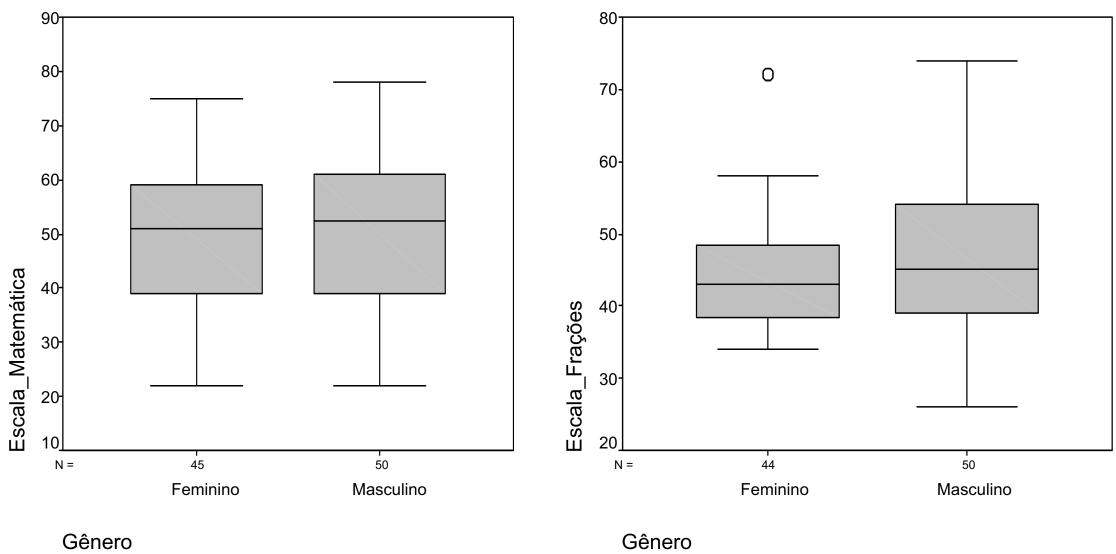


Figura 47 - Distribuição da pontuação nas duas escalas por gênero.

Os resultados do teste *F* indicam haver diferença significativa entre as séries na pontuação média na escala de atitudes em relação à Matemática ($F(2{,}91) = 6{,}630$; $p = 0{,}002$), mas não na pontuação média da escala de frações ($F(2{,}91) = 2{,}205$; $p = 0{,}116$), como mostra a Tabela 28. A Figura 48 ilustra simultaneamente a interferência da série e o gênero na pontuação na escala de atitudes em relação à Matemática, e a Figura 49 em relação a Frações.

[22] O teste t-student foi utilizado para variáveis com duas categorias, como é o caso do gênero.

Tabela 28 - Estatísticas da pontuação nas escalas de atitudes por série.

Série	Nº de sujeitos	Escala em relação à Matemática		Escala em relação a Frações	
		Média (*)	Desvio padrão	Média (*)	Desvio padrão
1ª	31	52,00 a	14,34	43,97 a	10,68
2ª	37	52,68 a	10,97	47,76 a	7,69
3ª	26	41,04 b	15,65	43,23 a	9,98
Total	94	49,23	14,31	45,26	9,52

(*) médias com letras iguais não diferem estatisticamente, segundo o teste de comparações múltiplas de Duncan.

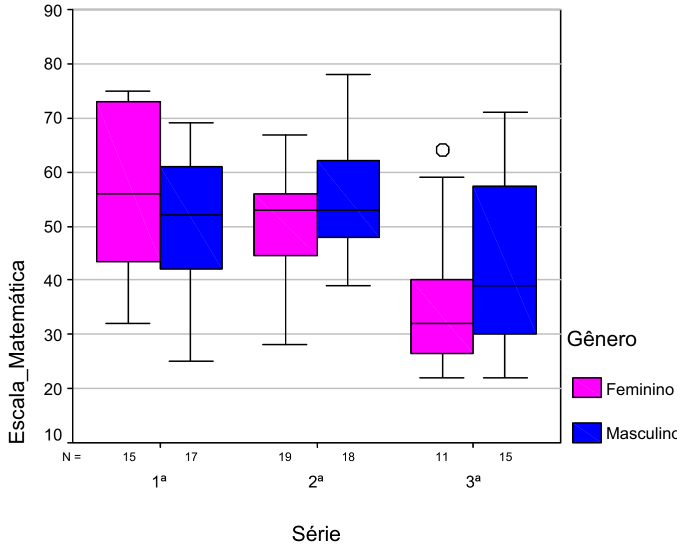


Figura 48 - Distribuição da pontuação na escala em relação à Matemática por série e gênero.

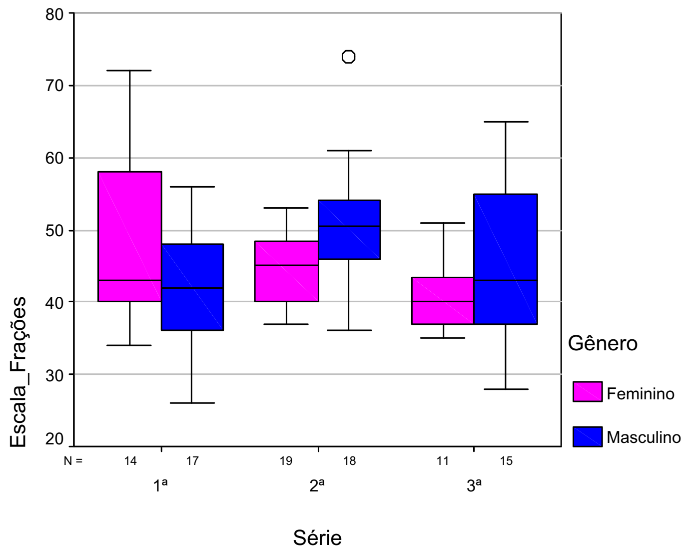


Figura 49 - Distribuição da pontuação na escala em relação a Frações por série e gênero.

As duas pontuações se correlacionam de forma positiva ($r(94) = 0,678$; $p = 0,000$) e, como se pode observar na Figura 50, não há uma diferenciação clara por série, havendo uma ligeira tendência dos alunos da 3ª série de se concentrarem nos menores valores. A reta ajustada ($y = 0,4508x + 23,061$) tem um coeficiente de determinação de 45,91% (R^2 = 0,4591), o que é relativamente pouco. Isso é explicado devido a grande variabilidade na pontuação das escalas (dispersão da nuvem de pontos).

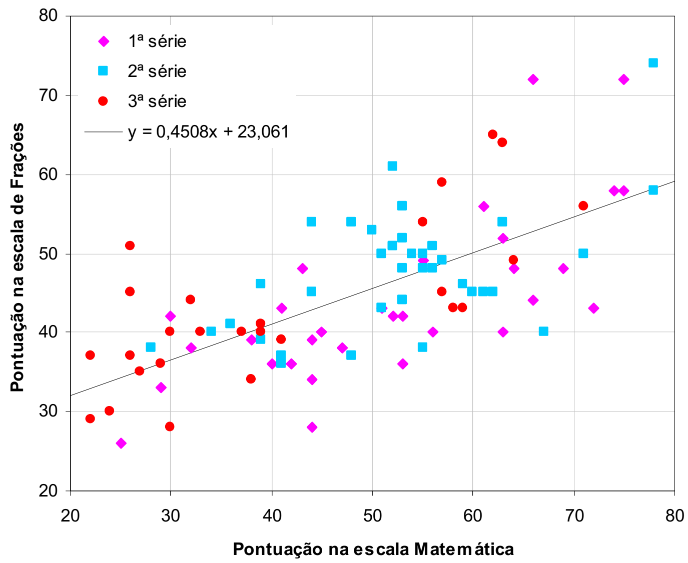


Figura 50 - Relação entre a pontuação das escalas.

A Tabela 29 mostra a correlação entre as pontuações nas escalas e nas notas na prova de desempenho. Pode-se ver, como se esperava, que existe correlação entre as duas escalas e entre as notas (células coloridas em azul). Já a correlação entre as notas e as escalas é mais fraca; a maior delas se deu entre a pontuação na escala de frações e a nota em problemas ($r(94) = 0,532$; $p = 0,000$), visível na célula da tabela colorida em rosa; em menor grau, entre a pontuação na escala de frações e a nota média ($r(94) = 0,421$; $p = 0,000$) e entre a escala matemática e a nota em problemas ($r(94) = 0,435$; $p = 0,000$), expressa pelas células coloridas em amarelo.

Tabela 29 - Matriz de correlação entre a pontuação nas escalas e as notas.

Variáveis	Estatísticas	Escala Matemática	Escala Frações	Nota Algoritmo	Nota Problemas	Nota Média
Escala_Matemática	R	1,000	0,678	0,154	0,435	0,305
	P		0,000	0,135	0,000	0,003
	N		94	95	95	95
Escala_Frações	R		1,000	0,271	0,532	0,421
	P			0,008	0,000	0,000
	N			94	94	94
Nota_Algoritmo	R			1,000	0,714	0,939
	P				0,000	0,000
	N				95	95
Nota_Problemas	R				1,000	0,911
	P					0,000
	N					95

5.7 Pensando em voz alta

Nesta fase da pesquisa, conforme descrito na metodologia, foram selecionados cinco sujeitos para realizarem novamente as três provas de matemática. Os participantes relataram como pensaram e quais procedimentos utilizaram em cada questão. O pesquisador, quando necessário, interveio por meio de novos questionamentos para que o aluno esclarecesse sua forma de pensar.

O primeiro participante da metodologia do "pensar em voz alta" (S_1), do gênero feminino, cursava a 1ª série do Ensino Médio. O desempenho dessa estudante nas provas foi inferior à média geral, tanto nos problemas como nos exercícios de algoritmo. A nota nos problemas foi 1,5 e nos exercícios foi 3,5. A aluna apresentou atitudes muito positivas na escala de atitudes em relação à Matemática (74 pontos) e chegou a 58 na escala de atitudes em relação a frações. O tempo gasto por esse sujeito para realizar as provas na presença da pesquisadora foi de aproximadamente 53 minutos, o maior em comparação com os demais sujeitos.

O sujeito 2 (S_2), do gênero masculino, era da 2ª série do Ensino Médio. As notas do aluno eram inferiores à média geral, sendo 2 na prova de problemas e 2 na prova de exercícios de algoritmo. Na escala de atitudes em relação a frações, o estudante obteve 56 pontos e na escala de atitudes em relação à Matemática, 53 pontos. A duração da realização da prova com a pesquisadora foi de cerca de 39 minutos.

O terceiro sujeito (S_3), do gênero masculino, era do 1º ano do Ensino Médio, da mesma sala do S_1. Esse participante obteve 7 na prova de algoritmo e 4,5 na prova de problemas. Dessa forma, suas notas encontravam-se acima da média geral nas duas provas que foram 4,2632 e 2,9053, respectivamente. Nas escalas de atitudes, o estudante obteve 61 pontos em relação à Matemática e 56 em relação a Frações. O tempo gasto na realização das provas foi de 34 minutos, aproximadamente.

O sujeito 4 (S_4) pertencente ao gênero feminino, encontrava-se no 3º ano do Ensino Médio. A aluno obteve 10 e 9 nas provas de algoritmo e de problemas, respectivamente. As atitudes em relação à Matemática (64) indicaram uma tendência positiva, bem como em relação a frações (49), cuja média geral foi 45, 26 e a média do gênero feminino 44,57 pontos. A duração da realização das provas por meio do "pensar em voz alta" foi de 30 minutos e 12 segundos.

O último sujeito selecionado para participar desta fase da pesquisa (S_5) era do 2º ano do Ensino Médio, da mesma sala do S_2 e do gênero masculino. Ao contrário de S_4, o aluno obteve nota 10 na prova de problemas e 9,5 na prova de algoritmo. A média geral desses dois sujeitos, desse modo, foi de 9,5. As atitudes foram as mais positivas em relação aos demais participantes, o aluno obteve 78 pontos na escala de matemática e 74 na escala de frações. O sujeito foi o mais rápido na resolução das provas, gastou 28 minutos e 26 segundos.

5.7.1 Prova de Matemática (algoritmo)

O objetivo dessa prova foi verificar se o sujeito dominava as técnicas operatórias como o MMC e, ainda, se respeitava a ordem das mesmas em expressões numéricas.

Nas questões **a** ($\frac{4}{9}+\frac{1}{9}$), **b** ($\frac{3}{10}+\frac{1}{4}$), **c** ($\frac{2}{6}-\frac{1}{6}$) e **d** ($\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$), que envolviam adição e subtração de frações, todos os participantes realizaram as operações corretamente. Abaixo segue um exemplo, a resolução feita por S_4:

S_4: Ah... aqui eu vou conservar o 9 porque é base igual, né... então aí soma em cima... vai dar $\frac{5}{9}$. Daí na segunda eu tirei o MMC entre 10 e 4, que é 20. Aí 20 dividido por 10, 2... vezes 3, 6... 20 dividido por 4 dá 5... vezes 1... igual a $\frac{11}{20}$

Na C conserva o 6 também e subtrai... vai dar $\frac{1}{6}$.

Na D tira o MMC entre 5 e 3 que é 15... 15 dividido por 5, 3... vezes 4, 12... 15 por 3 dá 5... vezes 2, 10... vai dar $\frac{2}{15}$.

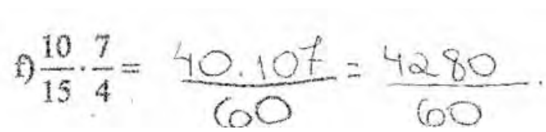
O sujeito 2 apresentou alguns erros nas operações de multiplicação e divisão ao solucionar a questão **b**. Após encontrar o MMC entre 10 e 4, obteve o valor 20. No entanto, ao dividir 20 por 10 (o denominador), forneceu como resposta 1. Ao confrontar as duas provas, a realizada em sala pelo aluno e a que estava sendo descrita por ele, a pesquisadora o questionou sobre o que estaria correto:

S_2: (...) 20 por 10 vai dar 1... vezes 3, 3, mais... vai dar 5 vezes 1, 5. Aí soma o de cima... $\frac{9}{20}$.

(...)
P: 20 por 10, dá 1?
S_2: Daí... não sei divisão.
P: Você não sabe?
S_2: Sei assim... mas não muito assim, de cabeça.
P: 20 dividido por 10, quanto que daria?
S_2: Por 10 (faz a conta...), daria 2?

Na seqüência, o sujeito consegue chegar ao resultado correto, mas comete outros erros semelhantes a esse ao longo da prova.

Nas questões **e** ($\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$) e **f** ($\frac{10}{15} \cdot \frac{7}{4}$), que abordavam multiplicação de frações, o sujeito S_1 equivocou-se na resolução. O procedimento utilizado por ele foi semelhante ao MMC, mas, ao invés de somar ou subtrair os numeradores, ele multiplicou.



Já S_2 realizou corretamente a técnica, multiplicou os numeradores e denominadores, mas fez a operação de multiplicação de modo incorreto.

S_2: Aqui em cima daria 70 e embaixo... ficaria $\frac{70}{70}$

P: $\frac{70}{70}$?

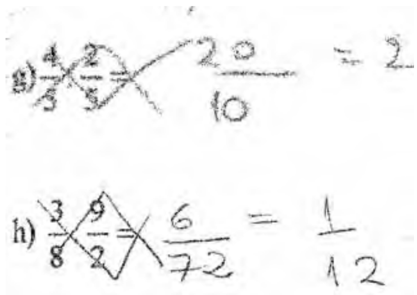
S_2: É... porque 10 vezes 7, 70... 15 vezes 4 eu fiz aqui, deu 70.

Os demais participantes, S_3, S_4 e S_5, realizaram corretamente a multiplicação dos numeradores e denominadores.

Nas letras **g** ($\frac{4}{5} : \frac{2}{5}$) e **h** ($\frac{3}{8} : \frac{9}{2}$), que envolviam divisão, apenas os sujeitos 4 e 5 resolveram corretamente. Os procedimentos utilizados foram diferentes, S_4 inverteu a 2ª fração e multiplicou, enquanto que S_5 afirmou que existem muitas maneiras de resolver.

S_4: Na divisão eu aprendi assim: 4... copia a primeira, aí passa multiplicando e inverte a segunda, aí eu já simplifico aqui o 5 por 5, o 4 pelo 2... vai ser igual a 2.

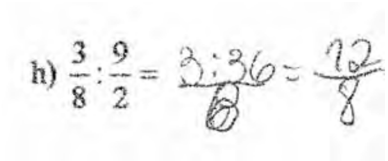
O Sujeito 5 utilizou a “regra do peixinho”:



Os sujeitos 1 e 2 resolveram fatorar os denominadores e realizar o MMC. O participante 1 explicou que estava estudando funções nas aulas de Matemática e, portanto, utilizava com freqüência o MMC. Apesar disso, empregou esse procedimento não apenas na adição e subtração de frações, mas também na divisão e multiplicação, o que fez com que obtivesse valores absurdos em alguns cálculos:

S_1: (...) Aqui (Letra H) vou ter que fatorar de novo. Aqui eu já acho que ta errado!
P: Por quê?
S_1: Então, porque se eu tive que fatorar ... fazer o MMC, eu teria que fazer essa regrinha: dividido e vezes.
P: Tá... você fez isso, não fez?
S_1: Fiz... só que deu uma coisa muito assim, eu acho...
P: Assim como?
S_1: Muito grande!
P: Deu 3 dividido por 36.
S_1: Então... muito grande. Vai dar um número muito pequenininho!

S_2 na questão **h** fatorou os denominadores, em seguida, dividiu "pelo de baixo e multiplicou pelo de cima" e dividiu os dois numeradores obtidos. O resultado não foi simplificado.

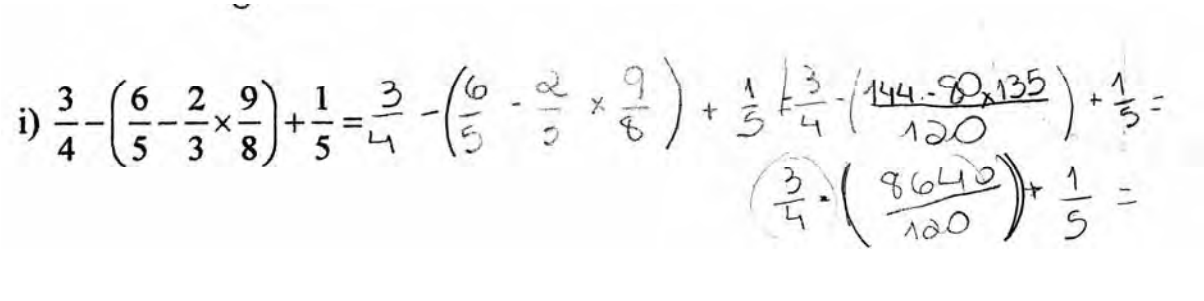


O sujeito 3 realizou a divisão dos numeradores e denominadores. Na letra g, como as frações apresentam o mesmo denominador e seus numeradores são múltiplos, o aluno obteve um resultado correto, utilizando o mesmo procedimento.

S_3: Então... Eu dividi os numeradores e denominadores. Aí 4 dividido por 2, 2. 5 dividido por 5, 1.
P: Certo...
S_3: A questão H eu fiz a mesma coisa... dividi ... Mas esse daqui não dá pra dividir... eu vou tentar dividir o denominador ... só o numerador acho que não ...
P: Quando você dividiu o denominador que valor que você encontrou?
S_3: 4
P: 4! O numerador você acha que não dá pra dividir então?
S_3: Aham
P: Porque aqui você encontrou o valor 3.
S_3: 3? Então acho que eu inverti, eu acho.
P: Você inverteu?
S_3: É... eu fiz 9 dividido por 3

A letra **i** ($\frac{3}{4}-\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}\right)+\frac{1}{5}$) envolvia várias operações de frações. Para solucioná-la corretamente, o sujeito deveria respeitar os parênteses, além da ordem das operações. Todos os participantes resolveram primeiro as operações entre parênteses, mas apenas dois deles obtiveram o resultado correto.

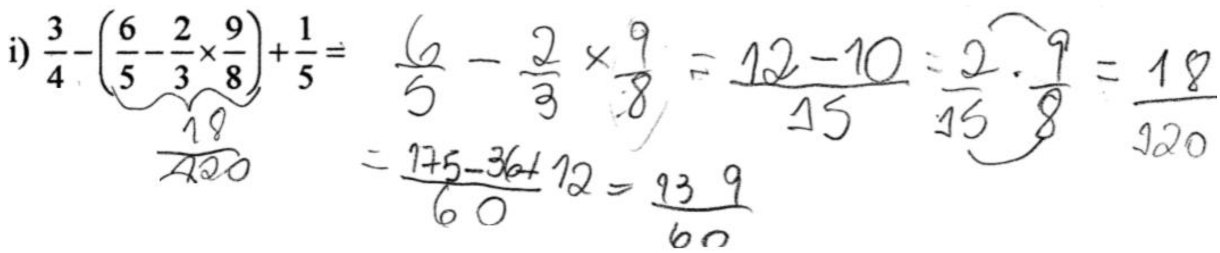
O S_1 respeitou os parênteses, mas não a ordem das operações. A participante tirou o MMC dentro dos parênteses, primeiro subtraiu e depois multiplicou. Ao chegar em um resultado grande, a aluna desistiu do exercício.



S_1: Porque eu fiz... para resolver primeiro entre parênteses 144 menos 80 vezes 35. Agora daqui pra frente eu não saberia fazer...

P: Por quê?
S_1: Porque eu não saberia se deixaria esse resultado aqui entre parênteses e não sei se posso somar... somar porque aqui é menos e aqui é mais... não sei se somo, se faço menos... subtraio...

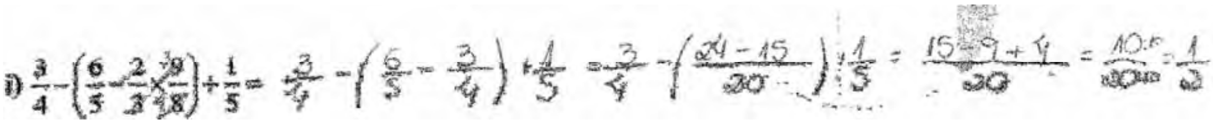
O sujeito 2 respeitou a ordem das operações, mas apresentou alguns erros em operações de divisão e multiplicação. Ao retirar a fração obtida dos parênteses, o aluno não realizou o MMC corretamente e, assim, não chegou ao resultado correto.



De modo semelhante, S_3 também comete um equívoco no sinal de uma das frações, ao retirar os parênteses. O sujeito ainda confundiu equação com expressão matemática, o que foi explicitado em uma de suas falas durante a entrevista.

S_3: Então eu vou tirar o MMC de todos os denominadores. (Calcula o MMC...) Então denominador deu 120. Não... Não... Acho que ta errado! Primeiro eu vou ter que resolver a multiplicação
P: Você vai fazer a multiplicação de quê?
S_3: Dessas duas frações aqui de dentro dos parênteses.
P: Ta... me fala qual que é
S_3: É 2/3 vezes 9/8.
P: Ta... a sua multiplicação então deu quanto?
S_3: É... 18/24.
P: Certo. E agora, o que você vai fazer?
S_3: Agora tem que tirar o MMC de todos para fazer a subtração deles e depois a adição
P: Ta... então você vai fazer o MMC de quê?
S_3: O MMC de 4, 5 e 24 que são os denominadores... (resolve). Aí eu encontrei 120.
Agora eu vou escrever a equação de novo só que com os termos já multiplicados para ficar mais fácil na hora de dividir e multiplicar pelo de cima.
P: Vai me falando o que você está escrevendo.
S_3: Então vai... 3/4 menos 6/5 menos 18/24 mais 1/5. Agora vou dividir pelo de baixo e multiplicar pelo de cima. Aí o primeiro numerador encontrei como 90. O segundo encontrei... não multipliquei ainda ... 144. O terceiro numerador encontrei como 90. Agora eu vou resolver essa conta... 90-144-90+24.
P: Você está somando os positivos, somando os negativos e depois você vai tirar tudo? subtrair?
S_3: Aham ... Então vai dar 300 e... não, pera aí ... vai dar 120 negativo sobre 120? É... acho que é isso!

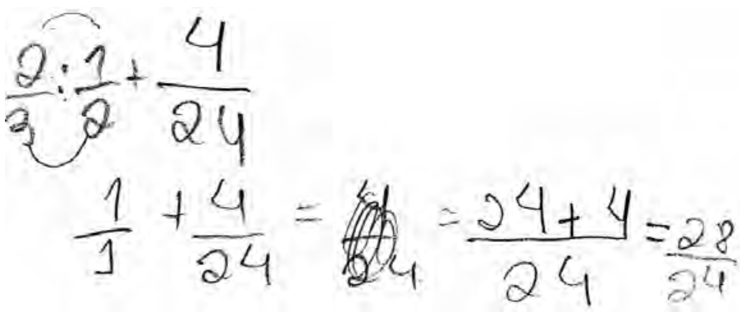
Já S_4 e S_5 respeitaram os parênteses e a ordem das operações, obtiveram o resultado correto e forneceram a resposta em sua forma irredutível (simplificada). A participante 4 não havia realizado corretamente o exercício na prova anterior, mas afirmou que depois que entregou a prova percebeu o erro.



Na letra **j** ($\frac{2}{3}:\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}$), os sujeitos deveriam respeitar a ordem das operações, resolvendo primeiro a divisão e multiplicação de frações e em seguida, a adição. O S_1 além de não respeitar a ordem, não fez as operações corretamente. A participante fatorou o denominador, encontrou o valor de 48 e, no numerador, fez as operações na seqüência em que foram apresentadas (dividiu, adicionou e multiplicou)

S_1: Agora então... eu não sei se eu faço direto aqui em cima sem usar dividido e multiplicado ou se eu faço a regrinha.
(...)
S_1: Eu faria assim então ... $\frac{12}{48}$ ... + 2... 2 dividido por 1, 2... 2 mais 1,3... vezes 4 igual a 12.

O S_2 afirmou que não sabia por onde começar, mas concordou em tentar resolver a letra **j**. Realizou primeiro a multiplicação e divisão, mas na última dividiu numeradores e denominadores, de maneira incorreta.



O S_3 lembrou-se de uma outra forma de realizar a divisão de fração, que ele denominou de Meios e Extremos. Assim, ele colocou $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}$, multiplicou e encontrou como resultado $\frac{4}{3}$.

S_3: Vou fazer a J agora. Primeiro vou fazer essa divisão de frações que é $\frac{2}{3}$ dividido por $\frac{1}{2}$. Aí vai dar ... vou tentar dividir de outra maneira ... vou colocar $\frac{2}{3}$ dividido por $\frac{1}{2}$. Encontrei $\frac{4}{3}$.
P: Certo...
S_3: Agora vou multiplicar por essa outra fração que é $\frac{1}{8}$ vezes $\frac{4}{3}$.
P: Ok... Quanto que deu?
S_3: 4 sobre 24
(...)
S_3: (...) agora eu dividi 24 por 3... aí deu 8 ... 8X4... 32, mais 24 dividido por 4 ... 1. Agora eu vou somar 32 mais 4 ... 36 sobre 24.

O S_4 resolve a divisão, a multiplicação e, depois, faz a adição dos resultados corretamente. Para realizar a divisão transforma em uma multiplicação, utilizando a fração inversa da segunda.

S_4: (...) Então aí... a divisão... copia o $\frac{2}{3}$, multiplica e inverte a segunda... mais... já resolve a multiplicação... 1 vezes 4, 4... 3 vezes 8, 24... aí 2 vezes 2, $\frac{4}{3}$ mais $\frac{4}{24}$ ... faz o MMC... entre 3 e 24, é 24... 24 por 3 dá 8... vezes 4, 32... 24 por 24 dá 1... vezes 4, 4... igual a $\frac{36}{24}$. Simplifica por 12... igual a 3 sobre... $\frac{3}{2}$.

Na prova realizada anteriormente, a participante simplificou as frações que seriam multiplicadas e obteve o resultado pelo mesmo procedimento, mas com cálculos diferentes. Ao simplificar a multiplicação de $\frac{1}{8}$ por $\frac{4}{3}$, obteve $\frac{1}{6}$. Em seguida adicionou $\frac{4}{3}$ com $\frac{1}{6}$, obtendo $\frac{9}{6}$. Ao simplificar esse resultado, apresentou como resposta o mesmo valor: $\frac{3}{2}$.

Já S_5 parece ter se distraído um pouco durante esse exercício, mas, ao ser questionado, percebeu que estava se equivocando em algumas operações e resultados:

S_5: Aqui vai dar 2... vai dar 4 sobre $\frac{4}{3}$ mais $\frac{3}{24}$. Simplificando aqui vai dá pra fazer $\frac{4}{3}$ mais $\frac{1}{8}$.
P: $\frac{3}{24}$?
S_5: $\frac{3}{36}$!
P: É uma multiplicação aí?

S_5: Ah... dá $\frac{4}{24}$. Acho que o MMC é 24 mesmo, porque 24 é múltiplo de 3. Aí vai dá... 8 vezes 4, 32 mais 4 mesmo... vai dar $\frac{36}{24}$, que é igual a $\frac{18}{12}$, que é igual a $\frac{9}{6}$, que é igual a $\frac{2}{3}$.

P: $\frac{2}{3}$?

S_5: $\frac{3}{2}$!

Para melhor visualizar as categorias de análise e a distribuição dos sujeitos em cada uma, foi elaborado o quadro 3:

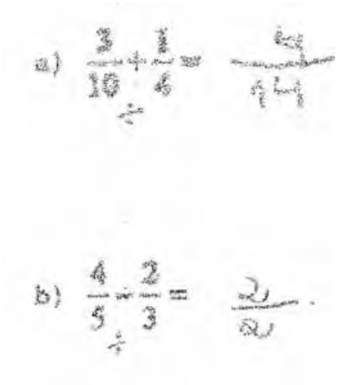
Quadro 3 - Distribuição dos sujeitos nas categorias de análise da Prova Matemática (algoritmo)

Prova Matemática (algoritmo)					
Categorias	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**S_4**	**S_5**
Adição e Subtração					
Utilizou corretamente o MMC;	X	X	X	X	X
Utilizou de forma incorreta o MMC;					
Utilizou de forma parcialmente correta o MMC					
Multiplicação					
Realizou a multiplicação corretamente			X		
Realizou a multiplicação corretamente e simplificou o resultado				X	X
Realizou de forma parcialmente correta a multiplicação		X			
Utilizou o MMC	X				
Utilizou outro procedimento					
Divisão					
Realizou a multiplicação dos meios e extremos					
Utilizou a “regra do peixinho”					X
Inverteu a segunda fração e realizou uma multiplicação				X	
Utilizou o MMC	X	X			
Dividiu numeradores e denominadores			X		
Várias operações					
Respeitou os parênteses, a ordem e realizou as operações corretamente				X	X
Respeitou os parênteses, não respeitou a ordem e não realizou corretamente as operações.	X				
Respeitou os parênteses e a ordem, realizou algumas operações incorretamente.		X	X		
Não respeitou os parênteses e a ordem das operações, mas realizou corretamente as operações.					
Não respeitou os parênteses e a ordem das operações e realizou incorretamente as operações.					

5.7.2 Prova de Matemática (Conceitual e de procedimentos diversos)

Na 2ª parte da prova, os sujeitos receberam a orientação de que não poderiam utilizar, no exercício 1, que envolvia adição e subtração de frações, o recurso do MMC.

O sujeito 1 tentou adicionar/ subtrair as frações somando ou subtraindo numerador por numerador e denominador por denominador. Entretanto, a participante afirmou que esse procedimento não estaria correto, mas que não sabia resolver de outra forma.



O S_2 também encontrou dificuldade para somar e subtrair sem usar o recurso do MMC. Na prova anterior, o aluno havia utilizado desenho para representar as frações, mas durante o "pensar em voz alta" parece ter mudado de ideia quanto ao resultado obtido e à forma de resolução.

S_2: Ali eu fiz pelo desenho, mas não poderia embaixo somar as bases. Do jeito que eu aprendi não poderia, seria por MMC. Mas aí pelo desenho, eu somei. Aí outra forma assim, eu não sei.

O participante tentou uma outra estratégia, mas não tinha certeza de que o que estava realizando pudesse ser feito.

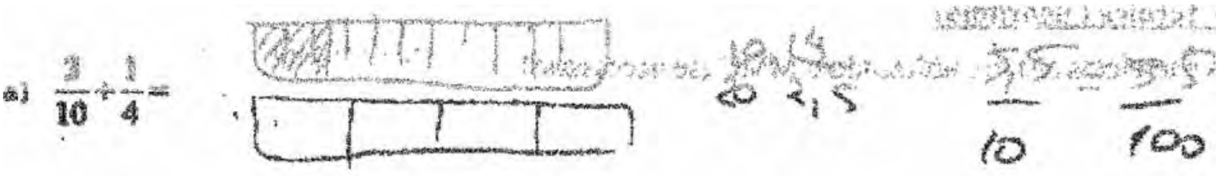
S_2: Porque MMC é uma multiplicação, né... só... se multiplicar esses dois de baixo...
P: Se você multiplicar os dois de baixo, quanto vai dar?
S_2: Dá 40. Mas, aí, e o de cima? Porque aí se fosse multiplicar ficaria 40 embaixo né... e como multiplica embaixo poderia multiplicar em cima também. Iria ficar 3.
P: Aí seria uma multiplicação e não uma soma!

O S_3 utilizou-se do MMC, mas não fatorou os denominadores. Ao ser questionado sobre isso, afirmou que essa era a forma como havia feito.

S_3: Essa daqui eu... pensei na minha cabeça um número que ao mesmo tempo dividia 4 e 10 e fiz direto
P: Poderia ser qualquer número que dividisse 4 e 10?
S_3: É... ao mesmo tempo!
P: Ao mesmo tempo!
S_3: Eu acho que é 20, porque ao mesmo tempo ele divide 4 e 10. Agora eu vou dividir pelo de baixo e multiplicar pelo de cima.
P: Isso não é MMC?
S_3: É... porque esse aí eu fiz desse jeito!

O sujeito 4 indicou algumas formas de resolução, mas afirmou que não havia aprendido de outro jeito e que não sabia fazer.

O sujeito 5 tentou resolver de diversas maneiras. A princípio resolveu de forma semelhante a S_3, mas ao ser questionado se o procedimento não era MMC, o aluno concordou e indicou outras possibilidades.



Uma das formas apresentadas pelo participante é que 4 representa 2 barrinhas e meia da outra de 10, e que a adição daria 5,5 sobre 10 ou 55 sobre 100. O aluno transforma as frações em decimais e obtém o mesmo resultado, mostrando segurança ao trabalhar com elas.

S_5: (...) $\frac{3}{10}$ é igual a 0,3 mais $\frac{1}{4}$ é igual a 0,75... vai dar 0,55 que é $\frac{5}{100}$.

Na questão **2** (Escreva o que você entende por fração e dê exemplos), apenas um dos sujeitos apresentou uma ideia de fração ligada ao significado de razão.

S_1: Fração... eu tenho um todo e eu pego uma parte dele. Se eu vou comer uma pizza... na pizza tem 8 pedaços, eu como dois... eu comi dois pedaços do 8 que era a quantidade inteira de pedaços da pizza.

S_2: Ah... Fração é assim ... você pega um todo e divide ela em partes e pega um tanto das partes dela. Um exemplo é uma barra de chocolate: você divide em 10 pedaços pra 10 crianças e divide certinho pra cada criança (...)

S_3: acho que na minha eu escrevi que a FRAÇÃO é uma RAZÃO.

S_4: (...) tem uma certa coisa... vamos supor: 1 chocolate... aí a fração seria pra indicar o quanto desse chocolate você vai pegar, vamos supor... metade... então seria $\frac{1}{2}$.

S_5: Ah... representa a parte de um todo... ou representa uma divisão de um modo geral... uma parte e outra é mais... uma parte e mais um pouco.

O exercício **3** solicitava que o participante apresentasse a fração correspondente às figuras apresentadas. Na letra **a**, tratava-se de uma região oval dividida em partes desiguais. Os participantes deveriam analisar a questão da impossibilidade de resolução.

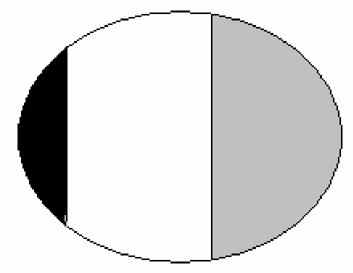


Figura 17 - Exercício 3, letra a.

S_1 resolveu esse exercício de maneiras distintas nas duas provas. Na primeira, tratou a quantidade como discreta e, na segunda, como sendo algo contínuo.

S_1: Porque esse pedacinho aqui, se eu pudesse... porque não tá repartido no meio isso aqui... se eu pudesse colocar ele aqui, daria pelo tamanho, porque ele é menorzinho e mais gordinho... então eu colocaria ele aqui, nesse espaço aqui.
P: E mesmo que não seja repartido no meio, eu posso fazer isso normal.
S_1: Acho que pode.
P: É porque aqui... a sua resposta foi $\frac{2}{3}$.
S_1: É... porque eu contei 2 que estavam pintados, sobre 3 que estavam repartidos.

P: E o que você acha que fica mais certo aí?
S_1: Ah... eu acho que é esse aqui $\left(\frac{1}{2}\right)$

O sujeito 2 pensou através de porcentagem. Considerou o total da figura como 100% , mas não soube como indicar as partes hachuradas.

S_2: (...) o círculo aqui seria 100% da figura... eu teria que saber quanto vale cada parte... 50% mais ou menos aqui...
P: É... aqui você nem tentou fazer!
S_2: Poderia ser embaixo 100, total da bola, mas em cima eu não saberia pôr... ta dividido em 3 partes, mas não em três partes iguais!
P: E não pode fazer uma soma de fração assim, se as partes não forem iguais?
S_2: É... teria que saber quanto vale cada pedaço. E olhando assim eu não sei quanto vale!

O S_3 baseou-se na relação parte-todo para interpretar a figura e também não se preocupou com o tamanho das partes, que deveriam ser *iguais*. “Então seria $\frac{2}{3}$, porque ele dividiu em 3 e pegou 2”.

O sujeito 4 concluiu que o exercício não era possível de ser solucionado, já que as partes não eram divididas igualmente.

S_4: Ah, na minha visão, assim, não dá pra resolver! Eu não sei, né! Porque eu acho que tipo assim... né... tem que estar dividido em partes iguais... certinho... pra você poder saber quanto que... que nem nessa daqui... essa aqui tá dividido em partes iguais...

Já S_5 não reconheceu que as partes deveriam ser iguais para que fosse possível representar uma fração. Ao ser questionado, afirmou que não sabia calcular a área da elipse, mas que se fosse um círculo tentaria resolver através do setor circular.

S_5: $\frac{1}{2}$ né... por exemplo, metade é aqui mais ou menos... tem já quase metade, aí falta um pouquinho, que com esse aqui completaria.... eu pensei nisso!
P: Mesmo que as partes aí não são iguais... você acha que poderia juntar as duas e dar uma parte inteira...?
S_5: É... eu acho meio difícil dar certinho $\frac{1}{2}$, mas como eu tinha ... para colocar uma fração, eu coloquei $\frac{1}{2}$.
P: Mas e se às vezes não dá, não tem essa opção?
S_5: É... eu acho que é impossível na verdade.

Na letra **b** do exercício 3 (Figura 19), o aluno também deveria indicar a fração correspondente. Os sujeitos não apresentaram dificuldades ou dúvidas para obter a resposta correta. Apenas um dos participantes forneceu o resultado em sua forma simplificada ou irredutível, demonstrando domínio da ideia de fração enquanto operador multiplicativo.

Figura 19 - Exercício 3, letra b

S_3: $\frac{2}{4}$. Porque ele dividiu em 4 e retirou duas partes.

O quadro 4 indica um resumo da distribuição dos sujeitos nas categorias de análise na prova de matemática (Conceitual e de procedimentos diversos):

Quadro 4 - Distribuição dos sujeitos nas categorias de análise da Prova Matemática (Conceitual e de procedimentos diversos)

Prova Matemática (Conceitual e de procedimentos diversos)					
Categorias	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Exercícios de adição e subtração sem o uso do MMC					
Utilizou equivalência de frações					
Representou por meio de desenho (corretamente)					
Representou por meio de desenho (incorretamente)				X	
Apresentou várias formas como transformação em decimais e desenho					X
Utilizou o MMC			X		
Transformou em números decimais					
Somou/ Subtraiu numeradores e denominadores	X				
Multiplicou numeradores e denominadores		X			
Definição de fração e exemplos					
Fração como parte-todo	X	X		X	X
Fração como medida					
Fração como quociente					X
Fração como número					
Fração como razão			X		
Fração como operador					
Identificação da fração correspondente a uma figura					
Figura A					
Reconheceu que a fração é a divisão do inteiro em partes iguais				X	
Não reconheceu que a fração é a divisão do inteiro em partes iguais		X	X		X
Tentou juntar os pedaços destacados	X				
Figura B					
Escreveu corretamente a fração, onde o denominador significa o número de partes divididas e o numerador o número de partes destacadas, mas não simplificou	X	X	X	X	
Realizou a simplificação da fração obtida					X

5.7.3 Prova de Matemática (problemas)

A última parte da prova envolveu as situações-problema sobre frações. Nesses problemas, o sujeito deveria realizar as várias operações e descrever o procedimento realizado.

Problema 1: Pela manhã um caminhoneiro percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e à tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ele percorreu nos dois períodos?

O S_1 leu em voz alta o problema e identificou a operação correta que devia realizar. A participante resolveu de maneira incorreta o procedimento, somou numeradores e denominadores. Mas, ao ser questionada se seria possível essa forma de resolução, utilizou o MMC.

S_1: Um caminhoneiro percorreu $\frac{2}{3}$ pela manhã e de tarde ele percorreu mais $\frac{1}{4}$. Eu somaria então 4 com 3, 7. Eu faria assim... e 2 mais 1,3... $\frac{3}{7}$ do caminho, ele percorreu.
(...)
P: E se fosse com a regrinha como ficaria?
S_1: $\frac{11}{12}$ ficaria com a regrinha

Comparando-se o resultado obtido por S_1 com o desempenho na prova matemática (algoritmo) durante o "pensar em voz alta", verificou-se que a participante realizou corretamente as operações de adição e subtração. No entanto, nas provas realizadas em sala de aula, a mesma realizou incorretamente a adição, somando numeradores e denominadores. Assim, percebe-se uma confusão dessa estudante sobre a finalidade do MMC, o que demonstra que a técnica é utilizada por ela porque a professora disse que está certo, que é uma "regrinha", mesmo sem conhecer os conceitos envolvidos.

O sujeito 2, na primeira prova realizada, somou numeradores e denominadores, do mesmo modo que S_1. Mas, durante a entrevista, retificou o procedimento utilizado:

S_2: É... aí eu somei, o que também não poderia porque eu tinha que fazer o MMC.

Do mesmo modo, S_3 e S_4 também utilizaram o MMC:

S_3: Então, se pela manhã ele percorreu 2/3 e à tarde ¼, ele quer saber a fração de todo esse período, eu somei essas duas frações. Aí eu fiz 2/3 mais ¼, daí eu fiz o MMC entre 3 e 4 e encontrei como denominador o 12. Agora eu vou dividir pelo de baixo e multiplicar pelo de cima. Aí encontrei 8 e 3. Aí 8 mais 3 ... 11 sobre 12.

S_4: (resolução)

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$$

O S_5 realizou o MMC corretamente, mas explicitou uma ideia de fração enquanto operador multiplicativo:

S_5: (...) É só fazer uma soma de $\frac{1}{4}$ ... é... $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$, que é igual a ... $\frac{11}{12}$ da distância. No caso, é $\frac{1}{4}$ da distância de x, mais $\frac{2}{3}$ de x, vai dar $\frac{11}{12}$ de x, da distância.

Nenhum dos sujeitos questionou ou analisou a pertinência ou coerência do resultado obtido.

Problema 2: Elvira gasta $\frac{4}{9}$ do seu salário com aluguel e $\frac{1}{9}$ com alimentação.

a) Que fração do salário ela gastou no total?

b) Depois de pagas essas duas despesas, que fração do salário sobrou?

Esse problema apresentou letras **a** e **b** que envolviam adição e subtração de frações, respectivamente. Os sujeitos realizaram o MMC e foram questionados sobre como estavam pensando. Os sujeitos 1 e 2 resolveram de modo semelhante:

S_1: A base é igual, eu deixo igual... 9... 4 mais 1,5. Ela gastou no total $\frac{5}{9}$ do salário dela.

(...) Aqui (Letra B) eu já faria... porque o inteiro então seria $\frac{9}{9}$ menos $\frac{5}{9}$ que ela gastou com as contas. A base mantém igual... 9 menos 5, 4.

S_2: Ah seria uma soma $\frac{4}{9}$ por $\frac{1}{9}$... pra ver quanto ela gastou... do salário dela, que é do aluguel e da alimentação. $\frac{4}{9}$ mais $\frac{1}{9}$ igual a $\frac{5}{9}$ que ela gastou do salário dela. Depois de pagas todas as despesas, que fração do salário sobrou? Aí se ela gastou, de 9 partes ela gastou 5, sobrou 4 partes para completar o 9... seria $\frac{4}{9}$, eu acho!

O sujeito 3 identificou e realizou corretamente a adição, mas na letra b que envolvia subtração ele apresentou dificuldades e desistiu do problema, afirmando que não sabia fazer.

S_3 Aí então eu fiz a mesma coisa... eu somei o 4/9 com 1/9. Aí o denominador eu igualei um só e somei 4 mais 1. Aí deu 5/9.
Depois de pagas essas duas despesas que fração do salário sobrou?
Essa eu acho que eu não consegui fazer... a b.

P: É! Realmente você não fez! Você não tem nem ideia? Não quer tentar?
S_3 : Ah... eu acho que eu não consigo essa mesmo.

Os sujeitos 4 e 5 também não encontraram dificuldades para identificar as operações que deveriam realizar.

S_4: (...) eu somo $\frac{4}{9}$ que é o que ela gasta... com aluguel e mais $\frac{1}{9}$ que é com alimentação, vai dar $\frac{5}{9}$.

Depois de pagas essas duas despesas, que fração do salário sobrou?... ah, é só fazer a subtração entre $\frac{9}{9}$, né, que é o inteiro menos $\frac{5}{9}$, vai dar $\frac{4}{9}$.

S_5: (...) só somar os numeradores... $\frac{5}{9}$ (5 sobre 9). Ela gastou $\frac{5}{9}$!

Depois de pagas essas duas despesas, que fração do salário sobrou?... sobrou $\frac{4}{9}$ ... que é o que falta do 5 pra chegar no 9.

Assim como no problema 1, os sujeitos não questionaram sobre a coerência do resultado encontrado.

Problema 3: Roberta iniciou uma viagem com $\frac{5}{6}$ do tanque de gasolina abastecido e gastou durante essa viagem o equivalente a $\frac{1}{2}$ do tanque. A gasolina que sobrou equivale a que fração do tanque?

O problema deveria ser resolvido por meio de uma subtração de frações, mas alguns dos sujeitos tiveram dúvidas. Durante a leitura do enunciado, o S_5 confundiu-se e questionou se $\frac{1}{2}$ referia-se ao total do tanque ou só ao valor abastecido antes da viagem.

S_1 realizou a subtração e obteve a resposta $\frac{4}{12}$, sem fazer a simplificação. Ao fatorar, teve um equívoco e encontrou como denominador 12. Como na prova anterior o resultado havia sido diferente, foi questionada quanto à resolução e coerência da resposta.

P: Na sua prova, você fez uma coisa estranha: você subtraiu, fazendo 5 menos 1 igual a 4... numerador... denominador 6 menos 2, deu 4 também. Daí sobrou $\frac{4}{4}$ do tanque. Mas $\frac{4}{4}$ não é um inteiro?
S_1: É! (risos)
P: O que aconteceu? Você não percebeu que tinha alguma coisa errada?
S_1: Não...
P: Você não analisou a resposta...?
S_1 Eu fiz assim... Se eu não usasse a regrinha agora eu faria do jeito que eu fiz aí... e daria $\frac{4}{4}$.
P: Mas ficaria um tanto contraditório, porque você gasta um montão do tanque e ainda sobra um tanque inteiro. É estranho!...

O S_2 cometeu um engano ao realizar o MMC, mas identificou corretamente a operação de subtração. Entretanto, ao encontrar o denominador 6 estava se esquecendo de "dividir pelo de baixo e multiplicar pelo de cima" e, com isso, fez 5 menos 1 obtendo $\frac{4}{6}$. Ao ser questionado, percebeu seu erro:

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{2}{6}$$

O sujeito 3, de modo semelhante ao procedimento realizado por S_1, também obteve como resultado $\frac{4}{12}$. A participante 4 resolveu de maneira diferente dos outros sujeitos e simplificou na primeira vez em que realizou a prova. Primeiramente, transformou $\frac{1}{2}$ em $\frac{3}{6}$ que seria a metade do tanque e depois subtraiu, $\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$.

O S_5 novamente demonstra a ideia de fração como operador multiplicativo:

S_5: (...) Iniciou com $\frac{5}{6}$... $\frac{5}{6}$ de x, o tanque... o tanque inteiro e gastou durante a viagem... Ah, ela gastou $\frac{1}{2}$ do tanque e não $\frac{1}{2}$ do que ela tinha!

Este foi o problema em que S_5 mais encontrou dificuldade. Na seqüência, ele percebeu que seria uma subtração e não uma multiplicação de frações, mas a ideia de operador multiplicativo permanece:

S_5: (...) ... $\frac{1}{2}$ do tanque no caso... o $\frac{1}{2}$ multiplicaria o tanque que agora no caso é 1... o tanque inteiro. 5 menos $\frac{1}{2}$ é igual a 12, 10 menos 6... 4... e aqui é $\frac{1}{3}$.

O S_5 foi o único participante que forneceu a resposta na sua forma simplificada, ou fração irredutível. Nenhum dos sujeitos verificou a coerência do resultado a que chegaram.

Problema 4: Ontem, dormi $\frac{1}{4}$ das 24 horas do dia, e estudei $\frac{1}{36}$ do tempo que estive acordado.

a) Que fração das 24 horas do dia eu estive acordado?

b) Que fração das 24 horas do dia eu estudei?

c) Quanto tempo eu estudei?

Esse problema tratou de multiplicação de frações. Apenas os sujeitos S_4 e S_5 identificaram o que o problema pedia e resolveram corretamente as operações. O S_1 parece não ter compreendido o enunciado e não identificou a operação a ser realizada.

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{36} = \frac{9+1}{36} = \frac{10}{36}$

Ao ser questionada sobre a operação realizada na letra **a**, a participante afirmou que o correto é a adição:

P(...) aqui na sua prova que você fez anteriormente, você, ao invés de fazer uma soma, você fez uma divisão... o que você acha que tá certo: uma soma? Uma divisão? Qual é a operação correta?
S_1: Eu acho que é soma.

Na letra **b**, S_1 tenta calcular $\frac{1}{4}$ de 24 horas, mas não percebe que não era isso o que foi solicitado.

$\frac{1}{4} = \frac{24}{1} = \frac{1+90}{4} = \frac{91}{4}$

Na letra **c,** S_1 realizou uma subtração de $\frac{4}{4}-\frac{1}{36}$ e obtém como resultado $\frac{35}{36}$. A participante não verifica a coerência da resposta que solicitava o tempo e não uma fração.

Os sujeitos S_2 e S_3 afirmaram que não sabiam fazer e nem tentaram resolver. Já S_4 fez a letra a, mas preferiu fazer o próximo problema e depois voltar para solucionar as demais. A princípio tentou fazer qualquer operação, mas depois desistiu e preferiu pensar melhor. Quando voltou ao problema, realizou uma multiplicação e questionou-se quanto aos resultados obtidos.

S_1: (...) Hum... eu dormi $\frac{1}{4}$ então... ah, que eu tive acordada foi $\frac{3}{4}$, né?

(...)

S_1:: Ah... então seria a mesma coisa aqui em cima. Quem nem... eu estive acordada $\frac{3}{4}$ e eu estudei $\frac{1}{36}$, então aí eu vou... nossa... mas peraí, dá $\frac{1}{48}$?

P : Esse foi o resultado da sua prova...
S_1: O quê? É?
P: Você chegou a esse resultado.
S_1: Mas não tá certo?
P: Tá certo!
S_1: Tá?
P: Por que você acha que não tá certo?
S_1: Ah eu acho que tá certo, deu esse resultado... ó, porque o que eu fiz: eu peguei a fração do tempo que eu tava acordada e multipliquei pelo tempo que eu estudei... e aí deu a fração das 24 horas.

Na letra **c**, a participante questionou sobre a coerência da resposta $\frac{1}{48}$ de 24 horas, que deu $\frac{1}{2}$. Para o sujeito esse resultado seria absurdo:

S_4 : Dá $\frac{1}{2}$ ... aí seria a metade de um dia, mas aí não ficou 12 horas estudando...
P: Metade de um dia ou de uma hora?
S_4: É... faz sentido isso!
P: Porque na sua prova, você colocou 30 minutos... por isso que eu to te perguntando...
S_4: É... tá certo! Eu to trabalhando com horas... não é dia. Falei dia porque 24 horas seria 1 dia, mas... na verdade, realmente, seria 30 minutos porque eu pequei as 24 horas que tem um dia e multipliquei pelo tempo que eu estudei... das 24 horas... aí vai dar $\frac{1}{2}$. Só que esse $\frac{1}{2}$ não tem como ser um dia... porque eu to trabalhando com horas, então tem que ser meia hora! Então tá certo, dá 30 minutos.

O sujeito 5 resolveu rapidamente o problema 4. Identificou a operação e solucionou adequadamente, com muita confiança no que estava realizando.

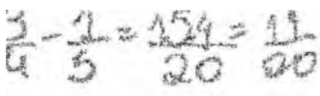
S_5: Que fração das 24 horas do dia eu estudei?... estudei $\frac{1}{36}$ de (multiplica) $\frac{3}{4}$, aqui (letra b) já poderia simplificar... ficaria $\frac{1}{12}$ ... vai dar $\frac{1}{48}$.

A: Isso!

S_5: Quanto tempo eu estudei?... aí é só pegar $\frac{1}{48}$ vezes 24, igual a $\frac{1}{2}$.

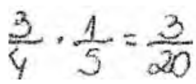
<u>Problema 5</u>: Em uma classe $\frac{3}{4}$ dos alunos são meninas e $\frac{1}{5}$ das meninas são loiras. As meninas loiras representam que fração do total de alunos da classe?

Para solucionar esse problema, o sujeito deveria ter a ideia de fração enquanto operador multiplicativo. Esperou-se que os participantes determinassem $\frac{1}{5}$ de $\frac{3}{4}$. Os sujeitos 1 e 2 tentaram realizar uma subtração as frações e portanto, não compreenderam o enunciado.



O S_3 tentou realizar MMC, mas desistiu da questão ao perceber que não conseguiria “achar o número de meninas loiras em relação ao total da classe”.

Os sujeitos 4 e 5 resolveram rapidamente o problema. Os dois participantes foram os únicos que identificaram a operação correta (multiplicação). S_1 multiplicou numeradores e denominadores:



S_5 ainda conferiu seu procedimento, avaliando sua resposta:

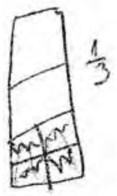
S_5: $\frac{1}{5}$ das meninas são loiras... $\frac{1}{5}$ de $\frac{3}{4}$ (relê)... $\frac{3}{20}$ ... é!

<u>Problema 6</u>: Paulo quer dividir $\frac{1}{3}$ de um chocolate em 4 partes iguais. Que fração do chocolate representará cada uma dessas partes? Faça uma figura para representar essa divisão.

O problema 6 pretendeu verificar se os sujeitos sabiam realizar a divisão de frações por meio de uma técnica e através de uma representação.

O sujeito 1 afirmou que só sabia fazer por meio de desenho. Entretanto, considerou o chocolate inteiro como sendo $\frac{1}{3}$, dividiu em 4 partes e pintou tudo. Ao ser questionado sobre o procedimento que realizava, encontrou a resposta correta:

P: Tá... mas você pegou $\frac{1}{3}$ ou pegou o chocolate inteiro?
S_1: Esse daqui (o todo), então seria $\frac{3}{3}$.
P: Tá, esse aí é o inteiro.
S_1: E o $\frac{1}{3}$ seria esse aqui. O $\frac{1}{3}$ seria só essa parte aqui.
P: Tá... aí ele pegou essa parte...
S_1: Eu faria assim... (divide uma das partes da figura em 4)



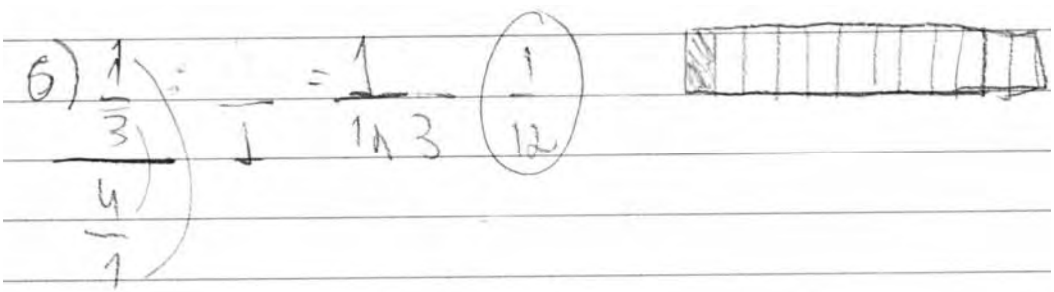
O S_2 não reconheceu que deveria realizar a divisão entre as frações, nesse problema. Quanto à representação, na primeira vez que resolveu a prova, o sujeito 2 fez corretamente o desenho, mas não indicou a fração correspondente. Na entrevista, o participante tentou utilizar porcentagem, mas seu raciocínio não apresentou coerência quanto ao que o problema solicitava.

S_2: (...) É... seria uma barra de chocolate, né... dividida em 3 partes, pegaria uma. Dessa 1 parte faria de novo em 10 partes que seria 100 da barra (Faz o desenho) e pegaria 4 partes.

O Sujeito 3 realizou a divisão dos numeradores e denominadores. Ao ser informado que na prova em sala de aula havia feito a operação através de Meios e Extremos, retificou seu resultado e afirmou que essa era a maneira correta de realizar a divisão de frações.

P: ... Na sua prova, você fez uma divisão entre meios e extremos, como você tinha feito no problema que você não tinha conseguido fazer lá da primeira parte. Você lembra que você multiplicou meios por extremos?
S_3 : Até que eu coloquei um.
P: Uma fração em cima de outra.
S_3: Ah... entendi. Vou tentar fazer aqui também... Então encontrei $\frac{1}{12}$.
P: Então o que tá certo? Esse que você fez agora?
S_3: É... esse que eu fiz agora.

Para representar o resultado obtido, o aluno fez uma figura retangular, dividiu em 12 (doze) partes e destacou apenas uma, conforme desenho abaixo:



O S_4 realizou a multiplicação de $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4}$, ou seja, pela fração inversa de 4. A figura encontrada pela participante também ilustra corretamente cada pedaço das partes originadas pela divisão do chocolate de Paulo.

S_4: (...) É que aí... se fosse dividir em 4 tudo aqui... ia dar 12 pedacinhos...

Já o S_5 encontrou a mesma resposta que S_4 e também realizou uma multiplicação. A forma de representar essa divisão foi diferente, o participante não representou na mesma figura as partes obtidas:

S_5: Então, tenho um chocolate... primeiro eu divido em 3, aí depois ele pega uma parte e divide em 4. Ele quer saber quanto vale 1 né? É igual a $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$, que é igual a $\frac{1}{12}$.

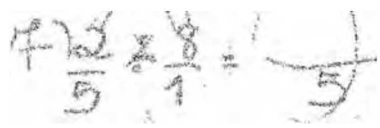
<u>Problema 7</u>: Num filme de TV, o mordomo assassinou seu patrão, por que achava que iria receber $\frac{1}{4}$ da herança. No entanto, o patrão deixou $\frac{2}{5}$ da herança para serem igualmente divididos entre os oito empregados da casa (um dos quais é o mordomo). O resto da herança, segundo o testamento, deveria ser doado à polícia.

a) Que fração da herança foi destinada ao mordomo?

b) Quantas vezes a quantia destinada ao mordomo cabe na que ele achava que iria receber?

O último problema referiu-se à divisão de frações. O participante poderia realizar essa operação da maneira que soubesse. Apenas S_4 e S_5 conseguiram resolver o problema todo. Os demais tentaram realizar a divisão, mas desistiram ou chegaram a resultados incorretos.

A participante 1 identificou a operação que deveria realizar, mas não dominava a técnica. Dessa forma, não fez a letra **a** e não concluiu a **b**.



S_1: Eu dividir 8 por 2, acho que não posso. Eu não saberia fazer isso...
(...)
S_1: Esse aqui eu teria que saber esse daqui (Letra A) pra fazer mais de menos para saber... e quanto poderia caber.

Ao ser questionada sobre o procedimento que havia realizado na outra prova em sala de aula, a participante demonstrou conhecer uma das propriedades dos reais (a de que se o expoente do número for negativo, a fração se inverte)

P: Aqui você fez $\frac{1}{4}$ dividido por $\frac{8}{1}$, aí você inverteu a 2ª fração... aí encontrou $\frac{2}{8}$, aí, depois, você fez uma subtração. Mas você acha que o procedimento também não está certo?

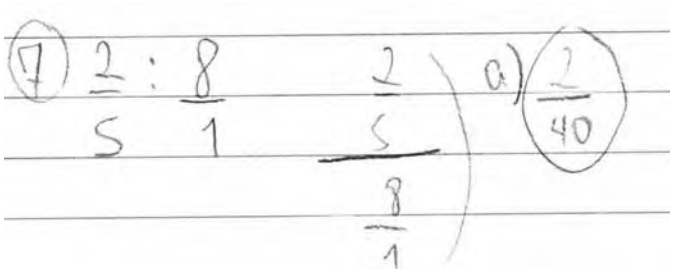
S_1: Não... porque eu não poderia inverter assim.
P: Não poderia?
S_1: Não... porque só posso inverter uma fração quando tem elevado a um número negativo.

O sujeito 2 também não identificou ou não soube realizar a operação correta. Apontou que a letra **b** dependia do resultado da letra **a**. Ao ser questionado, começou a fazer algumas tentativas, mas não tinha certeza do procedimento que deveria realizar.

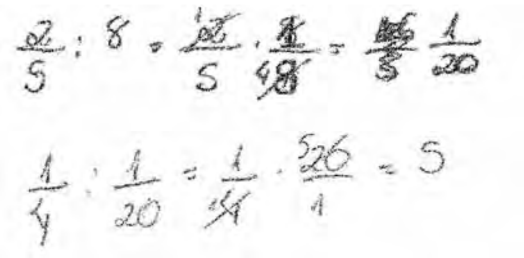
S_2: (Lê o problema) $\frac{2}{5}$ da herança seriam para os 8 empregados. Desses $\frac{2}{5}$, o 5 seria o total da herança e 2 seria dos empregados. Pegaria 2 pra dividir para os 8. Não sei fazer essa!
(...)
S_2: Eu não consigo ver como fazer aqui... porque o jeito que eu imagino, depois que dividiu pelos 2, ficaria que nem aqui: dividiria essas duas partes em 10 cada uma, daria 20 e pegaria. Ficaria $\frac{8}{20}$. Dividiria por 2 aqui e pegaria essas 2 partes pra dividir em 10. Mas aí eu não saberia como pegar a fração do mordomo.
P: Tudo bem então.
S_2: Acho que a do mordomo seria $\frac{1}{20}$ porque ele pegaria uma parte... então ficaria acho que $\frac{1}{20}$. Agora aqui... essa aqui eu não sei fazer. Quanto que cabe de 20 no 4.

Esse sujeito parece confundir a ideia de fração com alguns conceitos de porcentagem. Ao tentar dividir o 2 em 10 partes e obter 20, o sujeito não se questiona sobre a coerência desse procedimento e acaba por "chutar" uma resposta.

O S_3 resolveu corretamente a letra **a** através de "Meios e extremos", mas afirmou que não sabia fazer a letra **b**.



A participante 4 conseguiu resolver o problema todo. Na letra **a**, a aluna não havia invertido a segunda fração na divisão para fazer a multiplicação, mas percebeu seu equívoco e retificou sua resposta. De modo semelhante, realizou a divisão na letra **b** transformando em uma multiplicação de frações.



O sujeito 5 realizou as divisões de um modo diferente do que havia realizado na Prova de algoritmo. O participante colocou uma fração sobre outra e fez a multiplicação de meios e extremos:

O quadro 5 apresenta um resumo da distribuição dos sujeitos em relação às categorias de análise utilizadas na prova matemática de problemas. Foram analisados os sujeitos nas categorias em que mais se destacaram ao longo dos sete problemas.

Quadro 5 - Distribuição dos sujeitos nas categorias de análise da Prova Matemática (Problemas)

Prova Matemática (Problemas)					
Categorias	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**S_4**	**S_5**
Quanto ao *enunciado*					
Compreendeu o enunciado e obteve a informação matemática de modo adequado.				X	X
Não compreendeu o enunciado e não soube extrair a informação matemática.					
Na maioria das vezes compreendeu o enunciado	X	X	X		
Quanto aos *procedimentos* (estratégias utilizadas)					
Utilizou desenho					
Fez por tentativa e erro					
Utilizou as técnicas operatórias	X	X	X	X	X
Quanto ao *resultado*					
Verificou o resultado obtido, analisando se este apresentou coerência.	X			X	X
Não verificou a coerência do resultado obtido.		X	X		

CAPÍTULO 6 – DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na solução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, sua marca na mente e no caráter.

George Polya

Resposta às questões de pesquisa

O objetivo deste trabalho foi estudar as atitudes dos alunos do Ensino Médio, verificando as relações entre as atitudes, o gênero, o desempenho e os procedimentos utilizados em atividades envolvendo frações. A escolha pelo Ensino Médio como campo de pesquisa justifica-se pelo seu caráter de formação geral do aluno e pelas diversas reformas educacionais que frequentemente alteraram as finalidades desse nível de ensino. Um dos motivos mais relevantes e que despertou grande interesse pelo estudo dos fatores afetivos na Matemática e, especialmente, com as frações, é que na literatura consultada não foram encontrados trabalhos abordando essa questão.

Quanto aos instrumentos de pesquisa utilizados, a análise estatística indicou que estes realmente foram eficazes quanto à obtenção de informações a respeito das relações entre as atitudes em relação à Matemática, o gênero e o desempenho na solução de problemas envolvendo conceitos fracionários. Além disso, a validação da escala de atitudes em relação a frações apresentou um alfa de Cronbach, que mede a fidedignidade do instrumento, de 0,9443, considerado muito bom, bem próximo ao de outras escalas de atitudes semelhantes a esta, como a de estatística, validada por Cazorla et al (1999), que apresentou um alfa de Cronbach de 0, 95, e a de Moron (1999) em relação à Matemática para professores, que encontrou um valor de 0, 9498. Também a escala de atitudes em relação à Matemática adaptada e validada por Brito (1996) apresentou um coeficiente de credibilidade de 0,9494.

Os resultados estatísticos indicaram que a média das atitudes em relação à Matemática diminuem de acordo com a série. Assim, na 1ª série, a média foi de 52,72 pontos; na 2ª, de 52,68; e, na 3ª série, foi de 41,04. Na escala de atitudes em relação a frações, essa ordem não se manteve. Na 1ª série, a média foi de 43,97 pontos; na 2ª, de 47,76 pontos; e, na 3ª série, de 43,23 pontos. Ressalta-se que as atitudes desse grupo de estudantes, tanto na escala de atitudes em relação à Matemática quanto na escala de atitudes em relação a Frações, ficaram acima da média, o que indicou uma tendência a atitudes positivas no Ensino Médio.

O trabalho de Brito (1996) evidenciou que, com os alunos do Ensino Fundamental, acontece algo parecido: os estudantes apresentaram atitudes mais negativas de acordo com o nível de escolaridade. As atitudes em relação à Matemática tornam-se mais negativas na 6ª série, possivelmente pela introdução da álgebra, e voltam a ser positivas no final do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Quanto ao desempenho ao longo da escolaridade, Gomes (1998) apontou uma sutil relação entre essas variáveis. Para a autora, conforme os alunos vão adquirindo conhecimentos, vão obtendo maior êxito nos estudos.

O trabalho evidenciou uma relação tênue entre atitudes em relação à Matemática e a Frações e o desempenho do estudante, que pode ser justificada pelo aumento de atitudes negativas em relação à Matemática ao longo das séries, ao mesmo tempo em que ocorre um aprofundamento dos conteúdos e êxito nos estudos. Krutetskii (1976) acrescenta que o desempenho dos alunos em tarefas escolares pode sofrer influência de características individuais relativas às habilidades matemáticas.

Quanto o aprofundamento e complexidade dos conteúdos matemáticos no Ensino Médio, a tabela abaixo mostra os temas a serem trabalhados pelo professor de Matemática em cada bimestre e série, de acordo com a Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008b):

Quadro 6 - Temas bimestrais de Matemática por série do Ensino Médio

	1ª série	**2ª Série**	**3ª série**
1º bimestre	Números e Seqüências	Trigonometria	Geometria Analítica
2º bimestre	Funções	Matrizes, Determinantes e sistemas lineares	Equações Algébricas e números complexos
3º bimestre	Função exponencial e logarítmica	Análise combinatória e probabilidade	Estudo das funções
4º bimestre	Geometria – Trigonometria	Geometria métrica espacial	Estatística

O Ensino Médio, ao aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, certamente tem um grau maior de abstração ou profundidade na abordagem dos conteúdos. Caso o aluno tenha atitudes negativas ou apresente dificuldade no Ensino Fundamental, poderá carregar esse direcionamento de suas atitudes e as dificuldades consigo também no Ensino Médio.

Os dados obtidos a partir dos questionários indicam que a Matemática é, para essa amostra, a disciplina de que os alunos menos gostam, ao contrário do que Brito (1996) concluiu em seu trabalho investigando alunos do ensino fundamental. A autora constatou que a preferência dos alunos pela Matemática é a mesma da disciplina de Língua Portuguesa. Nesta pesquisa, a disciplina História aparece juntamente com Matemática no conjunto das matérias que os alunos excluiriam do currículo. A exclusão da Matemática foi mais frequente no 3º ano, em que 10 alunos a apontaram como candidata a eliminação na grade curricular.

Os motivos para a indicação desse componente curricular para exclusão, pela aversão aos conteúdos referentes à disciplina, podem ser justificados por aspectos relacionados à influência dos amigos, familiares ou professores. Nesse sentido, Gonçalez (2000, p. 134) corrobora com os resultados obtidos ao afirmar que "Construir atitudes positivas é um processo longo e as expectativas de mudanças devem ser planejadas ao longo dos anos escolares". Dessa forma, não se pode apontar um único motivo, mas sim um conjunto de fatores que podem provocar atitudes negativas nos estudantes.

O tempo dedicado ao estudo da Matemática é bastante pequeno. Mais de 30% dos sujeitos apontaram que *nunca estudam essa matéria* e cerca de 38% estudam *menos de 1 (uma) hora*. Pode-se concluir que a dedicação dos alunos em relação à Matemática é limitada e, conforme outros trabalhos indicam, muitos estudantes estudam apenas às vésperas das provas.

Além da falta de um estudo complementar da Matemática em casa, cerca de 23% dos alunos responderam que nunca entendem as explicações do professor, e quase 10% dos sujeitos indicaram que não conseguem prestar atenção nas aulas de Matemática.

Essa falta de comprometimento no estudo da Matemática pode gerar no educando atitudes negativas quando não conseguem entender alguns conceitos. Além de um baixo desempenho nas avaliações, a maioria dos alunos apresentou a ausência de hábitos de estudo. Dessa forma, a sala de aula (6 aulas semanais, geralmente) é o espaço em que o aluno aprende, faz exercícios e pensa sobre os conceitos matemáticos. Entretanto apenas a sala de aula revela-se insuficiente, de acordo com os resultados das avaliações oficiais. Comparando-se os dados relativos ao número de horas dedicadas ao estudo da Matemática fora da sala de aula, com o trabalho de Silva (2000b), é possível notar que houve uma redução do tempo de dedicação dos alunos ao estudo de Matemática. Os resultados desse estudo anterior indicaram que apenas 9,5% dos estudantes nunca estudavam Matemática fora da sala de aula. Já para os alunos da amostra atual, essa porcentagem foi superior a 30%.dos participantes.

Diante da afirmação "*Não tenho um bom desempenho em Matemática"*, do total de 95 participantes, 20 discordam totalmente dessa afirmação, 34 discordam, 28 concordam e 13 concordam totalmente. Foi possível notar que, para os estudantes participantes desta pesquisa, a maioria apresentou uma autopercepção positiva de seus resultados na disciplina Matemática. Tais resultados corroboram com os estudos de Neves (2002) e Dobarro (2007), dentre outros.

Ao analisar a relação entre o desempenho dos alunos e as séries, verificou-se, de maneira geral, que, embora as atitudes em relação à Matemática tendam a ficar negativas com o passar dos anos, o desempenho dos alunos vai melhorando gradativamente. A tabela 18, no capítulo 6.5, indica que, na 1ª série, as meninas apresentam atitudes mais positivas e desempenho melhor que os meninos. Na 2ª série, os meninos têm melhores desempenhos e atitudes mais positivas. No 3º ano, o desempenho dos meninos é bem superior ao das meninas, que apresentam atitudes mais negativas em relação à Matemática, em comparação com o gênero feminino do 1º e 2º anos.

Comparando o desempenho dos sujeitos de acordo com a série e o gênero, de modo geral, percebem-se diferenças significativas somente por série ($F(2,89) = 7,938$; $p = 0,001$). As interações entre série e gênero ou as diferenças por gênero não foram significativas.

Quanto ao desempenho dos sujeitos em relação ao gênero, foram encontrados resultados semelhantes em trabalhos como os de Utsumi (2000), Lima (2001) e Quintiliano (2005). Essas pesquisas também apontaram que o gênero não é uma variável confiável para determinar qual será o aproveitamento do estudante em Matemática. Dessa forma, a escola deve fornecer o mesmo tratamento para ambos os gêneros na sala de aula, já que o que existe é mais uma crença – a de que os meninos têm mais facilidade em Matemática – conforme o estudo de Brito (1996).

Quando se compara o desempenho dos sujeitos na solução de problemas e o desempenho dos mesmos na prova de algoritmo (com a utilização do MMC), encontram-se melhores resultados na parte técnica. Entretanto, as médias ficaram bem abaixo do desejável para alunos do Ensino Médio. Na prova de algoritmo, a média das notas foi de 4,2632 e, na solução de problemas matemáticos, a média caiu para 2,9053.

A análise estatística permitiu verificar as principais correlações entre a pontuação da escala de matemática e de fração, as notas na prova matemática de algoritmo e de problema e a nota média . As correlações mais fortes foram entre a nota de problemas e a pontuação na escala de atitudes em relação à fração (r (94) = 0, 532; p = 0,000), entre a nota de algoritmo e a nota nos problemas (r (95) = 0,714; p = 0,000) e entre a pontuação das duas escalas (r (94) = 0, 678; p = 0,000). Já as demais correlações existem em menor grau.

Esses resultados estatísticos indicam que a pontuação na escala de atitudes relaciona-se diretamente com o desempenho na solução de problemas, ou seja, o estudante que apresentou atitudes positivas em relação à fração obteve melhores resultados na solução de problemas. No entanto, a maior relação ocorreu entre o desempenho na prova de exercícios (algoritmo) e o obtido na prova de problemas.

Quanto às atitudes em relação à Matemática e sua correlação com as atitudes em relação à fração, esta pode ser justificada pela abordagem dos conceitos relativos aos racionais e a Matemática estudada no Ensino Médio, que, ao se relacionarem, envolvem também as atitudes dos alunos. Alguns resultados semelhantes foram encontrados por Viana (2000), que verificou correlações entre as atitudes em relação à Matemática e à Geometria (r=0,615; p=0,01), e por Silva (2000a), ao estudar as atitudes em relação à Matemática e à Estatística (r = 0,6708; p =0,000). Cazorla (2002) também encontrou correlações moderadas em relação à estatística (r = 0,5225; p =0,000).

As entrevistas permitiram constatar que os estudantes estão, geralmente, acostumados a trabalhar com aspectos ligados à operacionalidade da matemática. Assim, quando são propostas situações-problema que exigem a “execução de um plano”, conforme propõem autores como Sternberg (2000), Mayer (1992) e Polya (1986), os estudantes apresentam dificuldades para elaborar corretamente uma estratégia. Reforçando a ideia de que a abordagem do conceito de fração ocorre de modo mecânico, encontram-se os trabalhos de Prado (2000), Catalani (2002) e Oliveira (1996), que entendem que a falha no entendimento do conceito pode estar relacionada com a forma de abordagem, que muitas vezes tende a ser mecanicista.

Alguns erros no procedimento, como multiplicar em cruz, somar numeradores e denominadores, somar o numerador e multiplicar o denominador, indicam que, quando o aluno aprendeu o conceito de fração, houve uma ênfase na técnica operatória e não no conceito. O estudo de Silva (1997) também apontou que, além de demonstrarem uma tendência ao uso dos algoritmos nas atividades que envolviam adição de frações, os estudantes somavam numeradores e denominadores como “soma lógica”. Para a autora, esse resultado implica a percepção da fração como dois números naturais relacionados e não como um novo número que representa uma quantidade.

Outra dificuldade apresentada pelos participantes foi na obtenção da informação matemática através do enunciado. Alguns dos sujeitos não conseguiram identificar a operação correta e acabaram deixando de fazer ou resolvendo incorretamente o problema. Alves (1999) afirmou que os alunos encontram dificuldades na obtenção da informação matemática (o enunciado) e, nesse estágio, tendem ao erro. Esse mesmo resultado foi obtido por Pirola (2000), que evidenciou que os participantes, futuros professores que iriam ensinar matemática na escola básica, também apresentaram dificuldades na obtenção da informação matemática, que, segundo alguns autores, como Krutetskii (1976), é o primeiro estágio da resolução de problemas.

A metodologia do "pensar em voz alta" possibilitou a identificação das estratégias utilizadas pelos alunos para a solução dos problemas propostos. Foi possível perceber que os estudantes tentaram, inicialmente, identificar a operação que deveriam realizar e, em seguida, aplicaram a técnica. Dessa forma, verificou-se que os estudantes ficaram presos em estratégias consolidadas em sala de aula e demonstraram falta de autonomia para explorar novas possibilidades de solução e incapacidade de empreender tentativas para resolver os problemas por outras formas, inclusive através de desenho.

Na Prova de Matemática Conceitual e de procedimentos diversos, os alunos apresentaram dificuldades para definir *Fração* e para dar exemplos envolvendo esse conceito. Os exemplos apresentados eram ainda estereotipados, ou seja, os alunos forneceram exemplos simples parecidos com os que geralmente aparecem nos livros didáticos das séries iniciais. Por exemplo:

"Tenho uma dúzia de ovos, preciso usar três, então a fração será $\frac{3}{12}$."

Quanto à identificação da fração a partir de uma região hachurada, os sujeitos equivocaram-se bastante. Muitos não se importaram com o tamanho das partes da figura, que deveriam ser iguais, mas apenas com a relação parte-todo. Dessa forma, os alunos do Ensino Médio apresentam equívocos na conceituação de fração e parecem priorizar o aspecto da técnica na resolução de exercícios.

Ao se solicitar que os alunos realizassem os exercícios de frações sem utilizar o recurso do MMC, muitos estudantes deixaram em branco ou novamente resolveram por meio desse recurso. De modo semelhante ao S_3, que participou da metodologia do "pensar em voz alta", justificaram afirmando que pensaram em um número que dividisse todos os denominadores e, em seguida, “dividiram pelo de baixo e multiplicaram pelo de cima”. Outros estudantes tentaram realizar procedimentos incorretos, como, por exemplo, somar ou subtrair numeradores e denominadores. Dos participantes da 2ª parte da pesquisa, somente S_5 apresentou novas estratégias, como o uso de desenho ou transformação das frações em números decimais, para a solução dos exercícios. Já S_4, por exemplo, mesmo apresentando um bom desempenho nas provas de algoritmo e de problemas, afirmou que só sabia resolver a adição e subtração de frações por meio do MMC.

Uma preocupação evidenciada pelos participantes durante a realização das provas foi a de a resposta estar correta ou não. De acordo com Brito (2006), muitos professores, em atividades de solução de problemas, apenas corrigem a resposta final, não discutindo os procedimentos empregados pelos estudantes, o que não possibilita o “pensar sobre o pensado” (p. 27) e o desenvolvimento de uma reflexão produtiva. É comum, nas aulas de Matemática, que o professor retire problemas estereotipados dos livros didáticos e não proponha novos ou solicite a elaboração de problemas para o aluno.

O aluno que desenvolveu a autonomia para solucionar problemas, embora o ensino de Matemática valorize, muitas vezes, o aspecto mecânico por meio de fórmulas e modelos de problemas, ao “encontrar uma maneira de solucionar um problema usando procedimentos distintos dos padrões convencionais, evidencia um dos aspectos essenciais do pensamento matemático” (BRITO, 2006, p. 30).

Dessa forma, o professor de Matemática deveria buscar a valorização de um “plano para a solução de problemas”, mostrando aos alunos a importância de uma leitura atenta do enunciado do problema, da elaboração de uma estratégia e da avaliação da resposta obtida. É fundamental que ocorra uma reflexão por parte do professor de Matemática sobre o que ele entende e como trabalha a solução de problemas enquanto eixo estruturador da disciplina e, a partir disso, busque desenvolver atitudes positivas e autonomia nos alunos.

Implicações do estudo

O ensino com base na solução de problemas, embora apareça como eixo estruturador da Nova Proposta Curricular e dos PCNs, ainda não acontece. Provavelmente, os problemas apareçam como complemento, depois dos exercícios, e não como motivador ou como elemento problematizador nas aulas. O ensino de Matemática parece valorizar muito a resolução de listas de exercícios, como se o aluno precisasse aprender a técnica para depois refletir sobre o conceito. Mas, infelizmente, o professor fica apenas nos exercícios e torna-se comum o aluno lembrar o nome de regras ou das "músicas" para resolução de alguns procedimentos.

Através de um levantamento de opinião (APÊNDICE F), realizado com quatro professores que lecionavam Matemática para os alunos do Ensino Médio que participaram desta pesquisa, verificou-se que a maioria deles apontaram dificuldades relacionadas à operacionalidade das frações e não à solução de problemas: Além disso, o significado de fração que apresentou uma maioria de referências foi o de Número. De acordo com esse significado, a ênfase estaria nas operações de frações enquanto número.

P_1: A maior dificuldade está em operar adição e subtração com frações.

P_3: A maior dificuldade é diferenciar as operações e como resolvê-las.

P_4:: Na realização das quatro operações.

Apenas P_2 indicou uma preocupação com a solução de problemas envolvendo números fracionários. Ele enfatizou dificuldades dos alunos para a obtenção da informação matemática, o que não implica a memorização do conceito de fração, como afirmou o professor participante, mas talvez, a dificuldade do aluno em estabelecer um "plano" para a solução de problemas :

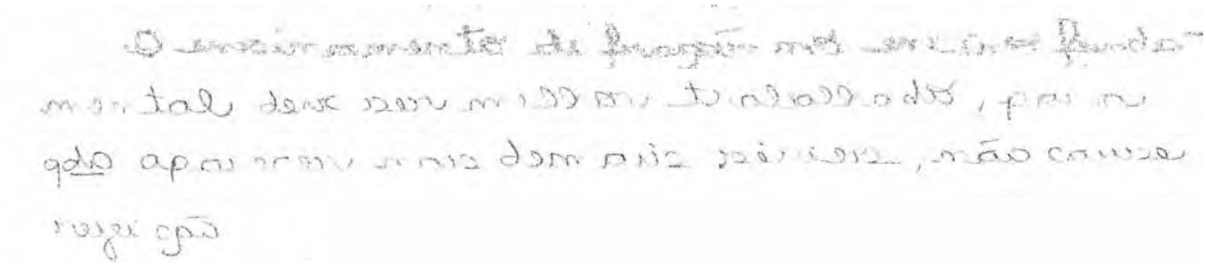
(2) Ao propor alguns problemas com números racionais, percebo que alguns alunos não conseguem resolvê-los além de não compreender e identificar as informações presentes no enunciado do problema. Esse dificuldade mostra que os alunos não incorporaram corretamente o conceito de fração apenas memorizaram.

Quanto à forma de abordagem dos conceitos e operações com frações, que foi questionada nos trabalhos de Prado (2000) e Catalani (2002) por enfatizar a forma simbólica $\frac{a}{b}$ e não a construção do conceito, P_2 aponta esse problema:

> ③ Embora os professores das séries iniciais do Ensino Fundamental tenham competência para lidar com situações cotidianas de fração ainda apresentam estratégias limitadas de ensino para auxiliar seus alunos.
> Dão início a apresentação de tal conteúdo utilizando como estratégia principal de ensino o uso de um conceito já pronto e como material de apoio apenas o livro didático.
> Inicia-se pelas definições e leituras, procedidas por cálculos, regras e técnicas de memorização.
> As noções e os conceitos sobre fração vão se construindo no aluno à medida que ele tem a oportunidade de desenvolver atividades utilizando diferentes tipos de materiais concretos, com a orientação do professor, enfrentando desafios, pensando, repensando sobre as atividades desenvolvidas e discutindo as dúvidas.
> A aprendizagem fracionária só se dará quando as idéias já estiverem amadurecidas.

Os estudos de Canova (2006), Merlini (2005) e Moutinho (2005) apontam que os professores, especialistas ou não, apresentam alguns erros conceituais e concepções inadequadas sobre o ensino de frações. Muitas dessas ideias encontram fundamentos nos próprios livros didáticos, que, além de apresentar alguns exemplos ou situações corriqueiras, como divisão de pizzas ou chocolates, enfatizam mais a abordagem de certos significados de fração como parte-todo, razão e operador multiplicativo, em detrimento de medidas e número, por exemplo.

Já P_4 atentou para a importância das atitudes em relação à fração:



O professor 1 afirmou que os alunos apresentam ideias incompletas e uma aprendizagem mecânica relacionada ao conceito de fração. Esse professor participante pareceu reconhecer os diversos significados de fração e a necessidade de trabalhá-los em sala de aula, evitando a construção inadequada do conceito, de acordo com alguns resultados obtidos nessa pesquisa que evidenciaram o ensino da técnica operatória e a falta de domínio do conceito de fração e seus vários significados.

Resposta 3 Uma das razões dessa dificuldade é que as frações envolvem várias idéias e todas elas devem ser bem trabalhadas na sala de aula. Alguns alunos adquirem **noções incompletas**, podendo mesmo aprender como somar ou dividir frações, mas de forma mecânica, sem verdadeira compreensão do que estão fazendo. Não reconhece uma fração como relação parte-todo. Falta uma noção clara de fração e sua aplicação no cotidiano!

Quanto à importância atribuída ao ensino do conceito de fração, todos apontaram a necessidade do seu domínio por parte dos alunos do Ensino Médio. P_1 apontou a importância das frações no cotidiano dos alunos. P_3 indicou que o domínio desse conceito é um pré-requisito para conteúdos do Ensino Médio, e P_4 ressaltou as dificuldades dos estudantes em reconhecer a utilidade e importância das frações nas atividades em sala de aula.

Já P_3 abordou essas ideias apresentadas pelos outros professores e destacou a necessidade do aprofundamento e melhor compreensão dos conteúdos do Ensino Fundamental pelos alunos.

① Os números racionais além de serem necessários para representar quantidades que não podem ser expressas por um inteiro, são muito utilizados no convívio social e em várias áreas do conhecimento.

É fundamental para o Ensino Médio o trabalho com as frações, pois por ser um conteúdo um tanto quanto complexo e muitas vezes abstrato para os alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental, é a partir do Ensino Médio que sua compreensão e utilidade se concretiza.

É no Ensino Médio que as idéias sobre o significado de frações amadurecem.

É necessário destacar que os participantes da pesquisa identificaram que as frações estão presentes no cotidiano e, inclusive, forneceram exemplos. Entretanto, os resultados apontaram muitas dificuldades relacionadas à solução de exercícios e problemas. Assim, mesmo que, no Ensino Médio, os alunos estejam mais preparados para entender o conceito de fração, esse conteúdo é pouco abordado. Com isso, o que parece "ficar" da aprendizagem de frações que ocorreu durante o Ensino Fundamental é a falta de domínio dos diversos significados de fração, além da dificuldade na solução de problemas.

Esse levantamento de opinião, realizado com professores do Ensino Médio, permitiu a identificação de algumas ideias sobre o ensino de fração. A maioria das respostas indicou a valorização da operacionalidade com ênfase nos exercícios de algoritmos. Essa prática certamente reflete no desempenho dos estudantes que apresentam mais facilidade em resolver exercícios ao invés de problemas, o que corrobora com os resultados obtidos por Silva (1997), ao trabalhar com frações, Quintiliano (2005), com problemas algébricos, e Alves (1999), com problemas aritméticos.

Diante dos trabalhos apresentados, é possível questionar se os objetivos da Matemática no Ensino Médio estão sendo alcançados satisfatoriamente. De maneira semelhante ao que afirmou Alves (1999, p. 144) em seu estudo, "era esperado que os estudantes apresentassem conhecimentos, destrezas, hábitos, habilidades e atitudes que favorecessem o domínio e execução dessas atividades". No entanto, foram muitos os fracassos, e a média, tanto na prova de algoritmo (4,2632), quanto na prova de problemas (2,9053), ficou abaixo da média cinco.

Uma das justificativas para esses resultados refere-se às práticas pedagógicas equivocadas, que se baseiam em longas listas de exercícios-treino e aulas expositivas, demonstrando uma concepção de ensino talvez inadequada aos objetivos pretendidos para o Ensino Médio. A solução de problemas, geralmente, abordada como decorrência de um processo de ensino e não como aspecto principal na Educação Matemática, não atinge um processo de reflexão e o desenvolvimento de habilidades nos estudantes, conforme destacam os parâmetros curriculares nacionais de matemática do ensino fundamental,

> A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações. (BRASIL, 1998b, p. 40)

Cabe ao professor refletir sobre a sua prática, especialmente sobre como trabalha com a solução de problemas em suas aulas. Outro aspecto que deve ser valorizado é o desenvolvimento de atitudes positivas em relação a frações, já que, se o estudante tem aversão ao conteúdo, poderá apresentar um bloqueio na aprendizagem. Assim, o posicionamento que o professor de Matemática deveria adotar em suas aulas é o tratamento dos seus alunos sem distinção entre gêneros. É importante que incentive a participação de meninos e meninas, mostrando aos estudantes que qualquer pessoa pode aprender Matemática e que esse não é um privilégio para os indivíduos do gênero masculino. Além disso, o educador deve ter em mente que as atitudes não são inatas e não são estáveis, e, portanto, o seu trabalho também exerce influências nas atitudes dos seus alunos em relação à Matemática ou em relação a um determinado conteúdo abordado.

Quanto ao ensino de frações, uma abordagem que ultrapassa a simples transferência da linguagem cotidiana para a científica, por meio de exercícios de manipulação de objetos ou relação com situações cotidianas que envolvem frações como divisão de pizzas ou chocolates, pode ocorrer por meio da (re)construção da história do conceito. Alguns estudos, como os de Prado (2000) e Catalani (2002), indicam que é necessário que os estudantes explorem a forma e conteúdo do conceito de fração. Para isso, resgatar a história das frações, mostrando aos estudantes as necessidades e impossibilidades que motivaram a construção de um novo campo numérico, pode fazer com que eles percebam a matemática como construção humana, voltada para os interesses do homem.

Os números racionais, em especial as frações, devido a sua importância no currículo da Matemática, merecem maior atenção nos trabalhos produzidos, principalmente em relação às atitudes e sua influência no ensino. Desse modo, será possível que se encontrem novas possibilidades para o ensino, buscando a melhoria do desempenho dos estudantes uma educação através da solução de problemas.

REFERÊNCIAS

AIKEN, L. R. Attitudes toward mathematics. **Review of educational research**, Washington , v. 4, n. 40, p. 551-596, 1970.

AIKEN, L. R.; DREGER, R. M. Personality correlates of attitude toward Mathematics. **Journal of educational research**, Washington, v. 9, n. 56, p. 476-480, 1963.

AIKEN, L. R.; DREGER, R. M. The effect of attitudes on Performance in Mathematica. **Journal of Educational Psychology,** Arlington, v. 52, n. 1, p. 19-24, 1961.

ALVES, E. V. **Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio.** 1999. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

______. **Um estudo exploratório das relações entre memória, desempenho e os procedimentos utilizados na solução de problemas matemáticos.** 2005. 172f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

ARAUJO, E. **A. Influência das habilidades e das atitudes em relação à matemática e a escolha profissional**. 1999. 232 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

ARDILES, R.N. **Um estudo sobre as concepções, crenças e atitudes dos professores em relação à Matemática.** 2007. 236 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

BEHR, M. et al. Rational-number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes.** Orlando: Academic Press, 1983. p.91-126.

BEZERRA, F. J. B. **Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações: uma abordagem criativa para a sala de aula**. 2001. 206 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BOAVIDA, A. M. Resolução de problemas: que rumos para a educação matemática? In: PONTE, J. P. (Org). **Educação Matemática** Lisboa : Instituto de Inovação Educacional, 1992. p.115-122.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1979. 485 p.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei nº 9394, 20 de dezembro de 1996. Brasília: Secretaria Especial de Editoração e Publicações, 1997. 48p.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Parecer CEB n. 15/98. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.** Brasília, DF: MEC/CNE, 1998a.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998b. 148 p.

_______. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos Temas Transversais**. Brasília: 1998c. 436 p

______. Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEF, 1999. (Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias).

BRITO, M. R. F. Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus. **Trabalho de Livre docência**. 1996. 383 f..Faculdade de educação - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

BRITO, M.R.F. (Org.). **Psicologia da Educação Matemática**. Florianópolis: Insular, 2001. 277 p.

______. **Solução de problemas e a matemática escolar.** Campinas: Alínea, 2006. 280 p.

BRITO, M. R. F.; VIANA, O. A. As atitudes em relação à matemática e a relação com o desempenho escolar de alunos do Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2004, Recife. **Anais...** Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004. 1 CD-ROM.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre discreto e contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática.** 1996. 80 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática.** Lisboa, 1951. 318 p.

CANOVA, R. F. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental com relação à fração.** 2006. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

CATALANI, E. M. T. **A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração.** 2002. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

CATALANI, E. M. T; MOURA, A. R. L. A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2004, São Paulo. **Anais eletrônicos...** São Paulo: USP, 2004. Disponível em: < http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/anais.htm> Acesso em: 27 set. 2008.

CAZORLA, I. M. et al. Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à estatística. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL: EXPERIÊNCIAS E PERSPECTIVAS DO ENSINO DA ESTATÍSTICA, 1, 1999. Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: UFSC/ PRESTA/ IASE , 1999, p. 45-57.

CAZORLA, I. M. **A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos.** 2002. 315 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

CHARLOT, B. A idéia de infância. In: CHARLOT, B. **A mistificação pedagógica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1986. p. 99-149.

COLL, C. et al. **Os conteúdos na reforma:** ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. Tradução: Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre:Artes Médicas, 1998. 182 p.

DANTE, L.R.; **Tudo é Matemática, 5ª série:** livro do professor. 2. ed. São Paulo: Ática, 2007. 296, 72 p.

DOBARRO, V. **Solução de problemas e tipos de mente matemática: relações com as atitudes e crenças de auto-eficácia**. 2007. 215 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P. A Solução de Problemas em Matemática. In: POZO, J. I. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, p. 43-65, 1998.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender In: POZO, J. I. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed Editora, p. 13-42, 1998.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

FREITAS, A. L. P.; ARICA, G. M. A auto-avaliação de IES: um modelo para a avaliação das disciplinas curriculares segundo a percepção do corpo discente. **Revista Iberoamericana de Educación**, Madrid, v.7, n. 44, 2008. Disponível em: < http://www.rieoei.org/1916.htm> Acesso em: 03 fev. 2009.

GOMES, M. G. **SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA: procedimentos utilizados por sujeitos com graus de escolaridade diferentes.** 1998. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

GONÇALEZ, M., H., C. **Atitudes (des) favoráveis com relação à matemática.** 1995. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

______. **Relações entre família, o gênero, o desempenho, a confiança e nas atitudes em relação à matemática.** 2000. 171 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

HOWAISS. **Dicionário da Língua Portuguesa.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. 2924 p.

IEZZI et al. **Matemática e Realidade: Ensino Fundamental - 6ª série.** São Paulo: Atual, 2005

JESUS, M. A. S. **Jogos na Educação Matemática: Uma proposta para a 5ª série do Ensino Fundamental.** 1999. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas: 1999.

______. **As atitudes e o desempenho em operações aritméticas do ponto de vista da aprendizagem significativa.** 2005. 207 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

JUSTULIN, A. M.; PIROLA, N. A. Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática na Educação Infantil. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Portugal. **Anais... .** Porto: Associação de Professores de Matemática, 2005. 1. CD-ROM.

KLAUSMEIER, H. J., GOODWIN, W**. Manual de psicologia educacional: Aprendizagem e Capacidades Humanas**. Tradução: Maria Célia Teixeira Azevedo de Abreu. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1977. 605 p.

KRULIK, S.; REIS, R. E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. 343 p.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.** Chicago: The University of Chicago Press, 1976. 416 p.

LIMA, V. S. **Mapeamento cognitivo: um estudo do conceito de frações em estudantes de magistério e professores de 1° grau (1ª a 4ª séries).** 1996. 295 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

______. **Solução de problemas: Habilidades matemáticas, flexibilidade de pensamento e criatividade.** 2001. 190 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

LINS, R. C., SILVA, H. Fascículo 4 - Frações. In: BRASIL. **Pró-letramento: Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/ Séries Iniciais do Ensino Fundamental: Matemática.** Brasília: Secretaria de Educação Básica/ MEC, 2007.

LOOS, H. **Estudo exploratório acerca do papel da ansiedade na aprendizagem da matemática quando da introdução à álgebra elementar.** 1998. 254 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) - Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 1998.

MACEDO, M. R. A família do ponto de vista psicológico: lugar seguro para crescer? **Cadernos de Pesquisa,** São Paulo, n. 91, p. 62-68, nov 1994.

MACIEL, A.; CÂMARA, M. Analisando o Rendimento de Alunos das Séries Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em Atividades Envolvendo Frações e Idéias Associadas. **Bolema,** Rio Claro, ano 20, n. 28, p. 163-177, 2007.

MALASPINA, M. C. O. **O início do ensino de fração: Uma intervenção com alunos de 2ª série do Ensino Fundamental.** 2007.172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MAYER, R. E. A Capacidade para a Matemática. In: STERNBERG, R. J. **As Capacidades Intelectuais Humanas: Uma Abordagem em Processamento de Informações**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

MCLEOD, D. B.; ADAMS, V. M. (Eds) **Affect and Mathematical Problem Solving**: **a new perspective.** New York: Springer -Verlag, 1989. 268 p.

MENEGOTTO, J. C. **Atitudes de Estudantes do Ensino Médio em Relação à Física.** 2006. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

MERLINI, V. L. **O Conceito de fração em seus diferentes significados: Um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.** 2005. 225 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998. 121 p.

MORON, C. F. **Um estudo exploratório sobre as concepções e as atitudes dos professores de Educação Infantil em relação à Matemática.** 1999. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

MORON, C. F.; BRITO, M. R.F. Atitudes e concepções dos professores de Educação Infantil em relação à Matemática. In: BRITO, M. R. F (Org) **Psicologia da Educação Matemática.** Florianópolis: Editora Insular, 2001. p. 263-277.

MOUTINHO, L. V. **Fração e seus diferentes significados: Um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.** 2005. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

NACARATO, A. et al. Números racionais: aspectos conceituais, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos. **Revista Horizontes,** Bragança Paulista, v.22, n. 1, p. 53-64, jan/jun 2004.

NEVES, L. F. **Um estudo sobre as relações entre a percepção e as expectativas dos professores e dos alunos e o desempenho em matemática.** 2002. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

NORUSIS, M. J. **SPSS for Windows Base System User's Guide Release 6.0**. Chicago: SPSS Inc., 1993.

NUNES,T.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. 248 p.

NUNES, T. et al. **The effect of situations on children´s understanding of fractions**. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, Jun 2003.

OLIVEIRA, R.G. **Aprendizagem de frações: Uma análise comparativa de dois processos diferentes de ensino na 5ª série do 1º grau.** 1996. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

PACHECO, E. R. **Um estudo de atitude em relação ao cálculo diferencial e integral, em estudantes universitários.** 1995. 94 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

PAPERT, S. **Mindstorms – Children, computers and powerful ideas**. Basic Books. New York: 1980. 230 p.

PAULA, K. C. M. **A família, o desenvolvimento das atitudes em relação à Matemática e a crença de auto-eficácia.** 2008. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

PEREIRA, J. C. R. **Análise de dados qualitativos: estratégias metodológicas para as ciências de saúde, humanas e sociais**. São Paulo: EDUSP, 1999. 156 p.

PIROLA, N. A. **Um Estudo sobre a Formação dos Conceitos de Triangulo e Paralelogramos em Alunos de Primeiro Grau.** 1995. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

______. **Solução de problemas geométricos: dificuldades e perspectivas**. 2000. 218 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: interciência, 1986. 224 p.

POSTIGO, Y.; PÉREZ ECHEVERRÍA, M. P.; SANZ, A. Un estudio acerca de las diferencias de género en la resolución de problemas científicos. In: **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 17, n. 2, p. 247-258, jun 1999.

POZO, J. I. (Org) **A solução de problemas**. Porto Alegre: ArtMed, 1998. 177 p.

PRADO, E. P. A. **Uma reflexão sobre formação de professores no Ensino da Matemática.** 2000. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

QUINTILIANO, L. C. **Conhecimento Declarativo e de Procedimento na solução de problemas algébricos.** 2005. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

RODRIGUES, W. R. **Números Racionais: Um estudo das concepções de alunos após o Ensino Formal.** 2005. 246 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

ROMANATTO, Mauro C. **Número racional: relações necessárias a sua compreensão**. 1997. 158 p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

ROMANELLI. O. de O. **História da Educação no Brasil (1930/1973)**. 12. ed. Petrópolis: Vozes, 1990. 267 p.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados: Um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental.** 2005. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SCOARIS, R. C. et al. Construção e validação de um instrumento de avaliação de atitudes frente ao uso de história da ciência no ensino de Ciências. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 6, 2007, Florianópolis. **Resumos...** Florianópolis: Associação Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, 2007, p. 211.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação: Centro de Recursos Humanos e Pesquisas Educacionais "Prof. Laerte Ramos de Carvalho". **Guias Curriculares: Matemática.** Diretora

Therezinha Fram, coordenadora geral Delma Conceição Carchedi, São Paulo: SE/CERHUPE, 1975.

SÃO PAULO (Estado). **Subsídios para a implementação do guia curricular de Matemática: Álgebra para o primeiro grau – 5ª a 8ª séries.** Almerindo Marques Bastos e Lydia Condé Lamparelli (Coord). São Paulo, SEE/ CENP, 1978. 156 p.

______. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 1º grau.** São Paulo: SEE/CENP, 1991, 181 p.

______. Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 2º grau. São Paulo: SEE/CENP, 1992, 393 p.

______ Exemplos de itens nos pontos da escala de proficiência Matemática – Saresp 2007. São Paulo: SEE, 2007**.** Disponível em: <http://saresp.edunet.sp.gov.br/2007/Arquivos/Boletim_Conteudo/Exemplos%20de%20Itens_Matematica_5ª%20a%208ª%20EF%20e%203ª%20EM.pdf> Acesso em: 27 jun. 2008.

______. **Programa de Qualidade da Escola.** São Paulo: Imprensa Oficial, 2008 a.

______. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática**. Maria Inês Fini (Coord). São Paulo: SEE/ CENP, 2008b.

______. **Sumário Executivo.** São Paulo: SEE/ CENP, 2007. Disponível em: <http://saresp.edunet.sp.gov.br/2007/Arquivos/Boletim_Conteudo/Sumário%20executivo.pdf>. Acesso em: 27 mai. 2008 c.

SILVA, C. B. da. **Atitudes em relação à Estatística: um estudo com alunos de graduação**. **Dissertação de Mestrado**. 2000. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000 a.

SILVA, C. M. **Uso do logo em sala de aula, desempenho em geometria e atitudes em relação à Matemática.** 2003. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

SILVA, M. C. O. **A matemática do curso complementar da Reforma Francisco Campos**. 2006. 211 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SILVA, M. J. F. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

______. Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. 2005. 301 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, M. V. **Variáveis atitudinais e o baixo desempenho em Matemática de alunos de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental.** 2000. 230 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000 b.

SPALETTA, J. A. **Desenvolvimento das habilidades matemáticas: um estudo sobre as relações entre o desempenho e a reversibilidade de pensamento na solução de problemas.** 1998. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

STERNBERG, R. J. **As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações.** Tradução de Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992. 282 p.

______. Allowing for thinking styles. **Educational Leadership**, Washington: Association of Supervision and Curriculum Development, v. 52, n.3, p. 36-40, 1994.

______. **Psicologia Cognitiva**. Tradução de Maria Regina Borges. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000. 494 p.

SZTAJN, P. Conteúdos, atitudes e ideologia: A formação do professor de Matemática. In: CANDAU, V. M. (Org) **Magistério – Construção cotidiana.** Petrópolis: Vozes, 1997. p. 184-204,

TAHAN, M. **O homem que calculava.** 39. ed. Rio de Janeiro: Record, 1994. 226 p.

TEIXEIRA, A. M. **O professor, o ensino de fração e o livro didático: um estudo investigativo.** 2008. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

UTSUMI, M. C. **Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos: Um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da**

habilidade matemática. 2000. 246 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

VASCONCELOS, M. C. C. **A casa e os seus mestres.** A educação no Brasil de Oitocentos. Rio de Janeiro: Gryphus, 2005. 272 p.

VENDRAMINI, C. M. M. **Implicações das atitudes e das habilidades matemáticas na aprendizagem dos conceitos de Estatística.** 2000. 249 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

VIANA, O. A. **O Conhecimento Geométrico de Alunos do CEFAM sobre Figuras Espaciais: Um Estudo das Habilidades e dos Níveis de Conceito.** 2000. 230 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

______. **O componente espacial da habilidade matemática de alunos do Ensino Médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à Matemática e à Geometria.** 2005. 279 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

XAVIER, M. E. S. P.; RIBEIRO, M. L.; NORONHA, O.M. **História da Educação: a escola no Brasil.** São Paulo: FTD, 1994.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Modelo do termo de consentimento do diretor para a coleta de dados

Eu, ____ portador (a) do RG nº ______________________, diretor (a) da Escola ____, na cidade de _______________________________ Estado _________________autorizo os alunos a participarem na pesquisa de Título: **Atitudes em relação à Matemática no Ensino Médio,** realizada por **Andresa Maria Justulin**, sob a orientação do Profº Dr. Nelson Antonio Pirola. A pesquisa tem por objetivos investigar quais as atitudes dos alunos do Ensino Médio em relação à Matemática e suas relações com solução de problemas envolvendo frações. Fui informado (a) que serão usados apenas os dados obtidos em entrevistas e nas aulas através de questionários e gravações (em áudio), sem a utilização de imagens e citação nominal.

Estou ciente de que a participação dos alunos é voluntária.

Bariri, Junho de 2008.

____

Assinatura do Responsável

Andresa Maria Justulin

Mestranda Unesp – Campus de Bauru

Programa de Pós-Graduação em Educação

para a Ciência - Faculdade de Ciências

APÊNDICE B - Modelo do termo de consentimento do aluno/ pai ou responsável para a coleta de dados

Eu,____ portador (a) do RG nº ________________________, residente à Rua (Av.) ____ nº _________, na cidade de _________________________________ Estado ___________________________ concordo em participar na pesquisa de Título: **Atitudes em relação à Matemática no Ensino Médio,** realizada por **Andresa Maria Justulin**, sob a orientação do Profº Dr. Nelson Antonio Pirola. A pesquisa tem por objetivos investigar quais as atitudes dos alunos do Ensino Médio em relação à Matemática e suas relações com solução de problemas envolvendo frações. Fui orientado (a) que serão usados apenas os dados obtidos na entrevista e na aula através de questionários e gravações (em áudio), sem a utilização de imagens e citação nominal.

Estou ciente de que minha participação é voluntária.

Bariri, Junho de 2008.

____

Assinatura do Responsável

Andresa Maria Justulin

Mestranda Unesp – Campus de Bauru

Programa de Pós-Graduação em Educação

para a Ciência - Faculdade de Ciências

APÊNDICE C - Prova Matemática de algoritmo

<u>1ª Parte - Técnica (algoritmo)</u>

Resolva os exercícios abaixo, utilizando o MMC (se necessário):

a) (BONJORNO, J. R. et al, 2006, p. 134) $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=$

b) (DANTE, L. R, 2007, p. 64) $\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=$

c) (BONJORNO, J. R. et al, 2006, p. 134) $\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=$

d) $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=$

e) (DANTE, L. R., 2007, p. 75) $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=$

f) (MORI, I.; ONAGA, D. S., 2006, p. 231) $\frac{10}{15}\cdot\frac{7}{4}=$

g) $\frac{4}{5}:\frac{2}{5}=$

h) (DANTE, L. R. et al, 2007, p. 153) $\frac{3}{8}:\frac{9}{2}=$

i) (MORI, I.; ONAGA, D. S., 2006, p. 240) $\frac{3}{4}-\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}\right)+\frac{1}{5}=$

j) (MORI, I.; ONAGA, D. S., 2006, p. 240) $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}=$

APÊNDICE D - Prova Matemática (sem MMC) e Conceitos

2ª Parte

1) Resolva os exercícios abaixo, sem utilizar o recurso do M.M.C.:

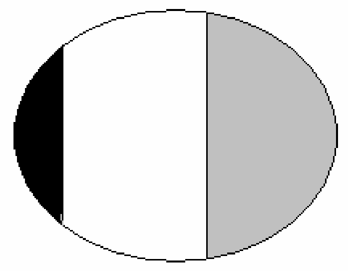
a) (DANTE, L. R, 2007, p. 64) $\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=$

b) $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=$

c) $\frac{3}{25}+\frac{2}{5}=$

2) Escreva o que você entende por fração e dê exemplos.

3) Escreva a fração correspondente à parte destacada:

a) 

b) 

APÊNDICE E - Prova Matemática de solução de problemas

3ªParte

1) (DANTE, L. R., 2007, p. 146) Pela manhã um caminhoneiro percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e à tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ele percorreu nos dois períodos?

2) (BONJORNO, J. R. et al., 2006, p. 134) Elvira gasta $\frac{4}{9}$ do seu salário com aluguel e $\frac{1}{9}$ com alimentação.

a) Que fração do salário ela gastou no total?

b) Depois de pagas essas duas despesas, que fração do salário sobrou?

3) (DANTE, L. R., 2007, p. 146) Roberta iniciou uma viagem com $\frac{5}{6}$ do tanque de gasolina abastecido e gastou durante essa viagem o equivalente a $\frac{1}{2}$ do tanque. A gasolina que sobrou equivale a que fração do tanque?

4) (CENTURIÓN, M. R. et al, 2007, p. 173) Ontem, dormi $\frac{1}{4}$ das 24 horas do dia, e estudei $\frac{1}{36}$ do tempo que estive acordado.

a) Que fração das 24 horas do dia eu estive acordado?

b) Que fração das 24 horas do dia eu estudei?

c) Quanto tempo eu estudei?

5) (DANTE, L. R., 2007, p. 149) Em uma classe $\frac{3}{4}$ dos alunos são meninas e $\frac{1}{5}$ das meninas são loiras. As meninas loiras representam que fração do total de alunos da classe?

6) (BONJORNO, J. R. et al, 2006, p. 144) Paulo quer dividir $\frac{1}{3}$ de um chocolate em 4 partes iguais. Que fração do chocolate representará cada uma dessas partes? Faça uma figura para representar essa divisão.

7) (CENTURIÓN, M. R. et al, 2007, p. 179) Num filme de TV, o mordomo assassinou seu patrão, por que achava que iria receber $\frac{1}{4}$ da herança. No entanto, o patrão deixou $\frac{2}{5}$ da herança para serem igualmente divididos entre os oito empregados da casa (um dos quais é o mordomo). O resto da herança, segundo o testamento, deveria ser doado à polícia.

a) Que fração da herança foi destinada ao mordomo?

b) Quantas vezes a quantia destinada ao mordomo cabe na que ele achava que iria receber?

REFERÊNCIAS DAS PROVAS MATEMÁTICAS

CENTURIÓN, M. R.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. **Novo Matemática na medida certa, 5ª série:** livro do professor. 10. ed. São Paulo: Scipione, 2007. 256, 40 p.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R.A.; OLIVARES, A.; **Matemática: Fazendo a diferença**: livro do professor, 5ª série. 1. ed. São Paulo: FTD, 2006. 319, 56 p.

DANTE, L.R.; **Tudo é Matemática, 5ª série:** livro do professor. 2. ed. São Paulo: Ática, 2007. 296, 72 p.

MORI, I.; ONAGA, D.S. **Matemática: Ideias e Desafios, 5ª série:** livro do professor. 14. ed. São Paulo: Saraiva, 2006. 304, 64 p.

APÊNDICE F - Levantamento de opinião dos professores

Prezado Professor do Ensino Médio,

Realizo minha pesquisa de Mestrado sobre as atitudes em relação à Matemática, o gênero e o desempenho de alunos do Ensino Médio em atividades envolvendo frações.
Espero contar com sua colaboração, respondendo com sinceridade as questões abaixo.

Muito Obrigada
Andresa

1-) Qual a importância do conceito de FRAÇÃO para os alunos do Ensino Médio?

2-) Qual a maior dificuldade que você identifica entre seus alunos do Ensino Médio em relação ao conteúdo de FRAÇÕES?

3-) Você acha que a forma com que os alunos aprendem o conceito e as operações envolvendo FRAÇÕES têm sido adequada? Por quê?

Espaço reservado para sugestões ou críticas sobre o tema abordado.

APÊNDICE G - Protocolo da entrevista 1

S_1: Aqui (Letra A) como que os de baixo são iguais, eu conservo. Como é sinal de mais, eu vou somar. 4 mais 1 dá 5 e a base, 9.

Aqui (Letra B) como os denominadores são diferentes, eu vou fazer o MMC de 10 e 4 (fatora). 2 vezes 2, 4... 4 vezes 5, 20. 20 dividido por 10, 2. 2 vezes 3, 6... mais 20 dividido por 4, 5... 5 vezes 1, 5. Conserva a base ... 6+5, 11 ... $\frac{11}{20}$

P: Então... na sua prova deu $\frac{4}{20}$. Então na verdade você errou ... por quê?

S_1: Porque eu não dividi por 10 e não multipliquei por 3. Porque, na verdade, a gente voltou a fazer esse negócio em matemática. A gente está mexendo muito com fração naquele negócio de log ... então tem que mexer muito com essas coisas ... função exponencial tem que mexer com essas coisas.

P: Então você não lembrava muito bem?

S_1: Não...

Aqui (Letra C) como a base igual, eu vou conservar. Vai dar 6 ... 2 menos 1, 1... $\frac{1}{6}$.

Aqui (Letra D) também vai dar 15. Não vou nem fazer ... 15 dividido por 5, 3 vezes 5 igual a 15... 15 vezes 4 igual a 12... 15... 5 vezes 2 igual a 10 ... $\frac{2}{15}$.

P: OK

S_1: (Letra E) Conserva a base 3, 2... 1 vezes 2, 2... $\frac{2}{3}$.

Aqui (Letra F) também é diferente, vou ter que fatorar.

P: Uma multiplicação?

S_1: É! (Fatora...) 60! 60 dividido por 15 ...

P: Aí você ta fazendo 60 dividido por 15. Aí depois você multiplicou por 10. Aí 60 você dividiu por 4 e multiplicou por 7.

S_1: Isso!

P O que você vai fazer agora?

S_1: 107 vezes 40... $\frac{4280}{60}$

P: Então ... aqui na sua prova deu $\frac{70}{60}$, como você nesse resultado?

S_1: Não lembro. Aqui (1ª prova) o debaixo eu fatorei e aqui (numerador) então eu fiz 10 vezes 7, 70. Eu não dividi pelo debaixo e nem multipliquei pelo de cima. Fiz direto.

P: E o que estaria certo... é o que você fez hoje.

S_1: Pelo que eu andei estudando... pelas coisas que agora a gente voltou, aquelas funções ... eu acharia isso aqui! Só que pelo resultado que deu ... eu achei uma coisa meio absurda.

P: Ta ... vamos para a divisão ...
Me fala o que você fez.

S_1: Conservei a base 5 e aqui eu dividi ... 4 dividido por 2 que dá 2. $\frac{2}{5}$.
Aqui (Letra H) vou ter que fatorar de novo. Aqui eu já acho que ta errado!

P: Por quê?

S_1: Então, porque se eu tive que fatorar ... fazer o MMC, eu teria que fazer essa regrinha: dividido e vezes.

P: Tá... você fez isso não fez?

S_1: Fiz... só que deu uma coisa muito assim, eu acho...

P: Assim como?

S_1: Muito grande!

P: Deu 3 dividido por 36.

S_1: Então... muito grande. Vai dar um número muito pequenininho!

P: Então... na sua prova a resposta deu 3 sobre 8.

S_1: Que seria 3 vezes 3, 9.

P: Mas aí você não dividiu pelo debaixo e multiplicou pelo de cima?

S_1: Não! Só fiz o MMC entre esses dois números.

P: Fez o MMC embaixo... e em cima, na verdade... você dividiu 9 por 3.

S_1: Isso.
E aqui (2ª Prova - atual) daria um número muito pequeno.

P: Na verdade, na sua prova, você inverteu também. Fez 9 por 3.
S_1: Também não poderia fazer isso. Porque (o 3) vem primeiro! Esse daqui (o 3) primeiro, então tem que dividir esse (o 3) por esse aqui (o 9).

P: Vai para a próxima?

S_1: Eu vou.
Nessa aqui (Letra I) eu teria que resolver primeiro o que tá dentro do parênteses ... vou fatorar.

P: Vai me falando o que você ta falando... deu 120 (o MMC)...

S_1: Isso. Daí eu coloquei dentro do parênteses e é o primeiro que vai ser aqui. Daí eu coloquei esse aqui ($\frac{1}{5}$) que eu vou deixar pra resolver por último.

P: Daí 120 por 5, deu 24. Aí você ta fazendo 24 vezes 6?

S_1: Vezes 6... 144! Menos 120 dividido por 6... Agora eu fiz 120 dividido por 8, deu 15. 15 vezes 9, 135. Agora eu vou ter que resolver $\left(\frac{144-80+135}{120}\right)$

P: Vc tá... 135...

S_1: Vezes 64

P: Por quê?

S_1: Porque eu fiz... para resolver primeiro entre parênteses 144 menos 80 vezes 35. Agora daqui pra frente eu não saberia fazer...

P: Por quê?

S_1: Porque eu não saberia se deixaria esse resultado aqui entre parênteses e não sei se posso somar... somar porque aqui é menos e aqui é mais... não sei se somo, se faço menos... subtraio...

P: Porque na sua prova, você chegou num resultado diferente... acho que aqui você subtraiu e somou... direto!

S_1: Humm...

P: Só que no lugar que ta 8642, que foi o que você achou sobre 120... ta 36 sobre 120, só! Não sei se você multiplicou... não sei o que você fez aqui.

S_1: 4 vezes 9, 36. Eu fiz primeiro essa continha aqui ó...

P: Você dividiu... direto...?

S_1: 6 menos 2, 4... 4 vezes 9, 36.
P: O que você acha que ta certo: esse ou o que você estava fazendo lá?

S_1: Então... é aquela questão da regrinha né... o divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima.

P: Aqui você não fez isso em cima?

S_1: Não!

P: Aqui você só fez no primeiro e aí você já multiplicou por 2, é isso?

S_1: Huhum...

P: Aí você não usou essa regrinha que você ta falando...

S_1: Não usei!

P: E o debaixo (Letra J)? O que você faria primeiro?

S_1: Tirar o MMC, eu acho. Fiz o MMC e deu 48.

P: Tá... e agora?

S_1: Agora então... eu não sei se eu faço direto aqui em cima sem usar dividido e multiplicado ou se eu faço a regrinha.

P: O que você acha que tá certo?
Na prova acho que você multiplicou direto.

S_1: É... eu fiz direto né?
Eu faria assim então ... $\frac{12}{48}$ ... + 2... 2 dividido por 1, 2... 2 mais 1,3... vezes 4 igual a 12.

P: Diferente do que você fez aqui né?
Aqui você multiplicou... você dividiu primeiro, depois multiplicou e depois você somou. Você não usou a regrinha.

S_1: É... num aqui... eu não usei a regrinha.

P: E o que você deixaria? Como resultado final?

S_1: Ah... eu deixaria esse daqui $\left(\frac{12}{48}\right)$.

P: OK. Vamos para a segunda parte então.
Nessa segunda parte você não pode utilizar o MMC. Pode usar qualquer coisa que você achar que ta certo, menos o MMC.

S_1: Eu somaria 10 com 4, 14... 3 mais 1, 4.

P: Por que você faria isso?

S_1: Por que se eu não posso usar MMC e ta somando... então eu somaria então a base.

P: Mas isso estaria certo?

S_1: Pra mim, não!

P: O exercício pede outra forma, mas correta né?... Você acha que como você não sabe outra forma, então usa essa. Só que aqui (1^a prova)... olha... deu $\frac{4}{6}$ ... aí eu fiquei sem entender o que você fez.

S_1: Só se eu fiz 10 menos 4 e deu 6...

P: Mas porque você usa isso?

S_1: Porque... eu não lembro.

P: Embaixo também você fez a mesma coisa

S_1: É que assim... menos seria vezes, mais dividido... ou é menos que é dividido?

P: Bom... no Segundo (Letra B) como que ficaria então?

S_1: 5 menos 3, 2 ... 4 menos 2, 2... $\frac{2}{2}$.

P: Deu $\frac{2}{2}$ e parou aí?

S_1: Aham...

P: Ah tá!

S_1: 25 mais 5, 30... 3 mais 2,5... $\left(\frac{5}{30}\right)$

P: Na 2, o que você entende por fração?

S_1: Fração... eu tenho um todo e eu pego uma parte dele. Se eu vou comer uma pizza... na pizza tem 8 pedaços, eu como dois... eu comi dois pedaços do 8 que era a quantidade inteira de pedaços da pizza.

P: Vamos pra 3 então... as partes pintadas dessa figura representam quanto do todo?

S_1: $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$

P: Por quê?

S_1: Porque esse pedacinho aqui se eu pudesse... porque não tá repartido no meio isso aqui... se eu pudesse colocar ele aqui, daria pelo tamanho porque ele é memorzinho e mais gordinho... então eu colocaria ele aqui, nesse espaço aqui.

P: E mesmo que não seja repartido no meio, eu posso fazer isso normal.

S_1: Acho que pode.

P: É porque aqui... a sua resposta foi $\frac{2}{3}$.

S_1: É... porque eu contei 2 que estavam pintados, sobre 3 que estavam repartidos.

P: E o que você acha que fica mais certo aí?

S_1: Ah... eu acho que é esse aqui $\left(\frac{1}{2}\right)$

P: OK... vamos lá. Agora nós vamos para os problemas.

S_1: Um caminhoneiro percorreu $\frac{2}{3}$ pela manhã e de tarde ele percorreu mais $\frac{1}{4}$. Eu somaria então 4 com 3, 7. Eu faria assim... e 2 mais 1,3... $\frac{3}{7}$ do caminho, ele percorreu.

P: É... você colocou isso na prova também.

S_1: (Lê o 2º problema) A base é igual, eu deixo igual... 9... 4 mais 1,5. Ela gastou no total $\frac{5}{9}$ do salário dela.

P: Aqui você somou 9 com 9, 18!

S_1: Nossa! (Risos)

Aqui (Letra B) eu já faria... porque o inteiro então seria $\frac{9}{9}$ menos $\frac{5}{9}$ que ela gastou com as contas. A base mantem igual... 9 menos 5, 4.

P: Aqui seu raciocínio foi diferente... você colocou que o inteiro era $\frac{18}{18}$. Acho que você pensou da mesma forma porém com a base 18. Aí você tirou 5 de 18 sobre $\frac{13}{18}$, mas aqui sua base era 18, é isso?

S_1: Aham...

P: Deixa eu te perguntar uma coisa em relação ao 1º exercício: Não dava pra aplicar a regrinha aí?

S_1: Daria também. Se eu fatorasse... fizesse o MMC...

P: E o que estaria certo: a forma que você fez ou a forma com a regrinha?

S_1: Com a regrinha então, eu acho. Se fosse na minha prova de matemática, a professora já dava um piti...

P: Então porque você fez assim?

S_1: Porque na hora eu pensei assim... que eu poderia somar porque esse daqui de baixo seria o salário todo dela.

P: E se fosse com a regrinha como ficaria?

S_1: $\frac{11}{12}$ ficaria com a regrinha

P: Então vamos continuar! Vamos para a terceira...

S_1: Isso! Aqui eu vou fazer com a regrinha então. Fica 12 dividido por 6, 2... 2 vezes 5, 10... menos 3. Mantenho a base ... 10 menos 6, 4... $\frac{4}{12}$ da gasolina.

P: Na sua prova você fez uma coisa estranha: você subtraiu fazendo 5 menos 1 igual a 4... numerador... denominador 6 menos 2, deu 4 também. Daí sobrou $\frac{4}{4}$ do tanque. Mas $\frac{4}{4}$ não é um inteiro?

S_1: É! (risos)

P: O que aconteceu? Você não percebeu que tinha alguma coisa errada?

S_1: Não ...

P: Você não analisou a resposta ...?

S_1: Eu fiz assim: Se eu não usasse a regrinha agora eu faria do jeito que eu fiz aí... e daria $\frac{4}{4}$.

P: Mas ficaria um tanto contraditório porque você gasta um montão do tanque e ainda sobra um tanque inteiro. É estranho!...

S_1: É! Ta certo!

P: Então sua resposta no 3º foi $\frac{4}{12}$

S_1: Isso!

P: Bom... vamos continuar então o exercício 4

S_1: $\frac{1}{4}$ de 24 horas

P: Então você colocou $\frac{1}{4}$ igual a...

S_1: $\frac{24}{1}$ ... quando não tem nada embaixo coloca 1. E faz o MMC, que vai dar 4. Agora vou dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima. Deu $\frac{91}{4}$

P: Aí você fez $\frac{1+90}{4}$?

S_1: Isso.

P: Você fez uma soma?

S_1: Isso.

P: E por que você fez uma soma?

S_1: Eu acho que esse aqui é o B. Agora tenho que fazer o A. Agora $\frac{1}{4}$ para saber quantas horas que eu fiquei acordada... $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{36}$, o MMC 36... 36 dividido por 4 dá 9 mais... 1

P: Então quanto você encontrou?

S_1: Deu $\frac{10}{36}$ ... foi a fração de horas que eu fiquei acordada.

P: Só uma coisinha: aqui na sua prova que você fez anteriormente, você ao invés de fazer uma soma, você fez uma divisão... o que você acha que ta certo: uma soma? Uma divisão? Qual é a operação correta?

S_1: Eu acho que é soma.

P: Ta! Então vamos para a Letra C. Quanto tempo eu estudei.
Vai me falando o que você ta fazendo.

S_1: Agora eu vou fazer $\frac{4}{4}$ que é o total das horas... eu durmi $\frac{1}{4}$ e o todo das horas seria $\frac{4}{4}$ menos $\frac{1}{36}$ que é o tempo que eu estudei.

P: Huhum...

S_1: O MMC deu 36... 36 dividido por 4, 9 ... 9 vezes 4... deu $\frac{35}{36}$

P: Huhum... e por que uma subtração?

S_1: Porque eu durmi $\frac{1}{4}$ das 24 horas... $\frac{4}{4}$ seria o total de horas. Eu estudei $\frac{1}{3}$ ... (Fica pensativa)

Aqui, o 5 então eu faria assim... $\frac{3}{4}$ menos ... o $\frac{3}{4}$ são o todo das meninas menos $\frac{1}{5}$ que são loiras, o MMC... então aqui eu fiz $\frac{3}{4}$ menos $\frac{1}{5}$, o MMC 20... 15 menos 4... $\frac{11}{20}$ das meninas são... loiras.

P: Então... me fala o que você ta fazendo...

S_1: (No problema 6) $\frac{1}{3}$ que eu vou dividir por 4... só que 1 dividido por 4...

P: Como você faria isso? ... Ta... você ta falando que 1 não dá pra dividir por 4, o que você faria aí? Por que aqui na prova, você não fez... deixou em branco.

S_1: Se fosse por desenho eu saberia fazer.

P: Pode fazer! Ta falando também pra representar.

S_1: Chocolatinho (desenha um retângulo)... seria $\frac{1}{3}$. Assim, $\frac{1}{3}$ ... eu dividi por 4... só sei fazer isso só... (pega as 3 partes do chocolate e divide o total em e pinta tudo)

P: Mas aí você pegou o chocolate inteiro?

S_1: É! Seria $\frac{1}{3}$ assim... esse pedacinho do chocolate, a divisória dele aqui... eu dividi por 4. Eu só sei fazer isso só!

P: Mas aí você pegou o chocolate inteiro, não pegou?

S_1: É... peguei o chocolate inteiro, $\frac{1}{3}$.

P: Ta... mas você pegou $\frac{1}{3}$ ou pegou o chocolate inteiro?

S_1: Esse daqui (o todo) então seria $\frac{3}{3}$.

P: Ta, esse aí é o inteiro.

S_1: E o $\frac{1}{3}$ seria esse aqui. O $\frac{1}{3}$ seria só essa parte aqui.

P: Ta... aí ele pegou essa parte...

S_1: Eu faria assim... (divide uma das partes da figura em 4)

P: Ta certo!
O 7º então é do mordomo...

S_1: É! Então eu faria $\frac{2}{5}$ dividido pelos 8 empregados, para dar uma parte igual para cada um... eles iriam receber igualmente. Agora o problema é a conta né... que nem nos chocolates.

P: Aqui foi uma divisão também... na prova você também fez isso.

S_1: Agora eu não sei como que eu faço... $\frac{2}{5}$ dividido por 8... $\frac{2}{5}$ dividido por $\frac{8}{1}$ ... vai dar 6... 2 dividido por 8... 0,4 será?

P: O seu problema ta em dividir 2 por 8?

S_1: Ta... eu acho que daria 0,4...

P: Então.... aqui apareceu um $\frac{16}{5}$

S_1: Jesus Cristo!!! (risos)

P: Que você fez aqui?

S_1: Eu acho que eu fiz 2 vezes 8, 16

P: Será que você não fez 40 dividido por 5, 8... e aí multiplicou por 2?

S_1: 40 dividido por 5?

P: É porque tirou o MMC, eu acho... debaixo... entre 5... bom, também não daria! Você inverteu a 2ª fração aqui... $\frac{2}{5}$ dividido por $\frac{1}{8}$. Aí acho que você tirou o MMC... mas não que isso esteja certo... faz do jeito que você achar que esteja correto.

S_1: Não sei... porque se for multiplicação não vai ser... tem que ser divisão.

P: É... porque aqui você inverteu a 2ª fração.

S_1: Eu acho que 2 dividido por 8 daria 0,4... $\frac{2}{5}$

P: É possível isso?

S_1: Acho que não.
Eu dividi 8 por 2, acho que não posso. Eu não saberia fazer isso...

P: Huhum... e a letra B?

S_1: Esse aqui eu teria que saber esse daqui (Letra A) pra fazer mais de menos para saber... e quanto poderia caber.

P: Aqui você fez $\frac{1}{4}$ dividido por $\frac{8}{1}$, aí você inverteu a 2ª fração... aí encontrou $\frac{2}{8}$, aí depois você fez uma subtração. Mas você acha que o procedimento também não está certo?

S_1: Não... porque eu não poderia inverter assim.

P: Não poderia?

S_1: Não... porque só posso inverter uma fração quando tem elevado a um número negativo.

P: Então... você falou que só pode inverter quando está elevado a um número negativo?

S_1: É... Na B eu precisaria desse resultado pra poder fazer... eu faria esse aqui menos o $\frac{1}{4}$ que ele achava que iria receber... daí daria o tanto... aqui daria quantas vezes o que ele ganhou caberia dentro desse $\frac{1}{4}$ que ele queria receber.

P: OK... então ta bom. Você quer resolver?

S_1: Não... eu não saberia.

P: Então ta bom... você quer acrescentar alguma coisa?

S_1: Não. Acho que não!

APÊNDICE H - Protocolo da entrevista 2

S_2: Bom... aqui pelo que eu aprendi, faz MMC entre os dois. Aí o MMC... vai dar 9... aí eu coloco o 9 aqui (no denominador), normal... e faço dividido, vai dar 4 mais 1, que vai dar $\frac{5}{9}$.

Aqui (Letra B) vai ser a mesma coisa: MMC entre 10 e 4. Aí vai multiplicando aqui... 20... vai dividindo aqui.

P: É... você ta dividindo pelo debaixo...

S_2: Dividindo pelo debaixo e multiplicando pelo de cima. 20 por 10 vai dar 1... vezes 3, 3 mais... vai dar 5 vezes 1, 5. Aí soma o de cima... $\frac{9}{20}$.

P: Então aqui na sua resposta você colocou 11

S_2: 11?

P: É! Porque deu 6 mais 5, aí você cancelou o 20 (do denominador)

S_2: É... eu cancelei o 20... mas pra cancelar seria dos 2 lados.

P: É... pode cancelar ou não?

S_2: O certo ali não é pra cancelar.

P: Ta... então o que vai ta certo?
Ta... só mais uma coisa: 20 por 10, dá 1?

S_2: Daí... não sei divisão.

P: Você não sabe?

S_2: Sei assim... mas não muito assim, de cabeça.

P: 20 dividido por 10, quanto que daria?

S_2: Por 10 (faz a conta...), daria 2?

P: Daria 2. Aí aqui... 2 vezes 3, daria 6. Porque aqui na sua prova, você colocou 6... por isso que eu to te perguntando.

S_2: Então seria 6 no lugar do 3

P: E a resposta então seria...

S_2: $\frac{11}{20}$ ... aí não cancelaria o 20.

Essa aqui é a mesma, né... 6 multiplicaria pelo debaixo... dividiria pelo debaixo, multiplicaria pelo de cima... $\frac{1}{6}$. Seria 22... não, é menos ... seria $\frac{2}{5}$.

P: $\frac{2}{5}$! Então... na sua prova você também fez uma coisa: 15... o denominador foi 15, só que aí em cima ficou 3 menos 10... você cortou o 15, ficou só o 7. Então o que ta certo é o que você ta fazendo hoje?

S_2: É!

P: ta! Vamo lá!... Me fala o que você ta fazendo.

S_2: Aqui eu to multiplicando embaixo e em cima. Fazendo uma solução só.

P: Então o que é que deu...?

S_2: Deu... em cima deu 2 né... 2 vezes 1 e embaixo 3 vezes 3, 9... $\frac{2}{9}$.

Aqui na F também ... deu errado a minha F, não deu?

P: Huhum...

S_2: Aqui em cima daria 70 e embaixo... ficaria $\frac{70}{70}$

P: $\frac{70}{70}$?

S_2: É... porque 10 vezes 7, 70... 15 vezes 4 eu fiz aqui, deu 70.

P: É porque aqui deu 40 vezes 105 por 60, vai dar 4200. Será... o que você fez? Você dividiu 60 por 15 e multiplicou de novo?

S_2: Ah, eu não lembro! Porque aqui eu cancelei, né? Cancelei e multipliquei só o de cima e não era pra ter cancelado.

P: É... mas você multiplicou o de cima como? Você não me explicou o de cima... aqui deu 40 por 105.

S_2: Eu fiz MMC entre 15 e 4, que não era pra ter feito. Aí em cima eu fiz dividido pelo debaixo e multiplicado pelo de cima. Daí então aqui eu fiz multiplicação e na verdade seria multiplicação em cima e embaixo. A divisão eu... não lembro como faz.

P: Aqui deu $\frac{2}{5}$. Acho que você dividiu e conservou né?

S_2: É... acho que eu conservei a base e mexi em cima

P: Faz como você acha que vai ta correto ou como você faria

S_2: Eu num... vou fazer pelo método do MMC... daria mesma coisa né... daria $\frac{2}{5}$, eu acho que é.

P: É! Eu acho que é isso que você fez mesmo

S_2: E aqui (Letra H) a mesma coisa eu fiz.

P: Ta! Só me fala o que você ta fazendo.

S_2: Eu fiz MMC entre 8 e 2, né... aí divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima ... multiplicaria os dois aqui e daria o resultado e embaixo conservaria

P: E em cima quanto ficaria?

S_2: 12

P: Aí no caso, você dividiu 36 por 3...

S_2: É!

P: Ou 3 por 36?

S_2: Ah... eu multiplico o maior pelo menor. Multiplico não .... divido.
Nesse daqui (Letra I) eu resolveria primeiro dentro do parênteses e depois fora. Então aí poderia tirar fora... faria MMC né... só não faria MMC pelo $\frac{9}{8}$ aqui né, tiraria ele.

P: Por quê?

S_2: Porque que nem faria aqui no exercício C, multiplica em cima e embaixo. Então faria só esse e depois multiplica.

P: Certo

S_2: 15... vai dar...

P: !5 dividido por 5

S_2: Dá 2... vezes 6... 12... menos 5 vezes 2, 10. $\frac{2}{5}$ aí multiplica por $\frac{9}{8}$ ... dá $\frac{18}{120}$. Aí colocaria no lugar desse daqui (entre parênteses)... $\frac{18}{120}$. Faria MMC de novo dos três aqui: 120, de 4 e de 5. Aí seria tudo 60... dividiria pelo debaixo e multiplica pelo de cima. 60 por 4... 45 vezes 3, 175... menos 120 por 60... 2 vezes 18, 36... mais 5 por 60, 12. Aí faria a sominha... daria $\frac{139}{60}$.

P: Aqui sua resposta também foi totalmente diferente, em todos os aspectos ainda. Seu denominador foi 120... total ... você não fez primeiro dentro dos parênteses... deu 120 e a resposta também deu diferente. Então acho que você deixaria essa que você fez hoje?

S_2: É!

P: Certo! E a J...

S_2: A J eu não sei fazer.

P: Por que não?

S_2: Não sei por onde começa... eu acho que primeiro eu começaria pela multiplicação aqui... pra ficar uma fração só. Aí depois aí eu já não sei...

P: Quer tentar fazer ou não?

S_2: Tentar... ver o que vai sair... (faz a multiplicação)

P: O que ficou?

S_2: Ficou $\frac{2}{3}$ dividido por $\frac{1}{2}$ mais $\frac{4}{24}$ ... aí acho que faria primeira a divisão pra somar com 24. E aqui eu faria menos na divisão pra fazer uma... seria $\frac{1}{1}$ mais $\frac{4}{24}$. Eu acho... eu não tenho certeza.

P: Huhum... bom, por que você fez menos na divisão?

S_2: Quando é multiplicação é mais né... não, é vezes! E na divisão eu acho que é menos.

P: Aí ficou $\frac{1}{1}$ mais $\frac{4}{24}$? E aí a resposta deu $\frac{4}{24}$?

S_2: Aqui faria o MMC... ficaria 24 aqui (denominador)... 24 aqui em cima mais 4... vai dar $\frac{28}{24}$.

P: Certo. Você fez MMC aí né? Vamos para a segunda parte então. Na segunda parte você não pode usar o MMC!
S_2: Eu poderia usar o MMC aqui embaixo?

P: Não! Você pode usar uma representação.

S_2: Como não é MMC, poderia somar aqui em cima. Mas embaixo que eu não sei o que faria.

P: Por que aqui você usou o desenho?

S_2: Pra quantas partes desse... de 10 tirou 3 e nessa de 4 tirou 1 e daí somou as partes.

P: Você acha melhor o que? O desenho ou você sabe algum outro jeito assim que também esteja correto?

S_2: Ali eu fiz pelo desenho, mas não poderia embaixo somar as bases. Do jeito que eu aprendi não poderia, seria por MMC. Mas aí pelo desenho, eu somei. Aí outra forma assim, eu não sei.

P: Então você acha que essa forma de representação que você fez aqui não pode?

S_2: Não pode.

P: Desse jeito aqui não pode?

S_2: Porque MMC é uma multiplicação, né... só... se multiplicar esses dois de baixo...

P: Se você multiplicar os dois de baixo quanto vai dar?

S_2: Dá 40. Mas aí e o de cima? Porque aí se fosse multiplicar ficaria 40 embaixo né... e como multiplica embaixo poderia multiplicar em cima também. Iria ficar 3.

P: Aí seria uma multiplicação e não uma soma!

S_2: É! Multiplicação... ou pode dividir o 3 pelo 10 e o 1 pelo 4... aí o resultado soma, mas aí é só em fração a resposta, não é?

P: Em fração... de outra forma então...

S_2: De outra forma, tirando o MMC, eu não sei... não lembro!

P: Então vamos pra segunda né. O que você entende por fração e dê exemplos.

S_2: Ah... Fração é assim... você pega um todo e divide ela em partes e pega um tanto das partes dela. Um exemplo é uma barra de chocolate: vocÊ divide em 10 pedaços pra 10 crianças e divide certinho pra cada criança, sem pedaço de chocolate para cada criança.

P: Certo... No terceiro então letra A tem que falar a fração que corresponde a esse desenho.

S_2: ... mas não em 3 partes iguais!

P: Por quê? Tem que ser partes iguais?

S_2: É... seria assim por exemplo: você dividiu em 10 partes iguais, aí por exemplo (usa uma figura auxiliar) essa aqui seria uma parte, essa aqui seria duas partes e essa outra significa o resto.

P: Mas e nesse caso?

S_2: Que a bola... o círculo aqui seria 100% da figura... eu teria que saber quanto vale cada parte... 50% mais ou menos aqui...

P: É... aqui você nem tentou fazer!

S_2: Poderia ser embaixo 100, total da bola, mas em cima eu não saberia pôr... ta dividido em 3 partes, mas não em três partes iguais!

P: E não pode fazer uma soma de fração assim, se as partes não forem iguais?

S_2: É... teria que saber quanto vale cada pedaço. E olhando assim eu não sei quanto vale!

P: E a letra B?

S_2: A B tem um pedaço aqui né... $\frac{2}{4}$

P: Bom, então vamos para a terceira parte então... problemas!

S_2: De manhã ele percorreu $\frac{2}{3}$ e a tarde $\frac{1}{4}$. Seria uma soma dos 2 caminhos... $\frac{2}{3}$ mais $\frac{1}{4}$, mas pode usar MMC, não pode?

P: Pode.

S_2: 2 vezes 2, 4... vezes 3, 16... ah não, é 12! Daí pega pelo debaixo... divide pelo debaixo... seria 4 vezes 2, 8... 3 vezes 1, 3. Aí somaria o de cima... $\frac{11}{12}$.

P: Aqui você tentou fazer o desenho.

S_2: É... aí eu somei, o que também não poderia porque eu tinha que fazer o MMC.

P: Vamos para o número 2. Só me fala o que você ta fazendo, como você ta pensando...

S_2: To lendo por enquanto. Ah seria uma soma $\frac{4}{9}$ por $\frac{1}{9}$... pra ver quanto ela gastou... do salário dela, que é do aluguel e da alimentação. $\frac{4}{9}$ mais $\frac{1}{9}$ igual a $\frac{5}{9}$ que ela gastou do salário dela. Depois de pagas todas as despesas, que fração do salário sobrou? Aí se ela gastou de 9 partes ela gastou 5, sobrou 4 partes para completar o 9... seria $\frac{4}{9}$, eu acho! Aí eu acertei?

P: Acertou!

S_2: (Lê o problema 3) Seria essa fração menos essa: $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$

P: E quanto daria isso?

S_2: MMC 6, 5 menos 1... daria $\frac{4}{6}$. Essa eu errei né?

P: Bom... aqui ta assim: 6... o MMC deu 6, 6 dividido...

S_2: Ah... aqui é 2... aqui é 3 (no numerador). Vai dar $\frac{2}{6}$. Eu errei essa...

P: Aqui sua resposta foi $\frac{4}{6}$

S_2: Foi... da primeira.

P: $\frac{2}{6}$ então...

S_2: É... $\frac{2}{6}$... conta também o tempo que eu estudei, que eu fiquei acordado?

P: Conta também

S_2: Seria... $\frac{1}{4}-\frac{1}{36}$

P: Por que $\frac{1}{4}-\frac{1}{36}$?

S_2: Porque ele dormiu $\frac{1}{4}$ de 24, mas depois que ele acordou ele estudou $\frac{1}{36}$... mas então, acho que não é não!... essa daqui eu não sei fazer!

P: Nenhuma alternativa: nem a letra A, nem letra B, nem letra C...

S_2: Quanto tempo eu estudei, que é a C... eu acho que a resposta é $\frac{1}{4}$

P: Por que você acha que é $\frac{1}{4}$?

S_2: Ah... porque aqui ta falando que ele... ah não... estudou... pensei que era dormiu... não, também não sei fazer!

P: E... o exercício 6?

S_2: Esse aqui é o total... de meninas na classe. Aí... de 4, 3 são meninas. Desse 3 eu somaria em $\frac{1}{5}$... seria $\frac{3}{4}-\frac{1}{5}$?

P: Pode ser... quanto daria isso?

S_2: O MMC daria 20, seria 2 vezes 2, dá 4. Aí 4 vezes 5...

P: Por que você ta fazendo uma subtração aí?

S_2: Porque esse aqui é o total de meninas que tem na sala...

P: $\frac{3}{4}$?

S_2: $\frac{3}{4}$de.. que tem de meninas na sala... $\frac{3}{4}$ que seria sem os meninos... daí $\frac{3}{4}$ tiraria $\frac{1}{5}$, seria...

P: Do resultado você saberia a fração das loiras em relação à sala?

S_2: Eu acho que sim... seria: 5 com 10, 15...4... seria $\frac{11}{20}$

P: Aqui você encontrou o valor $\frac{5}{3}$... ta errado o resultado como você pensou pra fazer isso ou você colocou um valor que você achava que tava certo?

S_2: Eu não saberia explicar

P: Você acha que você chutou um valor?

S_2: É! Porque daí eu pegaria o 3 que é das meninas aqui né... $\frac{3}{4}$ e colocaria o 5. Daí ficaria $\frac{11}{20}$... o jeito que eu pensei, acho que ta errado!

P: E o exercício 6?

S_2: (Lê o problema) É... seria uma barra de chocolate né... dividida em 3 partes, pegaria uma. Dessa 1 parte faria de novo em 10 partes que seria 100 da barra (Faz o desenho) e pegaria 4 partes.

P: É... não foi isso que você fez!

S_2: Não?

P: Não! Aqui você desenhou 3, pegou 1 e aí você dividiu em 12... pedaços.

S_2: Mas eu acho que esse daqui é o...

P: Mas por que você dividiu em 10?

S_2: Ah... 100, né? Dividi em 10 pra ficar com partes iguais...

P: Tudo bem! E no último exercício...

S_2: (Lê o problema) $\frac{2}{5}$ da herança seriam para os 8 empregados. Desses $\frac{2}{5}$, o 5 seria o total da herança e 2 seria dos empregados. Pegaria 2 pra dividir para os 8. Não sei fazer essa!

P: Aqui você colocou $\frac{1}{100}$

S_2: É porque eu acho que eu peguei o total 100, né... e dividi... e pus 5.

P: Não é a forma correta?

S_2: Não!

P: E a letra B?

S_2: A B pra fazer eu deveria ter o valor que o mordomo receberia aqui... pra saber quanto que cabe dentro de $\frac{1}{4}$... e como não tem a A, não dá pra fazer a B.

P: Então você não conseguiria esse?

S_2: Eu não consigo ver como fazer aqui... porque o jeito que eu imagino, depois que dividiu pelos 2, ficaria que nem aqui: dividiria essas duas partes em 10 cada uma, daria 20 e pegaria 8. Ficaria $\frac{8}{20}$.

Dividiria por 2 aqui e pegaria essas 2 partes pra dividir em 10. Mas aí eu não saberia como pegar a fração do mordomo.

P: Tudo bem então.

S_2: Acho que a do mordomo seria $\frac{1}{20}$ porque ele pegaria uma parte... então ficaria acho que $\frac{1}{20}$. Agora aqui... essa aqui eu não sei fazer. Quanto que cabe de 20 no 4.

P: Então ta bom, certo? Tem mais alguma coisa pra falar?

S_2: Não, não.

APÊNDICE I - Protocolo da entrevista 3

S_3: Então o exercício A, eu igualei o denominador deu 9, somei os numeradores deu 5. Aí $\frac{5}{9}$.
A questão B eu tirei o MMC de 10 e 4 e encontrei 20. Aí eu dividi pelo debaixo e multipliquei pelo de cima e encontrei 6 + 5. Aí eu somei e deu $\frac{11}{20}$.
A questão C eu deixei o denominador como 6 mesmo e subtrai o numerador 2-1.
A questão D eu tirei o MMC de 5 e 3, deu 45. Agora eu vou dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima. Aí 45 dividido por 5 dá 9 ...9X4=36. Aí 45 dividido por 3 ... dá 15. Agora só subtrair os denominadores... pode ver aqui e por direto (na prova anterior)

P: Não... na verdade você fez uma coisa diferente aqui neste daqui

S_3: (olha a prova) Acho que foi na hora de calcular o MMC não foi?

P: huhum

S_3: Vou tentar calcular denovo... (calcula)... Ah... Então o MMC é 15. Aí 15 dividido por 5 dá 3... 3X4... 12. Daí ficou 12-8 sobre 15.

P: -8?

S_3: É! Aí deu 8 também?

P: Não!

S_3: Não... (revê)

P: É... o MMC ta correto... só a parte de cima que tá um pouquinho diferente.

S_3: ... (Revê o procedimento) Ah... 5X2... 10.

P: Ah... Então como que ficou?

S_3: Aí 12-10... Ficou 2 sobre 15.

P: Isso... Isso mesmo! Agora tá certo... rs

S_3: A questão E... eu acho que multipliquei 3X3 e 1X2
Aqui (questão F) eu fiz a mesma coisa. Multipliquei os numeradores e denominadores. Deu $\frac{70}{60}$. Dá pra simplificar por 10 eu acho...
Aqui na hora de dividir, eu não sei se conseguir fazer essa, mas acho que sim.

P: Conseguiu...

S_3: Consegui? ... Deu 2 sobre 1?

P: Deu... Mas o que você fez?
S_3: Então... Eu dividi os numeradores e denominadores. Aí 4 dividido por 2, 2. 5 dividido por 5, 1.

P: Certo...

S_3: A questão H eu fiz a mesma coisa... dividi ... Mas esse daqui não dá pra dividir... eu vou tentar dividir o denominador ... só o numerador acho que não ...

P: Quando você dividiu o denominador que valor que você encontrou?

S_3: 4

P: 4! O numerador você acha que não dá pra dividir então?

S_3: Aham

P: Porque aqui você encontrou o valor 3

S_3: 3? Então acho que eu inverti, eu acho.

P: Você inverteu?

S_3: É... eu fiz 9 dividido por 3.
A questão I... Essa eu não consegui fazer...

P: Quer tentar fazer?

S_3: Vou tentar! Esse daqui (X) é o sinal da multiplicação né?

P: É!

S_3: Então eu vou tirar o MMC de todos os denominadores. (Calcula o MMC...) Então denominador deu 120. Não... Não... Acho que ta errado! Primeiro eu vou ter que resolver a multiplicação

P: Você vai fazer a multiplicação de que?

S_3: Dessas duas frações aqui de dentro dos parênteses.

P: Ta... me fala qual que é

S_3: É $\frac{2}{3}$ vezes $\frac{9}{8}$.

P: Ta... a sua multiplicação então deu quanto?

S_3: É... $\frac{18}{24}$.

P: certo. E agora, o que você vai fazer?

S_3: Agora tem que tirar o MMC de todos para fazer a subtração deles e depois a adição

P: Ta... então você vai fazer o MMC de que?

S_3: O MMC de 4, 5 e 24 que são os denominadores... (resolve). Aí eu encontrei 120.

Agora eu vou escrever a equação de novo só que com os termos já multiplicados par ficar mais fácil na hora de dividir e multiplicar pelo de cima.

P: Vai me falando o que você está escrevendo.

S_3: Então vai... $\frac{3}{4}$ menos $\frac{6}{5}$ menos $\frac{18}{24}$ mais $\frac{1}{5}$. Agora vou dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima. Aí o primeiro numerador encontrei como 90. O segundo encontrei... não multipliquei ainda ... 144. O terceiro numerador encontrei como 90.
Agora eu vou resolver essa conta... 90-144-90+24.

P: Você está somando os positivos, somando os negativos e depois você vai tirar tudo? subtrair?

S_3: Aham ... Então vai dar 300 e... não pera aí ... vai dar 120 negativo sobre 120? É... acho que é isso!
Vou tentar fazer a J ...

P: Só circula a sua resposta aí pra mim.

S_3: Vou fazer a J agora. Primeiro vou fazer essa divisão de frações que é $\frac{2}{3}$ dividido por $\frac{1}{2}$. Aí vai dar ... vou tentar dividir de outra maneira ... vou colocar $\frac{2}{3}$ dividido por $\frac{1}{2}$. Encontrei $\frac{4}{3}$.

P: Certo...

S_3: Agora vou multiplicar por essa outra fração que é $\frac{1}{8}$ vezes $\frac{4}{3}$

P: Ok... Quanto que deu?

S_3: 4 sobre 24

P: Ok

S_3: Agora vou somar elas. Tirar o MMC de 3 e 24 ... Encontrei como denominador o 40. Agora vou dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima.

P: Você ta dividindo 40 por 24 e sua conta não está dando exata?

S_3: É... vai dar um numero com vírgula

P: Ta então você vai ter que fazer o que? Deveria ser um múltiplo certo? Pelo MMC...

S_3: É?

P: Confere o valor do seu MMC ...

S_3: ah verdade... deu 24.

P: Me Fala o que você ta fazendo .

S_3: Ta... agora eu dividi 24 por 3... aí deu 8 ... 8X4... 32, mais 24 dividido por 4 ... 1. Agora eu vou somar 32 mais 4 ... 36 sobre 24.

P: Certo
Agora a gente vai pra segunda parte.
A segunda parte então o que era solicitado? Era solicitado que você resolvesse a soma, a subtração de fração sem utilizar o MMC como a gente tava fazendo então. Como você faria isso daí então sem utilizar o MMC.

S_3: Essa daqui eu... pensei na minha cabeça um número que ao mesmo tempo dividia 4 e 10 e fiz direto

P: Poderia ser qualquer número que dividisse 4 e 10?

S_3: É... ao mesmo tempo!

P: Ao mesmo tempo!

S_3: Eu acho que é 20 por que ao mesmo tempo ele divide 4 e 10. Agora eu vou dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima.

P: Isso não é MMC?

S_3: É... por que esse aí eu fiz desse jeito!

P: Ta... tudo bem ... pode ser!

S_3: Pode... aí eu encontrei como 6 ... mais ... e o outro eu encontrei como 5. Agora eu vou somar 6 e 5, vai dar 11 sobre 20.
A de baixo mesma coisa... tenho que achar um número que ao mesmo tempo divide 3 e 5 ... 15. Aí encontrei o 12 e... 10. Daí vai ficar igual a 2 sobre 15.
A de baixo mesma coisa... 25 encontrei como denominador. Aí primeiro é o número 15 ...

P: Aí você tá dividindo pelo debaixo e multiplicando pelo de cima.

S_3: Isso...

P: Certo.

S_3: Aí então aqui é 3. Aí encontrei 13 sobre 25.

P: Essa daqui não precisa... são iguais a letra b e a letra d, então foi cancelada a letra d.
Aí o que você entende por fração e dá exemplos

S_3: acho que na minha eu escrevi que a FRAÇÃO é uma RAZÃO

P: Uma razão...

S_3: Aí não sei se eu dei exemplos

P: Você colocou um exemplo aqui. Mas que exemplo você daria de fração pra mim?

S_3: Por exemplo, a gente tem o numerador e o denominador. Então, a gente sabe que o denominador é em quantas partes foi dividido o inteiro e o numerador o tanto que foi retirado dessa divisão. E como a gente sabe a razão é uma divisão e por isso que eu falei que a fração era uma razão.

P: Certo. Então a gente vai para o exercício 3A. Ele tem que escrever a fração que é correspondente a esse desenho aí. Então no primeiro desenho a gente tem duas partes destacadas como se fosse a soma dessas duas partes.

S_3: Então seria $\frac{2}{3}$, porque ele dividiu em 3 e pegou 2.

P: Bem... na letra B como que fica?

S_3: $\frac{2}{4}$. Porque ele dividiu em 4 e retirou 2 partes.

P: Certo. Aí a gente vai para a 3ª parte que são os problemas.
Então no primeiro problema né que é do caminhoneiro que percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e a tarde mais $\frac{1}{4}$. Então, que fração da distância ele percorreu nos dois períodos?
Como que você fez isso daí? Como que você pensou?

S_3: Então se pela manhã ele percorreu $\frac{2}{3}$ e a tarde $\frac{1}{4}$, ele quer saber a fração de todo esse período, eu somei essas duas frações. Aí eu fiz $\frac{2}{3}$ mais $\frac{1}{4}$, daí eu fiz o MMC entre 3 e 4 e encontrei como denominador o 12. Agora eu vou dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima. Aí encontrei 8 e 3. Aí 8 mais 3 ... 11 sobre 12.
Aí a questão...

P: Deixa eu só perguntar uma coisa... porque que aqui inicialmente você tinha encontrado esse valor e depois você colocou o valor 3.

S_3: É porque eu esqueci de dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima, acho que eu somei direto 2 mais 1.

P: Ah ta! Então o correto é 11 sobre 12.

S_3: É 11 sobre 12.

P: É... porque embaixo você tinha colocado 11 sobre 12 e em cima você colocou o 3. Então aqui eu considerei meio certo, porque eu vi realmente que embaixo você tinha pensado, mas você se confundiu ... então dei meio certo.
Então no segundo...

S_3: Na questão 2 ... Elvira gasta $\frac{4}{9}$ do seu salário com aluguel e $\frac{1}{9}$ com alimentação. Que fração do salário ela gastou no total?

Aí então eu fiz a mesma coisa... eu somei o $\frac{4}{9}$ com $\frac{1}{9}$. Aí o denominador eu igualei um só e somei 4 mais 1. Aí deu $\frac{5}{9}$.
Depois de pagas essas duas despesas que fração do salário sobrou?
Essa eu acho que eu não consegui fazer... a b.

P: É! Realmente você não fez! Você não tem nem ideia? Não quer tentar?

S_3: Ah... eu acho que eu não consigo essa mesmo.

P: Certo... tudo bem! Aí vamos pra terceira então...

S_3: Roberta iniciou uma viagem com $\frac{5}{6}$ do tanque de gasolina abastecido e gastou durante essa viagem o equivalente a $\frac{1}{2}$ do tanque. A gasolina que sobrou equivale a que fração do tanque?
Ah... então ela começou a viagem dela com $\frac{5}{6}$ dentro do tanque de gasolina e ela gastou ½. Então vou subtrair $\frac{5}{6}$ por $\frac{1}{2}$. (Escreve)
Ai encontrei no MMC o 12. Aí encontrei como fração $\frac{4}{12}$.
Vamos pro 4 agora ... Ontem dormi $\frac{1}{4}$ das 24 horas do dia e estudei $\frac{1}{36}$ do tempo em que estive acordado. Que fração das 24 do dia estive acordado?
Essa também acho que eu não consegui fazer.

P: Essa você não fez também! Não sai mesmo? Não quer tentar?

S_3: Acho que não vai sair mesmo! Vou pra 5...
Numa classe $\frac{3}{4}$ dos alunos são meninas. E $\frac{1}{5}$ das meninas são loiras. As meninas loiras representam que fração do total de alunos da classe?
Essa também acho que não consegui fazer...

P: Ta... você encontrou ... você colocou um denominador aqui só ... que foi 20. O que você fez?

S_3: Eu não consigo lembrar acho...

P: Você tava querendo tirar o MMC? Tava multiplicando? O que você fez?

S_3: Acho que tava tentando tirar o MMC de 4 e 5. Só que depois eu percebi que eu não ia conseguir achar o número de meninas loiras em relação ao total da classe e eu acabei desistindo da questão.

P: Ah ta! Então ta bom.

S_3: Pode ir pra 6 então?

P: Pode!

S_3: Paulo quer dividir um terço do chocolate em 4 partes iguais. Que fração do chocolate representará cada uma dessas partes? Faça uma figura para representar essa divisão.
Pode fazer primeira a conta e depois tentar representar a figura?

P: Pode sim

S_3: Então ele queria dividir $\frac{1}{3}$ do chocolate em quatro partes iguais. Então vou fazer a divisão disso. Aí encontrei $\frac{4}{3}$.

P: Então... aí você fez uma divisão ou uma multiplicação?

S_3: É... eu acho que eu multipliquei então.

P: Porque na sua prova está diferente. Na sua prova você fez uma divisão entre meios e extremos como você tinha feito no problema que você não tinha conseguido fazer lá da primeira parte. Você lembra que você multiplicou meios por extremos?

S_3: Até que eu coloquei um..

P: Uma fração em cima de outra.

S_3: Ah... entendi.
Vou tentar fazer aqui também.
Então encontrei $\frac{1}{12}$.

P: Então o que ta certo? Esse que você fez agora?

S_3: É... esse que eu fiz agora.

P: Agora vamos pra representação...

S_3: da figura. (Desenha) Aí eu dividi em 12 e peguei 1.
Agora vamos pra 7 ... Num filme de tv o mordomo assassinou seu patrão por que achava que ia receber $\frac{1}{4}$ da herança. No entanto, o patrão deixou $\frac{2}{5}$ da herança para serem igualmente dividida entre os oito funcionários da casa, um dos quais é o mordomo. O resto da herança segundo o testamento deveria ser doado a polícia. Que fração da herança foi destinada ao mordomo?
Quantas vezes a quantia destinada ao mordomo cabe na que ele achava que ia receber?

Então... era para ser dividido $\frac{2}{5}$ da herança entre 8 dos funcionários da casa. Agora eu vou dividir pra ver quanto o mordomo iria receber. (Faz a conta) Então o mordomo iria receber $\frac{2}{40}$.
Agora a letra B... A B eu não consigo fazer...

P: A B é Quantas vezes a quantia destinada ao mordomo cabe na que ele achava que ia receber?
Essa daí realmente não sai? Você não tem ideia?
S_3: Não...

P: A minha última pergunta pra você é a seguinte: Aqui você ta fazendo meios e extremos né... você coloca uma fração sobre outra e multiplica meios e extremos. Na primeira parte só uma dúvida que eu fiquei quanto a sua forma de resolução... aqui na letra H da primeira parte ... você tava dividindo em cima e depois em baixo. Que jeito que você acha que é correto: esse jeito que você estava querendo dividir numerador por numerador e depois você dividia os denominadores ou essa que você coloca uma fração sobre outra?

S_3: Eu acho que é a que coloca uma fração sobre outra. Posso resolver essa aqui de novo?

P: Pode! Resolve na frente! Faz na frente a forma como você acha que ficaria correta.

S_3: (Resolve o ex 1H novamente através de Meios e extremos) $\frac{6}{72}$?

(Verifica o procedimento) É... $\frac{6}{72}$!

APÊNDICE J - Protocolo da entrevista 4

S_4: Ah... aqui eu vou conservar o 9 porque é base igual, né... então aí soma em cima... vai dar $\frac{5}{9}$. Daí na segunda eu tirei o MMC entre 10 e 4, que é 20. Aí 20 dividido por 10, 2... vezes 3, 6... 20 dividido por 4 dá 5... vezes 1... igual a $\frac{11}{20}$

Na C conserva o 6 também e subtrai... vai dar $\frac{1}{6}$.

Na D tira o MMC entre 5 e 3 que é 15... 15 dividido por 5, 3... vezes 4, 12... 15 por 3 dá 5... vezes 2, 10... vai dar $\frac{2}{15}$.

Na multiplicação... multiplica o de cima pelo de cima e o debaixo pelo debaixo...

P: Quanto que dá?

S_4: $\frac{2}{9}$

Na F é a mesma coisa... vai dar $\frac{70}{60}$...

P: Aqui a única diferença é que você já simplificou direto...

S_4: Ah sim...

P: Você dividiu aí 10 por 5

S_4: Ah... simplifica aqui por 10, por 10... vai dar $\frac{7}{6}$.

Na divisão eu aprendi assim: 4... copia a primeira, aí passa multiplicando e inverte a segunda, aí eu já simplifico aqui o 5 por 5, o 4 pelo 2... vai ser igual a 2.

Aqui a H, mesma coisa... simplifica o 8 com 2, o 3 com 9... vai dar $\frac{1}{12}$.

Nessa I aqui eu tenho quase certeza que eu errei...

P: Por que você acha que você errou?

S_4: Eu não lembro exatamente... mas é assim: primeiro tem que resolver o que ta entre parênteses, aí depois o que ta fora... eu acho que já fiz direto, não sei o rolo que eu aprontei...

P: Huhum...

S_4: Então copia $\frac{3}{4}$ menos... $\frac{6}{5}$, aí resolve a multiplicação... vai dar $\frac{3}{4}$... mais $\frac{1}{5}$... acho que podia fazer o MMC direto. Ah, eu vou copiar já aqui.

P: Só me fala o que você ta copiando...

S_4: Ah ta! O $\frac{3}{4}$ eu copiei de novo, aí eu vou resolver o MMC entre parênteses: 5 e 4 é 20, 20 por 5 dá 4... vezes 6, 24. 20 por 5 dá 5... vezes 6... 30. Copia o $\frac{1}{5}$... igual... ah, eu vou fazer o MMC direto agora... 4, 20 e 5 vai ser 20... 20 por 4 dá 5... vezes 3, 15. Aí aqui, menos... essa subtração vai dar 9, mais... 24 menos 15, 9... mais... 20 dividido por 5 dá 4... vezes 1, 4. Que vai ser igual... 15 menos 9 dá... 6 mais 4, 10... $\frac{10}{20}$, simplifica por 10, vai dar meio $(\frac{1}{2})$.

P: É... agora você acertou!

S_4: É... depois que eu resolvi que eu fui pensar... Nossa! Eu errei...!

Essa daqui (Letra J) resolve primeiro a divisão, depois a multiplicação e soma os resultados. Então aí... a divisão... copia o $\frac{2}{3}$, multiplica e inverte a segunda... mais... já resolve a multiplicação... 1 vezes 4, 4... 3 vezes 8, 24... aí 2 vezes 2, $\frac{4}{3}$ mais $\frac{4}{24}$... faz o MMC... entre 3 e 24, é 24... 24 por 3 dá 8... vezes 4, 32... 24 por 24 dá 1... vezes 4, 4... igual a $\frac{36}{24}$. Simplifica por 12... igual a 3 sobre... $\frac{3}{2}$.

P: É... aqui a única diferença é que você já simplificou o $\frac{1}{8}$ por $\frac{4}{3}$ e aí já fez direto, deu menos trabalho.

S_4: É! É verdade! (risos)

P: Bom... na segunda parte então, você não pode utilizar o MMC. Você teria que usar uma outra forma de resolução...

S_4: Ah então... essa eu não... eu não fiz! Seria por desenho, mas aí nossa... dá muito trabalho!... deixa eu tentar... ah, então...essa parte fica meio complicada porque eu aprendi só com o MMC, eu não aprendi de outro jeito!

P: Aham! Mas como você acha que ficaria o desenho? Como você acha que poderia ser?

S_4: Ah... desenha uma barra, divide em 10... e aí pinta 3... e aí a outra depois divide em 4... e aí pinta 1. Só que aí o tamanho vai ser diferente né e aí então eu não sei como que soma... deixa eu ver... aqui...

P: Você poderia somar o total?

S_4: Então... porque aqui seria tamanho menor... aí tem que ver certinho... ah 2 dá pra formar $\frac{1}{4}$...

P: Teriam que ser barras do mesmo tamanho?

S_4: Então.. aí teriam que ser diferentes os tamanhos né? É... do mesmo tamanho, só que aí... vamos supor: uma divide em 4 e a outra em 10... aí... é, só que aí, eu fiz do mesmo tamanho... Ah, só que essa eu não sei fazer!

P: Ta, tudo bem!
A 2ª então era pra você escrever o que você entende por fração e dar exemplos.

S_4: Hum... o que é fração... ah... seria... ah, como que eu vou explicar... eu não lembro o que eu falei! ... tem uma certa coisa... vamos supor: 1 chocolate... aí a fração seria pra indicar o quanto desse chocolate você vai pegar, vamos supor... metade... então seria $\frac{1}{2}$.

P: É! Foi exatamente assim... você colocou: Fração é o número de partes divididas e pegas de alguma coisa.

S_4: Ah... (risos)

P: O terceiro, letra A então... um desenho...

S_4: Essa letra A eu não fiz porque eu não sei...

P: Não sabe? Tem dúvida?

S_4: Então... porque.. ela não ta dividida em pedaços iguais, então aí não tem como falar: Ah, vai ser $\frac{2}{3}$! Entendeu?... então...

P: Tinha que ser partes iguais pra você falar?

S_4: É... eu acredito que sim!

P: Então você não sabe... ou acha que não dá pra resolver esse aí?

S_4: Ah, na minha visão assim não dá pra resolver! Eu não sei né! Porque eu acho que tipo assim... né... tem que estar dividido em partes iguais... certinho... pra você poder saber quanto que... que nem nessa daqui... essa aqui ta dividido em partes iguais...

P: Quanto que daria essa?

S_4: Daria $\frac{2}{4}$ né, que seria metade. Agora esse daqui eu num... não sei. Eu acho que não dá!... porque não ta dividida em partes iguais.

P: É! Essa é a ideia!

S_4: É?

P: É exatamente isso: frações têm que ser partes iguais! Como não tem partes iguais, não dá pra resolver!

Vamos pra parte de problemas então... se você quiser ler o problema... fala mesmo tudo o que você ta fazendo!

S_4: Pela manhã um caminhoneiro percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e à tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ele percorreu nos dois períodos?

Então eu vou somar... $\frac{2}{3}$ que foi a distância pela manhã, mais $\frac{1}{4}$... que é a distância que ele percorreu à tarde. Aí o MMC entre 3 e 4, que é 12... 12 dividido por 3, dá 4... vezes 2, 8... 12 por 4, dá 3... vezes 1... vai dar ... $\frac{11}{12}$.

Elvira gasta $\frac{4}{9}$ do seu salário com aluguel e $\frac{1}{9}$ com alimentação. Que fração do salário ela gastou no total?... então aí, eu somo $\frac{4}{9}$ que é o que ela gasta... com aluguel e mais $\frac{1}{9}$ que é com alimentação, vai dar $\frac{5}{9}$.

Depois de pagas essas duas despesas, que fração do salário sobrou?... ah, é só fazer a subtração entre $\frac{9}{9}$ né, que é o inteiro menos $\frac{5}{9}$, vai dar $\frac{4}{9}$.

Roberta iniciou uma viagem com $\frac{5}{6}$ do tanque de gasolina abastecido e gastou durante essa viagem o equivalente a $\frac{1}{2}$ do tanque. A gasolina que sobrou equivale a que fração do tanque?... Hum... essa aqui eu acho que eu não fiz!

P: Fez sim!

S_4: Fiz?

P: Opa!

S_4: Hum... $\frac{6}{6}$ do tanque... Bom, a metade do tanque seriam $\frac{3}{6}$. Ela tinha $\frac{5}{6}$ gastou (subtrai) $\frac{3}{6}$... vai sobrar $\frac{2}{6}$? (risos)

P: É! Aqui você fez diferente, mas tudo bem!

S_4: Mas ta certo?

P: Ta certo.

S_4: Então... um tanque todo seria $\frac{6}{6}$ né... aí a metade dele seria $\frac{3}{6}$. Eu to escrevendo aqui, mas depois você vai entender né? Eu coloquei $\frac{6}{6}$ é igual a $\frac{3}{6}$, mas não é verdade... então, essa é a metade do tanque. Se ela começou com $\frac{5}{6}$ menos a...

P: Então... não são iguais, mas são equivalentes né?

S_4: É! Aí ela começou com $\frac{5}{6}$ menos $\frac{3}{6}$, que seria a metade que ela gastou... vai sobrar $\frac{2}{6}$

P: Aqui você simplificou.

S_4: Ah é? É que vai passando o tempo, você vai pensando diferente...

P: Não... é porque aqui você escreveu $\frac{5}{6}$ menos $\frac{1}{2}$, aí... desse meio virou $\frac{3}{6}$... o tanque todo era $\frac{6}{6}$, por isso que apareceu $\frac{3}{6}$ aqui... certo!

S_4: Ontem, dormi $\frac{1}{4}$ das 24 horas do dia, e estudei $\frac{1}{36}$ do tempo que estive acordado. Que fração das 24 horas do dia eu estive acordado?

Se eu durmi $\frac{1}{4}$, eu durmi 6 horas. Hum... eu durmi $\frac{1}{4}$ então... ah, que eu tive acordada foi $\frac{3}{4}$ né? Você quer que coloque explicadinho aqui: $\frac{4}{4}$ menos $\frac{1}{4}$?

P: Não, tudo bem.

S_4: Que fração das 24 horas do dia eu estudei?

Essa eu acho que...

P: Fez sim!

S_4: Fiz? E ta certo?

P: Ta...

S_4: Então vamos ver... se eu tava acordada $\frac{3}{4}$ e eu estudei $\frac{1}{36}$... $\frac{3}{4}$ menos $\frac{1}{36}$...

P: Por que menos?

S_4: Ah... porque dessas 18 horas que eu fiquei acordada né... eu estudei $\frac{1}{36}$... então aí vai sobrar... não, mais aí eu quero saber o quanto eu estudei. Calma aí... que fração das 24 horas do dia eu estudei... as 24 horas... ah, então 24 horas seria o $\frac{4}{4}$ né, que seria o inteiro... mas aí não vai dar certo. (Relê) Então... se ele ta falando das 24 horas, ele quer saber do dia todo! Então... vamos ver... 36 e 4...

P: Mas por que uma subtração?

S_4: Uma subtração? Hum... então... mas aí não vai dar muito certo isso... porque se for subtração vai dar quanto sobra, não... a fração que eu estudei! (Relê) Nossa, eu não lembro como q eu fiz! Oh que nem... ele ta perguntando das 24 horas, então do dia inteiro.... desconsidera a parte que ta dormindo... aí ta perguntando que fração das 24 horas do dia estudei.

P: É... o tempo que você estava dormindo, você não estudou...

S_4: É! Não tem como! (risos) Ta... então das 18 horas que eu estive acordada, eu estudei $\frac{1}{36}$...

P: Aqui você fez uma multiplicação...

S_4: Então, mas agora eu não conseguiria explicar por que uma multiplicação... Ah... posso pular essa, depois eu volto?

P: Pode! Não tem problema.

S_4: Ta!... Em uma classe $\frac{3}{4}$ dos alunos são meninas e $\frac{1}{5}$ das meninas são loiras. As meninas loiras representam que fração do total de alunos da classe? ... $\frac{3}{4}$ são meninas e $\frac{1}{5}$ são loiras... Ah... acho que eu porque que eu fiz a multiplicação... $\frac{3}{4}$ são meninas e dessas meninas, $\frac{1}{5}$ são loiras, então aí... uma multiplicação, daria $\frac{3}{20}$? É isso?

P: Huhum...

S_4: Ah... então seria a mesma coisa aqui em cima. Quem nem... eu estive acordada $\frac{3}{4}$ e eu estudei $\frac{1}{36}$, então aí eu vou... nossa... mas peraí, dá $\frac{1}{48}$?

P: Esse foi o resultado da sua prova...

S_4: O que? É?

P: Você chegou a esse resultado.

S_4: Mas não ta certo?

P: Ta certo!

S_4: Ta?

P: Por que você acha que não ta certo?

S_4: Ah eu acho que ta certo, deu esse resultado... oh, por que o que eu fiz: eu peguei a fração do tempo que eu tava acordada e multipliquei pelo tempo que eu estudei... e aí deu a fração das 24 horas.

P: E por que uma multiplicação? Você saberia responder?

S_4: Ah, porque seria... é tipo esse negócio de fração equivalente que você falou?

P: Não...

S_4: Não... não é bem isso! Deixa eu pensar... porque que eu multipliquei?... porque soma e subtração não pode ser... porque subtração vai dar a fração do tempo que sobrou pra mim... a soma também não tem nem como... a divisão também acho que não... sobraria só a multiplicação... agora explicar certinho assim, porque que é uma multiplicação... já não...

P: Certo! E a letra C?

S_4: Quanto tempo eu estudei?

Bom... se essa daqui é a fração das 24 horas então seria... ele quer saber quantas horas né? ... não é mais a fração.

P: Não! É o tempo.

S_4: Nossa... eu to ruim hein?... seria $\frac{1}{48}$ ... nossa, aí vai dar uma coisa absurda!

P: Vai? Não sei...

S_4: Vai dar $\frac{1}{2}$ ... não, mais aí não pode ser!

P: Quanto deu?

S_4: Dá $\frac{1}{2}$ ... aí seria a metade de um dia, mas aí não ficou 12 horas estudando...

P: Metade de um dia ou de uma hora?

S_4: É... faz sentido isso!

P: Porque não sua prova, você colocou 30 minutos... por isso que eu to te perguntando...

S_4: É... ta certo! Eu to trabalhando com horas... não é dia. Falei dia porque 24 horas seria 1 dia, mas... na verdade, realmente, seria 30 minutos porque eu pequei as 24 horas que tem um dia e multipliquei pelo tempo que eu estudei... das 24 horas... aí vai dar $\frac{1}{2}$. Só que esse $\frac{1}{2}$ não tem como ser um dia... porque eu to trabalhando com horas, então tem que ser meia hora! Então ta certo, dá 30 minutos.

P: Huhum... Então vamos pra 6.

S_4: Paulo quer dividir $\frac{1}{3}$ de um chocolate em 4 partes iguais. Que fração do chocolate representará cada uma dessas partes? Faça uma figura... Você quer só na forma de desenho?

P: E de fração também!

S_4: Ah ta! $\frac{1}{3}$ do chocolate... ah, vai ser uma multiplicação de novo!... pera aí (relê)... $\frac{1}{3}$ do chocolate eu vou dividir em 4... é... eu vou pegar $\frac{4}{3}$!

P: Você vai pegar $\frac{4}{3}$?

S_4: Não... na verdade, não é não... $\frac{4}{3}$... aqui é $\frac{1}{3}$... aí desse $\frac{1}{3}$, eu vou dividir em 4.

P: Ta multiplicando ou ta dividindo?

S_4: É... agora seria divisão... então vai ficar $\frac{1}{4}$. Eu vou fazer direto, ta? É como se eu tivesse invertido ... Ah, agora sim... vai dar $\frac{1}{12}$.

É que aí... se fosse dividir em 4 tudo aqui... ia dar 12 pedacinhos...

P: Então sua resposta aí... é 1...

S_4: $\frac{1}{12}$. Ta certo... $\frac{1}{12}$.

Num filme de TV, o mordomo assassinou seu patrão, por que achava que iria receber $\frac{1}{4}$ da herança. No entanto, o patrão deixou $\frac{2}{5}$ da herança para serem igualmente divididos entre os oito empregados da casa (um dos quais é o mordomo). O resto da herança, segundo o testamento, deveria ser doado à polícia. Que fração da herança foi destinada ao mordomo?

$\frac{2}{5}$ aí divide por 8... $\frac{16}{5}$ foi destinado ao mordomo. Que daí eu peguei os $\frac{2}{5}$ da herança que foi destinada para os empregados, divide pelo número de empregados que tem... que são 8. Aí, eu copiei a primeira né... inverti a segunda, deu $\frac{16}{5}$.

P: Você inverteu a 2ª?

S$_4$: Ah... nossa! Gente, eu to viajando!

P: Aqui você inverteu na sua prova...

S$_4$: É... você vê: eu falei certo, mas escrevi errado! Então aí simplifica... ah... realmente tava meio estranho... ah... agora sim... $\frac{1}{20}$.

Quantas vezes a quantia destinada ao mordomo cabe na que ele achava que iria receber...?

Ele achava que ia receber $\frac{1}{4}$... $\frac{1}{4}$ divide por $\frac{1}{20}$?... ta... então eu peguei $\frac{1}{4}$ que ele achou que ia receber e dividi por $\frac{1}{20}$... pra saber quantas vezes cabe $\frac{1}{20}$ dentro de $\frac{1}{4}$... deu 5. Certo?

P: Certo!

S$_4$: Acabou?

P: Acabou! Muito bem.

APÊNDICE L - Protocolo da entrevista 5

P: Então pode começar... na 1ª parte você pode usar o MMC tranquilamente...

S_5: Bem... aqui eu nem preciso tirar o MMC... só somar os numeradores... vai ficar $\frac{5}{9}$

Aqui (Letra B) precisa tirar o MMC ou multiplicar 4 vezes 10, mas dá pra tirar o MMC entre 4 e 10. Acho que na época... acho que quando eu fiz eu nem tirei o MMC, eu fiz 4 vezes 10, 40... eu acho.

P: Não, aqui você tirou o MMC

S_5: Tirei o MMC (Faz o MMC) deu 20. 6 mais 5 é igual a $\frac{11}{20}$.

Aqui (Letra C) não precisa tirar o MMC... $\frac{1}{6}$.

Aqui (Letra D) o MMC vai dar 15... 2 números primos... é só multiplicar.

P: Aí você subtraiu direto?

S_5: Isso... 4 menos 2, direto.
É... só multiplicar o de cima e o debaixo... 6, 9...

P: Aqui deu 3.

S_5: É... 9!

P: É 3, é 6 ou é 9?

S_5: É... 2 vezes 1, 2... 3 vezes 3, 9 $\left(\frac{2}{9}\right)$
... $\frac{70}{60}$ (corta os zeros) ... $\frac{7}{6}$.

Essa aqui (Letra G) tem um monte de jeito de fazer... pode fazer assim (Regra do peixinho) vai dar $\frac{20}{10}$ que é igual a $\frac{1}{2}$ é ... não... igual a 2... 3 vezes 2, 6... dividido por8, vezes 9, 72 que é igual a... acho que é $\frac{1}{12}$ acho... acho que é isso!

P: Aí você fez a regra do peixinho também, né?

S_5: Isso! Agora aqui (Letra I) primeiro eu resolvi entre parênteses... primeiro a multiplicação também... menos $\frac{18}{24}+\frac{1}{5}$ ... $\frac{3}{4}$ aí eu troquei o sinal... aqui era $-\frac{6}{5}+\frac{18}{24}+\frac{1}{5}$ ... o MMC vai dar 120... 30 vezes 3, 90... menos 120 dividido por 5 vai dar 24... 24 vezes 6 vai dar 144 mais ... aqui vai dar 5 vezes 18, mais 90 e mais 24... vai dar 180... 180 menos 144... 36... 36 mais 24, vai dar 60 igual a $\frac{60}{120}$, que é igual a $\frac{1}{2}$.

P: Aqui na sua prova, como você simplificou dentro, você saiu mais fácil

S_5: Já dentro do parênteses?

P: É! No lugar do $\frac{18}{24}$, você já colocou $\frac{9}{12}$ e aí já saiu direto.

S_5: Simplificar antes de fazer a conta...

P: Isso! Aí depois você fez primeiro fora também , depois dentro... mas chegou no mesmo total.

S_5: To lembrando assim mais ou menos. Aqui vai dar 2... vai dar 4 sobre $\frac{4}{3}$ mais $\frac{3}{24}$. Simplificando aqui vai dá pra fazer $\frac{4}{3}$ mais $\frac{1}{8}$.

P: $\frac{3}{24}$?

S_5: $\frac{3}{36}$!

P: É uma multiplicação aí?

S_5: Ah... dá $\frac{4}{24}$. Acho que o MMC é 24 mesmo, porque 24 é múltiplo de 3. Aí vai dá... 8 vezes 4, 32 mais 4 mesmo... vai dar $\frac{36}{24}$ que é igual a $\frac{18}{12}$, que é igual a $\frac{9}{6}$, que é igual a $\frac{2}{3}$.

P: $\frac{2}{3}$?

S_5: $\frac{3}{2}$!

P: Vamos pra segunda parte... na segunda parte você não pode usar o MMC.

S_5: É... eu acho que eu multipliquei o debaixo. (Lê o exercício). Acho que eu multipliquei 40... 4 vezes 3, 12... mais 10...

P: Quando você faz isso: Por exemplo, pegou o 40... depois você dividiu por 10, aí você multiplicou pelo 3... não é a mesma coisa que fazer o MMC? Você só não ta fatorando o 10 e o 4...
S_5: É! É a mesma coisa.

É por que... a hora que você multiplicar aqui, vai dar o MMC. Teria que fazer de outra forma?

P: É... não! Tudo bem, você fez dessa forma... só to te questionando mesmo. Você saberia fazer de outro jeito que não fosse esse?

S_5: Bom... daria pra fazer por... desenhar a barrinha aqui... dividir em 10, aí pega a mesma barra... dividiria em 4... 10 dividido por 4, dá um número quebrado. Aí pega 10 dividido por 4 vai dar 2, sobra 2... 2 barrinhas e meia dessa aqui. Aí então somaria... daria $\frac{5,5}{10}$ que é igual a $\frac{55}{100}$. Eu nem lembro direito como faz.

P: Ta! É uma forma...

S_5: Deixa eu ver outra forma... transformar assim por exemplo: $\frac{3}{10}$ é igual a 0,3 mais $\frac{1}{4}$ é igual a 0,75... vai dar 0,55 que é $\frac{5}{100}$. Aqui nesse caso 4 dividido por 5 é 0,8... 0,8 menos 2, dividido por 3... 0,6... eu somaria 0,8 menos 0,666... seria $0,1\bar{3}4$... aí tem um monte de três, no caso.

P: E se fosse com barrinha aí essa subtração?

S_5: (Desenha as barrinhas) aí tem... 4 tem que tirar 2... essas duas valem quantas dessas... 5 dividido por 3,... 0,6... ixi... vai dar periódica aqui também?

P: Vai dar periódica!

S_5: 1,6.

P: Só que você vão subtrair né?

S_5: É! Eu vou subtrair... 2 vezes 1,6... vai dar 3,222... então eu tiro 3,222.... tiro 3 mais 0,2 dessa aqui... que é $\frac{1}{5}$ seria... só que 0,2 periódica... aí seria $\frac{2}{9}$ no caso.

P: $\frac{1}{5}$? De onde você tirou $\frac{1}{5}$? $\frac{1}{5}$ ou $\frac{4}{5}$?

S_5: Ta, eu fiz assim: 5 por 3... cada barrinha dessa é 1,5 dessa. Aí tem que tirar 2 no caso... aí daria 3... 2... aí 3 mais 2... também acho que não vai dar certo. Ficaria $\frac{2}{45}$. Acho que não é isso!

P: Huhum... mas pode deixar sua representação. Aí no exercício 2 então... o que você entende por fração.
S_5: Ah... representa a parte de um todo... ou representa uma divisão de um modo geral... uma parte e outra é mais... uma parte e mais um pouco.

P: E um exemplo disso?

S_5: Um exemplo simples: meia caixa de laranja, de 10... pra resolver é só multiplicar ... um pelo outro... a porcentagem também é um exemplo de fração, que nem... você quer saber 50% de alguma coisa... 0,5 né

P: Huhum... no exercício 3, tem um desenho e ta pedindo pra você indicar a parte que ta pintada.

S_5: Aqui (Letra A), no caso, quer saber as duas né?

P: Isso!

S_5: Bom, aqui eu coloquei $\frac{1}{2}$ ... eu acho. Que eu dividi por 2 e dá mais ou menos igual. Agora aqui (Letra A), eu não fiz acho.

P: Você fez! Falou que é $\frac{1}{2}$ também.

S_5: Ah... eu falei que é $\frac{1}{2}$, mas no chute acho! Porque aqui nem um círculo é, né? É um círculo?

P: É uma elipse!

S_5: Uma elipse...

P: Aí você ta tentando juntar as duas partes pra ver se dá metade mesmo?

S_5: É! É... porque a metade, no caso, seria aqui.

P: Mais ou menos!

S_5: $\frac{1}{2}$ né... por exemplo, metade é aqui mais ou menos... tem já quase metade, aí falta um pouquinho, que com esse aqui completaria.... eu pensei nisso!

P: Mesmo que as partes aí não são iguais... você acha que poderia juntar as duas e dar uma parte inteira...?

S_5: É... eu acho meio difícil dar certinho $\frac{1}{2}$, mas como eu tinha ... para colocar uma fração, eu coloquei $\frac{1}{2}$.

P: Mas e se as vezes não dá, não tem essa opção?

S_5: É... eu acho que é impossível na verdade.

P: Por quê?

S_5: Pra começar é uma elipse. Não é um círculo que dá pra você descobrir muita coisa aqui, e outra... eu não sei achar a área de um pedaço... por exemplo, no máximo de um círculo assim, eu saberia.

P: Aí você tentaria resolver por área?

S_5: É. Por exemplo: uma partinha assim, achar quanto vale isso aqui... essa parte. Sei lá... eu acharia meio diâmetro assim, acharia o meio... tem que ter o grau aqui... aí eu fazeria aqui... aí eu teria 2 setor aqui. Com esse grau aqui que vai ser igual a esse aqui por caso do raio, eu acharia o setor. E tiraria da área disso aqui. No caso, a área disso aqui é... teria que dá isso aqui também, seria esse... vezes esse, vezes seu... desse dividido por 2. Aí acharia a área de um pedaço assim, mas um pedaço assim (elipse) eu não sei achar.

P: Tudo bem! Então vamos para os problemas.

S_5: Pela manhã um caminhoneiro percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e à tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ele percorreu nos dois períodos?... É só fazer uma soma de $\frac{1}{4}$... é... $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ que é igual a ... $\frac{11}{12}$ da distância. No caso, é $\frac{1}{4}$ da distância de x, mais $\frac{2}{3}$ de x, vai dar $\frac{11}{12}$ de x, da distância.

Elvira gasta $\frac{4}{9}$ do seu salário com aluguel e $\frac{1}{9}$ com alimentação. Que fração do salário ela gastou no total? ... só somar os numeradores... $\frac{5}{9}$ (5 sobre 9). Ela gastou $\frac{5}{9}$!

Depois de pagas essas duas despesas, que fração do salário sobrou?... sobrou $\frac{4}{9}$... que é o que falta do 5 pra chegar no 9.

Roberta iniciou uma viagem com $\frac{5}{6}$ do tanque de gasolina abastecido e gastou durante essa viagem o equivalente a $\frac{1}{2}$ do tanque. A gasolina que sobrou equivale a que fração... Então... ela começou com $\frac{5}{6}$, gastou $\frac{1}{2}$, então ela gastou $\frac{5}{12}$.

P: Ela gastou... é uma multiplicação? Por que você fez uma subtração!

S_5: É... tanto faz no caso, acho... porque...

P: É... porque aqui deu $\frac{1}{3}$.

S_5: (Relê o problema)... então, no caso seria o que ela gastou... aí eu pego e faço... é... $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}$ que ela gastou... é... 10 menos... 12 dividido por 2... (6 vezes 5, 10) 10 menos 5, vai dar $\frac{5}{12}$. Iniciou com $\frac{5}{6}$... $\frac{5}{6}$ de x, o tanque... o tanque inteiro e gastou durante a viagem... Ah, ela gastou $\frac{1}{2}$ do tanque e não $\frac{1}{2}$ do que ela tinha!

P: Não! Meio tanque...

S_5: É uma divisão por 2... $\frac{5}{6}$... pra achar o que ele gastou!

P: Você acha que a subtração que você fez aqui ta errada então?

S_5: Acho que sim! Calma aí deixa eu fazer... $\frac{5}{6}$, ela gastou metade. A gasolina que sobrou é... já é metade. Se ela gastou metade, sobrou metade! Se ela tinha $\frac{5}{6}$, metade de $\frac{5}{6}$... $\frac{5}{12}$. Acho que ta errado então, o que eu fiz aí!

P: É que na verdade ela gastou metade... do tanque!

S_5: Então... metade do tanque.

P: Do tanque! Não metade do que ela...

S_5: Então essa... aí se ela gastou metade do tanque ... aí é... então isso que eu falei: metade do tanque, não metade do que ela tinha! Se fosse metade do que ela tinha seria isso aqui!

P: Isso.

S_5: Agora a gente vai tirar... menos... $\frac{1}{2}$ do tanque no caso... o $\frac{1}{2}$ multiplicaria o tanque que agora no caso é 1... o tanque inteiro. 5 menos $\frac{1}{2}$ é igual a 12, 10 menos 6... 4... e aqui é $\frac{1}{3}$.

Ontem, dormi $\frac{1}{4}$ das 24 horas do dia, e estudei $\frac{1}{36}$ do tempo que estive acordado. Que fração das 24 horas do dia eu estive acordado?... $\frac{3}{4}$! Durmi $\frac{1}{4}$, fiquei acordado $\frac{3}{4}$.

Que fração das 24 horas do dia eu estudei?... estudei $\frac{1}{36}$ de (multiplica) $\frac{3}{4}$, aqui já poderia simplificar... ficaria $\frac{1}{12}$ ... vai dar $\frac{1}{48}$.

P: Isso!

S_5: Quanto tempo eu estudei?... aí é só pegar $\frac{1}{48}$ vezes 24, igual a $\frac{1}{2}$.

Em uma classe $\frac{3}{4}$ dos alunos são meninas e $\frac{1}{5}$ das meninas são loiras. As meninas loiras representam que fração do total de alunos da classe?... $\frac{1}{5}$ das meninas são loiras... $\frac{1}{5}$ de $\frac{3}{4}$ (relê)... $\frac{3}{20}$ ... é!

Paulo quer dividir $\frac{1}{3}$ de um chocolate em 4 partes iguais. Que fração do chocolate representará cada uma dessas partes? Faça uma figura para representar essa divisão.

Então, tenho um chocolate... primeiro eu divido em 3, aí depois ele pega uma parte e divide em 4. Ele quer saber quanto vale 1 né? É igual a $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$, que é igual a $\frac{1}{12}$.

Num filme de TV, o mordomo assassinou seu patrão, por que achava que iria receber $\frac{1}{4}$ da herança. No entanto, o patrão deixou $\frac{2}{5}$ da herança para serem igualmente divididos entre os oito empregados da casa (um dos quais é o mordomo). O resto da herança, segundo o testamento, deveria ser doado à polícia. Que fração da herança foi destinada ao mordomo?

... $\frac{2}{5}$ que é pra todos os empregados, dividido por 8 igual a $\frac{2}{40}$, que é igual a $\frac{1}{20}$.

A B... quantas vezes a quantia destinada ao mordomo cabe na que ela achava que iria receber?

... ele achava que ia receber $\frac{1}{4}$... dividido por $\frac{1}{20}$, $\frac{20}{4}$ igual a... cabe 5 vezes... aí ele recebeu 5 vezes menor do que ele achava que iria receber.

P: Só isso, né?

S_5: Só isso!

ANEXOS

ANEXO A - Questionário dos alunos

Prezado aluno (a)

Estou realizando um estudo sobre as atitudes em relação à matemática e solução de problemas envolvendo frações.
Espero contar com sua colaboração, participando de algumas atividades.

Muito Obrigada
Andresa

Nome: **Série:**
Escola:

QUESTIONÁRIO

(Adaptado de Brito, 1996)

1) Gênero:
( ) masculino ( ) feminino

2) Qual a sua idade?

3) Já foi reprovado alguma vez?
( ) sim ( ) não

4) Quantas vezes você já repetiu de ano, isto é, quantas vezes foi obrigado a fazer a mesma série?
( ) Uma vez
( ) Duas vezes
( ) Três vezes
( ) Quatro vezes
( ) Cinco vezes ou mais

5) Assinale a série (ou as séries) que você repetiu:
( ) 1ª Série do Ensino Fundamental
( ) 2ª Série do Ensino Fundamental
( ) 3ª Série do Ensino Fundamental
( ) 4ª Série do Ensino Fundamental
( ) 5ª Série do Ensino Fundamental
( ) 6ª Série do Ensino Fundamental
( ) 7ª Série do Ensino Fundamental
( ) 8ª Série do Ensino Fundamental
( ) 1º Série do Ensino Médio
( ) 2º Série do Ensino Médio
( ) 3º Série do Ensino Médio

6) Assinale a (as) matéria (as) na (as) qual (ais) você foi reprovado:
( ) Todas as matérias
( ) Não me lembro
( ) Matemática
( ) Português
( ) Ciências
( ) Educação Física
( ) Geografia
( ) Física
( ) Arte
( ) Química
( ) Filosofia
( ) História
( ) Psicologia
( ) Biologia
( ) Inglês

7) Quantas horas por semana, fora da sala de aula, você estuda Matemática?
( ) Nunca estudo essa matéria
( ) Estudo menos de 1 (uma) hora
( ) Estudo durante 1 (uma) hora certinha
( ) Estudo entre 1 (uma) e 2 (duas) horas
( ) Estudo mais de duas horas

8) As explicações do professor de Matemática são suficientes para você entender o que está sendo explicado?
( ) Sim, eu sempre entendo as explicações do professor
( ) Não, eu nunca entendo as explicações do professor
( ) Na maioria das vezes eu entendo as explicações do professor
( ) Poucas vezes eu entendo as explicações do professor

9). Você se distrai facilmente nas aulas de Matemática?
( ) Não, eu sempre presto atenção nas aulas de Matemática.
( ) Sim, eu não consigo prestar atenção nas aulas de Matemática.
( ) Na maioria das vezes, eu me distraio nas aulas de Matemática.
( ) Na maioria das vezes, eu presto atenção nas aulas de Matemática.

10) Suas notas de Matemática geralmente são:
( ) Acima da nota da maioria da classe
( ) Igual à nota da maioria da classe
( ) Menor que a nota da maioria da classe

11). Assinale abaixo a **matéria que você mais gosta.** Assinale apenas uma alternativa.
( ) Gosto de todas as matérias
( ) Filosofia
( ) Não gosto de nenhuma
( ) História
( ) Matemática
( ) Português
( ) Ciências
( ) Biologia
( ) Educação Física
( ) Inglês
( ) Geografia

( ) Física
( ) Arte
( ) Química
( ) Outra Qual-----------------

12). Assinale abaixo a **matéria que você menos gosta.** Assinale apenas uma alternativa.
( ) Gosto de todas
( ) Filosofia
( ) Não gosto de nenhuma
( ) História
( ) Matemática
( ) Português
( ) Ciências
( ) Biologia
( ) Educação Física
( ) Inglês
( ) Geografia
( ) Física
( ) Arte
( ) Química
( ) Outra Qual? -----------------

13) Dentre os **conteúdos de Matemática** que você já estudou, **qual você mais gostou?** Porquê?

14) Dentre os **conteúdos de Matemática** que você já estudou, **qual você menos gostou?** Por quê?

15) Se você pudesse tirar uma matéria da escola, qual você escolheria?
( ) Todas as matérias
( ) Nenhuma
( ) Matemática
( ) Português
( ) Ciências
( ) Educação Física
( ) Geografia
( ) Física
( ) Arte
( ) Química
( ) Filosofia
( ) História
( ) Biologia
( ) Inglês
( ) Outra Qual? ________

ANEXO B - Escala de Atitudes 1

ESCALA DE ATITUDES COM RELAÇÃO À MATEMÁTICA
(Aiken e Dreger,1961, Aiken, 1963)
(Adaptada e validada por Brito, 1996)

INSTRUÇÃO: Cada uma das frases abaixo expressa o sentimento que pessoas apresentam com relação à Matemática. Você deve comparar o seu sentimento pessoal com aquele expresso em cada frase, assinalando um dentre os quatros pontos colocados abaixo de cada uma delas, de modo a indicar com a maior exatidão possível, o sentimento que você experimenta com relação à Matemática.

01- Eu fico sempre sob uma terrível tensão na aula de Matemática.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

02- Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazer essa matéria.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

03- Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

04- A Matemática é fascinante e divertida.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

05- A Matemática me faz sentir seguro (a) e é, ao mesmo tempo, estimulante.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

06- "Dá um branco" na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo Matemática.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

07- Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

08- A Matemática me deixa inquieto (a), descontente, irritado (a) e impaciente.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

09- O sentimento que tenho com relação à Matemática é bom.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

10- A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido (a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

11- A Matemática é algo que eu aprecio grandemente.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

12- Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

13- Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz em Matemática.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

14- Eu gosto realmente da Matemática.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

15- A Matemática é uma das matérias que eu realmente gosto de estudar na escola.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

16- Pensar sobre a obrigação de resolver um problema matemático me deixa nervoso(a).
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

17- Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que me dá mais medo.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

18- Eu fico mais feliz na aula de Matemática que na aula de qualquer outra matéria.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

19- Eu me sinto tranqüilo (a) em Matemática e gosto muito dessa matéria.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

20- Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: Eu gosto e aprecio essa matéria.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

21- Não tenho um bom desempenho em Matemática.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

ANEXO C - Escala de Atitudes 2

ESCALA DE ATITUDES EM RELAÇÃO A FRAÇÕES[23]

(adaptada e validada por Justulin, Pirola e Brito, 2009)

01- Eu fico sempre sob uma terrível tensão quando resolvo problemas que envolvem frações.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

02- Eu não gosto de frações e me assusta ter que trabalhar esse conceito.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

03- Eu acho "frações" muito interessante e gosto das aulas sobre isso.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

04- Frações é um conceito fascinante e divertido.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

05- Problemas com frações me fazem sentir seguro (a) e é, ao mesmo tempo, estimulante.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

06- "Dá um branco" na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando resolvo problemas com frações.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

07- Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço para resolver problemas de frações.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

08- Conteúdos com frações me deixam inquieto (a), descontente, irritado (a) e impaciente.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

09- O sentimento que tenho com relação a Frações é bom.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

10- Problemas com frações me fazem sentir como se estivesse perdido (a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

11- "Frações" é um conteúdo que eu aprecio grandemente.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

[23] Baseada na escala de atitudes em relação à matemática que foi elaborada e aprimorada por Aiken (1963), adaptada e validada por Brito (1996). Enfatiza as atitudes em relação a frações e a solução de problemas e não apenas o conceito de fração.

12- Quando eu ouço a palavra Fração, eu tenho um sentimento de aversão.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

13- Eu encaro problemas sobre frações com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz de solucionar problemas.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

14- Eu gosto realmente de frações.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

15- "Frações" é um dos conteúdos que eu realmente gosto de estudar na escola.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

16- Pensar sobre a obrigação de resolver um problema com frações me deixa nervoso(a).
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

17- Eu nunca gostei de solucionar problemas sobre frações e esse é o conteúdo que me dá mais medo.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

18- Eu fico mais feliz em aulas sobre frações que em aulas de qualquer outro conteúdo.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

19- Eu me sinto tranqüilo (a) quando soluciono problemas sobre frações e gosto muito desse conteúdo.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

20- Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à frações: Eu gosto e aprecio problemas com esse conteúdo.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

21- Não tenho um bom desempenho para solucionar problemas sobre frações.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Anote a seguir qualquer dúvida ou observação que queira fazer com relação a essa escala.