UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ROMÁN HÉCTOR ABRIL

DEMONSTRAÇÃO DE FÓRMULAS MATEMÁTICAS NO ENSINO MÉDIO

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2016

ROMÁN HÉCTOR ABRIL

DEMONSTRAÇÃO DE FÓRMULAS MATEMÁTICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha

CURITIBA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

A163d Abril, Román Héctor
2016 Demonstração de fórmulas matemáticas no ensino médio / Román Héctor Abril.-- 2016.
167 f.: il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2016.
Bibliografia: f. 163-167.

1. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio). 2. Matemática - Fórmulas. 3. Lógica. 4. Raciocínio. 5. Prática de ensino. 6. Aprendizagem. 7. Matemática - Dissertações. I. Tocha, Neusa Nogas, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 – 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação Nº 29

"Demonstrações de fórmulas matemáticas no ensino médio"

por

Román Héctor Abril

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h30min do dia 17 de fevereiro de 2016. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos professores:

Profa. Neusa Nogas Tocha, Dra.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Manuel Jesus Cruz Barreda, Dr.
(UFPR)

Prof. Márcio Rostirolla Adames, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

A Tháy

AGRADECIMENTOS

- A Tomás e a Nicolás.
- A Matthieu Ricard.
- À CAPES.
- À Sociedade Brasileira de Matemática.
- À minha orientadora, Prof[a]. Dr[a]. Neusa Nogas Tocha.

RESUMO

ABRIL, Román. DEMONSTRAÇÃO DE FÓRMULAS MATEMÁTICAS NO ENSINO MÉDIO. 167 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

O objetivo deste trabalho é analisar a validade de trabalhar com demonstrações em sala de aula e apresentar uma lista parcial de demonstrações de fórmulas matemáticas presentes no currículo do Ensino Médio brasileiro. Considera-se, também, a adaptação da demonstração ao conhecimento e à capacidade do aluno de Ensino Médio. Descreve-se também de que forma o ensino de demonstrações é tratado nas publicações oficiais no Brasil e de outros países. Apresentam-se os diversos benefícios que o trabalho com demonstrações traz ao aluno, dentre eles: o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade argumentativa, da capacidade analítica no dia a dia, além da motivação e da melhor compreensão da Matemática como Ciência. Discute-se a conveniência de inserir o ensino das demonstrações no currículo brasileiro do Ensino Médio e a necessidade de um equilíbrio entre a abstração das demonstrações e a contextualização do conteúdo em sala de aula. A forma de abordagem das demonstrações em sala de aula pode se tornar um fator motivador ou, ao contrário, desestimulante à aprendizagem. Conclui-se ser de grande utilidade a criação de uma lista de referência abrangendo as expressões matemáticas do conteúdo curricular com suas respectivas demonstrações, que possam ser compreendidas pelo aluno de Ensino Médio.

Palavras-chave: Demonstração. Ensino Médio. Matemática. Raciocínio Lógico. Método Dedutivo. Fórmulas.

ABSTRACT

ABRIL, Román. PROOF OF MATHS FORMULAE IN SECONDARY/HIGH SCHOOL. 167 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

The objective of this study is to analyze the validity of working with proofs in the classroom and to present a partial list of proofs of mathematical formulae of the Brazilian secondary/high school curriculum. The adaptation of the proofs into the knowledge and abilities of a secondary school student should also be considered. How the teaching of proofs is treated in official publications in Brazil and other countries is also described. Working with proofs provides a number of benefits to the students, including: the development of logical reasoning, argumentative capacity, analytical skills on a daily basis, as well as motivation and a better understanding of mathematics as a science. The convenience of including the teaching of proofs in Brazilian secondary school curriculum and the need of a balance between the abstraction of proofs and contextualization of the school programmes is discussed. The approach of the proof teaching in the classroom can become a motivating factor or, conversely, a discouraging one. The conclusion is that it would be very useful to create a reference list covering the mathematical expressions of school programmes with their respective proofs that can be understood by secondary school students.

Keywords: Proof. High School. Secondary School. Mathematics. Logical Reasoning. Deductive Reasoning. Formulae.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEF	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como questão central o ensinamento de demonstrações para estudantes de Ensino Médio no Brasil.

Os livros escolares muitas vezes não trazem as demonstrações das expressões que eles tratam. Frequentemente, elas estão presentes de maneira incompleta ou pouco acessível ao aluno. Tanto o professor como o aluno têm dificuldades em encontrar um local de consulta a demonstrações voltadas para o Ensino Médio.

A motivação inicial é a construção de um listado de fórmulas matemáticas e suas respectivas demonstrações, apresentadas de uma maneira que possam ser compreendidas pelos alunos de Ensino Médio. Isto é, procurando a opção de mais fácil entendimento para esse público alvo, com os conhecimentos que eles já possuem.

Entretanto, uma primeira questão que se coloca é se vale a pena ensinar demonstrações aos estudantes de Ensino Médio.

No Brasil, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio colocam como um dos propósitos da formação matemática na educação básica "compreender que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações" (BRASIL, 2006).

A aprendizagem de demonstrações demanda uma visão nova da matemática para os alunos, deixando de lado aspectos da intuição e da verificação experimental para um caminho que está em conformidade com uma teoria matemática. Essa capacidade de abstração se faz necessária e é útil ao desenvolvimento intelectual.

De fato, as demonstrações podem trazer uma série de benefícios aos alunos; tais como desenvolvimento do raciocínio, estímulo ao seu senso crítico (o que promove a inserção do estudante na sociedade e a construção da cidadania), compreensão do significado da Matemática, motivação pelo desafio, etc.

No entanto, pode-se questionar a motivação que traz o ensino de demonstrações, tendo em vista o eventual excesso de abstração e de formalismo ao abordar o assunto. É de se supor então que se faça necessário um equilíbrio entre essa abstração e a contextualização, tratando aspectos formais e abstratos das demonstrações acompanhados de exemplos e problemas de aplicação.

Outra questão que se coloca é como ensinar demonstrações em sala de aula para que o conteúdo não desestimule o aluno mas, ao contrário, que o assunto sirva como elemento motivador à aprendizagem.

Igualmente, um ponto que deve ser considerado é se os professores deveriam ensinar todas as demonstrações das fórmulas presentes no conteúdo curricular ou um subconjunto delas. Nesse caso, qual seria o critério de escolha daquilo que deve ou não ser demonstrado. Devemos omitir aquelas que são mais fáceis, ou apresentá-las em forma de exercício? E aquelas que requerem conhecimento matemático de nível superior? Alternativas podem ser buscadas para aquelas demonstrações que não são acessíveis ao aluno de Ensino Médio, como provas informais ou parciais.

Observa-se também que o tema é incentivado em publicações oficiais do governo brasileiro, embora seja tratado de forma algo tímida. De fato, ocorrem diversas menções ao tema, contudo, as demonstrações não fazem parte de forma explícita do currículo escolar. Em contrapartida, as demonstrações são enfatizadas e estão expressamente presentes no currículo de Portugal (PORTUGAL, 1997), (PORTUGAL, 2007).

Este trabalho se organiza da seguinte forma:

- Primeiramente, descreve-se o que motivou a realização deste trabalho e quais são seus objetivos.
- Em seguida, apresenta-se uma fundamentação teórica, na qual se expõe uma definição do termo *demonstração*; um apanhado do surgimento da demonstração na História da Matemática; um panorama atual do ensino de demonstrações no Brasil; a forma como o assunto é tratado nas publicações oficiais do país e do Estado do Paraná e um comparativo com as publicações oficiais de outros países (com destaque a Portugal); as vantagens de se abordar as demonstrações em sala de aula em termos de desenvolvimento cognitivo para o aluno; e aspectos didáticos quanto à forma de trabalhar com demonstrações em sala de aula.
- Por último, enuncia-se uma lista de fórmulas do conteúdo matemático de Ensino Médio

com suas respectivas demonstrações. Todas as fórmulas foram extraídas da coleção ”Conexões com a Matemática”(BARROSO; LEONARDO, 2010). Em cada uma delas, discute-se a validade de abordar a demonstração em sala de aula e a maneira de trabalhar essa abordagem, seja em forma de exercício em que o aluno tem participação mais ativa, seja como uma demonstração formal, seja uma prova parcial, informal ou sem rigor da expressão, ou até mesmo a possibilidade de não apresentar demonstração alguma.

2 DELIMITAÇÃO DO TEMA

2.1 MOTIVAÇÃO

Como professor de Matemática[1], tenho observado que o ensino de Matemática com frequência se concentra na aprendizagem de fórmulas prontas e sua aplicação. Esse fato pode levar muitos estudantes a perceber a Matemática como uma disciplina maçante, pouco criativa e focada em memorização. Além disso, essa metodologia não estimula o raciocínio lógico do aluno, que é um dos pilares da Matemática.

Este fato é corroborado pela pesquisadora brasileira D'AMBROSIO (1989):

> Sabe-se que a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento (D'AMBROSIO, 1989).

A pesquisadora discorre sobre as consequências negativas dessa prática na formação dos alunos das escolas brasileiras:

> [...] alunos passam a acreditar que a aprendizagem de matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor. Segundo, os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se duvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios (D'AMBROSIO, 1989).

[1] Atualmente leciono no Ensino Médio

Essa metodologia puramente expositiva foi estimulada em décadas passadas, razão pela qual ainda se encontra muito arraigada nas salas de aula hoje em dia.

> O caráter mecanicista e pragmático do ensino da Matemática foi marcante no decorrer da década de 1970. O método de aprendizagem enfatizado era a memorização de princípios e fórmulas, o desenvolvimento e as habilidades de manipulação de algoritmos e expressões algébricas (PARANÁ, 2008).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio Brasil (2006) sugerem a busca de outras maneiras de trabalhar os conteúdos em sala de aula:

> [...]destacando-se o valor formativo agregado e descartando-se as exigências de memorização, as apresentações de "regras" desprovidas de explicações, a resolução de exercícios repetitivos de fixação ou a aplicação direta de fórmulas. [...]partimos do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o *pensar matematicamente*. Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados (BRASIL, 2006).

Existem muitas alternativas ao ensino tradicional de Matemática meramente expositivo. A metodologia construtivista, por exemplo, preconiza o processo do conhecimento como forma de desenvolvimento do intelecto.

> A tendência construtivista surgiu no Brasil a partir das décadas de 1960 e 1970, e se estabeleceu como meio favorável para discutir o ensino da Matemática na década de 1980. Nesta tendência, o conhecimento matemático resultava de ações interativas e reflexivas dos estudantes no ambiente ou nas atividades pedagógicas. A Matemática era vista como uma construção formada por estruturas e relações abstratas entre formas e grandezas. O construtivismo, então, dava mais ênfase ao processo e menos ao produto do conhecimento. A interação entre os estudantes e o professor era valorizada e o espaço de produção individual se traduzia como um momento de interiorização das ações e reflexões realizadas coletivamente (PARANÁ, 2008).

Uma das maneiras de aprendizagem do processo lógico-matemático se dá por meio de demonstrações. A dedução de fórmulas pode estimular o aluno e ajudar a desenvolver seu raciocínio lógico. No entanto, nas coleções didáticas analisadas neste trabalho, observa-se que estas pouco enfatizam e, por vezes, são omissas na demonstração de muitas fórmulas apresentadas.

Seria então interessante se existisse um compilado abrangente de fórmulas matemáticas com suas demonstrações (numa apresentação que fosse adequada ao entendimento do aluno de Ensino Médio). Esse compilado poderia servir como uma referência a todo professor e estudante no Brasil, tanto de Ensino Médio, como também poderá servir como material de apoio aos estudantes dos cursos tecnológicos subsequentes.

Este trabalho constitui o primeiro passo para a elaboração desse compilado de fórmulas com suas respectivas demonstrações. O trabalho se propõe a apresentar a demonstração de diversas fórmulas matemáticas simples do conteúdo curricular do Ensino Médio, que podem ser ensinadas em sala de aula.

Além disso, o trabalho discutirá a necessidade ou não de apresentar cada fórmula como um resultado pronto a ser assimilado.

A situação em que não haverá a necessidade de o aluno lembrar uma expressão representa o caso em que o aluno deverá ele mesmo deduzir o resultado cada vez que se deparar com problema semelhante.

Por exemplo, tomando o livro "Matemática Fundamental - Uma Nova Abordagem" (GIOVANNI; BONJORNO, 2010), um dos livros com frequência adotados pelas escolas brasileiras, apresenta-se, já no primeiro capítulo, a fórmula do lado de um quadrado inscrito em uma circunferência:

$$L = \sqrt{2} \cdot R$$

onde L é o lado do quadrado e R o raio da circunferência.

Essa fórmula é muito facilmente dedutível pelo aluno, e é de memorização desnecessária, dada a simplicidade de sua dedução. Pode ser apresentada apenas como exercício, em que o próprio aluno nela chegará naturalmente.

Portanto, este trabalho visa a expor um elenco de fórmulas, suas demonstrações, a conveniência ou não de introduzir essas demonstrações em sala de aula e a necessidade ou não de memorização da fórmula.

O estudo das demonstrações, além de desenvolver o raciocínio do aluno, traz uma compreensão mais profunda da disciplina, facilitando a sua aprendizagem, evidenciando os vínculos entre diversos conteúdos matemáticos.

Essa metodologia pode até mesmo levar a abordar os conteúdos de maneira e em sequência diferente.

Por exemplo, o conteúdo de Matemática Financeira é ministrado muitas vezes de maneira independente ao de progressões aritméticas e geométricas. Na maioria dos livros escolares com que eu já trabalhei, estes dois conteúdos são apresentados em capítulos e volumes distintos. Não seria inviável ensinar os dois tópicos sequencialmente. O professor poderá analisar se essa sequência poderia facilitar a compreensão dos conteúdos e, eventualmente, trazer um ganho de tempo em sala de aula.

As vantagens da metodologia são: desenvolver o raciocínio lógico e o “pensar matemático”, tornar o significado da Matemática mais abrangente e mais útil, além de motivar o aluno.

2.2 OBJETIVO

O livros de Matemática no Ensino Médio apresentam diversas fórmulas em todos os tópicos. Essas fórmulas são ensinadas aos alunos de diferentes maneiras em sala de aula.

As fórmulas podem ser apresentadas prontas (sem demonstração), podem ser demonstradas com rigor ou pode-se indicar uma maneira de se chegar na fórmula, porém sem rigor matemático (a este último caso denominaremos “demonstração informal”). Isso varia de acordo com o professor e com o livro texto adotado.

Alguns professores têm por hábito ensinar a Matemática como uma ferramenta para resolver exercícios por meio de fórmulas prontas. O aprendizado consiste em memorizar as fórmulas e escolher a fórmula correta para cada exercício. Alguns pesquisadores, como D’AMBROSIO (1989), apontam que essa abordagem distorce a forma de o aluno ver a Matemática e limita o seu valor.

Por outro lado, alguns professores explicam em sala de aula as deduções da maioria das fórmulas, para dar maior significado ao conteúdo. Ocorre que algumas demonstrações são de difícil entendimento pelos alunos de Ensino Médio. Esse procedimento traz, em alguns casos, efeitos negativos, pois cria um distanciamento aos alunos que não conseguem acompanhar as deduções.

A pergunta natural é: em que casos vale a pena demonstrar fórmulas matemáticas a alunos do Ensino Médio? Como tratar as deduções mais difíceis ao entendimento do aluno?

A demonstração de fórmulas acessíveis à compreensão do aluno de Ensino Médio traz uma série de vantagens no aprendizado.

Primeiramente, auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, que é um dos pilares da Matemática. Aprender a raciocinar é fundamental para o desenvolvimento do indivíduo e contribui com o saber matemático do aluno.

O aprendizado de demonstrações também dá ao aluno uma visão abrangente da amplitude da Matemática como ciência, e permite enxergá-la como uma ciência coesa e com significado. Permite-se ao aluno compreender melhor o que é e para que serve a Matemática.

Além disso, a metodologia traz um ganho motivacional muito grande ao aluno, que passa a perceber a Matemática como uma ciência, identificando mais claramente sua essência e sua utilidade, e não simplesmente uma ferramenta de utilização de fórmulas ”mágicas”.

Entretanto, com frequência a demonstração de uma fórmula com todo o rigor matemático se torna pesada ou difícil para um estudante do Ensino Médio. Nesses casos, uma maneira de chegar na fórmula, ou uma “demonstração informal” ou simplesmente uma explicação que justifique os elementos de uma fórmula é muitas vezes mais adequada.

Uma grande vantagem de demonstrar fórmulas é que o aluno, ao vivenciar a sua dedução, consegue memorizá-la mais facilmente, percebendo seus elementos de maneira lógica. Por exemplo, se uma grandeza for diretamente proporcional a outra, esse fato estará intrínseco na própria fórmula.

Exemplo:

Tomemos, como exemplo, a fórmula de cálculo do juro simples em Matemática Financeira:

$$J = C \cdot i \cdot t,$$

onde J é o valor do juro em unidades monetárias sobre um capital C a uma taxa de juros por período de tempo i aplicada em t períodos de tempo. Existem diversas abordagens possíveis para se ensinar esse conteúdo.

Uma delas seria simplesmente apresentar a fórmula e explicar seu uso por meio de exercícios. Essa abordagem parece simples, mas traz uma série de inconvenientes. O aluno perceberá o conteúdo como mais uma fórmula não fundamentada a ser utilizada. Isso trará maiores obstáculos em sua memorização. O aluno poderá ter dificuldade em associar, por exemplo, a variável t à quantidade de períodos de tempo. Deverá praticar diversos exercícios com distintas unidades de tempo para fixar melhor a fórmula. Por exemplo, dada uma taxa bimestral, calcular o juro para um semestre. Além disso, o aluno não terá o entendimento real do conteúdo, pois o perceberá como mera aplicação de fórmulas. Por último, essa falta de fundamentação não motiva o estudante a aprender Matemática.

Uma outra maneira de apresentar o conteúdo seria apresentar a definição significativa de taxa i e de juro J, sem apresentar nenhuma fórmula num primeiro momento. Em seguida, resolver vários exercícios em que o próprio aluno naturalmente calculará o juro usando seu raciocínio, sem necessidade de fórmula. Se necessário, o professor poderá intervir nesta etapa como facilitador para a resolução. Após ter praticado alguns exercícios, o professor poderá, em conjunto com os alunos, “construir” a fórmula. Essa fórmula, assim aprendida, será de fácil memorização e de fácil utilização, pois estará fundamentada na mente do aluno, que não recebeu uma informação de forma passiva. Uma variante a esse método seria não apresentar fórmula alguma, uma vez que, em casa exercício, o aluno chega à solução por seu próprio raciocínio.

O presente trabalho não discute a didática das demonstrações nem apresenta diversos caminhos argumentativos para deduzir cada uma das expressões apresentadas, mas discute a validade de apresentar a fórmula como uma expressão a ser memorizada ou se esta fórmula pode simplesmente ser apresentada como um exercício, sem forçar a retenção desta na memória do aluno.

Algumas demonstrações de fórmulas matemáticas apresentam nível de dificuldade muito baixo. Em alguns casos, é melhor chegar à fórmula pela demonstração cada vez que precisar dela. Dessa maneira, diminui-se a quantidade de fórmulas a serem memorizadas e agrega-se valor incrementando a aprendizagem do raciocínio.

Certamente, seria de grande proveito para o professorado de Ensino Médio e de cursos técnicos uma ampla relação de todas as fórmulas do conteúdo escolar, com uma demonstração para cada uma delas, elaborada de maneira simples e elucidativa, de maneira que o aluno possa compreendê-la com os conceitos e/ou resultados que ele já conhece.

Além disso, seria útil se, para cada uma dessas fórmulas, se apontasse a conveniência ou não de apresentar sua demonstração em sala e, também, a argumentação sobre a utilidade de se apresentar essa fórmula de maneira formal; e também se vale ou não a pena que o aluno memorize essa expressão.

Evidentemente, essa relação de todas as fórmulas seria muito abrangente e demasiadamente extensa para tratar em um único trabalho. O objetivo do trabalho é apresentar um subconjunto dessa ampla relação, que poderá ser estendido em estudos posteriores.

O trabalho se propõe a analisar diversas fórmulas matemáticas presentes nos livros escolares brasileiros, expor suas demonstrações da maneira mais adequada ao público (alunos de Ensino Médio) e discutir a conveniência de apresentar em sala de aula essas deduções ou, alternativamente, “demonstrações informais”.

O professor deve estar atento à metodologia para introduzir uma demonstração em sala. Uma exposição sequencial de cada passo por parte dele – relegando ao aluno um papel totalmente passivo durante a exposição – poderia trazer desmotivação aos alunos, conforme descrito por D’AMBROSIO (1989). É importante que a demonstração a ser trabalhada esteja dentro dos conceitos conhecidos do aluno. Neste trabalho, apresenta-se uma possível demonstração para cada fórmula levando em conta o conteúdo de Ensino Médio como pré-requisito, excluindo demonstrações que demandem conhecimentos mais avançados. A metodologia de trabalho em sala de aula, entretanto, não é foco deste trabalho.

Neste trabalho também será discutida a real necessidade de memorizar as fórmulas de dedução muito fácil, uma vez que elas podem ser obtidas pelo próprio aluno quando ele precisar fazer uso delas.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 AS DEMONSTRAÇÕES NA HISTÓRIA

As informações históricas aqui mencionadas foram descritas por BOYER (1974).

Os primeiros registros de demonstrações matemáticas que se tem conhecimento se situam na Grécia Antiga. Conforme BOYER (1974), um dos primeiros registros de raciocínio dedutivo, aplicado à Geometria, corresponde ao filósofo pré-socrático Tales de Mileto (620 a.C.-546 a.C.), com o desenvolvimento de seu Teorema e corolários.

Um dos primeiros registros de certos princípios da lógica se encontram em Parmênides de Eleia (515 a.C.-460 a.C.): princípios da identidade e não-contradição. Zenão (ou Zenon) de Eleia (490 a.C.-430 a.C.), discípulo de Parmênides, aprimorou a dialética do seu mestre. São famosos seus *paradoxos*, onde também se desenvolve a argumentação da redução ao absurdo. Por exemplo, no paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, argumentava assim Zenão:

> Se tempo e espaço forem divisíveis, o herói Aquiles jamais alcançará uma tartaruga em movimento. Se a tartaruga se encontra no ponto A e Aquiles no ponto B, quando este chegar ao ponto A, a tartaruga já terá andado até o ponto C nesse espaço de tempo. Sucessivamente, ao Aquiles atingir o ponto C, a tartaruga já terá atingido o ponto D, de modo que jamais Aquiles conseguirá alcançar a tartaruga (BOYER, 1974).

Cronologicamente, surgiram depois os filósofos sofistas, com Protágoras (481 a.C.-420 a.C.) e Górgias (483 a.C.-376 a.C.), entre outros. A base argumentativa da escola sofística é a *retórica*, segundo a qual não existe uma verdade única. Toda afirmação é admissível e defensável mediante adequada argumentação retórica. Hoje em dia, o termo sofisma lógico representa uma falácia lógica.

Em oposição aos sofistas se situou Sócrates (470 a.C.-399 a.C.), a sua escola socrática e seu discípulo Platão (entre 428 e 424 a.C.-340 a.C.), e posteriormente Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.), discípulo de Platão.

Platão difundiu o conceito que ele denominou *método analítico*, segundo o qual, numa demonstração, parte-se do conhecimento e dos postulados para, etapa por etapa, demonstrar a afirmação desejada (BOYER, 1974).

Platão defendia a *dialética* como busca da verdade em oposição à *retórica* dos sofistas. Para alcançar essa verdade, são necessários os procedimentos analíticos das demonstrações.

Segundo ARISTÓTELES (2005), a lógica se serve de três operações: o conceito, o juízo e o raciocínio. Ele define *silogismo* como um raciocínio lógico perfeito pelo qual, a partir de determinadas premissas, chega-se a uma conclusão válida (ARISTÓTELES, 2001).

O exemplo clássico de silogismo é:

- Todo homem é mortal (premissa maior).
- Sócrates é homem (premissa menor).
- Logo, Sócrates é mortal (conclusão).

Esse método axiomático se torna exemplar com o matemático Euclides de Alexandria (meados do século IV a.C.-meados do século III a.C.). Euclides de Alexandria registra uma das maiores, se não a maior obra matemática da Antiguidade: Elementos (EUCLIDES de ALEXANDRIA, 1944).

Euclides e seus discípulos descreveram nos Elementos grande parte do conhecimento matemático da época.

Mas foi somente nos séculos XVI e principalmente XVII que a matemática ganhou uma simbologia formal, semelhante à que empregamos hoje, com o filósofo e matemático alemão Gottfried Leibnitz (1648-1716) como um dos precursores.

3.2 DEFINIÇÃO

Conforme já foi descrito, os gregos da Antiguidade foram os primeiros a esboçar definições de demonstração.

Hoje em dia, muitos autores distinguem os termos *prova* e *demonstração*[1], e ainda *prova informal* e *prova formal*[2]. Mas não vamos nos ater a essas discussões neste trabalho.

A demonstração foi alicerçada na escola aristotélica, e se define como uma série de argumentações encadeadas de maneira lógica, cuja conclusão final é a proposição a ser validada que, desta forma, se verifica como verdadeira.

> [...]entende-se por demonstração ou demonstração matemática como sendo uma cadeia de argumentos convincentes, rigorosos, gerais, completos e resistentes, interligados logicamente para validar uma tese (FONSECA, 2004).

Esses argumentos das demonstrações se sustentam num *sistema axiomático*, composto de axiomas, definições e teoremas.

O Programa Nacional do Livro Didático PNLD explica assim esse sistema axiomático:

> De maneira muito simplificada, o método axiomático consiste em adotar conceitos primitivos (conceitos não definidos, tais como ponto, reta e plano) e axiomas (proposições não demonstradas, como "Por dois pontos passa uma única reta"). Estes representam os papéis das "peças do jogo" e das "regras do jogo", respectivamente. Tanto umas como as outras são aceitas, sem necessidade de justificativas, para que se possa começar a "jogar". Com base nesses elementos, por via puramente lógica, são definidos conceitos derivados (por exemplo: ângulo, quadrado, paralelismo de retas no espaço etc.) e são deduzidas proposições que são os teoremas, como o de Pitágoras (BRASIL, 2011).

EVES (2004) traz uma descrição mais formal:

> A fim de se estabelecer uma afirmação num sistema dedutivo, deve-se mostrar que essa afirmação é uma consequência lógica necessária de algumas afirmações previamente estabelecidas. Estas, por sua vez, devem ser estabelecidas a partir de outras também estabelecidas previamente e assim por diante. [...] como a cadeia não pode recuar indefinidamente, deve-se, ao início, aceitar um corpo finito de afirmações não-demonstradas, [...] para evitar imperdoáveis círculos viciosos consistindo em provar uma afirmação *A* partir de uma afirmação *B* e depois fazer o contrário. Essas afirmações assumidas inicialmente se denominam postulados ou axiomas do discurso e delas devem decorrer todas as demais afirmações do discurso. Quando se arranjam dessa maneira as afirmações de um discurso diz-se que ele se apresenta na forma postulacional (EVES, 2004)

Ainda no PNLD encontramos este exemplo ilustrativo de como é erigida a Matemática a partir de um sistema axiomático:

[1] em francês, *preuve – démonstration*
[2] em inglês, *informal proof – formal proof*

> Nos níveis de maior sistematização da Matemática, [...] seus teoremas podem ser todos escritos na forma *Se p, então q*. Uma proposição deste tipo é chamada de implicação. Em um teorema, dizemos que p é a hipótese e q é a tese.
> Tomemos, por exemplo: *Se dois números r e s são ímpares, então seu produto é ímpar*. Nesse caso, a hipótese do teorema é *r e s são dois números ímpares quaisquer* e sua tese: *o produto rs é ímpar*.
> Em todo teorema de Matemática, uma peça-chave é a demonstração, ou prova, que é uma sequência finita de passos lógicos que permite partir de p e chegar a q. Nesses passos lógicos, só podemos utilizar: a hipótese; teoremas já demonstrados; os axiomas aceitos; e as definições já feitas.
> Um exemplo famoso de teorema da geometria euclidiana é o seguinte: *Se T é um triângulo, então a soma dos ângulos internos de T é igual a 180º* . Para demonstrá-lo, partimos de um triângulo T qualquer e, recorrendo aos axiomas e teoremas da geometria euclidiana, podemos estabelecer uma demonstração puramente lógica de que a soma dos ângulos internos de T é igual a 180º (BRASIL, 2011).

Portanto, as demonstrações são parte essencial da Matemática, pois são elas que estabelecem a validade de toda afirmação matemática. A Matemática, ao contrário de outras Ciências, não se apoia no empirismo nem na observação, mas sim nesse sistema de encadeamentos lógicos por meio de demonstrações.

Segundo PIETROPAOLO (2005), as Ciências da Natureza como Física ou Biologia baseiam sua estrutura teórica em observações, indicando uma teoria que poderá vir a sofrer ajustes ou modificações. Na Matemática, ao contrário, as observações podem servir de fonte de ideias, mas sua estruturação é autônoma e abstrata, fundamentada no método dedutivo.

Isso está referenciado nos PCNs do Ensino Fundamental:

> Ao longo de sua história, a Matemática tem convivido com a reflexão de natureza filosófica, em suas vertentes da epistemologia e da lógica. Quando se reflete, hoje, sobre a natureza da validação do conhecimento matemático, reconhece-se que, na comunidade científica, a demonstração formal tem sido aceita como a única forma de validação dos seus resultados. Nesse sentido, a Matemática não é uma ciência empírica. Nenhuma verificação experimental ou medição feita em objetos físicos poderá, por exemplo, validar matematicamente o teorema de Pitágoras ou o teorema relativo à soma dos ângulos de um triângulo (BRASIL, 1998b).

PIETROPAOLO (2005) cita este exemplo ilustrativo, discorrendo sobre um pesquisador matemático:

> [...] ele poderá, por exemplo, experimentar e verificar para tantos casos quantos queira que o quadrado de um número ímpar subtraído de uma unidade é um número múltiplo de 8. No entanto ele só aceitará esse fato como uma lei depois de demonstrá-lo, ou seja, após obter esse resultado por meio de uma prova rigorosa (PIETROPAOLO, 2005).

No entanto, convém observar que o sistema axiomático dá forma à Matemática, mas esta não se restringe a esse formalismo. A Matemática evolui como Ciência apoiada ora na pesquisa pura ora na observação do mundo.

Assim elucida o PNLD (BRASIL, 2011) :

> Contudo, na organização e, acima de tudo, na validação do conhecimento, a Matemática assume características próprias. Desde a Grécia Antiga, o método axiomático-dedutivo foi progressivamente tornando-se o único aceito, na comunidade científica, para comprovação de um fato matemático. Os conceitos de axioma, definição, teorema, demonstração são o cerne do método. Convém ressaltar, no entanto, que se trata de um método de organização e de validação. A Matemática também é invenção e descoberta (BRASIL, 2011).

3.3 PANORAMA ATUAL

No final do século passado se observa no Brasil um crescimento nas pesquisas em Educação Matemática. Pesquisadores brasileiros da área, como Beatriz D'Ambrosio, relatavam as dificuldades dos alunos brasileiros em situações de exploração e investigação matemática:

> É bastante comum o aluno desistir de solucionar um problema matemático, afirmando não ter ele aprendido como resolver aquele tipo de questão ainda, quando ele não consegue reconhecer qual o algoritmo ou processo de solução apropriado para aquele problema. Falta aos alunos uma flexibilidade de solução e a coragem de tentar soluções alternativas (D'AMBROSIO, 1989).

D'AMBROSIO (1989) atribuía essa dificuldade à metodologia conteudista dominante no século passado:

> Para o entendimento de muitos professores, o aluno, aprenderá melhor quanto maior for o número de exercícios por ele resolvido. Será que de fato essa resolução de exercícios repetitivos de certos algoritmos e esquemas, de solução geram o aprendizado?
>
> Os professores em geral mostram a matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido. Ao aluno não é dado em nenhum momento a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada, nem mesmo uma solução mais interessante. O aluno assim, passa a acreditar que na aula de matemática o seu papel é passivo e desinteressante.
>
> Em nenhum momento no processo escolar, numa aula de matemática geram-se situações em que o aluno deva ser criativo, ou onde o aluno esteja motivado a solucionar um problema pela curiosidade criada pela situação em si ou pelo próprio desafio do problema. Na matemática escolar o aluno não vivencia situações de investigação, exploração e descobrimento (D'AMBROSIO, 1989).

Essa preocupação também foi consignada oficialmente nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental PCNEF publicados em 1998:

> Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão (BRASIL, 1998b).

Os pesquisadores estão de acordo quanto à importância do ensino de demonstrações nas aulas de Matemática, para incentivar o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo.

O matemático LAGES LIMA (1999), por exemplo, criticava a ausência de demonstrações nas aulas de Geometria:

> [...] a maioria dos alunos sai das escolas brasileiras sem nunca terem visto uma demonstração e o ensino de geometria realizado pelas escolas enfatiza as relações métricas, não fazem nenhuma construção com régua e compasso e concentra todo o estudo em manipulações numéricas (LAGES LIMA, 1999).

NASSER e TINOCO (2001) atestam que, na maioria das escolas brasileiras, não se estimula o questionamento, a argumentação. Dessa forma o raciocínio lógico não é impulsionado nos alunos, que se encontram, consequentemente, despreparados para manejar o processo dedutivo (NASSER; TINOCO, 2001).

Essa falta de domínio sobre o processo obstaculiza a compreensão do aluno sobre o verdadeiro significado da Matemática, podendo levar o aluno a supor que se trata de uma ciência alheia à compreensão do ser humano comum e somente alcançável por pesquisadores brilhantes.

> O trabalho com provas e demonstrações de teoremas ou propriedades, principalmente em Geometria, [...] deixa muito a desejar. Quanto à Álgebra, não há sequer menção de justificativas ou provas de propriedades. De modo geral, o resultado a que se chega pode ser comparado a um *passe de mágica*, em virtude da falta de explicitação de como se chega a tal resultado (AMORIM, 2009).

Portanto, os pesquisadores concordam que a Matemática em sala de aula não deve ser uma mera passagem de conteúdos, nem o ensinamento apenas dos conceitos neles presentes, mas, ao contrário, deve desenvolver os processos do pensamento do aluno, a abstração, a argumentação lógica a partir de hipóteses.

Esse desenvolvimento permite criar conjecturas e estratégias, comparar ideias e métodos, comunicar essas ideias por meios matemáticos, efetivar deduções de maneira clara e com certo rigor, o que facilita na resolução de problemas matemáticos de um modo geral.

3.4 A DEMONSTRAÇÃO EM PUBLICAÇÕES OFICIAIS

A partir do final do século passado o Brasil passa a incorporar de forma mais veemente a premissa de um ensino com caráter mais significativo e menos repetitivo. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, em seu artigo 35, prescreve:

> O Ensino Médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
> [...]
> II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> [...]
> (BRASIL, 1998a).

Contudo, a necessidade de desenvolvimento de capacidades argumentativas se reflete de maneira tímida nas publicações oficiais.

No Estado do Paraná, já em 1990 esse preceito estava presente no Currículo Básico para Matemática:

> [...] aprender Matemática é mais do que manejar fórmulas, saber fazer contas ou marcar X nas respostas: é interpretar, criar significados, construir seus próprios instrumentos para resolver problemas, estar preparado para perceber, desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de conceber, projetar e transcender o imediatamente sensível (PARANÁ, 1990).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio também preconizam uma abordagem abrangente e não restritiva do ensino de Matemática:

> [...] o aprendizado, no Ensino Médio, no sentido de se produzir um conhecimento efetivo, de significado próprio, não somente propedêutico...Referenda-se uma visão do Ensino Médio de caráter amplo, de forma que os aspectos e conteúdos associados ao aprendizado científico e matemático sejam parte essencial da formação cidadã de sentido universal.
> [...] a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico
> (BRASIL, 2000).

Essa premissa também se encontra nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental:

> Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar à importância do processo de resolução.
> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos que admitem diferentes respostas em função de certas condições, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL, 1998b).

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná recomendam que a aprendizagem da Matemática ocorra de um modo amplo e significativo:

> A aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios (PARANÁ, 2008).

Esses preceitos se encontram nos *eixos cognitivos* que se esperam da formação de um estudante egresso do Ensino Médio. Pressupõem-se cinco competências gerais (comuns a todas as áreas)

> I. Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
> II. Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
> III. Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
> IV. Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
> V. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.
> (BRASIL, 2015).

Os PCNEM também abordam a importância do desenvolvimento do raciocínio dedutivo:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo

> [...]Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando uma visão ampla e científica da realidade, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 2000).

Referências ao desenvolvimento do raciocínio também se encontram nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução[...]
> (BRASIL, 2006).

Entretanto, os PCNEM abordam o ensino de demonstrações de maneira muito precária. O assunto está quase ausente do documento. Encontram-se pouquíssimas referências, como este trecho que ressalta a importância das demonstrações:

> É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar e dar sentido às técnicas aplicadas (BRASIL, 2000).

Nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, o tema é proposto como um dos itens da Unidade Temática sobre *Geometria Espacial*:

> Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados (BRASIL, 2002).

Curiosamente, o assunto, que é quase ausente nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, é abordado nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.

> Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à

> demonstração; [...] é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas.
> Assim, esse trabalho terá continuidade no quarto ciclo, uma vez que a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações[...]. O refinamento das argumentações produzidas ocorrem gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações. (BRASIL, 1998b).

Ainda nos PCNEF, quanto ao desenvolvimento do raciocínio lógico:

> Embora nestes Parâmetros a Lógica não se constitua como um assunto a ser tratado explicitamente, alguns de seus princípios podem e devem ser integrados aos conteúdos, desde os ciclos iniciais, uma vez que ela é inerente à Matemática. No contexto da construção do conhecimento matemático é ela que permite a compreensão dos processos; é ela que possibilita o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações, bem como o da capacidade de justificar por meio de uma demonstração formal. (BRASIL, 1998b).

Percebe-se que existem outros países que dão maior atenção ao tema demonstrações em suas publicações oficiais.

Por exemplo, analisando as publicações do Ministério de Educação de Portugal, observamos inúmeras menções ao tema.

Tomemos como exemplo o programa de Matemática A do 10º Ano (equivalente ao 1º Ano do Ensino Médio brasileiro). Um dos *Objetivos e Competências Gerais* citados no documento é de "validar conjecturas; fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados" (PORTUGAL, 2001).

Essa mesma publicação apresenta extensas referências ao tema, indicando que o trabalho com demonstrações matemáticas é considerado um conteúdo importante nas salas de aula portuguesas :

> Raciocínio dedutivo:
> No ensino secundário, o estudante deverá ser solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar formulas e alguns teoremas. Noções muito elementares de Logica devem ser introduzidas à medida que se revelem uteis à clarificação de processos e de raciocínios. A Axiomática das Probabilidades (muito simples) visa dar aos estudantes alguma cultura sobre a construção hipotético-dedutiva de uma Ciência. Alguns problemas de Geometria no Espaço podem ser excelentes oportunidades para praticar o raciocínio dedutivo.

> [...]
> A aprendizagem matemática dos estudantes passa por fases intuitivas e informais, mas, desde muito cedo, mesmo estas não podem deixar de ser rigorosas ou desprovidas de demonstrações correctas, bem como não podem passar sem um mínimo de linguagem simbólica. Na aprendizagem da matemática elementar dos ensinos básico e secundário são absolutamente necessárias as demonstrações matemáticas,
> [...]
> Neste capıtulo, chama-se a atenção para alguns assuntos que, não constituindo em si mesmos conteúdos do programa, são alguma da essência de muitos passos da aprendizagem de diversos assuntos e constituem elementos que ajudam os estudantes a compreender demonstrações e a racionalizar os desenvolvimentos desta ou daquela teoria. Como se pode ver pelo corpo do programa, [...]pretende-se que os estudantes fiquem com a ideia de que as teorias matemáticas são estruturadas dedutivamente
> [...]
> Noção de teorema: hipótese, tese e demonstração.
> Métodos de demonstração:
> No que diz respeito aos métodos de demonstração, eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os estudantes terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais (mesmo para confirmar as suas resoluções de problemas). Não estão sugeridos explicitamente no corpo do programa, mas todo o estudo da Geometria Analítica se baseia numa geometria sintética euclidiana, semi-intuitiva, semi-dedutiva em que se procuram explorar intuições espaciais e habilidades dedutivas.
> [...]
> O habito de pensar correctamente, que é o que a final está em causa, deve ser acompanhado do habito de argumentar oralmente ou por escrito e, sempre que possível, os estudantes devem realizar exercícios metodológicos de descoberta de justificações (que não são mais do que novos problemas, por vezes dentro de outros problemas cuja resolução carece de ser comprovada). A indução matemática deve aparecer individualizada como exemplo particular do raciocínio dedutivo (quer para provar propriedades de sucessões, quer para provar propriedades combinatórias, se houver tempo). A abordagem de algumas demonstrações directas e indirectas (e nestas, a demonstração por redução ao absurdo) e inevitável. Assumem também uma grande importância demonstrações utilizando contra-exemplos.
> [...]
> Finalmente, quando for oportuno [...] devem ser abordadas as diferenças entre raciocínio plausível e raciocínio demonstrativo, ao mesmo tempo que se abordam os diversos tipos de evidência científica. Estas abordagens constituem bases seguras para criar um espırito crıtico construtivo capaz de destrinçar a qualidade relativa de cada uma das informações que o estudante recebe. (PORTUGAL, 2001).

O Programa e Metas para o Ensino Secundário em Portugal apresenta cinco desempenhos essenciais como objetivos, sendo que um deles é o de *provar/demonstrar*: “O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível” (PORTUGAL, 2013).

Aparecem também as seguintes referências ao tema “demonstrações” (PORTUGAL, 2013):

> Raciocínio matemático
> O raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético–dedutivo, embora o raciocínio indutivo desempenhe também um papel fundamental na atividade matemática, uma vez que preside à formulação de conjeturas. [...]os alunos devem ser capazes de utilizar a intuição e o raciocínio indutivo baseado em padrões e em regularidades com vista à resolução de problemas não rotineiros, frisando que estes problemas exigem recursos cognitivos acima dos necessários à resolução de problemas rotineiros, ainda que a respetiva resolução esteja dependente de conhecimentos e capacidades previamente adquiridas.
> No entanto [...], os alunos deverão saber que o raciocínio indutivo não é apropriado para justificar propriedades e, contrariamente ao raciocínio dedutivo, pode levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras, razão pela qual as conjeturas formuladas mas não demonstradas têm um interesse limitado, devendo os alunos ser alertados para este facto e incentivados a justificá-las *a posteriori*.
> [...]
> Os desempenhos requeridos para o cumprimento dos descritores preveem que os alunos da disciplina de Matemática A consigam, no final do Ensino Secundário, elaborar algumas demonstrações com segurança.
> (PORTUGAL, 2013).

Quanto aos conteúdos, esse mesmo documento preconiza que se devam demonstrar uma série de expressões e teoremas específicos, os quais a publicação descreve explicitamente (PORTUGAL, 1997).

No Caderno de Apoio do 12º Ano (focado em exercícios matemáticos), a título de exemplo, encontramos 31 exercícios envolvendo demonstrações (PORTUGAL, 2007).

Uma outra referência é aquilo que ocorreu nos Estados Unidos. O assunto estava relativamente relegado no século passado. Contudo, no ano 2000 foram publicados pelo National Council of Teachers of Mathematics os novos *Principles and Standards for School Mathematics* (Princípios e Normas para Matemática Escolar), que incorporaram as demonstrações como elemento central no ensino básico norte-americano. De fato, criaram-se dez *Standards*, sendo o sétimo deles denominado *Reasoning and Proof* (Raciocínio e Demonstração) (NCTM, 2000).

Os *Standards* trazem como premissa para Raciocínio e Demonstração (NCTM, 2000):

- Reconhecer o raciocínio e as demonstrações como aspectos fundamentais da Matemática.
- Fazer conjecturas matemáticas e investigá-las.
- Desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticas.

- Selecionar e utilizar vários tipos de raciocínios e métodos de demonstração.

Nesta análise comparativa com alguns países, percebe-se o quanto o currículo brasileiro é incipiente no ensino de demonstrações em Matemática.

Portugal e Estados Unidos, a título de exemplo, trazem o assunto inserido nos seus conteúdos educacionais.

3.5 BENEFÍCIOS

Conforme exposto anteriormente, os pesquisadores consentem sobre a importância da aprendizagem de demonstrações.

O mesmo atesta LAGES LIMA (1999):

> Um dos maiores méritos educativos de Matemática é o de ensinar aos jovens que toda conclusão se baseia em hipóteses, as quais precisam ser aceitas, admitidas para que a afirmação final seja válida. O processo de passar, mediante argumentos logicamente convincentes, das hipóteses para a conclusão, chama-se demonstração e seu uso sistemático na apresentação de uma teoria constitui o método dedutivo (LAGES LIMA, 1999).

Porém, o assunto é muito incipiente tanto em sala de aula como nos livros didáticos.

De fato, segundo descreve o matemático Geraldo Avila, especificamente sobre Geometria, observa-se uma redução na incidência do assunto demonstrações nos livros escolares: "os livros atuais abandonaram as demonstrações limitando-se a enunciar teoremas e definições, apresentando fórmulas sem a menor justificativa" (AVILA, 2010).

Outra dificuldade, segundo destacam Almouloud, Regnier e Fusco, é a *síndrome do imediatismo* em que vivemos. Tudo aquilo que fazemos deve produzir um fruto, que deve ser útil, palpável e imediato.

> Essa busca por resultados é sentida nas salas de aula quando o professor de matemática tem de desenvolver seu conteúdo e depara-se frequentemente com questões do tipo: para que serve isso? Quando iremos utilizar e de que forma? O aluno sente a necessidade de enxergar quase que instantaneamente uma aplicação para o que está aprendendo. Esse sentimento é apoiado pelas teorias que defendem uma aprendizagem contextualizada no sentido de propiciar uma aprendizagem com mais significado para os alunos. É inegável que esse aspecto de contextualizar conteúdos pode tornar a aprendizagem mais atraente além de dar sentido a diversos conteúdos. (ALMOULOUD et al., 2009).

A *contextualização* é importante e é muito valorizada tanto em publicações governamentais oficiais como nas pesquisas sobre Educação Matemática no Brasil. Porém, é preciso que o aluno de Ensino Médio seja capaz de trabalhar também em situações fora de seu contexto e também em temáticas abstratas. Acrescente-se que a contextualização não é incompatível com o ensino de demonstrações.

> A importância da demonstração vai muito além de se estabelecer uma verdade matemática. Nesse sentido, uma demonstração tem valor não só porque comprova um resultado, mas também porque pode apresentar novos métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que tenham uma aplicabilidade mais ampla em matemática e aponte novas direções matemáticas. As demonstrações são indispensáveis para a ampliação de conhecimento matemático; o simples ato de planejar uma prova contribui para o desenvolvimento da matemática. As demonstrações produzem novas visões matemáticas, novas ligações contextualizadas, e novos métodos para resolver problemas, dando a elas um valor muito além de comprovar a veracidade de proposições (ALMOULOUD; FUSCO, 2006).

A excessiva ênfase na contextualização recomendada pelo programa brasileiro pode conduzir a equívocos, dando a entender que o professor deveria correlacionar todo conteúdo com assuntos do dia a dia dos alunos. O matemático Paul Goldenberg apresenta uma visão mais equilibrada sobre o assunto:

> Não se trata de rejeitarmos uma boa aplicação quando a encontramos, mas sobretudo de considerar que
> (1) não é visível que uma orientação curricular voltada para as aplicações suscite de modo fiável o interesse dos alunos ou que seja a única (ou "a melhor") maneira de o fazer;
> (2) as aplicações tendem, nos melhores casos, a ser apenas pseudo-reais, e as verdadeiramente reais são demasiado difíceis, demasiado maçudas e (muitas vezes) demasiado maçadoras;
> (3) o que é "real" para adultos maduros não o é, necessariamente, para "adolescentes" (e, em qualquer caso, onde teremos aprendido que os adolescentes, mesmo nos primeiros anos da universidade, sejam manifestamente pragmáticos na sua abordagem da vida?);
> (4) não há qualquer prova de que os alunos para os quais a abordagem da "vida real" se assume como a mais necessária (aqueles que talvez estejam a utilizar a escola para escapar à chuva) sejam mais motivados pelas "aplicações do mundo real" do que por bons quebra-cabeças, e existem razões para pensar exactamente o contrário; e,
> (5) a insistência colocada na utilidade pragmática dos resultados matemáticos pode, na realidade, actuar *em sentido contrário* ao desenvolvimento da sensibilidade matemática – em particular, se o valor de certos resultados matemáticos está apenas na sua utilidade, dificilmente se compreende que necessitemos de perceber *por que razão* funciona, ou empreender o trabalho mental de *demonstrar* que funciona, na medida em que uma autoridade reconhecida já aprovou esse resultado (GOLDENBERG, 2006).

É consenso que o estudo de demonstrações colabora para o desenvolvimento do raciocínio lógico do adolescente, mas também para a compreensão da Matemática, como uma Ciência que não é formalizada por expressões observáveis no mundo real, mas por demonstrações seja dessas manifestações, seja de outras expressões construídas.

> [...] a matemática não são os conteúdos mas o raciocínio que descobre, reúne e dá sentido a estes conteúdos; a matemática é (em parte) um modo de pensar, um conjunto de *hábitos de pensamento* (GOLDENBERG, 2006).

Segundo o matemático português VELOSO (2000):

> A prática frequente pelos alunos da argumentação, da justificação das próprias afirmações e da procura de uma explicação em defesa das conjecturas que formulam, no decorrer das atividades de investigação, constituem modos válidos para melhorar o seu discurso matemático e as formas de exprimir os seus raciocínios (VELOSO, 2000).

O trabalho com demonstrações constitui uma via de mão dupla: por um lado, ele auxilia no desenvolvimento do raciocínio, que é a base para a resolução de problemas tanto na Matemática como em outras disciplinas e em contextos fora da escola. Por outro lado, o hábito de resolver problemas que envolvam raciocínio lógico, não só no âmbito específico da Matemática, também auxilia no desenvolvimento de práticas argumentativas e de demonstrações matemáticas.

O *fazer Matemática* é uma atividade que aguça a criatividade e requer pensamento elaborado.

> Aprender Matemática é mais do que aprender técnicas de utilização imediata; é interpretar, construir ferramentas conceituais, criar significados, perceber problemas, preparar-se para equacioná-los ou resolvê-los, desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de compreender, imaginar e extrapolar (GROENWALD, 1999).

A complexidade do pensamento matemático tem como característica a *abstração*. O raciocínio não foca unicamente tópicos matemáticos específicos, mas também processos mentais aprofundados como abstração e raciocínio com base em hipóteses, por meio de uma rede de conceitos com graus variáveis de elaboração.

Segundo GROENWALD e NUNES (2007):

> A matemática, como ciência, é um exemplo de abstração, uma vez que, como regra, não estuda o mundo real, e sim modelos, que são abstrações do mundo real. Logo, entendemos que, ao trabalhar com os conteúdos matemáticos, devemos ter em mente a criação de atividades que permitam o desenvolvimento do pensamento abstrato, possibilitando raciocínios de alto nível (GROENWALD; NUNES, 2007).

Esses raciocínios de alto nível são assim descritos por LINS e GIMENEZ (1997):

> Raciocínio de alto nível é aquele que estabelece relações. Não é imediato, e faz com que o sujeito estabeleça processos não-algorítmicos. Exige um nível de abstração mais elevado, o qual permite relações entre os conhecimentos já adquiridos, exigindo mais que a aplicação de algoritmos e regras (LINS; GIMENEZ, 1997).

É no campo da *neurociência* que se estudam os mecanismos do pensamento abstrato. De acordo com os Drs. OLIVEIRA e AMARAL (2001):

> Pensamento é a capacidade que tem o ser de, através de três operações mentais distintas: a formação de ideias, o juízo sobre as relações de conveniência entre essas ideias e o raciocínio, que estabelece relações entre os juízos, compreender o significado das coisas concretas e das abstrações, bem como das relações que elas guardam entre si.
> [...] abstração é um conceito no qual não levamos em conta um valor específico determinado e sim qualquer entre todos os valores possíveis daquilo com que estamos lidando ou ao que estamos nos referindo.
> (OLIVEIRA; AMARAL, 2001).

O processo do pensamento abstrato é capaz de produzir transformações no córtex cerebral que trazem benefícios no seu desenvolvimento. Os mesmos especialistas explanam o processo do pensamento e a criação de novas sinapses:

> [...] o pensamento abstrato proporciona algo mais: quando envolvido num processo de criatividade, adquire tal magnitude, que acaba por se constituir em forte estímulo, capaz de promover a proliferação dendrito-axonial[3], criando novas sinapses, tornando-se um poderoso estimulador do aprendizado, do conhecimento e da potencialidade de memorização (OLIVEIRA; AMARAL, 2001).

Além de desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo, a prática de demonstrações traz a vantagem de possibilitar ao aluno o entendimento do que é a Matemática e daquilo a que ela se propõe. A Matemática é uma Ciência muito peculiar, pois embasa suas teorias nas demonstrações, ao contrário das demais Ciencias Exatas, que se apoiam nas experimentações.

> Na realidade, se um dos objetivos principais do ensino da matemática nos ensinos básico e secundário é permitir aos alunos adquirir uma compreensão vivida do que é a matemática, incluindo a sua relevância, evolução histórica e características no momento presente — é indispensável que os alunos experimentem e interiorizem o caráter distintivo da matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio dedutivo e mesmo a estrutura axiomática das suas teorias (VELOSO, 2000).

[3]Dendritos e axônios compõem os neurônios

Ao adquirir novas formas de raciocínio e a real compreensão do que é Matemática, o aluno será capaz de *fazer Matemática* com mais propriedade, e poderá também vir a ganhar adicional interesse pela disciplina. Assim expõe GOLDENBERG (2006):

> Para servir (e salvaguardar) a matemática e as disciplinas que dela dependem, devemos ser fiéis tanto aos seus *conteúdos* como aos seus *métodos de funcionamento*, os "hábitos de pensamento"dos matemáticos. Desses hábitos faz parte (entre outras coisas) a demonstração.
> Mas, ao escolher determinados hábitos de pensamento que são essenciais em matemática *e também* nos bons modos de pensar em domínios mais amplos, podemos ensinar matemática que sirva para preparar os alunos para *estudos avançados de matemática* (um objectivo importante), e ao mesmo tempo corresponder às necessidades dos alunos que podem não ter ainda desenvolvido um especial interesse ou aptidão para a matemática, ou mesmo daqueles que nunca o farão (um segundo objectivo importante). (GOLDENBERG, 2006).

Outro aspecto que deve ser ressaltado é que o raciocínio dedutivo desenvolvido pelo hábito de demonstrar matematicamente traz um ganho substancial na aprendizagem de outras disciplinas, uma vez que o aluno adquire novas formas de pensamento, que trarão benefício em qualquer situação, não necessariamente vinculada à Matemática.

> [...] o desenvolvimento das habilidades argumentativas não se dá exclusivamente no domínio da matemática, é reconhecidamente mais amplo, estendendo-se aos domínios de outras disciplinas.
> [...] o potencial argumentativo dos estudantes precisa ser nutrido por diferentes atividades
> (DOUEK; PICHAT, 2003).

Pólya já registrava, ao falar especificamente sobre Geometria, o quanto é importante o aluno aprender demonstrações, que lhe servirão tanto para o conhecimento matemático como para o seu dia a dia.

> De fato, se o aluno não tiver aprendido este ou aquele fato geométrico específico, não terá perdido muito. Mas se ele não se houver familiarizado com as demonstrações geométricas, terá deixado escapar os melhores e mais simples exemplos das verdadeiras provas e perdido a melhor oportunidade de adquirir a ideia de raciocínio rigoroso. Sem esta ideia, faltar-lhe-á o verdadeiro critério para comparar argumentos de todos os tipos que se lhe apresentam na moderna vida cotidiana.
> Em suma, se a educação pretender incutir no estudante as noções de prova intuitiva e do raciocínio lógico, ela deverá reservar um lugar para as demonstrações geométricas (PÓLYA, 1995).

A atividade de realizar demonstrações foi deliberada nos *Standards* do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) de forma a que esteja presente em sala de aula sempre que requerida, e não como uma atividade especial (NCTM, 2000).

Assim sendo, a demonstração se incorpora nas atividades matemáticas para se tornar natural ao estudante.

> O raciocínio e a demonstração não são atividades especiais reservadas para momentos especiais ou tópicos do currículo especiais, mas antes deverão ser uma parte natural e integrante das discussões de sala de aula, seja qual for o tema em estudo. Em ambientes produtivos de sala de aula de matemática, os alunos deverão esperar ter que explicar e justificar as suas conclusões (NCTM, 2000).

A capacidade de efetivar deduções lógicas contribuirá também para outras disciplinas ou até mesmo qualquer situação em que se tenha que analisar, tomar decisões, chegar a conclusões. Caraça reforça a importância da Matemática, tendo em vista que ela se entrelaça nas outras Ciências e na vida dos cidadãos:

> Sem dúvida, a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre (CARAÇA, 1951).

Essas novas formas de pensamento auxiliam o aluno a progredir não só no aspecto acadêmico, mas também como cidadão que faz parte ativa da sociedade, sendo capaz de ter uma maior compreensão do mundo ao seu redor. A capacidade de argumentação é, portanto, de vital importância para a formação cidadã do aluno.

> [...] uma das capacidades mais importantes a desenvolver nos alunos é a da argumentação, uma vez que uma das finalidades do ensino é formar cidadãos críticos, capazes de valorizar os argumentos utilizados por políticos, pelos meios de comunicação e pelos colegas de trabalho (CONTENTE MONTEIRO, 2013).

O saber matemático, a capacidade argumentativa e de dedução lógica preparam o aluno para sua vida adulta, sejam quais forem as especificidades técnicas requeridas no futuro. Dessa forma, o conhecimento de Matemática será sempre importante na formação do aluno, independentemente dos rumos da evolução científica e tecnológica da humanidade.

> O avanço na tecnologia e as rápidas mudanças sociais impedem que se faça uma previsão exata de quais habilidades são úteis para preparar um aluno, logo, é necessário educar para resolver situações novas com habilidades de resolver problemas, criatividade, iniciativa e autonomia (GROENWALD; TIMM, 2000).

As práticas para aprender a raciocinar e deduzir são fundamentais para que o aluno aprimore o pensamento matemático. As demonstrações são produto da atividade humana e um dos principais objetivos de aprender Matemática é de reforçar os esquemas mentais de raciocínio do aluno.

O pesquisador Michael de Villiers descreve ainda um rol de seis funções da aprendizagem de demonstrações (DE VILLIERS, 2001).

São elas:

- *Prova com a função de verificação/convencimento*: quando temos a convicção de que um teorema é verdadeiro, logo adquirimos confiança e motivação para tentar prová-lo, verificando, de maneira quase empírica, a validade de nossas conjecturas.

- *Prova com a função de explicação*: ainda que, tendo certeza da validade de uma conjectura, após testá-la com exemplos, substituições numéricas e medições precisas por meio de verificações com um alto grau de confiança, tais procedimentos muitas vezes não têm a função somente de verificação, mas sim de explicação da razão da validade do fato.

- *Prova com a função de descoberta*: a prova não fica restrita somente à verificação de um resultado já conhecido, mas também nos leva a novos conhecimentos e a novas descobertas, quando tentamos demonstrar ou explicar a veracidade de uma conjectura.

- *Prova com a função de comunicação*: o ato de se pronunciar o raciocínio desenvolvido no processo de elaboração da prova gera uma discussão verbal e uma troca de informações. Com isso, se desenvolve a comunicação em torno do resultado obtido, propiciando assim, uma interação social, vinculada ao conhecimento matemático em jogo, considerando os argumentos apresentados como válidos ou não.

- *Prova com a função de desafio intelectual*: provar, matematicamente, muitas vezes requer tentativas, esforços mentais que passam a ser um desafio atrativo para o aluno, até alcançar a elaboração correta de uma prova. Quando isso acontece, a satisfação pessoal é inevitável e desperta o interesse por um novo desafio.

- *Prova com a função de sistematização*: quando estamos desenvolvendo uma prova matemática, num processo de verificação, buscamos organizar, avaliar as consistências e as inconsistências dos argumentos pré-estabelecidos e sua aplicabilidade. Com esses procedimentos, sistematizamos o melhor método para a realização da prova.

Bossez faz uma análise semelhante, na qual ele ainda acrescenta a *Prova com função de incorporação*. Trata-se de explicar de que forma o novo conhecimento se inscreve na teoria matemática considerada (BOSSEZ, 2013).

Sobre a função de *verificação/convencimento*, vale referir-se às palavras de PÓLYA (1995):

> ...tendo verificado o teorema em muitos casos particulares, obtivemos uma forte evidência indutiva a seu respeito. A fase indutiva venceu a nossa suspeita inicial e deu-nos uma forte confiança no teorema. Sem tal confiança dificilmente teríamos encontrado coragem para empreender a sua demonstração que não parece de modo algum uma tarefa rotineira. Quanto se está convencido que o teorema é verdadeiro, começamos a demonstrá-lo (PÓLYA, 1995).

Quanto à função de *explicação*, DE VILLIERS (2001) cita este exemplo de GALE (1990), relativo às descobertas experimentais de Feigenbaum sobre Geometria Fractal:

> Lanford e outros matemáticos não estavam a tentar validar os resultados de Feigenbaum mais do que, digamos, Newton estava a tentar validar as descobertas de Kepler sobre as órbitas dos planetas. Em ambos os casos a validade dos resultados nunca esteve em questão. O que faltava era uma explicação. Porque eram elípticas as órbitas? Porque satisfazem certas relações particulares?... há um mundo de diferença entre validação e explicação (DE VILLIERS, 2001 apud GALE, 1990).

Conclui DE VILLIERS (2001):

> Assim, na maior parte dos casos em que os resultados em questão são intuitivamente evidentes por si mesmos e/ou são apoiados numa quase empírica evidência convincente, a função da demonstração para os matemáticos não é a de verificação, mas sim a de explicação (ou outras funções da demonstração descritas a seguir) (DE VILLIERS, 2001).

Quanto à função de *desafio intelectual*, é notória a satisfação e a motivação que traz a completude de uma demonstração, não só ao pesquisador, mas também ao aluno de qualquer idade.

Sobre isso escreve DE VILLIERS (2002):

> A prova como desafio intelectual cumpre a função gratificante de realização própria e satisfação pessoal por ter construído uma demonstração. Passa a ser um campo de teste para a energia intelectual.
> [...] muitas vezes não é a verdade do resultado que está em dúvida, mas se (e como) seremos capazes de demonstrá-lo (DE VILLIERS, 2002).

3.6 ASPECTOS DIDÁTICOS

O presente trabalho não tem por objetivo uma análise aprofundada sobre o processo didático da prática de demonstrações em sala de aula, mas cumpre destacar alguns aspectos importantes.

Pelo exposto anteriormente fica claro que trabalhar com demonstrações em sala de aula traz inúmeras vantagens à formação dos alunos. Contudo, é preciso estar atento para dosar o que é dado em aula, buscando um equilíbrio entre as diversas atividades, sejam teóricas ou de aplicação. Também é preciso evitar o excesso de formalismo em sala, pois ele poderá causar rejeição do aluno, em vez de motivá-lo.

Sobre isso, tem-se a seguinte recomendação no PNLD:

> No Ensino Médio, deve ser bem dosada essa formalização da Matemática. Por um lado, evitar excesso de formalismo que afaste o interesse do aluno; por outro lado, desenvolver a capacidade de argumentação matemática, recorrendo a demonstrações simples e sugestivas (BRASIL, 2011).

Em determinadas circunstâncias, as demonstrações rigorosas se tornam difíceis para a compreensão do aluno de Ensino Médio. Devemos, então, abrir mão de certo rigor matemático, apresentando argumentações lógicas que chegam ao resultado. Para BALACHEFF (1988), essa demonstração não rigorosa em todos os seus passos é um tipo de *prova* [4] , em contraposição a *demonstração* [5] .

Segundo DUCHET (1998) :

> Uma prova matemática é um discurso que, a respeito de um enunciado preciso, convence uma comunidade da existência de uma demonstração completa deste enunciado (DUCHET, 1998).

É importante destacar não só a importância da demonstração, mas dos demais aspectos que formam a Matemática como Ciência. Mesmo para um pesquisador, a Matemática não se limita à construção de demonstrações:

> [...] o trabalho de um matemático não pode ser reduzido à produção de demonstrações, ele consiste primeiro em colocar e resolver problemas (que, em alguns casos, podem ter sido enunciados há muito tempo), em formular conjecturas, em emitir hipóteses... O encaminhamento da pesquisa pode então ser muito diferente da produção posterior das etapas de uma demonstração (DOUAIRE, 2006).

---

[4] em francês, *preuve*

[5] em francês, *démonstration*

Outro aspecto a ser observado é o risco muito frequente de o aluno assumir como verdade uma realidade observável por amostragem. É importante que o aluno assimile que as regularidades que se observem na Matemática não constituem numa verdade e muito menos numa comprovação.

No PNLD, explicita-se a necessidade de que o aluno compreenda que a argumentação indutiva empírica é inapropriada para estabelecer uma verdade matemática, e que o rigor matemático é necessário para tal fim.

> As práticas matemáticas na comunidade educacional são entrelaçadas de modo complexo com as práticas na comunidade científica.
> [...] Em particular tem sido defendido por muitos que o aluno do Ensino Médio seja incentivado a realizar atividades matemáticas nas quais possa construir o conhecimento (novo para ele), por meio de processos informais análogos aos do pesquisador matemático. Paralelamente, que o convidemos a estabelecer gradualmente a diferença entre os vários procedimentos de descoberta, invenção, organização e validação. Em particular, que procuremos levar os alunos a compreender a distinção entre uma prova lógico-dedutiva e uma verificação empírica, seja essa baseada na visualização de imagens gráficas, na construção de modelos materiais ou na medição de grandezas. Dessa forma, o Ensino Médio cumpre seu papel de ampliação, aprofundamento e organização dos conhecimentos matemáticos adquiridos no ensino fundamental, fase esta em que predominam, na abordagem da Matemática, os procedimentos indutivos e informais (BRASIL, 2011).

Segundo GRAVINA (2001), as descobertas empíricas são moldadas por meio de experiências originadas no "mundo sensível e imediato". Um grande obstáculo à compreensão reside na falta de clareza na distinção de argumentos de natureza empírica e de natureza lógico-dedutiva.

Assim descreve TEIXEIRA RODRIGUES (2008):

> Uma das condições requeridas para a evolução dos alunos no sentido de passarem do uso de esquemas demonstrativos empíricos indutivos para a adopção de esquemas demonstrativos dedutivos é a da transformação da natureza dos objectos matemáticos: de objectos empíricos para objectos abstractos.
> Para essa transformação, concorrem dois factores com igual relevância: os exemplos particulares e a função da demonstração.
> Nas actividades em que os alunos conjecturam e em que são incentivados a proceder a demonstrações explicativas, os exemplos, sendo imprescindíveis para a complexificação das generalizações, vão mudando gradualmente no que respeita ao papel desempenhado e à sua natureza: inicialmente são instâncias particulares até se tornarem exemplos generalizáveis, ao serem olhados nas suas propriedades gerais, na procura das razões teóricas que justificam um dado fenómeno matemático.
> Quando a demonstração tem a função de descoberta, os alunos lidam, desde o início da exploração da tarefa, com objectos matemáticos gerais e abstractos,

> não recorrendo a exemplos e estabelecendo raciocínios dedutivos. Neste caso, a demonstração é vista pelos alunos como servindo simultaneamente múltiplas funções: descoberta da propriedade matemática que soluciona o problema, verificativa da verdade da conclusão alcançada, explicativa e comunicativa (TEIXEIRA RODRIGUES, 2008).

Quanto à estruturação de um argumento matemático, Pedemonte cita o modelo de Toulmin da prova matemática, em que um argumento dedutivo apresenta uma estrutura ternária (PEDEMONTE, 2002 apud TOULMIN, 2003). É necessário que o aluno tenha consciência que seu argumento precisará conter esses três elementos:

- enunciado ou conclusão (*claim*);
- um certo número de dados que provam o enunciado (*data*);
- uma permissão de inferir que é dado por uma regra ou um princípio geral, que serve de fundamento para essa inferência (*warrant*).

Também é importante observar o entorno de uma expressão ao teorema a ser demonstrado. É importante trazer o aluno a participar, sempre que possível, das descobertas de expressões, ou comprovar seu funcionamento de forma intuitiva ou empírica, ou até mesmo participar do processo da demonstração.

Portanto, não se trata de simplesmente expor uma demonstração pronta no quadro, deixando o estudante em atitude passiva. Em muitos casos, o aluno pode se tornar o elemento central do processo dedutivo, seja na demonstração como um todo ou em cada uma de suas etapas. Quanto mais o aluno participar ativamente do processo da demonstração, tanto mais ele se desenvolverá nas práticas dedutivas.

OTTE (2003) preconiza práticas de experimentação anteriormente à formulação de conjecturas.

> Frequentemente, o estudo da demonstração, na matemática escolar, ocorre sob a forma de apresentação de teoremas e de sua demonstração no modo “limpo e arrumado” dos livros, ou seja, excluindo a reflexão sobre o processo de elaboração da prova, o qual inclui observação, teste com casos particulares e ensaio de construção de justificativas plausíveis (OTTE, 2003).

A temática da metodologia a ser trabalhada em sala de aula pelo professor foge à abrangência deste trabalho. No entanto, é importante destacar as recomendações de NASSER e TINOCO (1999). Os pesquisadores sugerem algumas estratégias para desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo do aluno :

- trabalho em duplas para construir uma solução (com justificativa) para problemas previamente discutidos em aula;
- avaliação de justificativas apresentadas por outros alunos;
- identificação da hipótese e da tese de uma afirmativa;
- resolução de problemas desafio que requerem raciocínio lógico em todas as aulas.

De acordo com HEALY e HOYLES (2000), o processo de demonstração requer certas atribuições por parte dos alunos :

- identificar assunções;
- isolar as propriedades e estruturas dadas;
- organizar os argumentos lógicos.

O pesquisador francês Nicolas Balacheff estudou os mecanismos da demonstração. BALACHEFF (1988) dá um significado mais amplo ao termo *preuve*[6], em oposição ao termo *démonstration*[7]. Esta última supõe um rigor matemático.

Ele distingue as provas pragmáticas das provas intelectuais (ou conceituais). As provas pragmáticas recorrem à ação efetiva ou à ostensão, onde a linguagem não é a ferramenta principal de transmissão de conhecimentos. As provas intelectuais se separam da ação e se baseiam na formulação das propriedades em jogo (BALACHEFF, 1988).

BALACHEFF (1988) também identifica quatro níveis nas provas realizadas pelos alunos:

- O empirismo ingênuo (*l'empirisme naïf*) consiste em enunciar a validade de um enunciado pela verificação em um ou alguns casos particulares, sem questionamento quanto a particularidades.
- A experiência crucial (*l'expérience cruciale*) consiste em escolher um maior número de casos, escolhidos de forma a apresentarem características distintas uns dos outros. A experiência crucial se origina na conscientização que o empirismo ingênuo é insuficiente.

[6] prova
[7] demonstração

- O exemplo genérico (*l'exemple génerique*) consiste na escolha de um exemplo particular, para o qual se formalizam passos para a demonstração do enunciado. A partir de um exemplo, o aluno descreve um procedimento, uma série de transformações para chegar à comprovação. Poder-se-ia chegar com outros exemplos, mas o aluno carece de linguagem formal para tanto.

- A experiência mental (*l'expérience mentale*) consiste em desconsiderar qualquer dado ou característica específica do exemplo genérico. Os procedimentos não são comprovados baseados nas particularidades do exemplo, mas, ao contrário, são formuladas em sua generalidade.

Balacheff cita Gérard Vergnaud, que define que as estratégias que o aluno utiliza estão alicerçadas em três polos (BALACHEFF, 1988 apud VERGNAUD, 1991):

- o polo dos conhecimentos (*le pôle des connaissances*);
- o polo da linguagem/formulação (*le pôle langagier ou de la formulation*);
- o polo da validação (*le pôle de la validation*).

BALACHEFF (1988) descreve que a passagem da prova pragmática à prova mental se dá a partir do salto para o nível da *experiência mental*. Neste caso, não são praticadas *ações efetivas*, mas sim *ações interiorizadas*.

É neste processo que o intelecto do aluno passa a considerar a linguagem abstrata da Matemática. Segundo BALACHEFF (1988), são requerimentos para a evolução da linguagem do aluno:

- uma descontextualização (*une décontextualisation*): abandono do objeto atual para ter acesso à classe de objetos, independentemente das circunstâncias de sua aparição;

- uma despersonalização (*une dépersonnalisation*): separa a ação do autor, tornando-a independente;

- uma destemporalização (*une détemporalisation*): exclui das ações a sua data e a sua duração anedótica. Este processo é fundamental para a passagem do universo das ações para o universo das relações e operações.

É o reforço dessas práticas que auxilia o aluno a passar do campo real e concreto do mundo ao qual ele está habituado e condicionado para o campo abstrato da Matemática. Se este último campo for corretamente exercitado, este passará a se tornar tão natural quanto o campo concreto.

4 ANÁLISE DAS FÓRMULAS

4.1 ESCOLHA DO LIVRO

Conforme descrito em capítulos anteriores, este trabalho não se propõe a trazer uma relação extensiva de todas as fórmulas matemáticas do Ensino Médio. Optou-se por trazer um subconjunto dessas fórmulas, tendo como referência um livro didático.

Para a escolha do livro, recorreu-se às recomendações do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

O Programa Nacional do Livro Didático é um programa governamental de distribuição gratuita de livros didáticos às escolas públicas brasileiras. Previamente, é realizada uma análise das coleções e é emitido pelo Ministério da Educação um Guia de Livros Didáticos (BRASIL, 2011) aprovadas pelo programa.

Esse Guia contempla a análise e avaliação de cada uma das coleções homologadas, com o objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores para a escolha dos livros.

As sete coleções indicadas no Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2012 do Ministério da Educação (BRASIL, 2011) são:

- Conexões com a Matemática (BARROSO; LEONARDO, 2010);
- Matemática – Contexto e Aplicações (DANTE, 2010);
- Matemática – Paiva (PAIVA, 2011);
- Matemática Ciência e Aplicações (DEGENSZAIJN; IEZZI, 2011);
- Matemática Ciência Linguagem e Tecnologia (RIBEIRO, 2011);
- Matemática Ensino Médio (DINIZ; SMOLE, 2010);

- Novo Olhar – Matemática (SOUZA, 2009).

A seguir, apresenta-se uma breve resenha de cada uma das coleções, extraída do Guia do Livro Didático do PNLD (BRASIL, 2011):

CONEXÕES COM A MATEMÁTICA (BARROSO; LEONARDO, 2010)

Segundo o PNLD, para abordagem de novos conteúdos, este livro apresenta como principal estratégia a de introduzir o conteúdo apresentando um ou poucos exemplos, usados para fazer generalizações que levam à apresentação sistematizada dos conteúdos.

Quanto aos exercícios propostos, a coleção apresenta como ponto forte a presença de exercícios na abertura de capítulos para levantar conhecimentos prévios ou motivar o estudo, e como pontos fracos a carência de exercícios envolvendo questões da sociedade moderna, bem contextualizados e desafiadores, de exercícios que incentivam o uso de diferentes estratégias de resolução e, finalmente, de atividades que estimulam a interação dos alunos e o trabalho em grupo. Além disso, a coleção apresenta um número excessivo de exercícios, dificultando a ação do professor na seleção destes.

Quanto ao incentivo ao uso de recursos didáticos, o livro apresenta como ponto forte o incentivo ao uso de materiais concretos e, como ponto deficitário, a ausência de estímulo ao uso de instrumentos de desenho, calculadora e computador.

Em geral, a explanação dos conteúdos é feita de maneira satisfatória. Além disso, várias atividades propiciam reflexões e aprofundamento dos conceitos. Na coleção, recorre-se a diversos textos e exercícios relacionados a práticas sociais, nos quais estão presentes temas significativos, como políticas públicas, meio ambiente e saúde.

MATEMÁTICA – CONTEXTO E APLICAÇÕES (DANTE, 2010)

Segundo o PNLD, este livro apresenta como principal estratégia de abordagem a de iniciar por atividades propostas, e, logo em seguida, apresentar os conteúdos sistematizados, sem dar oportunidade ao aluno de tirar conclusões próprias.

Quanto aos exercícios propostos, a obra apresenta deficiências, segundo o PNLD. A coleção é rica em exercícios de aplicação, análogos aos exemplos usados na apresentação do conteúdo e simples aplicação de fórmulas, mas é carente de exercícios envolvendo questões da sociedade, contextualizados e desafiadores, exercícios que incentivam o uso de diferentes estratégias de resolução, que que valorizam a verificação de processos e validação de respostas, e atividades que estimulam a interação dos alunos e o trabalho em grupo.

Quanto ao incentivo ao uso de recursos didáticos, o livro apresenta como ponto forte o incentivo ao uso de calculadora e, como ponto de melhoria, a escassez de estímulo ao uso de materiais concertos, instrumentos de desenho e computador.

Observa-se uma boa conexão entre os diversos campos da Matemática e desta com outras áreas do conhecimento. Também verifica-se a preocupação em articular os conhecimentos novos e os já abordados.

A coleção apresenta um exagero em conteúdos, procedimentos e no uso de terminologias, o que exigirá do docente uma seleção cuidadosa, a fim de priorizar aqueles que considerar indispensáveis à formação dos alunos do Ensino Médio.

As propostas de contextualização e o convite ao estudo, por meio de questionamentos, permeiam o conjunto da obra. A História da Matemática é abordada em todos os volumes.

MATEMÁTICA – PAIVA (PAIVA, 2011)

Nesta coleção, a metodologia para introduzir os novos conteúdos se dá principalmente por explanação teórica, seguida de atividades resolvidas de cunho aplicativo e exercícios.

Com relação aos exercícios propostos, o livro apresenta boa variedade de exercícios envolvendo questões da sociedade moderna, bem contextualizados e desafiadores. Porém, apresenta deficiência em exercícios inovadores e desafiadores, exercícios que incentivam o uso de diferentes estratégias de resolução e atividades que estimulam a interação dos alunos e o trabalho em grupo.

A obra é deficiente no incentivo ao uso de recursos didáticos, tanto materiais concretos, instrumentos de desenho como computador.

Nesta coleção, os conteúdos são desenvolvidos em um número adequado de páginas e, em geral, a sistematização dos conceitos matemáticos é bastante cuidadosa. No entanto, essa sistematização é feita, quase sempre, sem o estímulo à investigação por parte do aluno.

A maioria das atividades propostas é de aplicação do que é exposto no livro e a autonomia do aluno na construção do seu conhecimento é limitada. Nesse modelo, o pensamento crítico deixa de ser incentivado, há pouco espaço para a formulação de hipóteses e para uma aprendizagem mais significativa.

MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES (DEGENSZAIJN; IEZZI, 2011)

A estratégia de abordagem de conteúdos novos é, conforme o PNLD, iniciar por atividades propostas, e, logo em seguida, apresentar os conteúdos sistematizados, sem dar oportunidade ao aluno de tirar conclusões próprias.

A coleção é deficiente no que diz respeito à variedade de exercícios. Existe uma abundância de exercícios de aplicação de fórmulas. No entanto, o livro é pobre em exercícios inovadores e desafiadores, em exercícios envolvendo questões da sociedade moderna, bem como atividades que estimulam a interação dos alunos e o trabalho em grupo.

A coleção também é deficiente em estímulo de uso de recursos didáticos, tanto materiais concretos, instrumentos de desenho como computador.

A metodologia adotada oferece poucas oportunidades para um papel mais autônomo do aluno na aprendizagem.

Os conteúdos da obra estão, em geral, bem contextualizados. Também são frequentes as contextualizações na História da Matemática.

MATEMÁTICA CIÊNCIA, LINGUAGEM E TECNOLOGIA (RIBEIRO, 2011)

Como método de introdução de novos conteúdos, a obra se caracteriza na maior parte das vezes por iniciar pela apresentação de textos que contextualizam histórica ou socialmente o conhecimento e contribuem para motivar a sistematização do conteúdo, seguida de novos problemas resolvidos e propostos.

A obra é muito equilibrada com relação aos exercícios propostos, embora peque pelo excesso. Apresenta riqueza e variedade de exercícios, seja exercícios envolvendo questões da sociedade moderna, seja exercícios contextualizados e desafiadores, seja atividades que estimulam a interação dos alunos e o trabalho em grupo. Como ressalva, o livro poderia trazer mais exercícios que incentivam o uso de diferentes estratégias de resolução. Acrescente-se que a quantidade de exercícios é excessiva, dificultando a ação do professor.

Quanto ao uso de recursos, a coleção estimula o uso da calculadora, mas é pobre em uso de materiais concretos e computador.

São frequentemente exploradas as conexões da Matemática com as práticas sociais atuais ou com outras disciplinas. Há preocupação exagerada com nomenclatura. Ao longo da coleção, muitas propriedades são apresentadas sem demonstração.

Há preocupação na escolha de temas sociais que propiciem a formação cidadã, o desenvolvimento do pensamento crítico e a compreensão do mundo.

MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO (DINIZ; SMOLE, 2010)

Esta obra tem por característica, no que tange a introdução de novos conteúdos, iniciar pela apresentação de textos que contextualizam histórica ou socialmente o conhecimento e contribuem para motivar a sistematização do conteúdo, seguida de novos problemas resolvidos e propostos.

Quanto ao uso de exercícios, a coleção é adequada e equilibrada. Apresenta diversidade de exercícios de todo tipo, tais como: exercícios que valorizam a verificação de processos e validação de respostas, exercícios inovadores e desafiadores, exercícios envolvendo questões da sociedade moderna, contextualizados, exercícios que incentivam o uso de diferentes estratégias de resolução e também atividades que estimulam a interação dos alunos e o trabalho em grupo.

A coleção também é rica em estímulo ao uso de diversos recursos, como materiais concretos, instrumentos de desenho, calculadora e computador.

A obra destaca-se pela presença de tópicos interdisciplinares relevantes e atuais. A interação entre os alunos é favorecida em diversas atividades, especialmente no trabalho com jogos e com projetos. Os desafios são variados e, entre eles, muitos requerem, exclusivamente, o raciocínio lógico. Há bastante incentivo à formulação de problemas e à verificação de processos e resultados. A ligação dos conteúdos com as práticas sociais atuais é uma constante na obra.

NOVO OLHAR – MATEMÁTICA (SOUZA, 2009)

Quanto à maneira de abordar novos conteúdos, a obra se caracteriza, segundo o PNLD, por iniciar pela apresentação de textos que contextualizam histórica ou socialmente o conhecimento e contribuem para motivar a sistematização do conteúdo, seguida de novos problemas resolvidos e propostos.

Já quanto ao uso de exercícios, a coleção é rica e equilibrada, apresentando diversos exercícios, especialmente exercícios envolvendo questões da sociedade moderna, bem contextualizados e desafiadores, mas também exercícios que incentivam o uso de diferentes estratégias de resolução. No entanto, nota-se um excesso de exercícios, o que dificulta a seleção pelo professor.

Sobre o estímulo ao uso de recursos, o livro é abundante em incentivo ao uso de calculadora e computador, mas escasso em referência a materiais concretos.

A contextualização dos conteúdos matemáticos é um aspecto interessante da obra, pois se observam conexões sugestivas com as práticas sociais, com a própria Matemática e sua história e com outros saberes.

Na abordagem adotada, são feitas generalizações com base em exemplos, mas não há discussão adequada dessa atitude e nem referência às demonstrações lógicas, muitas das quais são acessíveis e importantes para introduzir os alunos no método lógico-dedutivo, uma das características da Matemática.

Os conhecimentos matemáticos são contextualizados de maneira significativa. Estes se relacionam de forma abrangente às práticas sociais, à própria Matemática, à sua história, ou a diferentes áreas do conhecimento.

Como pode ser observado, o PNLD, em seu Guia do Livro Didático (BRASIL, 2011), homologou sete coleções. Porém, todas as obras apresentam deficiências e são apontados diversos pontos de melhoria.

O livro “Matemática Fundamental – Uma Nova Abordagem” (GIOVANNI; BONJORNO, 2010), era adotado pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná até 2012. Esta coleção não está homologada no PNLD 2012. A partir do ano de 2013, a UTFPR passou a adotar o primeiro livro da lista do PNLD acima mencionada, isto é, “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010). Esta obra é adotada desde então em todos os cursos de Ensino Médio do Câmpus Curitiba da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, apresenta-se em três volumes e é homologada tanto pelo PNLD 2012 (BRASIL, 2011) como pelo PNLD 2015 (BRASIL, 2014).

Como o presente trabalho se propõe a utilizar um livro didático como referência, optou-se pela primeira coleção desta lista, coleção disponível no Câmpus Curitiba da Universidade Tecnológica Federal do Paraná UTFPR, devido à facilidade de acesso.

Foram levantadas as fórmulas presentes nos três volumes desta última coleção didática. Constatou-se que o Volume 2 é o que apresenta maior quantidade de fórmulas. Por essa razão, optou-se por basear o presente trabalho no Volume 2 do livro “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010).

Para as fórmulas para as quais não se encontrou nenhuma alternativa de demonstração acessível aos alunos de Ensino Médio, foram consultados alguns livros didáticos para analisar de que maneira estes tratavam esse conteúdo.

As obras consultadas são:

- Matemática Ensino Médio (SPINELLI et al., 2005);
- Matemática – Ensino Médio (DINIZ; SMOLE, 2010);
- Conexões com a Matemática (BARROSO; LEONARDO, 2010);
- Matemática Fundamental – Uma Nova Abordagem (GIOVANNI; BONJORNO, 2010);
- Matemática Volume Único (IEZZI et al., 2000).

A apresentação obedece à ordem de acordo com os eixos estruturantes preconizados pelas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (PARANÁ, 2008):

- Grandezas e Medidas;
- Funções;
- Geometrias;
- Números e Álgebra;
- Tratamento da Informação.

Analisou-se, para cada fórmula, a dificuldade da sua demonstração, tendo em conta o público alvo: alunos do Ensino Médio. A maioria das demonstrações é acessível ao entendimento do aluno. Para estas, apresentou-se uma demonstração, buscando sempre uma que seja simples (dentro do possível) e exija somente conhecimentos que fazem parte do currículo do Ensino Médio.

Não é objetivo deste trabalho apresentar diversas variantes da demonstração, nem tampouco analisar a metodologia adotada em sala para expor as demonstrações.

Analisou-se a também necessidade ou não de memorizar essas fórmulas.

4.2 PRÉ-REQUISITOS

Alguns conhecimentos matemáticos se supõem previamente dominados pelos alunos para o entendimento das deduções aqui apresentadas. Estes pré-requisitos fazem parte do conteúdo prévio padrão, seja em anos anteriores, seja ao longo da exposição de conteúdos previamente ao tópico específico apresentado.

A seguir estão listados os principais pré-requisitos esperados:

- Números reais. Potenciação, radiciação;
- Expressões algébricas. Fatoração, simplificação;
- Conceitos de geometria plana: ponto, reta, plano, ângulo, paralelismo, perímetro, área;
- Medidas de ângulo. Graus e radianos;
- Conceito de semelhança de figuras, homotetia;
- Área de um retângulo;
- Círculo, diâmetro, raio, setor circular, segmento circular, ângulo inscrito;
- Comprimento da circunferência;
- Polígonos, polígonos regulares, apótema;
- Polígonos inscritos na circunferência;
- Teorema do ângulo inscrito;
- Conceitos de geometria espacial: área da superfície e volume;
- Volume de um paralelepípedo;
- Conceito de semelhança de sólidos, homotetia;
- Princípio de Cavalieri;
- Conceito de esfera, cunha esférica, fuso esférico;
- Proporcionalidade. Regra de três;
- Sistema de coordenadas cartesianas;

- Conceito de incógnita;
- Equações de primeiro e segundo grau;
- Sistemas de equações;
- Conceito de matriz, operações com matrizes, matriz identidade, matriz inversa;
- Cofatores, determinantes;
- Semelhança de triângulos;
- Teorema de Pitágoras;
- Relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo;
- Conceito de funções;
- Ciclo trigonométrico. Funções trigonométricas;
- Funções tangente e cotangente como expressões das funções seno e cosseno.

4.3 GRANDEZAS E MEDIDAS

4.3.1 LADO E APÓTEMA DE UM QUADRADO INSCRITO NUMA CIRCUNFERÊNCIA

AS FÓRMULAS

$l = r \cdot \sqrt{2}$, onde l é o lado do quadrado inscrito, r é o raio da circunferência

$a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, onde a é o apótema do quadrado inscrito

UMA DEMONSTRAÇÃO

Na figura (vide Figura 1), representamos um quadrado inscrito numa circunferência. Traçando a diagonal (em preto) e o apótema (em vermelho), verifica-se que o triângulo OMP é retângulo. A hipotenusa vale r, um dos catetos vale a e o outro vale $\frac{l}{2}$.

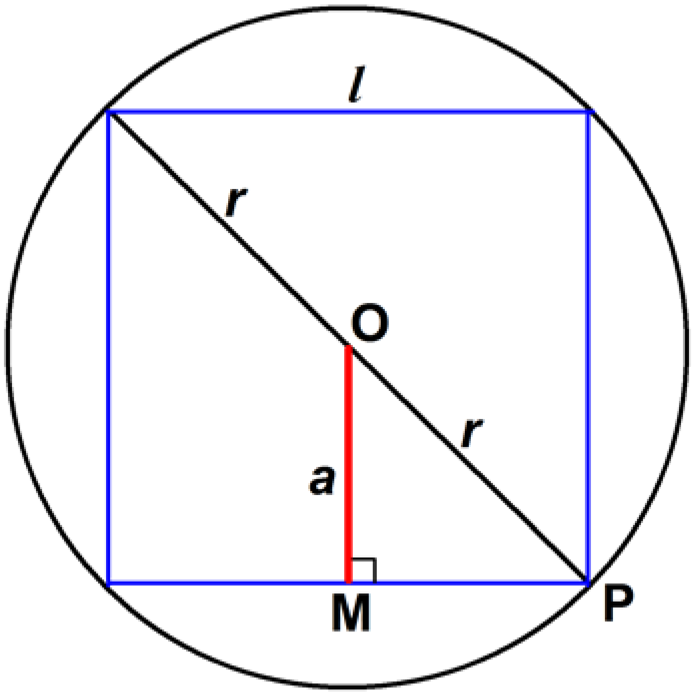

Figura 1: Quadrado Inscrito

Como o apótema de um quadrado mede metade do seu lado, segue que o outro cateto mede $\frac{l}{2} = a$.

Como a diagonal do quadrado ”enxerga” um ângulo de 90° no círculo, essa diagonal determina um arco do dobro de 90°, isto é, 180°. Ou seja, a diagonal é o próprio diâmetro do círculo. Logo, a hipotenusa de OMP é o raio.

Aplicando o Teorema de Pitágoras em OMP: $a^2 + a^2 = r^2$

Logo: $a^2 = \frac{r^2}{2}$

Logo

$$\boxed{a = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

Como $l = 2 \cdot a$, obtemos:

$$\boxed{l = r \cdot \sqrt{2}}$$

Demonstração simples e interessante para a manipulação geométrica, em que o professor pode atuar como um moderador à prática do aluno, que pode desenvolver a demonstração por si próprio. Dada a grande facilidade de se chegar às fórmulas, sugere-se que elas sejam apresentadas no escopo de um exercício, evitando assim que o aluno tenha a percepção que é uma fórmula a ser memorizada.

4.3.2 LADO E APÓTEMA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO INSCRITO NUMA CIRCUNFERÊNCIA

AS FÓRMULAS

$L = \sqrt{3} \cdot r$, onde L é o lado do triângulo equilátero e r o raio do círculo

$a = \dfrac{r}{2}$, onde a é o apótema do triângulo equilátero

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro "Conexões com a Matemática" (BARROSO; LEONARDO, 2010), as fórmulas são deduzidas de uma maneira simples de entendimento, porém, por um caminho um pouco mais longo.

UMA DEMONSTRAÇÃO

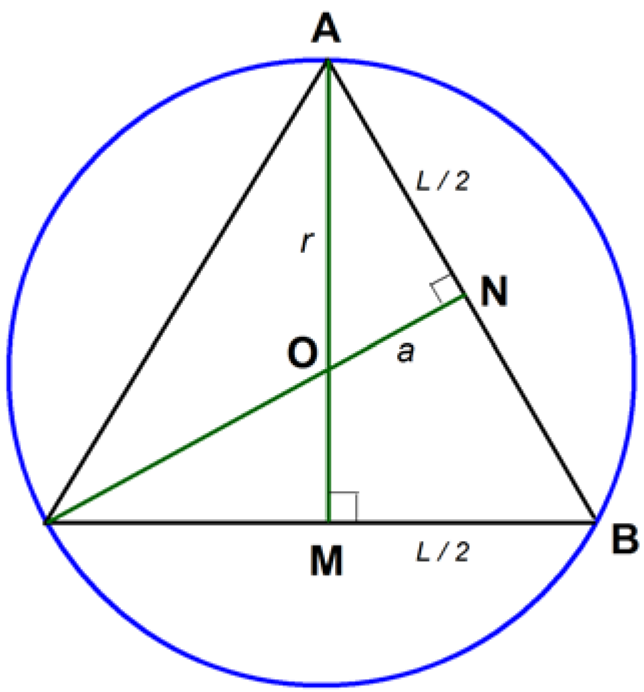

Figura 2: Triângulo Inscrito

O triângulo inscrito é equilátero. Logo, sua mediana coincide com sua altura e com sua mediatriz.

Observa-se na figura (vide Figura 2) que os triângulos AON e ABM são semelhantes, pois eles têm um ângulo comum e ambos têm um ângulo reto.

Portanto, teremos a seguinte relação de semelhança dos seus lados:

$\frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{a}{r}$

Logo

$$\boxed{a = \frac{r}{2}}$$

Aplicando agora o Teorema de Pitágoras no triângulo AON, temos:

$a^2 + (\frac{L}{2})^2 = r^2$

Substituindo a por $\frac{r}{2}$:

$(\frac{r}{2})^2 + (\frac{L}{2})^2 = r^2$

Logo $\frac{L^2}{4} = r^2 - \frac{r^2}{4}$

Logo $\frac{L^2}{4} = 3 \cdot \frac{r^2}{4}$

Simplificando: $L^2 = 3 \cdot r^2$

Como L somente admite valores positivos, descarta-se a solução negativa $-\sqrt{3} \cdot r$

De onde:

$$\boxed{L = \sqrt{3} \cdot r}$$

Demonstração que não traz grande dificuldade. Ideal para tratar como exercício, em que o professor pode atuar como moderador, evitando assim que o aluno tenha a percepção que é uma fórmula a ser memorizada.

4.3.3 LADO E APÓTEMA DE UM HEXÁGONO REGULAR INSCRITO NUMA CIRCUNFERÊNCIA

AS FÓRMULAS

$L = r$, onde L é o lado do hexágono e r o raio do círculo

$a = \frac{\sqrt{3} \cdot r}{2}$, onde a é o apótema do hexágono regular

UMA DEMONSTRAÇÃO

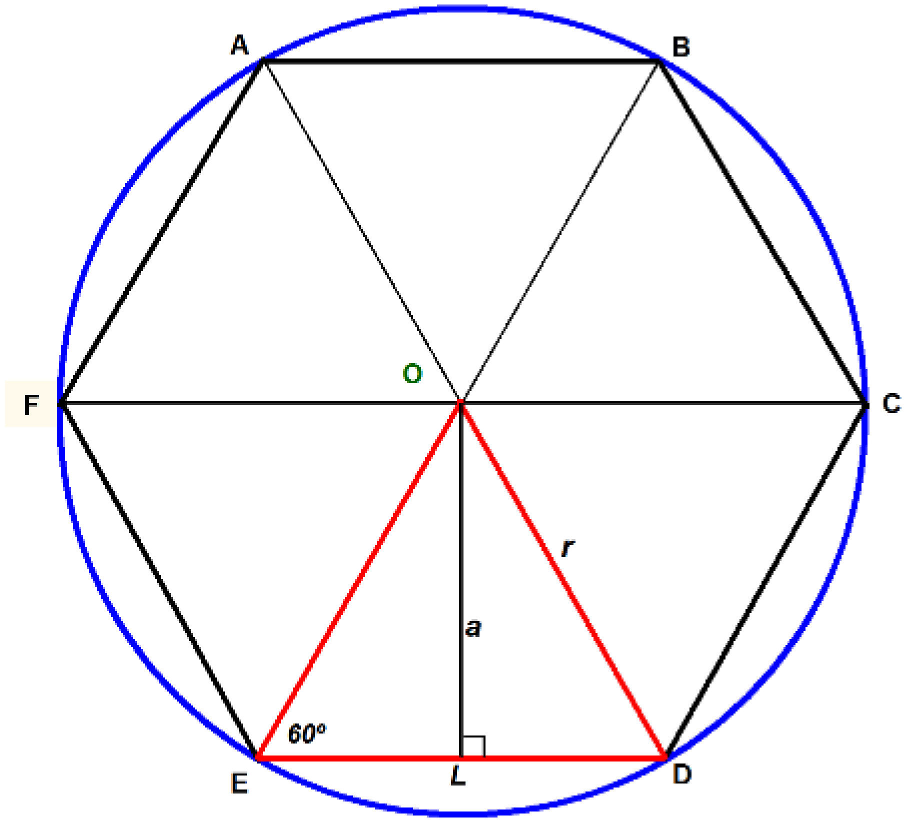

Figura 3: Hexágono Inscrito

Observa-se na figura (vide Figura 3) que os triângulos AOB, BOC, COD, DOE, EOF e FOA são todos congruentes, pois seus lados são congruentes.

Logo, os ângulos de vértice O desses triângulos possuem a mesma medida e a soma dessas medidas é 360°. Como são seis, então cada ângulo mede 60°. Isto é, o ângulo $E\hat{O}D$ mede 60°.

Mas o triângulo DOE é isósceles, pois dois de seus lados medem r. Logo, os dois ângulos inferiores medem igual:

$\angle DEO = \angle EDO$

Mas, no triângulo DOE, a soma dos seus ângulos é 180°, isto é:

$\angle DEO + \angle EDO + \angle EOD = 180°$

Com $\angle EOD = 60°$

Então, os ângulos $D\hat{E}O$ e $E\hat{D}O$ medem $\dfrac{180-60}{2} = 60°$.

Concluímos que o triângulo DOE é equilátero[1] , pois todos seus ângulos medem 60°.

Portanto, seu lado ED, que também é lado do hexágono, vale r:

$$\boxed{L = r}$$

Para calcular o apótema, basta traçar a altura partindo do ponto O com relação ao lado ED, formando um triângulo retângulo. Essa altura do triângulo DOE corresponde ao apótema do hexágono.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$a^2 + (\frac{L}{2})^2 = r^2$

Substituindo L por r:

$a^2 + (\frac{r}{2})^2 = r^2$

Logo:

$a^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$

Ou: $a^2 = \frac{3 \cdot r^2}{4}$

Como a só assume valores positivos, descarta-se a solução negativa $-\frac{\sqrt{3} \cdot r}{2}$

Logo:

$$\boxed{a = \frac{\sqrt{3} \cdot r}{2}}$$

,

Esta demonstração poderia ser realizada de maneira autônoma pelo aluno, com acompanhamento do professor. É importante, no entanto, que o professor fique atento para a as diversas etapas argumentativas.

A demonstração de que o triângulo é equilátero é um passo que mobiliza o entendimento do mundo matemático.

Dada a facilidade de se chegar às fórmulas, sugere-se que elas sejam trabalhadas como um simples exercício, evitando assim que o aluno tenha a percepção que é uma fórmula a ser memorizada.

[1]Existe a tendência de assumir que o triângulo é equilátero por simples inspeção visual da figura. É importante que o professor esclareça que esse não é um método válido em Matemática, podendo eventualmente conduzir a falsas conclusões.

4.3.4 ÁREA DE UM TRIÂNGULO

AS FÓRMULAS

Denominemos S a área de um triângulo qualquer ABC.

Teremos:

$S = \dfrac{b \cdot h}{2}$, onde b é a medida da base do triângulo e h sua altura (com relação a essa base)

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2}$$

onde a, b e c são lados do triângulo e $\hat{A}$ o ângulo desde o vértice A (comum aos lados b e c), $\hat{B}$ o ângulo desde o vértice B, $\hat{C}$ o ângulo desde o vértice C.

$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ (Fórmula de Heron), onde a, b e c são os lados do triângulo e p seu semiperímetro

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010), a terceira expressão (Fórmula de Heron) não é demonstrada, apenas apresentada.

UMA DEMONSTRAÇÃO

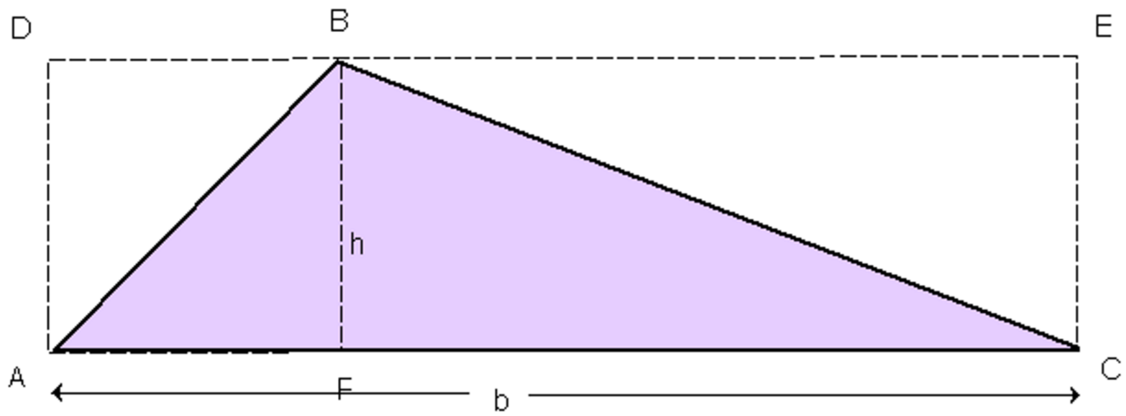

Figura 4: Área do Triângulo

PRIMEIRA FÓRMULA

$$S = \frac{b \cdot h}{2} \tag{1}$$

Considere o triângulo ABC e, a partir deste, construa o retângulo $ADEC$ de base e altura iguais às do triângulo ABC, conforme Figura 4.

Observa-se que a área desse retângulo é $b \cdot h$.

Os triângulos ADB e ABF são congruentes, pois seus lados têm a mesma medida dois a dois (BA é lado comum, BF e DA medem igual, DB e AF medem igual). Portanto, os triângulos ADB e ABF possuem a mesma área.

Os triângulos CEB e CFB são congruentes, pois seus lados têm a mesma medida dois a dois (BC é lado comum, BF e EC medem igual, BE e FC medem igual). Portanto, os triângulos CEB e CFB possuem a mesma área.

Logo, a área total do triângulo é metade da área do retângulo.

Isto é,

$$\boxed{S = \frac{b \cdot h}{2}}$$

SEGUNDA FÓRMULA

Num triângulo qualquer ABC, a sua área vale:

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2} \tag{2}$$

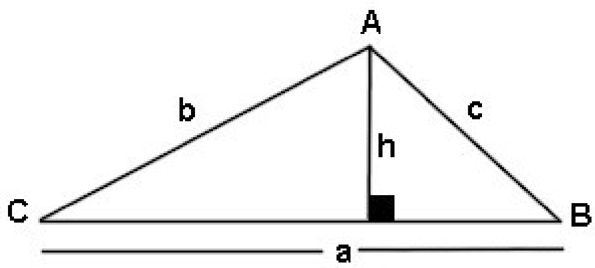

Figura 5: Área do Triângulo

Sabemos que a área de um triângulo ABC qualquer vale:

$$S = \frac{a \cdot h}{2},$$

onde h é a altura, conforme Figura 5 acima.

Mas sabemos que $\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h}{b}$

Logo, $h = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$

Substituindo:

$$\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2}}$$

De forma análoga chega-se às outras igualdades.

TERCEIRA FÓRMULA

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \tag{3}$$

A terceira é conhecida como Fórmula de Herão ou Heron. Para demonstrá-la, vamos utilizar a fórmula recém demonstrada da área do triângulo:

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{2}$$

Para calcular $\operatorname{sen}\hat{A}$, vamos utilizar a Lei dos Cossenos. Dado um triângulo ABC qualquer, de lados a, b e c, vale a Lei dos Cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$$

Isolando $\cos\hat{A}$:

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

A partir do cosseno, podemos calcular o seno, com Relação Fundamental da Trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 1$$

Como o ângulo $\hat{A}$ mede menos que 180°, seu seno é positivo. Portanto, descarta-se a solução negativa. Então:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \sqrt{1 - \cos^2\hat{A}}$$

Substituindo o cosseno recém calculado:

$$\text{sen}\hat{A} = \sqrt{1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}}$$

$$\text{sen}\hat{A} = \sqrt{\frac{(2bc)^2}{(2bc)^2} - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}}$$

$$\text{sen}\hat{A} = \frac{\sqrt{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}}{2bc}$$

Desenvolvendo:

$$\text{sen}\hat{A} = \frac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2}}{2bc}$$

Agora, basta substituir esse valor recém calculado do seno na fórmula da área:

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$$

$$S = \frac{bc\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2}}{4bc}$$

Ou: $S = \dfrac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2}}{4}$

Essa expressão equivale a:

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$

Ou: $S = \sqrt{\dfrac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}}$

Ou ainda: $S = \sqrt{\dfrac{(a+b+c)}{2} . \dfrac{(-a+b+c)}{2} \cdot \dfrac{(a-b+c)}{2} \cdot \dfrac{(a+b-c)}{2}}$

$$S = \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2} \cdot \frac{(a+b+c-2a)}{2} \cdot \frac{(a+b+c-2b)}{2} \cdot \frac{(a+b+c-2c)}{2}}$$

Como o semiperímetro p vale $\dfrac{a+b+c}{2}$, chega-se finalmente a:

$$\boxed{S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}$$

Observação: por ser a fórmula de Heron trabalhosa para demonstrar e não muito fácil de memorizar, não seria conveniente exigir sua memorização.

Essa demonstração está raramente presente nos livros didáticos brasileiros, por ser longa e trabalhosa. Contudo, a critério do professor, o exercício de demonstração poderia ser trabalhado em sala, por trazer diversas manipulações algébricas que não são tão simples para o aluno.

4.3.5 ÁREA DE UM TRAPÉZIO

A FÓRMULA

$S = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2}$

Onde B e b são as bases do trapézio e h sua altura.

UMA DEMONSTRAÇÃO

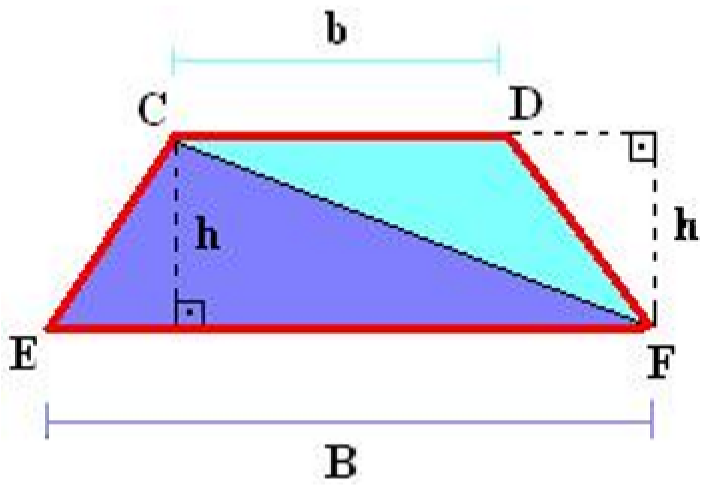

Figura 6: Área do Trapézio

Conforme se observa na Figura 6, a área do trapézio é a soma das áreas dos dois triângulos CDF e CEF.

Mas a área do triângulo CDF é: $S_{CDF} = \dfrac{b\cdot h}{2}$

E a área do triângulo CEF é: $S_{CEF} = \dfrac{B\cdot h}{2}$

Somando as duas, temos a área do trapézio:

$S = \dfrac{b\cdot h}{2} + \dfrac{B\cdot h}{2}.$

Ou finalmente:

$$\boxed{S = \frac{(B+b)\cdot h}{2}}$$

Trata-se de uma demonstração relativamente simples, que pode ser apresentada em forma de exercício em grupo, para que os alunos possam intercambiar ideias e estratégias. Desenvolve a visão geométrica por parte do aluno.

4.3.6 ÁREA DE UM LOSANGO

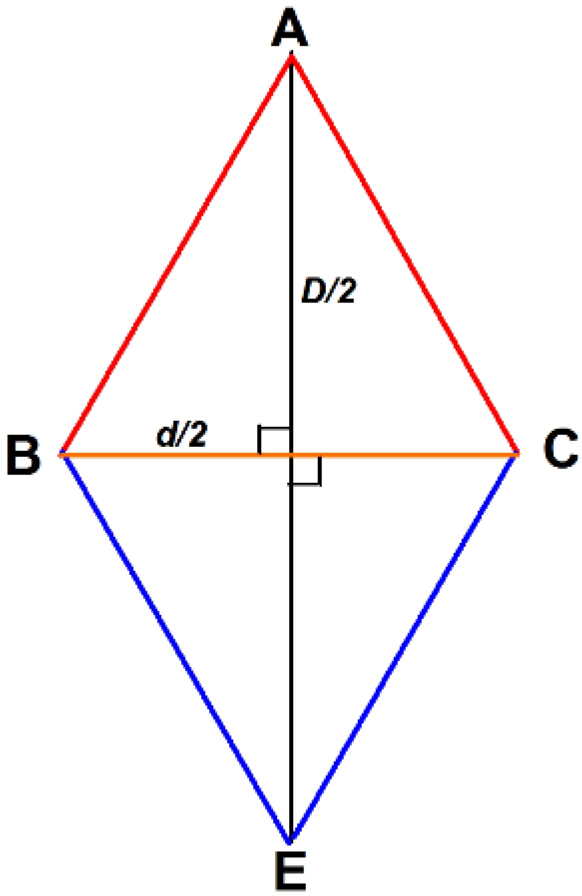

Figura 7: Área do Losango

A FÓRMULA

$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

Onde D e d são as duas diagonais do losango.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Conforme se observa na Figura 7, a área do losango é a soma das áreas dos dois triângulos ABC e BCE. As diagonais do losango são: $BC = d$ e $AE = D$. Logo, a altura de cada um dos triângulos vale $\frac{D}{2}$.

Logo, ambos os triângulos têm mesma área e esta área vale: $\frac{d.(\frac{D}{2})}{2}$, ou $\frac{d.D}{4}$.

Então, a área do losango vale o dobro da área do triângulo, isto é:

$$\boxed{S = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Demonstração simples, pode ser realizada pelo aluno. Serve como prática da Geometria.

4.3.7 ÁREA DE UM POLÍGONO REGULAR

A FÓRMULA

$S = p \cdot a$, onde p é o semiperímetro do polígono regular e a o seu apótema.

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro "Conexões com a Matemática" (BARROSO; LEONARDO, 2010), a fórmula é apresentada de uma maneira informal por indução não rigorosa.

Não há demonstração formal.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Seja um polígono regular qualquer, com qualquer número de lados. Chamemos de n o número de lados do polígono.

A Figura 8 apresenta um polígono de oito lados (octógono), apenas como exemplo. Observa-se na figura que o polígono de n lados pode sempre ser dividido em n triângulos isósceles com vértice no ponto A.

A área do polígono é igual à soma das áreas de todos os n triângulos. Ou seja, igual a n vezes a área de um triângulo.

Mas a área do triângulo é $\dfrac{b \cdot h}{2}$, onde a base b é igual ao lado L do polígono e a altura h é igual ao apótema a do polígono.

Portanto, a área do triângulo é $\dfrac{L \cdot a}{2}$.

A área do polígono é portanto:

$S = n.\dfrac{L \cdot a}{2}$, ou $S = \dfrac{n \cdot L \cdot a}{2}$.

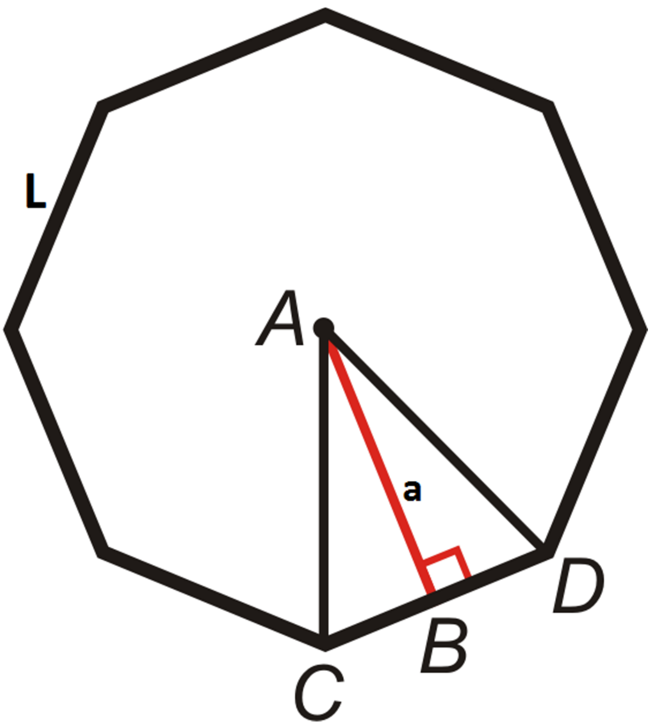

Figura 8: Área do Polígono Regular

Mas $n.L$ é o perímetro do polígono, logo o semiperímetro é $p = \dfrac{n \cdot L}{2}$.

De onde se chega ao resultado final:

$$\boxed{S = p \cdot a}$$

O exercício é interessante para o aluno porque lida com um polígono qualquer, desenvolvendo a capacidade de abstração do aluno, ao tratar com o valor n, que representa o número de lados.

A dedução da fórmula é uma boa prática de raciocínio espacial.

4.3.8 ÁREA DE UM CÍRCULO

A FÓRMULA

$S = \pi \cdot r^2$, onde r é o raio do círculo.

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010), a fórmula da área não é demonstrada, é apenas apresentada uma ideia informal de uma dedução, de maneira similar àquela que se apresenta neste trabalho.

UMA DEMONSTRAÇÃO

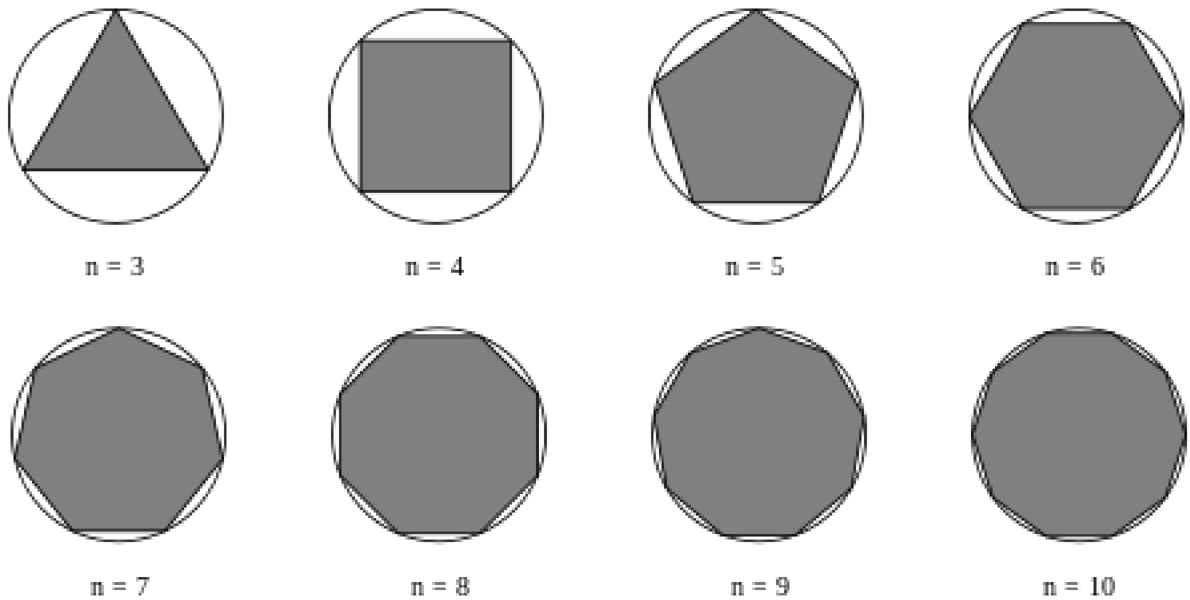

Figura 9: Diversos polígonos regulares inscritos

Fonte: Wikipedia. Disponível em https://fr.wikipedia.org/wiki/Aire_(géométrie). Acesso em 11/11/2015

As demonstrações da fórmula da área do círculo com os conhecimentos de Ensino Médio não são triviais para o aluno. Um exemplo é a demonstração do próprio Arquimedes, acessível para alunos mais avançados do Ensino Médio. Por essa razão, não será apresentada uma demonstração formal da fórmula, mas apenas uma “mostração”, uma maneira que faz o aluno entender a fórmula de maneira clara.

Observando a Figura 9, percebe-se que a área do polígono regular inscrito se aproxima cada vez mais à área do círculo à medida que o número de lados n do polígono aumenta.

Além disso, à medida que o número de lados do polígono aumenta, o seu apótema se aproxima cada vez mais do raio do círculo. Se continuarmos esse processo indefinidamente, podemos dizer que o perímetro do polígono se torna muito próximo do perímetro da circunferência e o apótema se torna muito próximo do raio.

Podemos dizer que a área do círculo se torna muito próxima da área do polígono de n lados quando n aumenta indefinidamente, com apótema muito próximo ao raio do círculo.

Podemos então utilizar a fórmula da área do polígono regular de n lados:

$S_n = p \cdot a$, onde p é o semiperímetro e a é o apótema.

O perímetro da circunferência é $2 \cdot \pi \cdot r$, logo, o semiperímetro da circunferência é $\pi \cdot r$.

Quando n aumenta indefinidamente[2], podemos aproximar o semiperímetro do polígono p pelo semiperímetro da circunferência $\pi \cdot r$ e o apótema do polígono pelo raio r.

Teremos então:

$S_n = p \cdot a \approx \pi \cdot r \cdot r$

Logo:

$$\boxed{S = \pi \cdot r^2}$$

Essa aproximação é condizente com a *prova* citada por BALACHEFF (1988) como *experiência crucial*, em que se evidencia a validade da fórmula assumindo valores de n cada vez maiores, porém, sem formalismo matemático.

É pertinente a apresentação em sala de aula de uma prova informal desta expressão tão importante da Matemática; desenvolve um conceito informal de limite matemático.

4.3.9 ÁREA DA COROA CIRCULAR

A FÓRMULA

$S = \pi \cdot (R^2 - r^2)$, onde R é o raio do círculo maior e r o raio do círculo menor.

UMA DEMONSTRAÇÃO

A área da coroa nada mais é que a diferença entre a área do círculo maior e a área do círculo menor.

Ou seja,

$S = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$

[2]É importante que o professor esclareça aos alunos que o fato de os valores se aproximarem quando n cresce indefinidamente é intuitivamente perceptível (o que não constitui uma demonstração formal), mas que e possível demonstrar com rigor a igualdade desses valores mediante conceitos matemáticos mais avançados.

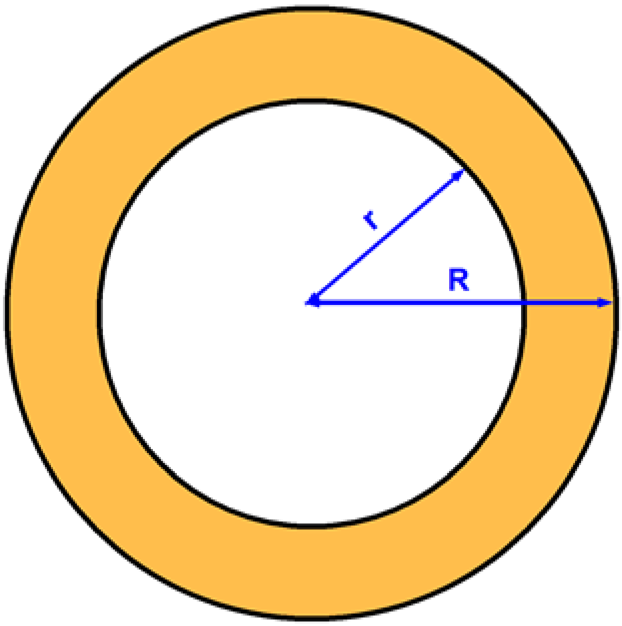

Figura 10: Área da Coroa Circular

Finalmente:

$$\boxed{S = \pi \cdot (R^2 - r^2)}$$

Exercício muito simples, serve como prática do conceito de área e da área do círculo.

4.3.10 ÁREA DO SETOR CIRCULAR

AS FÓRMULAS

Se o ângulo θ está expresso em graus:

$$S = \frac{\theta \pi r^2}{360°}$$

Se o ângulo θ está expresso em radianos:

$$S = \frac{\theta r^2}{2}$$

UMA DEMONSTRAÇÃO

Observando a Figura 11, nota-se que a área do setor é uma porção da área total do

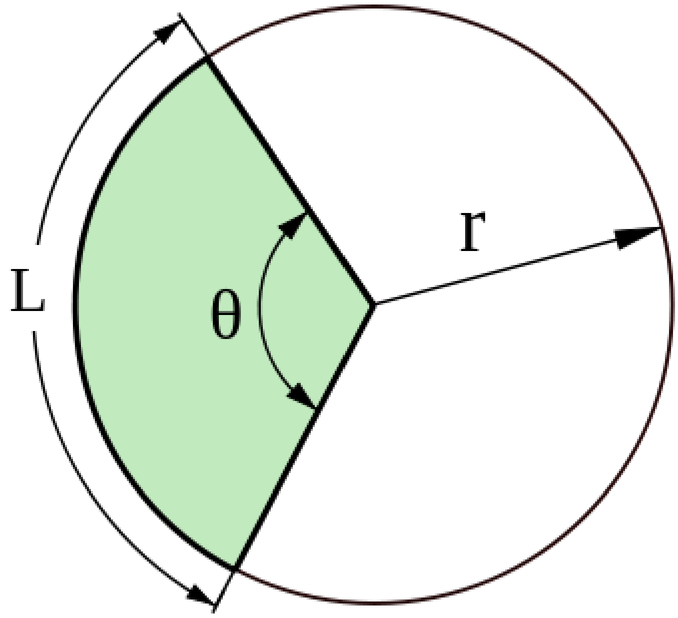

Figura 11: Setor Circular

círculo, e que existe uma proporção entre a área e o ângulo.

Para determinar a área do setor, basta aplicar uma regra de três relacionando:

- Ângulo θ está para ângulo do ciclo todo (360° ou 2π rad)
- Assim como área do setor está para área do círculo (πr^2)

Em graus, a regra de três ficaria:

θ __________ 360°

S __________ πr^2

Resolvendo esta regra de três, chega-se ao resultado:

$$\boxed{S = \frac{\theta \pi r^2}{360^\circ}}$$

Em radianos, a regra de três ficaria:

θ __________ 2π

S __________ πr^2

Resolvendo esta regra de três:

$S = \frac{\theta \pi r^2}{2\pi}$

Chega-se então ao resultado:

$$\boxed{S = \frac{\theta r^2}{2}}$$

Exercício simples, pode ser desenvolvido pelo próprio aluno ou em grupos, com orientação do professor. Ajuda a fixar conceitos (exemplos: arcos e ângulos medidos em graus ou radianos).

4.3.11 ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR

A FÓRMULA

Se o ângulo $\varnothing$ está expresso em graus:

$S = \frac{r^2}{2}(\frac{\varnothing\pi}{180°} - \text{sen}\varnothing)$

Se o ângulo $\varnothing$ está expresso em radianos:

$S = \frac{r^2}{2}(\varnothing - \text{sen}\varnothing)$

onde $\varnothing$ é a medida do arco do segmento e r é o raio do círculo.

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro "Conexões com a Matemática" (BARROSO; LEONARDO, 2010), somente é apresentada a fórmula com o arco medido em graus, a fórmula em radianos é omitida.

A demonstração é similar àquela aqui apresentada.

A fórmula é destacada como se fosse mais uma expressão a ser memorizada pelos alunos.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Observando a Figura 12, nota-se que a área do segmento circular equivale à diferença da área do setor circular com à área do triângulo em vermelho.

Mas a área do setor circular é (em radianos):

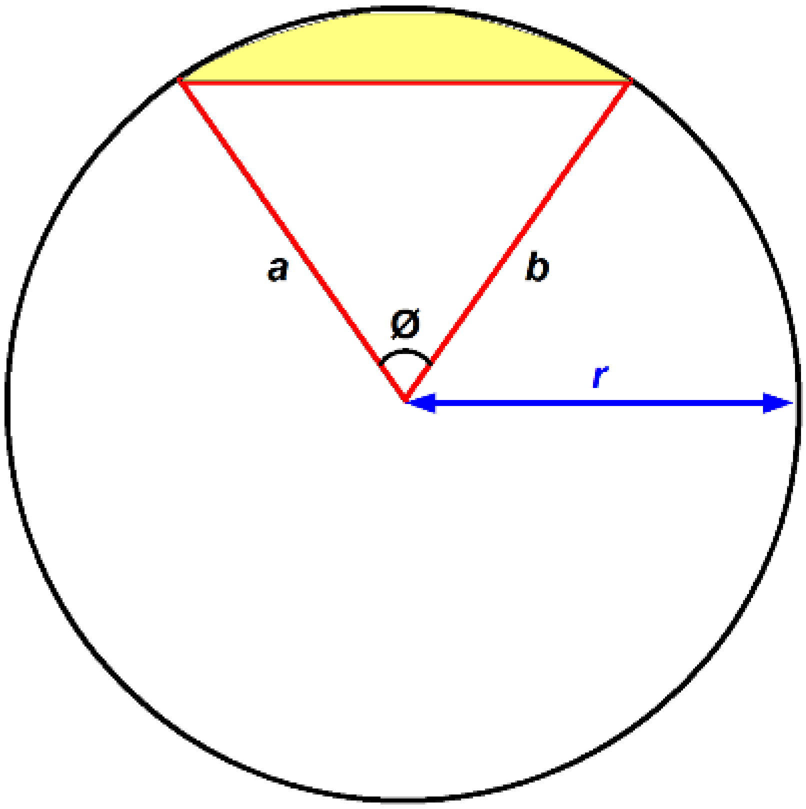

Figura 12: Área do Segmento Circular

$$S_1 = \frac{\varnothing r^2}{2},$$

conforme visto na seção anterior.

E a área do triângulo vermelho é

$S_2 = \dfrac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\varnothing}{2}$, onde a e b são os lados do triângulo.

Mas observa-se na figura que os lados a e b ambos são o raio do círculo. Substituindo então a e b por r:

$$S_2 = \frac{r^2 \cdot \operatorname{sen}\varnothing}{2}$$

Temos então:

$$S = S_1 - S_2$$

Logo,

$$S = \frac{\varnothing r^2}{2} - \frac{r^2 \cdot \operatorname{sen}\varnothing}{2}$$

Chega-se então à fórmula final (em radianos):

$$\boxed{S = \frac{r^2}{2}(\varnothing - \text{sen}\varnothing)}$$

Para a área em graus, basta realizar a conversão: a medida $\varnothing$ expressa em radianos equivale a $\frac{\varnothing\pi}{180}$, expresso em graus.

A fórmula em graus fica então:

$$\boxed{S = \frac{r^2}{2}(\frac{\varnothing\pi}{180°} - \text{sen}\varnothing)}$$

Exercício proveitoso para despertar a criatividade e o raciocínio geométrico. Pode ser apresentada no escopo de um exercício em grupo sob orientação do professor.

4.3.12 DIAGONAL DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO E DO CUBO

A FÓRMULA

Para qualquer ortoedro (também chamado de paralelepípedo retângulo), vale a relação:

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

Onde D é a diagonal do ortoedro, a, b e c são arestas não paralelas dois a dois desse paralelepípedo.

Observação: Para um cubo, vale a relação:

$D = \sqrt{3} \cdot a$,

Onde D é a diagonal do cubo e a é a sua aresta.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Observando a Figura 13, calculemos primeiramente a diagonal d da face inferior. Podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo amarelo:

$d^2 = a^2 + b^2$, onde d é a hipotenusa do triângulo amarelo e a diagonal da face inferior.

Agora, como o triângulo vermelho também é retângulo, com catetos d e c, podemos

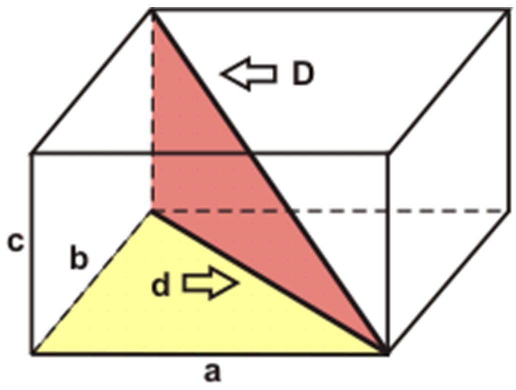

Figura 13: Diagonal do Paralelepípedo Retângulo

Fonte: Ministério da Educação. Disponível em http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10483/open/file/geo1102.htm . Acesso em 11/01/2016

novamente aplicar o Teorema de Pitágoras:

$D^2 = d^2 + c^2$, onde D é a hipotenusa do triângulo vermelho e também a diagonal do paralelepípedo.

Substituindo o valor calculado de d^2:

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$,

Como D só assume valores positivos, descarta-se a solução negativa.

De onde se chega à fórmula:

$$\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

<u>Observação:</u>

O cubo é um caso particular de um ortoedro, em que todas as arestas são iguais, vide Figura 14:

$a = b = c$

Podemos então utilizar a fórmula recém demonstrada, apenas substituindo b e c por a:

$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$

E finalmente:

$$\boxed{D = \sqrt{3} \cdot a}$$

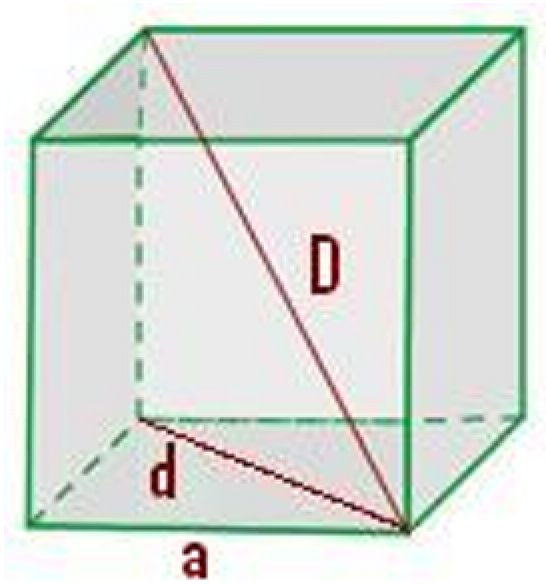

Figura 14: Diagonal do Cubo

Fonte: Enciclopedia Cubana en la Red. Disponível em http://www.ecured.cu/Cubo . Acesso em 02/12/2015

Dedução simples mas importante para desenvolver o raciocínio espacial. Dada a facilidade de se chegar nas fórmulas, seria ideal como um exercício, sob supervisão do professor.

4.3.13 ÁREA DE UM PRISMA

A FÓRMULA

Para qualquer prisma, vale a relação:

$S = S_{lateral} + 2 \cdot S_{base}$,

onde S é a área da superfície do prisma, $S_{lateral}$ é a área lateral do prisma, isto é, a soma das áreas de todas as faces laterais e S_{base} é a área da face que é base do prisma.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Como a área representa a soma das áreas de todas as faces, a fórmula fica evidente, pois a face superior (azul na figura) tem a mesma área que a face que é base. As demais faces (amarelas) são todas laterais.

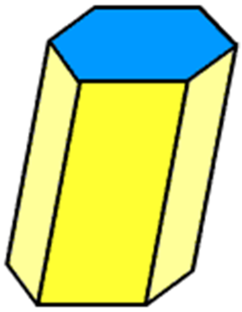

Figura 15: Prisma

$$\boxed{S = S_{lateral} + 2 \cdot S_{base}}$$

A demonstração requer somente conceitos básicos, sem dificuldades.

4.3.14 VOLUME DE UM PRISMA

A FÓRMULA

Para qualquer prisma, vale a relação:

$V_{prisma} = S_{baseprisma} \cdot h$

onde V_{prisma} é o volume do prisma, $S_{baseprisma}$ é a área da face que é base do prisma e h é a altura do prisma.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Para esta demonstração, utilizaremos o Princípio de Cavalieri, que diz que dois sólidos, apoiados ambos num plano σ, terão o mesmo volume se todo plano π, paralelo a σ, secciona ambos sólidos segundo regiões da mesma área.

Assim sendo, dado um prisma qualquer, basta considerar um paralelepípedo retângulo de mesma altura h e de base com mesma área que a base do prisma (vide Figura 16).

Observa-se que, qualquer que seja o plano paralelo às bases, este seccionará ambos sólidos em regiões com área igual à área da base.

Portanto, aplica-se o Princípio de Cavalieri.

Logo, o volume do prisma é igual ao volume do paralelepípedo, isto é:

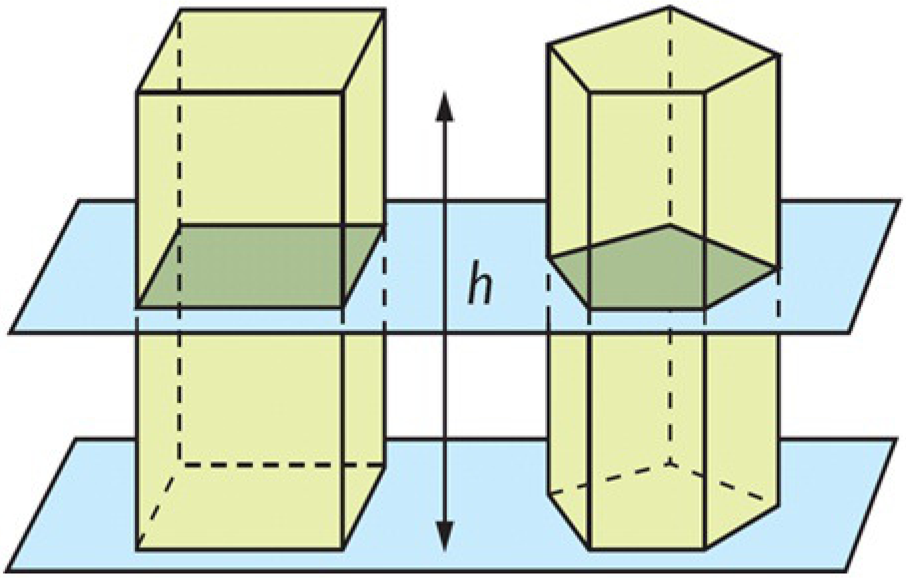

Figura 16: Volume do Prisma

Fonte: International GeoGebra Institute. Disponível em https://www.geogebra.org/material/simple/id/1908849 . Acessado em 12/01/2016

$V_{prisma} = V_{paralelep} = S_{baseparalelep} \cdot h$

Mas $S_{baseparalelep} = S_{baseprisma}$

Logo:

$$\boxed{V_{prisma} = S_{baseprisma} \cdot h}$$

Esta dedução é útil porque aprimora o raciocínio espacial do aluno. Ideal para abordar uma aplicação do Princípio de Cavalieri.

4.3.15 VOLUME DE UMA PIRÂMIDE

A FÓRMULA

Para qualquer pirâmide, vale a relação:

$$V = \frac{S_{base} \cdot h}{3}$$

onde V é o volume da pirâmide, S_{base} é a área da face que é base da pirâmide e h é a altura da pirâmide.

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010), a fórmula é deduzida de maneira semelhante à forma aqui apresentada. No entanto, a primeira propriedade que é descrita a seguir não é sequer mencionada no livro. A demonstração do livro se torna, portanto, incompleta.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Uma demonstração formal e rigorosa para esta fórmula se torna extensa e complexa para o aluno de Ensino Médio. Apresentamos aqui uma demonstração sem aprofundamento, mais adequada ao Ensino Médio.

A demonstração a seguir foi inspirada no experimento “Volume de Pirâmides (COSTA; RODRIGUES, 2011).

PASSO 1: UMA PROPRIEDADE

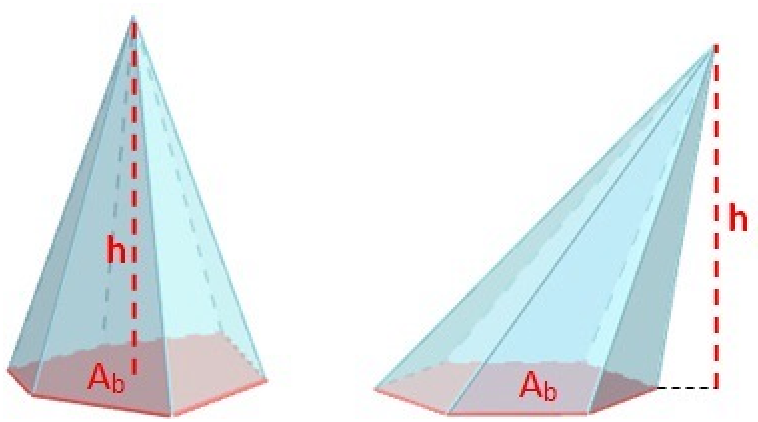

Figura 17: Volume de Pirâmides de mesma altura

Fonte: Volume de Pirâmides (COSTA; RODRIGUES, 2011)

Primeiramente, observamos a seguinte propriedade: duas pirâmides com a mesma área de base e mesma altura possuem o mesmo volume. É o caso, por exemplo, das duas pirâmides da Figura 17. Ambas possuem o mesmo volume.

Também as duas pirâmides da Figura 18, com mesma área da base, apresentam o mesmo volume, pela mesma propriedade.

É possível demonstrar esta propriedade por meio do Princípio de Cavalieri, segundo

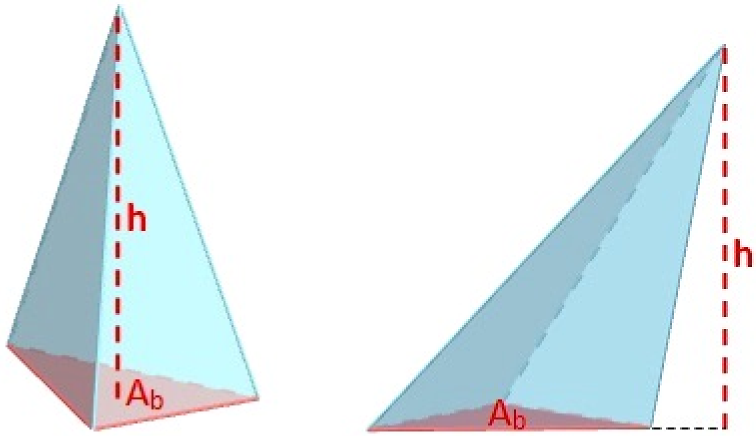

Figura 18: Volume de Pirâmides de mesma altura

Fonte: Volume de Pirâmides (COSTA; RODRIGUES, 2011)

o qual dois sólidos, apoiados ambos num plano σ, terão o mesmo volume se todo plano π, paralelo a σ, secciona ambos sólidos segundo regiões da mesma área.

PASSO 2: VOLUME DO TETRAEDRO

Agora vamos mostrar a fórmula do volume para o caso particular da pirâmide triangular, também denominada tetraedro.

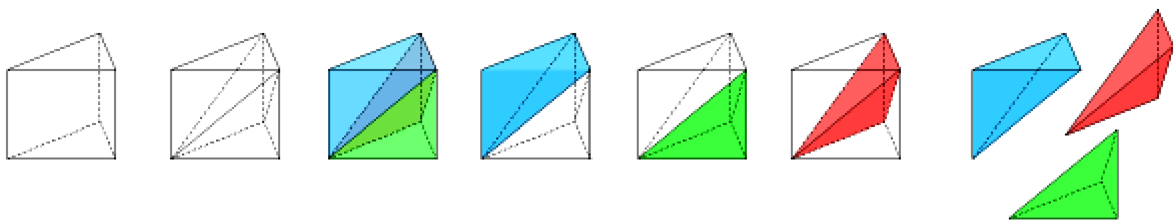

Figura 19: Prisma decomposto em 3 Tetraedros

Fonte: Alec Jacobson. Disponível em http://www.alecjacobson.com/weblog/?p=1888 Acesso em 12/01/2016

Dado um tetraedro qualquer de base ABC e vértice V, é possível construir o prisma triangular de mesma altura e de bases ABC e $VB'C'$, conforme Figura 20.

Observe que o prisma triangular pode ser dividido em três tetraedros: o tetraedro original $VABC$ e os tetraedros $B'VBC$ e $CVB'C'$.

A Figura 19 ilustra passo a passo a divisão de um prisma triangular em três tetraedros.

Denominemos estes tetraedros de t_1, t_2 e t_3 respectivamente, e de V_1, V_2 e V_3 seus respectivos volumes.

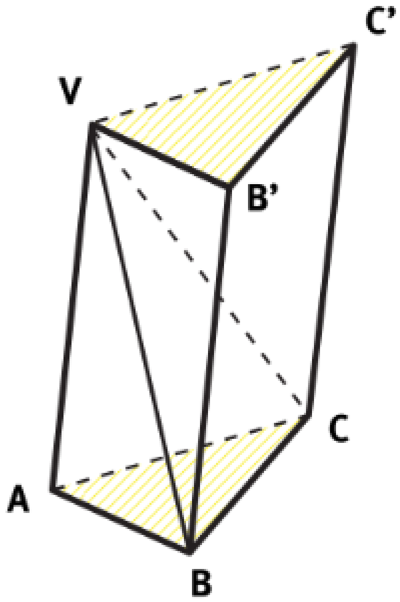

Figura 20: Prisma a partir de um Tetraedro

Fonte: Volume de Pirâmides (COSTA; RODRIGUES, 2011)

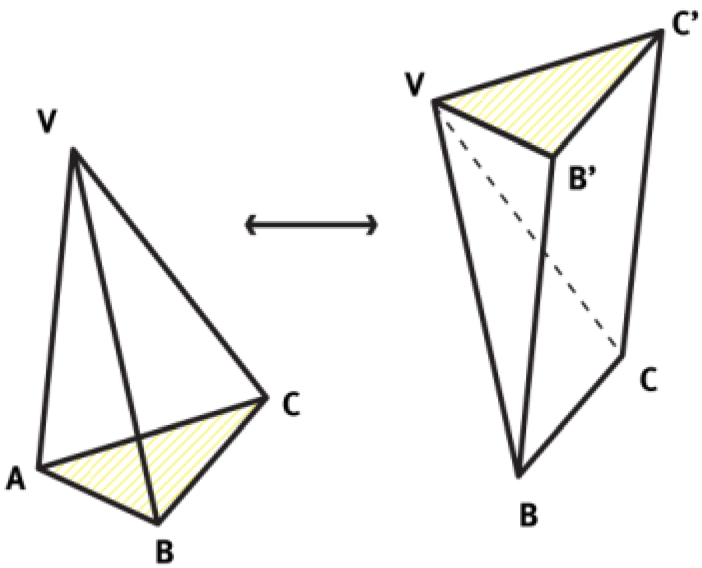

Figura 21: Dividindo o Prisma

Fonte: Volume de Pirâmides (COSTA; RODRIGUES, 2011)

Estes dois últimos tetraedros advêm da divisão do sólido $BCVB'C'$ (que corresponde ao prisma "subtraído" do tetraedro original), conforme se observa na Figura 21.

Os três tetraedros podem ser observados na Figura 22.

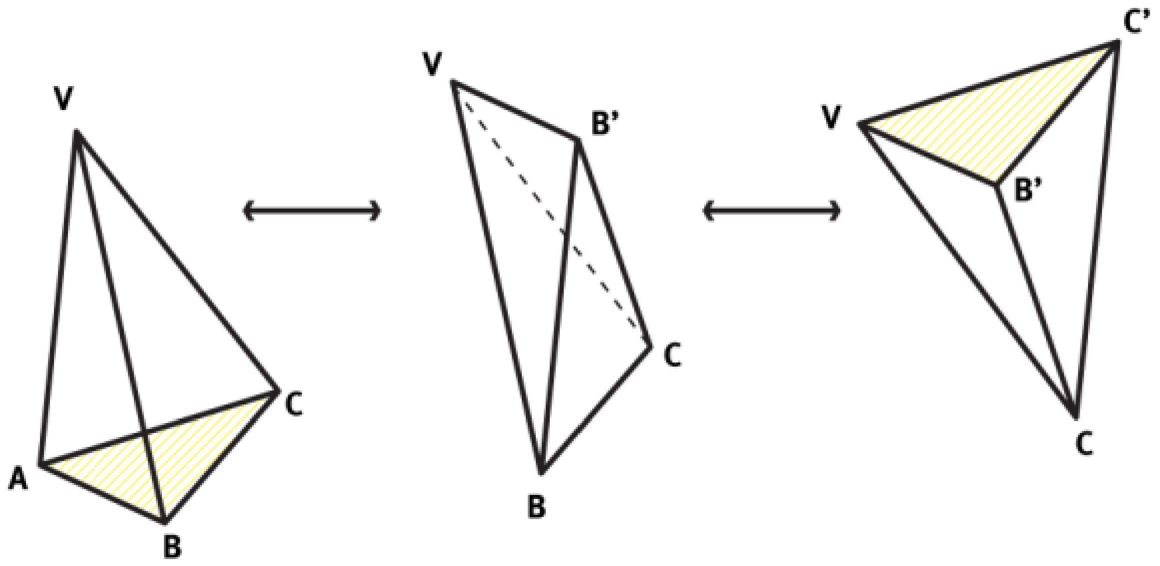

Figura 22: Prisma dividido em Três Tetraedros

Fonte: Volume de Pirâmides (COSTA; RODRIGUES, 2011)

Observamos na Figura 20 que os triângulos ABC e $VB'C'$ são base inferior e superior do prisma. Portanto, ABC e $VB'C'$ são triângulos congruentes, e são bases dos tetraedros t_1 e t_3 respectivamente, que possuem a mesma altura. Portanto, pela propriedade apresentada no Passo 1, teremos:

$V_1 = V_3$

Observemos também na Figura 20 que VB é diagonal do retângulo $VABB'$. Portanto, VAB e $VB'B$ são triângulos congruentes, e são bases dos tetraedros t_1 e t_2 respectivamente, que possuem a mesma altura. Portanto, pela propriedade apresentada no Passo 1, teremos:

$V_1 = V_2$

Portanto, os três tetraedros possuem o mesmo volume e a soma dos volumes corresponde ao volume do prisma, que é $S_{base} \cdot h$

Ou seja

$3V = S_{base} \cdot h$

De onde se chega à fórmula do volume do tetraedro:

$$\boxed{V = \frac{S_{base} \cdot h}{3}}$$

PASSO 3: VOLUME DA PIRÂMIDE

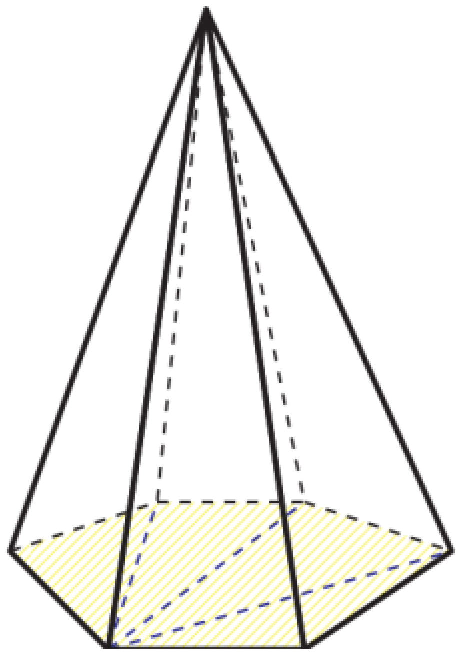

Figura 23: Pirâmide qualquer

Fonte: Volume de Pirâmides (COSTA; RODRIGUES, 2011)

Agora vamos generalizar a fórmula do tetraedro (pirâmide de base triangular) para uma pirâmide qualquer.

Seja uma pirâmide qualquer de vértice V e sua base um polígono qualquer.

Esse polígono sempre poderá ser dividido em n triângulos, conforme se observa na Figura 23.

Cada um desses triângulos formará, com o vértice V, um tetraedro. Portanto, conforme visto no Passo 2, o volume desse tetraedro será um terço da área desse triângulo vezes a altura, que é a mesma que a altura da pirâmide original.

O volume da pirâmide será a soma dos volumes de todos os tetraedros. Ou seja, um terço da soma das áreas dos triângulos vezes a altura.

Mas a soma das áreas dos triângulos corresponde à área da base da pirâmide. Portanto, chega-se ao resultado final, para uma pirâmide qualquer:

$$\boxed{V = \frac{S_{base} \cdot h}{3}}$$

Aqui foi apresentada a demonstração sem tanto rigor em alguns estágios. Isso parece apropriado pois algumas etapas podem trazer dificuldade de compreensão ao aluno de Ensino Médio.

O fato de ser uma exposição longa é relevante pois é um exemplo ilustrativo ao aluno de uma demonstração com várias etapas. Trabalha diversos conceitos geométricos e exige muito raciocínio espacial.

4.3.16 VOLUME DE UM TRONCO PIRAMIDAL

A FÓRMULA

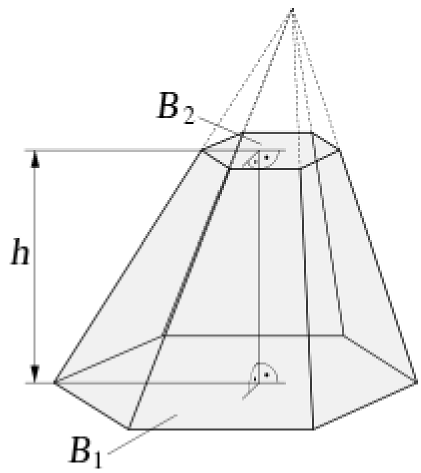

Figura 24: Volume do Tronco Piramidal

Fonte: Wikipedia. Disponível em https://de.wikipedia.org/wiki/Pyramidenstumpf. Acesso em 18/11/2015.

Para qualquer tronco piramidal, vale a relação:

$$V = \frac{h}{3} \cdot (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$$

onde V é o volume do tronco piramidal, A_1 e A_2 são as áreas das bases inferior e superior do tronco B_1 e B_2 respectivamente, h a altura do tronco.

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010), a fórmula não é demonstrada, é apenas apresentada.

UMA DEMONSTRAÇÃO

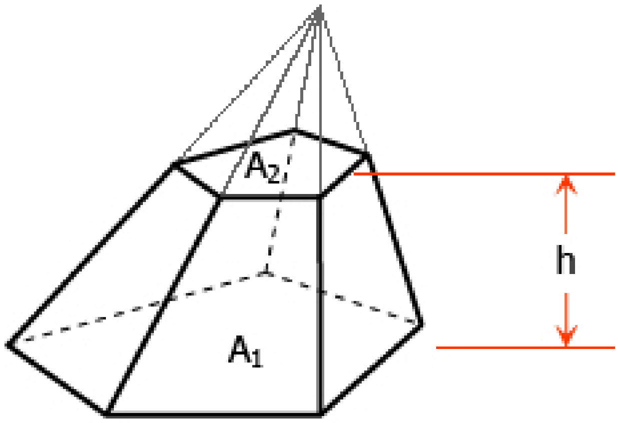

Figura 25: Volume do Tronco Piramidal

Primeiramente, observemos que o volume do tronco equivale ao volume da pirâmide maior (onde está contido o tronco) subtraído do volume da pirâmide menor (de base B_2).

Ou seja:

$V = V_1 - V_2$

onde V_1 é o volume da pirâmide maior e V_2 o volume da pirâmide menor.

Chamando de H a altura da pirâmide maior. Como a altura do tronco é h, então a altura da pirâmide menor será $H - h$.

Os volumes das pirâmides valem:

$V_1 = \dfrac{A_1 \cdot H}{3}$

$V_2 = \dfrac{A_2 \cdot (H-h)}{3}$

Logo, o volume do tronco é:

$V = V_1 - V_2 = \dfrac{A_1 \cdot H}{3} - \dfrac{A_2 \cdot (H-h)}{3}$

Ou:

$$V = \frac{1}{3}[(A_1 - A_2)H + A_2 h] \tag{4}$$

Observemos agora que as duas pirâmides possuem vértice comum, uma delas está "contida" na outra, suas bases são paralelas e a pirâmide grande é dilatação da pirâmide pequena. Cada aresta que parte do vértice da pirâmide grande é dilatação da aresta correspondente da pirâmide pequena. Ou seja, existe uma proporcionalidade das arestas duas a duas.

Existe, portanto, uma relação de homotetia entre as duas pirâmides (centrada no vértice). Conclui-se que as duas pirâmides são sólidos semelhantes. Portanto, valem as relações de semelhança.

Entre outras, vale a igualdade das relações de área (ou bidimensionais) com o quadrado das relações de distância (ou lineares ou unidimensionais).

Aplicando essa relação de semelhança para as áreas das bases e as alturas das duas pirâmides semelhantes:

$$\frac{A_2}{A_1} = (\frac{H-h}{H})^2$$

Vamos isolar H:

$$\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = 1 - \frac{h}{H}$$

$$\frac{h}{H} = 1 - \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}}$$

Logo

$$H = \frac{h}{1 - \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}}}$$

$$H = h \cdot (\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}})$$

$$H = h \cdot (\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}}) \cdot (\frac{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}})$$

$$H = \frac{A_1 + \sqrt{A_1 A_2}}{A_1 - A_2} \cdot h$$

Agora podemos substituir H na fórmula (4):

$$V = \frac{1}{3}[(A_1 - A_2)H + A_2 h]$$

$$V = \frac{1}{3}[(A_1 - A_2)(\frac{A_1 + \sqrt{A_1 A_2}}{A_1 - A_2}) \cdot h + A_2 h]$$

$$V = \frac{1}{3}[(A_1 + \sqrt{A_1 A_2}) \cdot h + A_2 h]$$

Finalmente:

$$\boxed{V = \frac{h}{3} \cdot (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})}$$

A demonstração não é difícil, mas é longa e trabalhosa. Um bom exercício para o conceito de semelhança tridimensional, traz manipulações algébricas longas.

Não se recomenda fazer os alunos memorizarem a fórmula aqui apresentada, para não saturar os alunos, já que ela não é comparativamente das mais utilizadas.

4.3.17 ÁREA DE UM CILINDRO RETO

A FÓRMULA

Para um cilindro reto vale a relação:

$S = 2\pi r(r+h)$

onde S é a área da superfície do cilindro reto, r é o raio da base circular e h a altura do cilindro.

UMA DEMONSTRAÇÃO

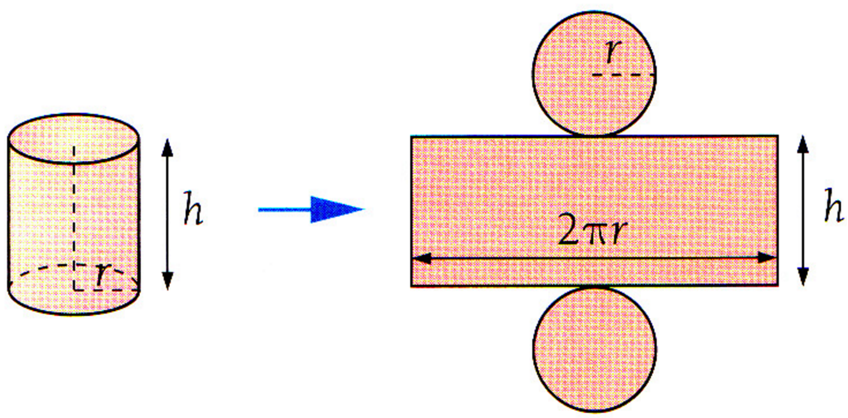

Figura 26: Área da superfície de um Cilindro

Se abrirmos a superfície lateral, conforme ilustrado na Figura 26, observaremos que ela forma um retângulo de altura h e largura igual à circunferência (perímetro) do círculo da base do cilindro.

Logo, a área lateral do cilindro vale:

$S_{lateral} = h \cdot 2\pi r$

A base é circular, logo, a área da base vale:

$S_{base} = \pi r^2$

A superfície do cilindro se compõe da superfície lateral mais as das duas bases. Logo, a área da superfície do cilindro vale:

$S = S_{lateral} + 2 \cdot S_{base}$

Então teremos:

$S = h \cdot 2\pi r + 2\pi r^2$

Finalmente:

$$\boxed{S = 2\pi r(r+h)}$$

Expressão cuja dedução não traz dificuldades ao aluno. Serve como exercício a ser realizado de maneira autônoma pelo aluno.

4.3.18 VOLUME DE UM CILINDRO

A FÓRMULA

Para qualquer cilindro vale a relação:

$V = \pi r^2 h$

onde V é o volume do cilindro, r é o raio da base circular e h a altura do cilindro.

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro "Conexões com a Matemática" (BARROSO; LEONARDO, 2010), a fórmula é deduzida sem muitos detalhamentos. O Princípio de Cavalieri é utilizado, mas o autor não aponta as razões pelas quais ele é válido neste caso.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Para demonstrar a fórmula, utilizaremos o Princípio de Cavalieri. Tomemos um prisma qualquer com altura h igual à altura do cilindro e área de base A_1 igual à área A_2 da base circular do cilindro.

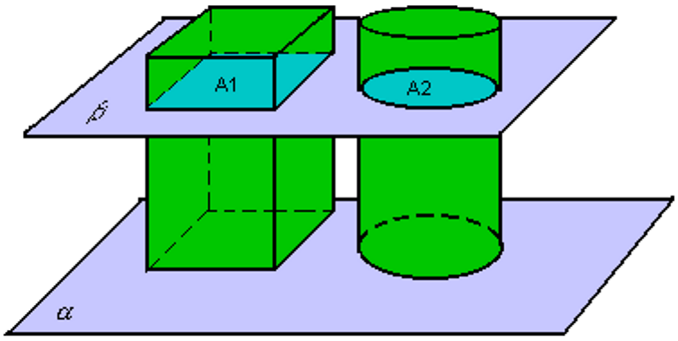

Figura 27: Volume de um Cilindro

Se ambos sólidos estão apoiados num plano α, qualquer plano β paralelo a α cortará o prisma em uma secção congruente com a base do prisma. Ou seja, a secção do prisma terá a mesma área A_1.

Da mesma forma, esse mesmo plano β cortará também o cilindro em uma secção circular congruente à base do cilindro, tento a mesma área A_2.

Mas por escolha, temos que $A_1 = A_2$. Portanto, vale o Princípio de Cavalieri e o volume do cilindro é igual ao volume do prisma.

O volume do prisma é $A_1 \cdot h$, logo:

$V = A_1 \cdot h$

também é o volume do cilindro.

Como $A_1 = A_2$, então

$V = A_2 \cdot h$

Mas A_2 é a área da base circular. Isto é:

$A_2 = \pi r^2$

Conclui-se que:

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

Aplicação simples, porém, proveitosa do Princípio de Cavalieri. Convém memorizar a fórmula como sendo $V = (Area.da.base) \cdot h$, para fazer analogia com outros sólidos.

4.3.19 ÁREA DE UM CONE RETO

A FÓRMULA

Para um cone reto vale a relação:

$S = \pi r(r+g)$

onde S é a área da superfície do cone reto, r é o raio da base circular e g a geratriz do cone.

UMA DEMONSTRAÇÃO

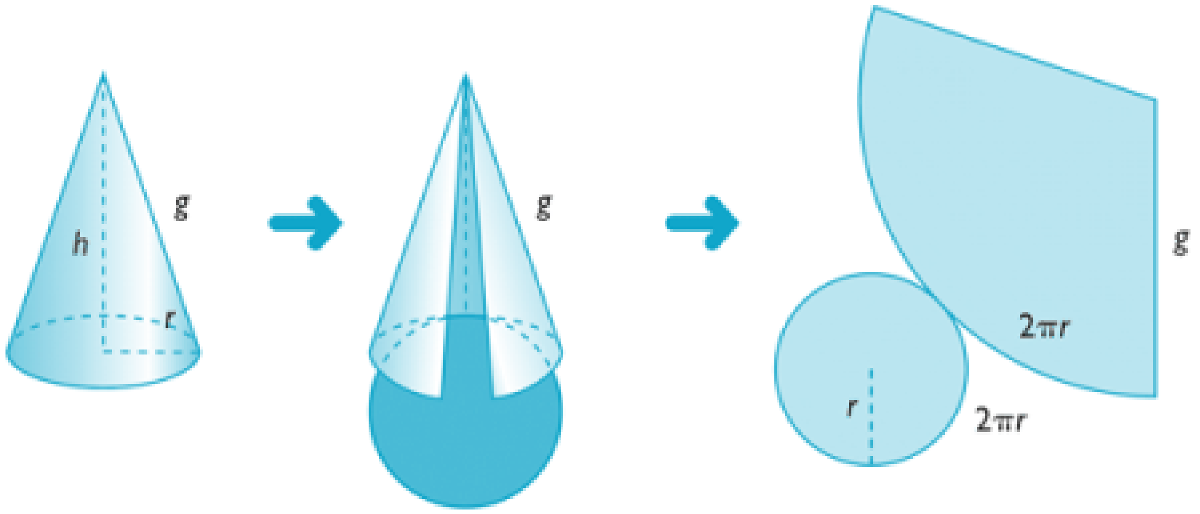

Figura 28: Área da superfície de um Cone

Fonte: International GeoGebra Institute. Disponível em http://www.geogebra.org/m/1261507 . Acesso em 28/12/2015

A área da superfície do cone é a soma da área lateral com a área da base.

$S = S_{lateral} + S_{base}$

Se abrirmos a superfície lateral, conforme ilustrado na Figura 28, observaremos que ela forma um setor circular cujo raio é a geratriz g do cone e cujo comprimento de arco é a circunferência $2\pi r$ da base circular.

$S_{lateral} = S_{setor\text{-}circular}$

Para calcularmos essa área do setor circular, utilizamos uma regra de três:

- Arco $2\pi r$ está para circunferência toda $2\pi g$
- Assim como área do setor está para área do círculo (πg^2)

Resolvendo:

$2\pi r$ ———————— $2\pi g$

$S_{lateral}$ ———————— πg^2

Resolvendo esta regra de três, chega-se a:

$$S_{lateral} = \frac{\pi g^2 \cdot 2\pi r}{2\pi g}$$

Logo:

$$S_{lateral} = \pi r g$$

A área da base cilíndrica é:

$$S_{base} = \pi r^2$$

Logo, a área do cone é:

$$S = S_{lateral} + S_{base} = \pi r g + \pi r^2$$

De onde se chega ao resultado final:

$$\boxed{S = \pi r(r+g)}$$

É uma demonstração proveitosa pois estimula a visão espacial do aluno.

4.3.20 VOLUME DE UM CONE

A FÓRMULA

Para qualquer cone vale a relação:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

onde V é o volume do cone, r é o raio da base circular e h a altura do cone.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Para demonstrar a fórmula, utilizaremos o Princípio de Cavalieri. Tomemos uma

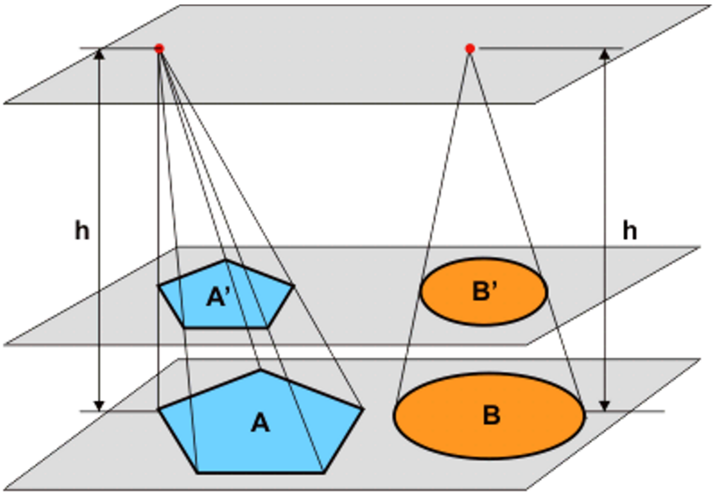

Figura 29: Volume de um Cone

Fonte: Fundação Cecierj. Disponível em http://cejarj.cecierj.edu.br/material_impresso/matematica/ceja_matematica_unidade_25.pdf . Acessado em 12/12/2015

pirâmide qualquer com altura h igual à altura do cone e área de base A igual à área B da base circular do cone.

Temos $A = B$

Traçarmos um plano qualquer paralelo ao plano das bases dos dois sólidos e distante de h' do vértice V.

Surgirá então um cone menor de base B' com o mesmo vértice do cone original, também surgirá uma pirâmide menor, de base A' e mesmo vértice da pirâmide original.

h' é a altura do cone menor e é também a altura da pirâmide menor.

Observemos os dois cones possuem vértice comum e que existe uma relação de homotetia entre eles (centrada no vértice). Um cone é dilatação do outro. Portanto, os dois cones são sólidos semelhantes e valem as relações de semelhança. Entre as quais:

$$\frac{B'}{B} = (\frac{h'}{h})^2$$

Mas, pelos mesmos argumentos, as duas pirâmides também são sólidos semelhantes, valem também as relações de semelhança:

$$\frac{A'}{A} = (\frac{h'}{h})^2$$

Logo:

$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B}$

Mas como $A = B$, teremos:

$A' = B'$

Portanto, vale o Princípio de Cavalieri, e os dois sólidos possuem o mesmo volume.

Mas o volume da pirâmide é $\frac{Ah}{3}$, logo, o volume do cone é:

$V = \frac{Ah}{3}$

Como $A = B = \pi r^2$, chega-se ao resultado final:

$$\boxed{V = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

A demonstração sedimenta conhecimentos sobre semelhança entre sólidos e sobre o Princípio de Cavalieri.

Convém memorizar a fórmula como sendo $V = \frac{(Area\text{-}da\text{-}base) \cdot h}{3}$, para fazer analogia com outros sólidos (pirâmides) e evitar a memorização de uma nova fórmula.

4.3.21 AREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A FÓRMULA

Para qualquer esfera, vale a relação:

$S = 4\pi r^2$

onde S é a área da superfície da esfera e r o raio da esfera.

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

No livro "Conexões com a Matemática" (BARROSO; LEONARDO, 2010), a fórmula é apresentada mas não é demonstrada. O mesmo ocorre com as coleções DINIZ e SMOLE (2010), GIOVANNI e BONJORNO (2010) e IEZZI et al. (2000). Já o livro SPINELLI et al. (2005) não traz a fórmula.

UMA DEMONSTRAÇÃO

As demonstrações formais da fórmula da superfície da esfera fogem ao escopo do Ensino Médio, pois requerem argumentos para os quais os alunos ainda não adquiriram a habilidade/competência necessária. Não são demonstrações acessíveis ao aluno de Ensino Médio, pois exigem conhecimento de Cálculo Diferencial.

Por essa razão, não se apresenta neste trabalho nenhuma demonstração.

4.3.22 VOLUME DE UMA ESFERA

A FÓRMULA

Para uma esfera, vale a relação:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

onde V é o volume da esfera e r é o raio da esfera.

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro "Conexões com a Matemática" (BARROSO; LEONARDO, 2010), a expressão não é demonstrada, é apenas apresentada.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Para demonstrar a fórmula, utilizaremos o Princípio de Cavalieri.

Seja uma semiesfera de raio r. Tomemos um cilindro reto de altura r (raio da esfera) e raio da base também r.

Dentro do cilindro, construímos um cone. Este cone tem base coincidente com a base superior do cilindro e vértice no centro da base inferior do cilindro. Portanto, o cone tem seu vértice virado para baixo.

Consideremos o sólido formado pela subtração do cone ao cilindro.

A Figura 30 ilustra esse sólido.

Provaremos, pelo Princípio de Cavalieri, que esse sólido tem mesmo volume que a semiesfera da mesma Figura 30.

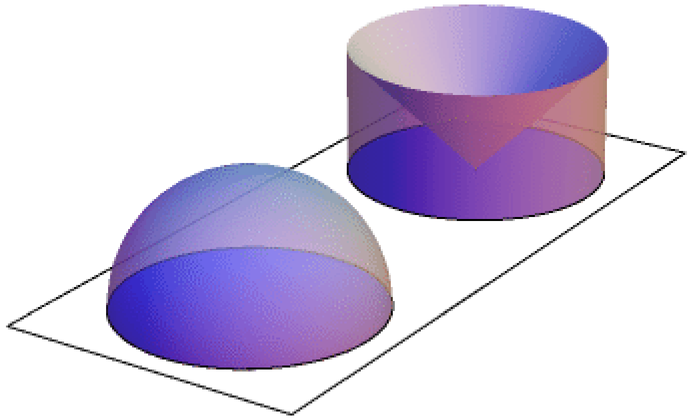

Figura 30: A Semiesfera e o Cilindro

Fonte: Wikipedia. Disponível em https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_degli_indivisibili . Acessado em 28/12/2015

Para tanto, faremos um corte nos dois sólidos por um plano α qualquer paralelo às bases do cilindro. Este plano α dista de h do plano da base.

Esse corte está representado na Figura 31.

Observa-se que a secção da semiesfera resulta num círculo de raio s e a secção do outro sólido (cilindro menos cone) resulta numa coroa circular de raio maior r e raio menor t.

Devemos provar que as áreas das duas secções são iguais (círculo e coroa).

Analisando primeiramente a semiesfera, observa-se que o triângulo representado pelos lados h, s e r é retângulo. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras temos:

$r^2 = h^2 + s^2$

Logo

$s^2 = r^2 - h^2$

A área do círculo vale então:

$S_{circulo} = \pi s^2$

$S_{circulo} = \pi(r^2 - h^2)$

Agora vamos analisar o outro sólido (cilindro menos cone).

Na Figura 31, observamos que o triângulo menor, de catetos h e t, está inserido num triângulo maior de catetos r e r. Como o plano α é paralelo à base do cilindro, também o cateto de cima (sobre a base do cilindro) é paralelo ao cateto que mede t. Portanto, aplica-se o

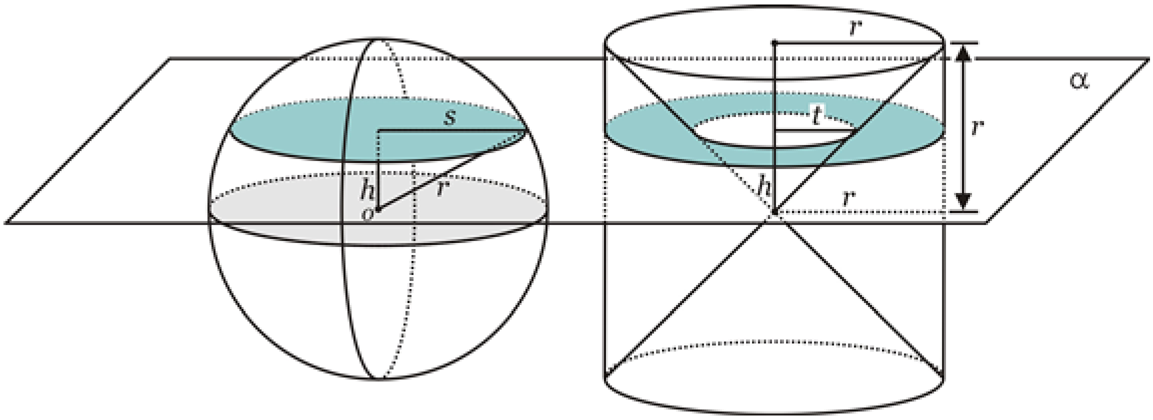

Figura 31: Volume de uma Semiesfera

Fonte: Portal da Matemática. Disponível em http://mauroweigel.blogspot.com.br/2010_08_01_archive.html . Acessado em 22/12/2015

Teorema de Tales.

Portanto, vale a relação:

$$\frac{h}{t} = \frac{r}{r}$$

Logo:

$$t = h$$

A área da coroa vale:

$$S_{coroa} = \pi(r^2 - t^2)$$

Logo

$$S_{coroa} = \pi(r^2 - h^2)$$

Concluímos então que $S_{circulo} = S_{coroa}$. Vale então o Princípio de Cavalieri. O volume da semiesfera é igual ao volume do outro sólido (cilindro menos cone).

Sabemos que

$$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3$$

$$V_{cone} = \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{\pi r^3}{3}$$

Como

$$V_{semiesfera} = V_{cilindro} - V_{cone}$$

Temos:

$V_{semiesfera} = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}$

Ou

$V_{semiesfera} = \frac{2}{3}\pi r^3$

O volume da esfera é o dobro do volume da semiesfera.

Conclui-se que:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

A demonstração é criativa, demanda esforço do aluno na compreensão do seu desenvolvimento, e estimula o raciocínio tanto em Geometria Plana como Espacial, além de fixar conceitos geométricos.

4.3.23 VOLUME DA CUNHA ESFÉRICA E ÁREA DO FUSO ESFÉRICO

AS FÓRMULAS

Para uma esfera, valem as relações:

$V = \frac{\pi r^3 \alpha}{270°}$

$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°}$

onde V é o volume da cunha esférica, S a área do fuso esférico, r é o raio da esfera e α é o ângulo de rotação da cunha ou do fuso expresso em graus.

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro "Conexões com a Matemática" (BARROSO; LEONARDO, 2010), as fórmulas são apresentadas, porém, não são demonstradas.

UMA DEMONSTRAÇÃO

A cunha esférica nada mais é que uma fração da esfera. Portanto, seu volume corresponde exatamente a essa fração do volume total da esfera.

Como a esfera completa corresponde a 360° (volta completa), então essa fração corresponde a $\frac{\alpha}{360°}$, onde α, o ângulo de rotação da cunha, é dado em graus.

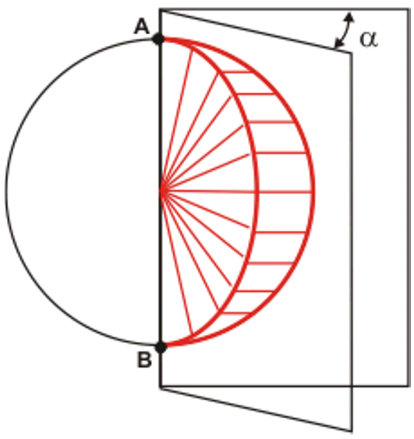

Figura 32: Cunha Esférica

Ou seja, o volume da cunha é:

$$V = \frac{\alpha}{360°}V_{esfera}$$

$$V = \frac{\alpha}{360°}\frac{4}{3}\pi r^3$$

Finalmente:

$$\boxed{V = \frac{\pi r^3 \alpha}{270°}}$$

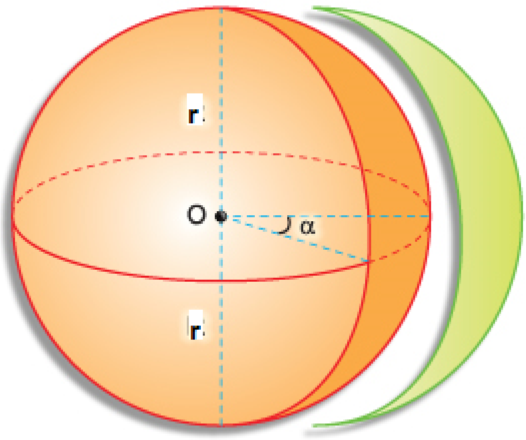

Figura 33: Fuso Esférico

Fonte: Colégio Objetivo. Disponível em http://conteudoonline.objetivo.br/Aula/Index/398 . Acessado em 22/11/2015

Da mesma forma, o fuso esférico nada mais é que uma fração da superfície da esfera. Portanto, sua área corresponde exatamente a essa fração da área da superfície esférica.

Como a esfera completa corresponde a 360° (volta completa), então essa fração também corresponde a $\frac{\alpha}{360°}$, onde α, o ângulo de rotação do fuso, é dado em graus.

Ou seja, a área do fuso é:

$S = \frac{\alpha}{360°} S_{esfera}$

$S = \frac{\alpha}{360°} 4\pi r^2$

Finalmente:

$$\boxed{S = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°}}$$

Deduções que não trazem dificuldade ao aluno. Podem ser apresentadas no escopo de um exercício, evitando assim que o aluno tenha a percepção que é uma fórmula a ser memorizada.

4.3.24 COMPRIMENTO DE ARCO

AS FÓRMULAS

$$L = \frac{2\pi \cdot r \cdot \theta}{360°},$$

onde L é o comprimento de um arco de circunferência, r o raio da circunferência, θ o ângulo do arco medido em graus.

$$L = r\theta$$

idem, com θ o ângulo medido em radianos.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Sabemos que o perímetro da circunferência (isto é, o arco de $360°$) vale $2 \cdot \pi \cdot r$, logo, o arco de θ graus pode ser obtido por uma simples regra de três:

$360°$ está para $2 \cdot \pi . r$, assim como α está para l.

- Comprimento L está para o perímetro todo ($2\pi r$)
- Assim como o ângulo θ está para o ângulo do círculo completo (360° ou 2π rad)

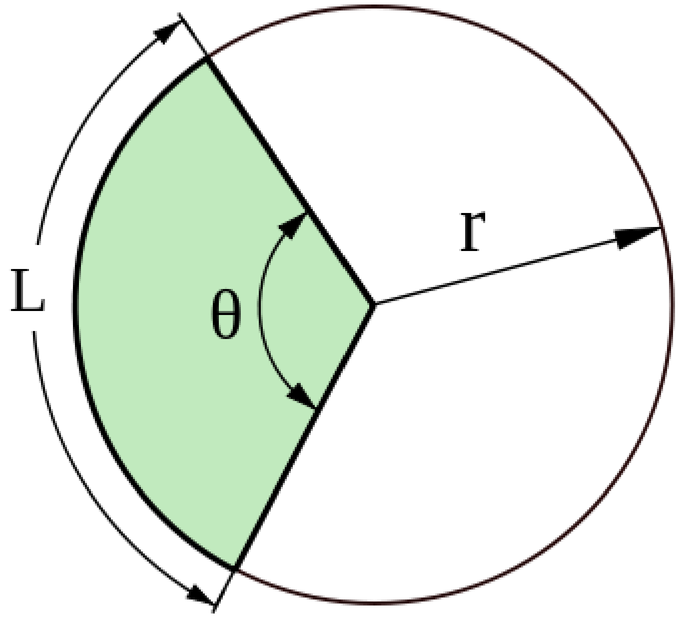

Figura 34: Arco de Circunferência

Em graus, a regra de três ficaria:

L __________ $2\pi r$

θ __________ $360°$

Resolvendo esta regra de três, chega-se ao resultado:

$$\boxed{L = \frac{2\pi \cdot r \cdot \theta}{360°}}$$

Em radianos, a regra de três ficaria:

L __________ $2\pi r$

θ __________ 2π rad

Resolvendo esta regra de três, chega-se ao resultado:

$$\boxed{L = r\theta}$$

Demonstração sem maiores dificuldades, sugere-se que seja apresentada como um exercício, evitando assim que o aluno tenha a percepção que é uma fórmula a ser memorizada.

4.4 GEOMETRIAS

4.4.1 RELAÇÃO DE EULER

A FÓRMULA

Para qualquer poliedro convexo, vale a relação:

$V + F - 2 = A$, onde V é o número de vértices do poliedro convexo, F é o número de faces e A o número de arestas desse poliedro.

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

No livro "Conexões com a Matemática" (BARROSO; LEONARDO, 2010), a Relação de Euler é apresentada, porém, não é demonstrada.

Analisando outras coleções didáticas, observa-se que a Relação de Euler não é mencionada no livro IEZZI et al. (2000). Já nos livros BARROSO e LEONARDO (2010), DINIZ e SMOLE (2010), GIOVANNI e BONJORNO (2010) e SPINELLI et al. (2005), ela é mencionada mas não é demonstrada.

UMA DEMONSTRAÇÃO

As diversas demonstrações formais da Relação de Euler fogem ao escopo do Ensino Médio, pois requerem argumentos para os quais os alunos ainda não adquiriram a habilidade/competência necessária.

Algumas possíveis demonstrações demandam ideias mais sofisticadas, que não são normalmente de conhecimento do aluno de Ensino Médio (uma possível demonstração utiliza, por exemplo, indução matemática).

Por essa razão, não se apresenta neste trabalho nenhuma demonstração da Relação de Euler.

4.5 FUNÇÕES

4.5.1 PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE

AS FÓRMULAS

$$\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}\theta \tag{5}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \tag{6}$$

$$\text{tg}(\pi - \theta) = -\text{tg}\theta \tag{7}$$

$$\text{sen}(\pi + \theta) = -\text{sen}\theta \tag{8}$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \tag{9}$$

$$\text{tg}(\pi + \theta) = \text{tg}\theta \tag{10}$$

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\theta \tag{11}$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \tag{12}$$

$$\text{tg}(-\theta) = -\text{tg}\theta \tag{13}$$

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010), as fórmulas são apresentadas mediante uma figura. Por serem visualmente fáceis de compreender em uma figura, o livro não apresenta qualquer dedução, deixando por conta do professor auxiliado pela figura do círculo trigonométrico.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Neste trabalho, vamos propor duas abordagens. Uma delas é uma demonstração formal, partindo das expressões das funções trigonométricas aplicadas na soma de arcos. Esta abordagem é simples e abrangente, não requer a análise separada em distintos casos. No entanto, ela traz o inconveniente que, muitas vezes, essas expressões que vamos utilizar ainda não são conhecidas pelos alunos, pois são apresentadas em sala de aula depois das propriedades que queremos demonstrar[3].

A segunda abordagem é utilizar o ciclo trigonométrico para comprovar visualmente as fórmulas. Essa abordagem é muito proveitosa, pois estimula o raciocínio geométrico do aluno e consolida conhecimento do ciclo trigonométrico.

PRIMEIRA ABORDAGEM

Utilizaremos as seguintes propriedades das funções trigonométricas:

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$

Basta então aplicar a propriedade correspondente a cada uma das expressões que queremos demonstrar:

Expressão (5):

$\operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\pi \cos\theta - \cos\pi \operatorname{sen}\theta$

Como $\operatorname{sen}\pi = 0$ e $\cos\pi = -1$, temos:

$\operatorname{sen}(\pi-\theta) = 0 \cdot \cos\theta - (-1) \cdot \operatorname{sen}\theta$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\theta}$$

[3]Também é preciso estar atento se as demonstrações dessas expressões não se utilizam das propriedades que queremos demonstrar. Em outras palavras, não podemos demonstrar o *Teorema A* a partir do *Teorema B* se o *Teorema A* foi utilizado no desenvolvimento da demonstração do *Teorema B*.

Expressão (6):

$\cos(\pi - \theta) = \cos\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta$

Como $\operatorname{sen}\pi = 0$ e $\cos\pi = -1$, temos:

$\cos(\pi - \theta) = (-1)\cdot\cos\theta + 0\cdot\operatorname{sen}\theta$

Logo,

$$\boxed{\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta}$$

Expressão (7):

$\operatorname{tg}(\pi - \theta) = \dfrac{\operatorname{tg}\pi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\pi\cdot\operatorname{tg}\theta}$

Como $\operatorname{tg}\pi = 0$, temos:

$\operatorname{tg}(\pi - \theta) = \dfrac{0 - \operatorname{tg}\theta}{1 + 0\cdot\operatorname{tg}\theta}$

$\operatorname{tg}(\pi - \theta) = \dfrac{-\operatorname{tg}\theta}{1}$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\pi - \theta) = -\operatorname{tg}\theta}$$

Expressão (8):

$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = \operatorname{sen}\pi\cos\theta + \cos\pi\operatorname{sen}\theta$

Como $\operatorname{sen}\pi = 0$ e $\cos\pi = -1$, temos:

$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = 0\cdot\cos\theta + (-1)\cdot\operatorname{sen}\theta$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}\theta}$$

Expressão (9):

$\cos(\pi + \theta) = \cos\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta$

Como $\operatorname{sen}\pi = 0$ e $\cos\pi = -1$, temos:

$\cos(\pi + \theta) = (-1)\cdot\cos\theta + 0\cdot\operatorname{sen}\theta$

Logo,

$$\boxed{\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta}$$

Expressão (10):

$$\text{tg}(\pi+\theta) = \frac{\text{tg}\pi + \text{tg}\theta}{1 - \text{tg}\pi \cdot \text{tg}\theta}$$

Como $\text{tg}\pi = 0$, temos:

$$\text{tg}(\pi+\theta) = \frac{0 + \text{tg}\theta}{1 - 0 \cdot \text{tg}\theta}$$

$$\text{tg}(\pi+\theta) = \frac{\text{tg}\theta}{1}$$

Logo,

$$\boxed{\text{tg}(\pi+\theta) = \text{tg}\theta}$$

Expressão (11):

$$\text{sen}(-\theta) = \text{sen}(0-\theta)$$

Logo:

$$\text{sen}(-\theta) = \text{sen}0\cos\theta - \cos 0\,\text{sen}\theta$$

Como $\text{sen}0 = 0$ e $\cos 0 = 1$, temos:

$$\text{sen}(-\theta) = 0 \cdot \cos\theta - 1 \cdot \text{sen}\theta$$

Logo,

$$\boxed{\text{sen}(-\theta) = -\,\text{sen}\theta}$$

Expressão (12):

$$\cos(-\theta) = \cos(0-\theta)$$

Logo:

$$\cos(-\theta) = \cos 0\cos\theta + \text{sen}0\,\text{sen}\theta$$

Como $\text{sen}0 = 0$ e $\cos 0 = 1$, temos:

$$\cos(-\theta) = 1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \text{sen}\theta$$

Logo,

$$\boxed{\cos(-\theta) = \cos\theta}$$

Expressão (13):

$$\text{tg}(-\theta) = \text{tg}(0-\theta)$$

Logo:

$$\operatorname{tg}(-\theta) = \frac{\operatorname{tg}0 - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}0 \cdot \operatorname{tg}\theta}$$

Como $\operatorname{tg}0 = 0$, temos:

$$\operatorname{tg}(-\theta) = \frac{0 - \operatorname{tg}\theta}{1 + 0 \cdot \operatorname{tg}\theta}$$

$$\operatorname{tg}(-\theta) = \frac{-\operatorname{tg}\theta}{1}$$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta}$$

SEGUNDA ABORDAGEM

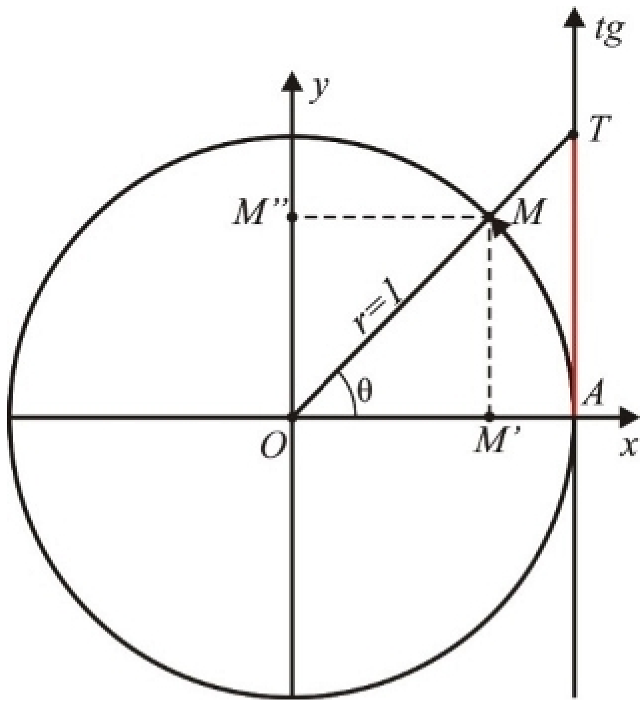

Figura 35: Ciclo Trigonométrico

Fonte: InfoEscola Serviços em Informática. Disponível em http://www.infoescola.com/trigonometria/tangente/ . Acessado em 14/12/2015

Por serem as funções *seno*, *cosseno* e *tangente* de periodicidade 2π, é possível analisar seu comportamento unicamente pelo ciclo trigonométrico, que representa justamente um período da função.

Todas as fórmulas ficam evidenciadas observando o ciclo trigonométrico (círculo unitário) representado na Figura 35, se tomarmos as definições das funções seno, cosseno e tangente no círculo unitário, referente a um arco AM, com $med(AM) = \theta$ e coordenadas do ponto M sendo (m,n).

As definições são (referentes à Figura 35):

$\text{sen}\theta = n$, ordenada de M

$\cos\theta = m$, abscissa de M

$\text{tg}\theta = t$, ordenada de T, em que T é a intersecção das retas OM e a reta paralela ao eixo y passando pelo ponto A.

O ângulo θ pode se situar em qualquer dos quatro quadrantes. Por isso, a análise completa requer que se considerem as nove expressões com o valor de θ em cada um dos quatro quadrantes. Analisaremos esses 36 pontos.

Para essa análise, vamos nos servir da Figura 36.

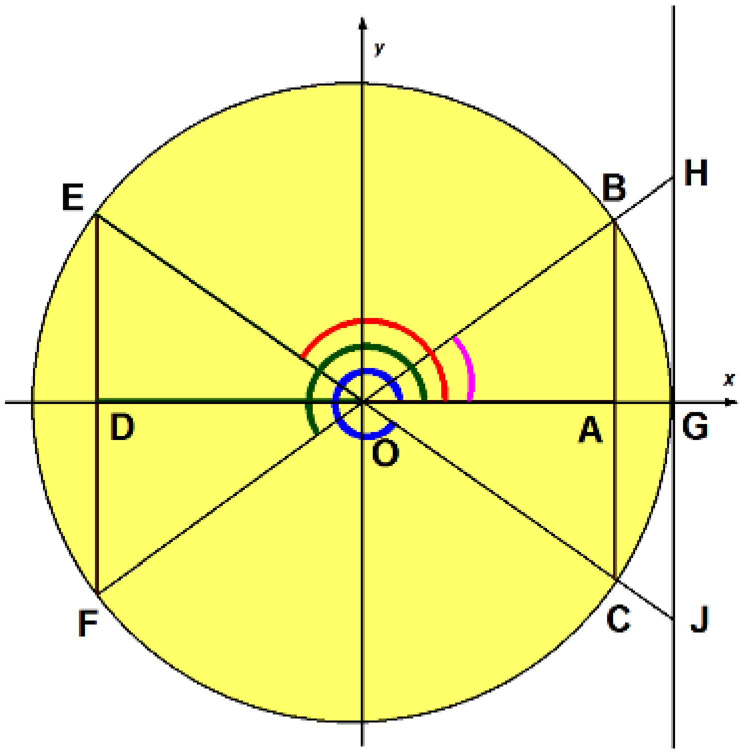

Figura 36: Ciclo Trigonométrico

O valor de θ está representado pelas cores rosa (primeiro quadrante), vermelho (segundo quadrante), verde (terceiro quadrante) e azul (quarto quadrante), representando os arcos $\overset{\frown}{GB}$, $\overset{\frown}{GE}$, $\overset{\frown}{GF}$ e $\overset{\frown}{GC}$ respectivamente (sempre no sentido anti-horário).

Vamos utilizar a Figura 36 para calcular cada uma das nove expressões em análise.

Observação: utilizaremos a simbologia de segmentos orientados, isto é:

$PQ = -QP$, para os pontos P e Q.

$\boxed{\textbf{Cálculo para } \pi - \theta}$

Se θ estiver no **primeiro quadrante** (arco $\overset{\frown}{GB}$), $\pi - \theta$ estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GE}$.

Temos:

$\text{sen}\theta = \text{ sen } \overset{\frown}{GB} = AB$

$\text{sen}(\pi - \theta) = \text{ sen } \overset{\frown}{GE} = DE$

Como $AB = DE$, ambos orientados para cima, as expressões então são iguais.

Logo,

$\text{sen}(\pi - \theta) = \text{ sen}\theta$ para θ no primeiro quadrante. ✓

Teremos também:

$\cos\theta = \text{ sen } \overset{\frown}{GB} = OA$

$\cos(\pi - \theta) = \text{ sen } \overset{\frown}{GE} = OD$

Como $OA = -OD$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ para θ no primeiro quadrante. ✓

Finalmente:

$\text{tg}\theta = \text{ tg } \overset{\frown}{GB} = GH$

$\text{tg}(\pi - \theta) = \text{ tg } \overset{\frown}{GE} = GJ$

Como $GH = -GJ$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\text{tg}(\pi - \theta) = -\text{ tg}\theta$ para θ no primeiro quadrante. ✓

Se θ estiver no **segundo quadrante** (arco $\overset{\frown}{GE}$), $\pi - \theta$ estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GB}$.

São exatamente os mesmos arcos que no caso anterior, porém, invertidos.

Logo, as igualdades também valem para θ no segundo quadrante.

$\text{sen}(\pi-\theta) = \text{sen}\theta$ para θ no segundo quadrante. ✓

$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ para θ no segundo quadrante. ✓

$\text{tg}(\pi-\theta) = -\text{tg}\theta$ para θ no segundo quadrante. ✓

Se θ estiver no **terceiro quadrante** (arco $\overset{\frown}{GF}$), $\pi-\theta$ será negativo e estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GC}$.

Temos:

$\text{sen}\theta = \text{sen}\,\overset{\frown}{GF} = DF$

$\text{sen}(\pi-\theta) = \text{sen}\,\overset{\frown}{GC} = AC$

Como $DF = AC$, ambos orientados para baixo, as expressões então são iguais.

Logo,

$\text{sen}(\pi-\theta) = \text{sen}\theta$ para θ no terceiro quadrante. ✓

Também:

$\cos\theta = \cos\,\overset{\frown}{GF} = OD$

$\cos(\pi-\theta) = \cos\,\overset{\frown}{GC} = OA$

Como $OD = -OA$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ para θ no terceiro quadrante. ✓

Finalmente:

$\text{tg}\theta = \text{tg}\,\overset{\frown}{GF} = GH$

$\text{tg}(\pi-\theta) = \text{tg}\,\overset{\frown}{GC} = GJ$

Como $GH = -GJ$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\text{tg}(\pi-\theta) = -\text{tg}\theta$ para θ no terceiro quadrante. ✓

Se θ estiver no **quarto quadrante** (arco $\overset{\frown}{GC}$), $\pi-\theta$ será negativo e estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GF}$.

São exatamente os mesmos arcos que no caso anterior, porém, invertidos.

Logo, a igualdade também vale para θ no quarto quadrante.

$\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}\theta$ para θ no quarto quadrante. ✓

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ para θ no quarto quadrante. ✓

$\text{tg}(\pi - \theta) = -\text{tg}\theta$ para θ no quarto quadrante. ✓

Conclusão:

$$\boxed{\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}\theta}$$

$$\boxed{\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta}$$

$$\boxed{\text{tg}(\pi - \theta) = -\text{tg}\theta}$$

$\boxed{\textbf{Cálculo para } \pi + \theta}$

Se θ estiver no **primeiro quadrante** (arco $\overset{\frown}{GB}$), $\pi + \theta$ estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GF}$.

Temos:

$\text{sen}\theta = \text{sen}\,\overset{\frown}{GB} = AB$

$\text{sen}(\pi + \theta) = \text{sen}\,\overset{\frown}{GF} = DF$

Como $AB = -DF$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\text{sen}(\pi + \theta) = -\text{sen}\theta$ para θ no primeiro quadrante. ✓

Teremos também:

$\cos\theta = \cos\overset{\frown}{GB} = OA$

$\cos(\pi + \theta) = \cos\overset{\frown}{GF} = OD$

Como $OA = -OD$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$ para θ no primeiro quadrante. ✓

Finalmente:

$\mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}\,\overset{\frown}{GB} = GH$

$\mathrm{tg}(\pi+\theta) = \mathrm{tg}\,\overset{\frown}{GF} = GH$

As expressões são iguais.

Logo,

$\mathrm{tg}(\pi+\theta) = \mathrm{tg}\theta$ para θ no primeiro quadrante. ✓

Se θ estiver no **segundo quadrante** (arco $\overset{\frown}{GE}$), $\pi+\theta$ estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GC}$.

Temos:

$\mathrm{sen}\theta = \mathrm{sen}\,\overset{\frown}{GE} = DE$

$\mathrm{sen}(\pi+\theta) = \mathrm{sen}\,\overset{\frown}{GC} = AC$

Como $DE = -AC$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\mathrm{sen}(\pi+\theta) = -\,\mathrm{sen}\theta$ para θ no segundo quadrante. ✓

Teremos também:

$\cos\theta = \cos\overset{\frown}{GE} = OD$

$\cos(\pi+\theta) = \cos\overset{\frown}{GC} = OA$

Como $OA = -OD$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$ para θ no segundo quadrante. ✓

Finalmente:

$\mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}\,\overset{\frown}{GE} = GJ$

$\mathrm{tg}(\pi+\theta) = \mathrm{tg}\,\overset{\frown}{GC} = GJ$

As expressões são iguais.

Logo,

$\mathrm{tg}(\pi+\theta) = \mathrm{tg}\theta$ para θ no segundo quadrante. ✓

Se θ estiver no **terceiro quadrante** (arco $\overset{\frown}{GF}$), $\pi+\theta$ estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GB}$.

São exatamente os mesmos arcos que no caso de θ no primeiro quadrante, porém, invertidos.

Logo, a igualdade também vale para θ no terceiro quadrante.

$\text{sen}(\pi+\theta) = -\,\text{sen}\theta$ para θ no terceiro quadrante. ✓

$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$ para θ no terceiro quadrante. ✓

$\text{tg}(\pi+\theta) = \text{tg}\theta$ para θ no terceiro quadrante. ✓

Se θ estiver no **quarto quadrante** (arco $\overset{\frown}{GC}$), $\pi+\theta$ estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GE}$.

São exatamente os mesmos arcos que no caso de θ no segundo quadrante, porém, invertidos.

Logo, a igualdade também vale para θ no quarto quadrante.

$\text{sen}(\pi+\theta) = -\,\text{sen}\theta$ para θ no quarto quadrante. ✓

$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$ para θ no quarto quadrante. ✓

$\text{tg}(\pi+\theta) = \text{tg}\theta$ para θ no quarto quadrante. ✓

Conclusão:

$$\boxed{\text{sen}(\pi+\theta) = -\,\text{sen}\theta}$$

$$\boxed{\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta}$$

$$\boxed{\text{tg}(\pi+\theta) = \text{tg}\theta}$$

$\boxed{\textbf{Cálculo para } -\theta}$

Se θ estiver no **primeiro quadrante** (arco $\overset{\frown}{GB}$), $-\theta$ estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GC}$.

Temos:

$\text{sen}\theta = \text{sen}\,\overset{\frown}{GB} = AB$

$\text{sen}(-\theta) = \text{sen}\,\overset{\frown}{GC} = AC$

Como $AB = -AC$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\text{sen}(-\theta) = -\,\text{sen}\theta$ para θ no primeiro quadrante. ✓

Teremos também:

$\cos\theta = \text{ sen } \overset{\frown}{GB} = OA$

$\cos(-\theta) = \text{ sen } \overset{\frown}{GC} = OA$

As expressões são iguais.

Logo,

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ para θ no primeiro quadrante. ✓

Finalmente:

$\text{tg}\theta = \text{ tg } \overset{\frown}{GB} = GH$

$\text{tg}(-\theta) = \text{ tg } \overset{\frown}{GC} = GJ$

Como $GH = -GJ$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\text{tg}(-\theta) = -\,\text{tg}\theta$ para θ no primeiro quadrante. ✓

Se θ estiver no **segundo quadrante** (arco $\overset{\frown}{GE}$), $-\theta$ estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GF}$.

Temos:

$\text{sen}\theta = \text{ sen } \overset{\frown}{GE} = DE$

$\text{sen}(-\theta) = \text{ sen } \overset{\frown}{GF} = DF$

Como $DE = -DF$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\text{sen}(-\theta) = -\,\text{sen}\theta$ para θ no segundo quadrante. ✓

Teremos também:

$\cos\theta = \text{ sen } \overset{\frown}{GE} = OD$

$\cos(-\theta) = \text{ sen } \overset{\frown}{GF} = OD$

As expressões são iguais.

Logo,

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ para θ no segundo quadrante. ✓

Finalmente:

$\text{tg}\theta = \text{tg}\,\overset{\frown}{GE} = GJ$

$\text{tg}(-\theta) = \text{tg}\,\overset{\frown}{GF} = GH$

Como $GH = -GJ$, orientações opostas, as expressões então são opostas.

Logo,

$\text{tg}(-\theta) = -\,\text{tg}\theta$ para θ no segundo quadrante. ✓

Se θ estiver no **terceiro quadrante** (arco $\overset{\frown}{GF}$), $-\theta$ estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GE}$.

São exatamente os mesmos arcos que no caso de θ no segundo quadrante, porém, invertidos.

Logo, a igualdade também vale para θ no terceiro quadrante.

$\text{sen}(-\theta) = -\,\text{sen}\theta$ para θ no terceiro quadrante. ✓

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ para θ no terceiro quadrante. ✓

$\text{tg}(-\theta) = -\,\text{tg}\theta$ para θ no terceiro quadrante. ✓

Se θ estiver no **quarto quadrante** (arco $\overset{\frown}{GC}$), $-\theta$ estará representado pelo arco $\overset{\frown}{GB}$.

São exatamente os mesmos arcos que no caso de θ no primeiro quadrante, porém, invertidos.

Logo, a igualdade também vale para θ no quarto quadrante.

$\text{sen}(-\theta) = -\,\text{sen}\theta$ para θ no quarto quadrante. ✓

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ para θ no quarto quadrante. ✓

$\text{tg}(-\theta) = -\,\text{tg}\theta$ para θ no quarto quadrante. ✓

Conclusão:

$$\boxed{\text{sen}(-\theta) = -\,\text{sen}\theta}$$

$$\boxed{\cos(-\theta) = \cos\theta}$$

$$\boxed{\text{tg}(-\theta) = -\,\text{tg}\theta}$$

Geralmente os livros didáticos se limitam à análise no primeiro quadrante, tornando a prova incompleta. Esta abordagem é extensa, mas algumas etapas podem ser passadas de forma verbal ao aluno.

Por ser fácil para o aluno chegar aos resultados mediante a simples análise de cada caso no ciclo trigonométrico, sugere-se que o professor recomende ao aluno não memorizar as fórmulas, mas aprender a descobri-las analisando o círculo unitário. Isso traz grande vantagem ao aluno, pois, além de evitar a memorização, força ao aluno o entendimento do ciclo trigonométrico.

4.5.2 RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA (OU IDENTIDADE PITAGÓRICA)

A FÓRMULA

$\text{sen}^2\varnothing + \cos^2\varnothing = 1,$

onde $\varnothing$ é um ângulo qualquer.

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010), a fórmula é deduzida, num primeiro momento, para o primeiro quadrante. A demonstração se baseia num triângulo de hipotenusa medindo 1. A demonstração está matematicamente correta, entretanto, pode levar a um mal-entendido por parte do aluno, por não utilizar um triângulo genérico. Poderia reforçar a ideia equivocada de que casos particulares possam ser generalizados.

Já para os outros três quadrantes, a demonstração é apresentada sem rigor nem detalhamento.

UMA DEMONSTRAÇÃO

CASO 1: PRIMEIRO QUADRANTE

Se o ângulo $\varnothing$ estiver no primeiro quadrante, isto é, for agudo, vamos considerar o triângulo do círculo trigonométrico (portanto, de raio igual a 1), conforme a Figura 37.

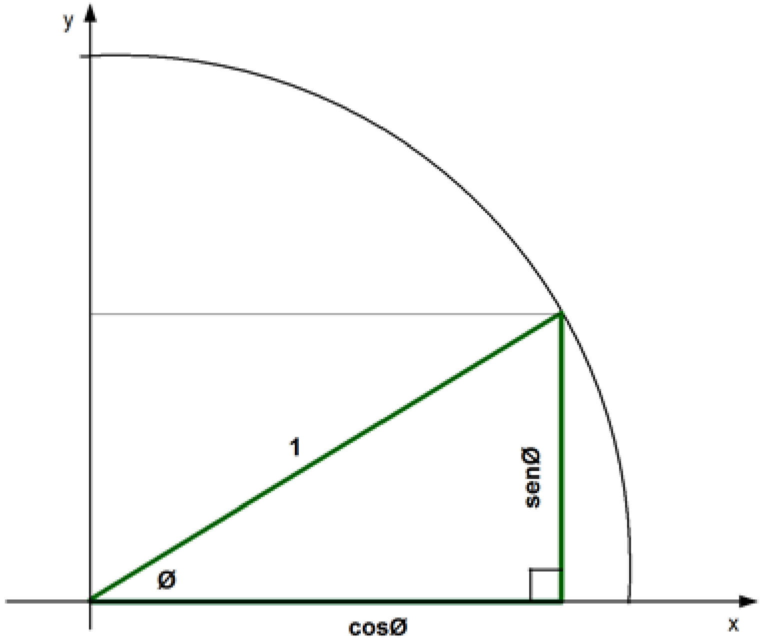

Figura 37: Primeiro Quadrante

Um dos catetos mede $\text{sen}\varnothing$, o outro mede $\cos\varnothing$, e a hipotenusa vale 1. Basta então aplicar o Teorema de Pitágoras, de onde a relação

$$\boxed{\text{sen}^2\varnothing + \cos^2\varnothing = 1}$$

vem de imediato.

Esta demonstração, muito comum nos livros escolares brasileiros, traz o grande inconveniente de demonstrar a partir de um triângulo de hipotenusa medindo 1. A demonstração da relação para esses triângulos retângulos particulares está correta, contudo, poderia levar a interpretações equivocadas.

É conveniente realizar a demonstração a partir de um raio genérico r. Dessa forma, desde cedo o aluno se habitua com a abrangência das demonstrações e com a linguagem Matemática.

Se, em vez de termos um raio 1, tivermos um raio genérico de valor r, um dos catetos medirá $r \cdot \text{sen}\varnothing$ e o outro $r \cdot \cos\varnothing$. Isso advém diretamente da definição das funções *seno* e *cosseno*. Vide Figura 38.

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras nesse triângulo de hipotenusa r, teremos:

$$r^2 \cdot \text{sen}^2\varnothing + r^2 \cdot \cos^2\varnothing = r^2$$

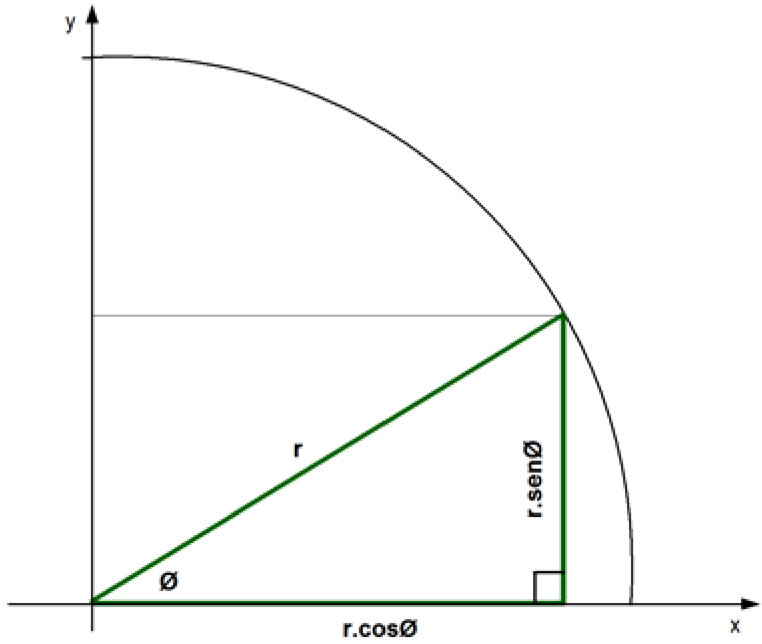

Figura 38: Primeiro Quadrante

Colocando-se r^2 em evidência e simplificando:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\varnothing + \cos^2\varnothing = 1}$$

CASO 2: SEGUNDO QUADRANTE

Neste caso, o ângulo $\varnothing$ é obtuso e seu suplementar, ß, é agudo. Isto é, $\varnothing = \pi - ß$ (vide Figura 39).

Logo, a relação acima vale para o ângulo ß, conforme acabamos de demonstrar no Caso 1. Ou seja, sabemos que:

$$\operatorname{sen}^2 ß + \cos^2 ß = 1 \tag{14}$$

Mas também sabemos que $\operatorname{sen}\varnothing = \operatorname{sen}(\pi - ß) = \operatorname{sen}ß$,

e que $\cos\varnothing = \cos(\pi - ß) = -\cos ß$

Logo,

$$\operatorname{sen}^2\varnothing + \cos^2\varnothing = (\operatorname{sen}ß)^2 + (-\cos ß)^2$$

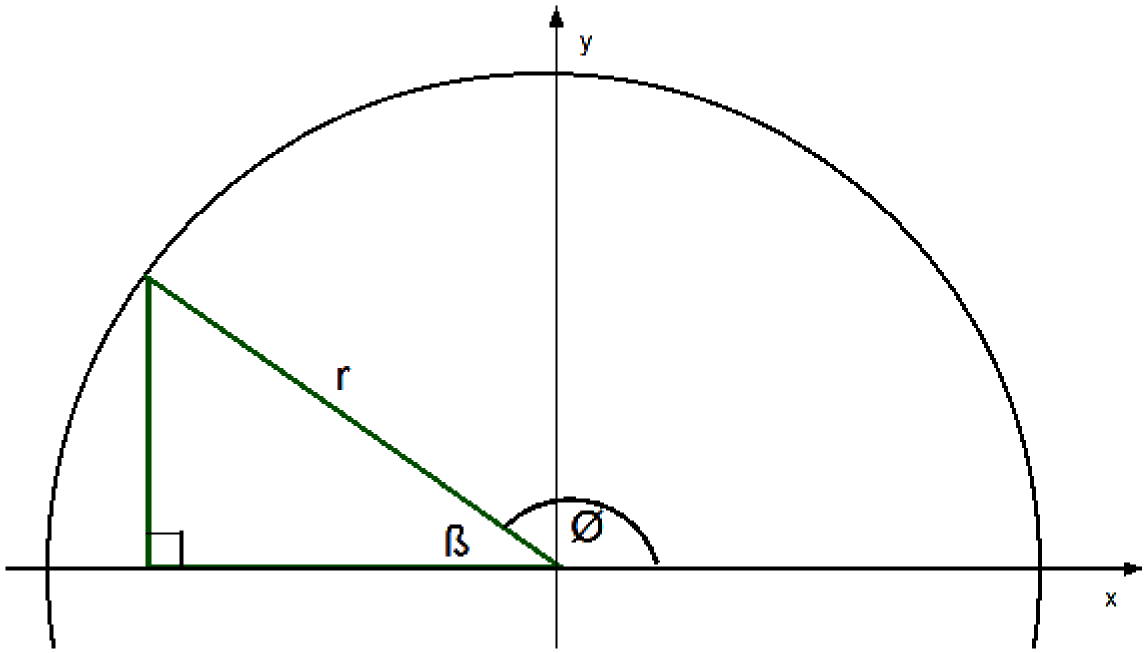

Figura 39: Segundo Quadrante

Ou seja

$$\text{sen}^2\varnothing + \cos^2\varnothing = \text{sen}^2ß + \cos^2 ß \qquad (15)$$

De (14) e de (15) , deduz-se que

$$\boxed{\text{sen}^2\varnothing + \cos^2\varnothing = 1}$$

CASO 3: TERCEIRO QUADRANTE

Neste caso, existirá um ângulo ß tal que $\varnothing = \pi + ß$ (vide Figura 40).

Como ß é agudo, aplica-se a fórmula do Caso 1:

$$\text{sen}^2ß + \cos^2 ß = 1 \qquad (16)$$

Mas também sabemos que $\text{sen}\varnothing = \text{sen}(\pi + ß) = -\text{sen}ß$,

e que $\cos\varnothing = \cos(\pi + ß) = -\cos ß$

Logo,

$$\text{sen}^2\varnothing + \cos^2 ß = (-\text{sen}ß)^2 + (-\cos ß)^2$$

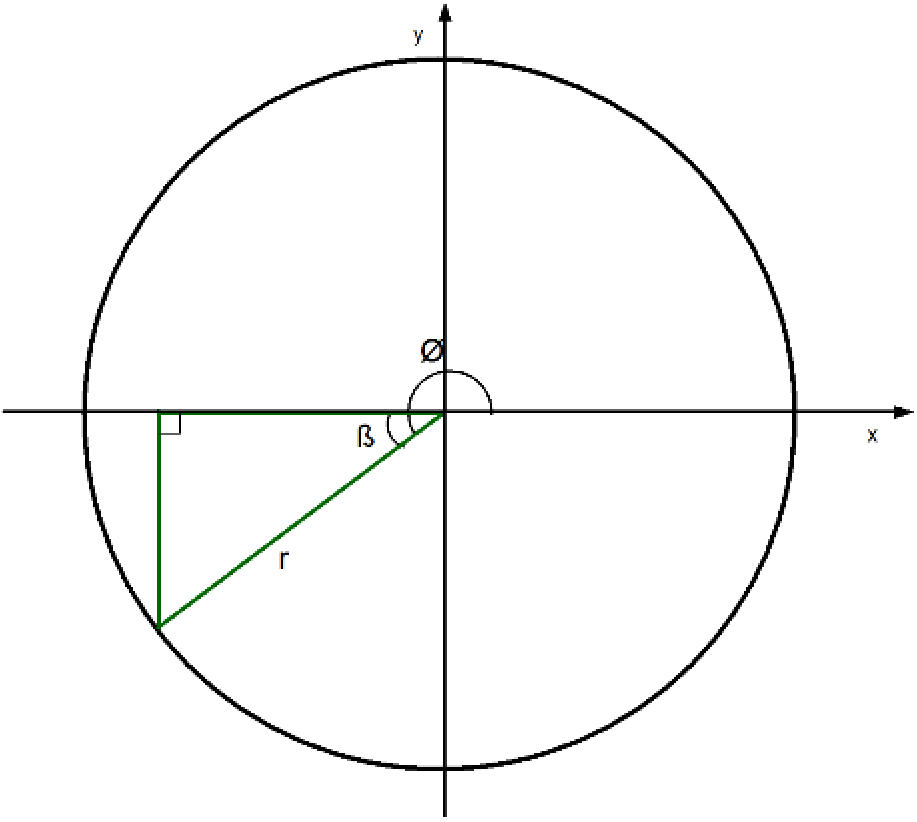

Figura 40: Terceiro Quadrante

Ou seja

$$\mathrm{sen}^2\varnothing + \cos^2\varnothing = \mathrm{sen}^2ß + \cos^2 ß \tag{17}$$

De (16) e de (17) , deduz-se que

$$\boxed{\mathrm{sen}^2\varnothing + \cos^2\varnothing = 1}$$

CASO 4: QUARTO QUADRANTE

Neste caso, existirá um ângulo ß tal que $\varnothing = 2\pi - ß$ (vide Figura 41).

Como ß é agudo, aplica-se a fórmula do Caso 1:

$$\mathrm{sen}^2ß + \cos^2 ß = 1 \tag{18}$$

Mas também sabemos que $\mathrm{sen}\varnothing = \mathrm{sen}(2\pi - ß) = -\,\mathrm{sen}ß$,

e que $\cos\varnothing = \cos(2\pi - ß) = \cos ß$

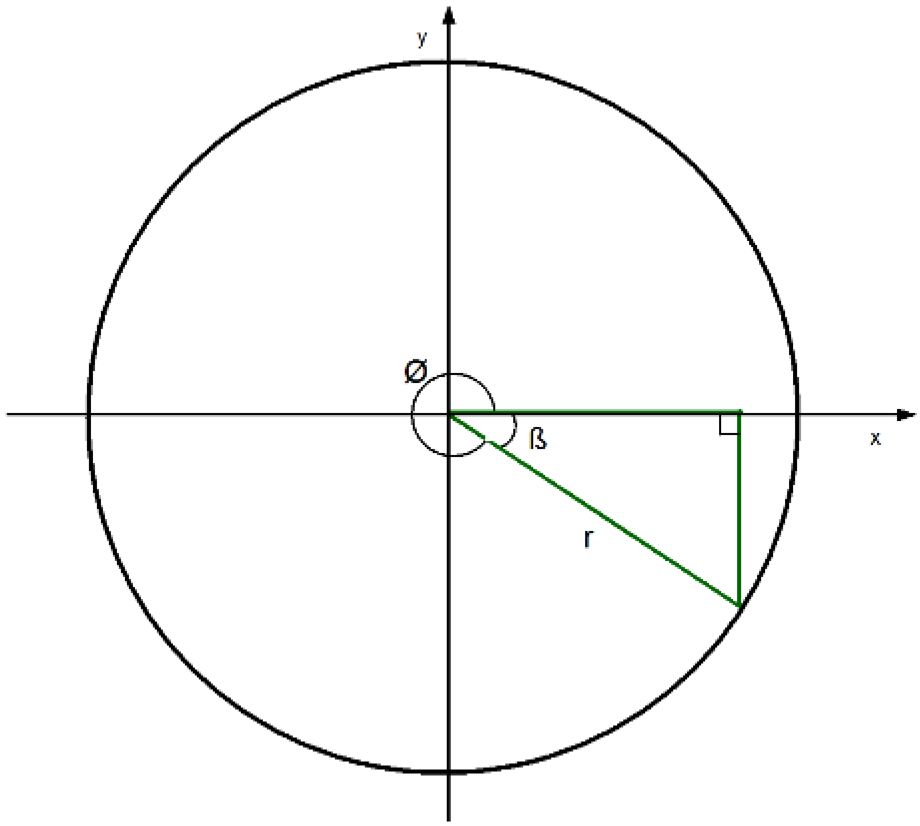

Figura 41: Quarto Quadrante

Logo,

$$\text{sen}^2\varnothing + \cos^2\varnothing = (-\,\text{sen}ß)^2 + (\cos ß)^2$$

Ou seja

$$\text{sen}^2\varnothing + \cos^2\varnothing = \text{sen}^2ß + \cos^2 ß \tag{19}$$

De (18) e de (19) , deduz-se que

$$\boxed{\text{sen}^2\varnothing + \cos^2\varnothing = 1}$$

A aprendizagem desta demonstração é proveitosa, solidifica o conhecimento do ciclo trigonométrico por parte do aluno. É importante que o aluno compreenda o porquê de trabalhar os quatro quadrantes para validar a prova.

4.5.3 LEI DOS SENOS

A FÓRMULA

Num triângulo qualquer ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles. Isto é:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

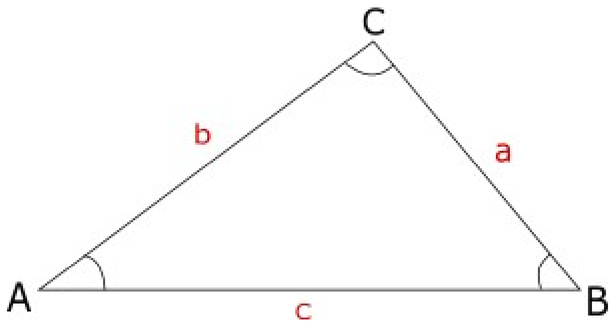

Figura 42: Lei dos Senos

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

No livro referência "Conexões com a Matemática" (BARROSO; LEONARDO, 2010), a demonstração apresentada é por meio de triângulos retângulos sobre o triângulo dado, e suas respectivas razões trigonométricas. É uma demonstração acessível ao aluno. Porém, não é a dedução mais simples e direta. Optou-se por uma demonstração mais simples e mais curta.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Seja um triângulo ABC qualquer. Sabemos que existe uma circunferência na qual o triângulo é inscrito. Seja R o raio dessa circunferência. Seja A' o ponto na circunferência diametralmente oposto a B. Assim, formamos o triângulo BCA'. Como BA' é o diâmetro, determina um arco de 180°. O ângulo inscrito $B\hat{C}A'$ mede metade desse arco, ou seja, 90°. Conclui-se que o triângulo BCA' é retângulo em C.

Aplicando a definição da razão trigonométrica *seno* no triângulo retângulo BCA', temos: $\text{sen}\hat{A}' = \dfrac{a}{2 \cdot R}$

Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ determinam a mesma corda (corda BC). Portanto, pelo teorema do ângulo inscrito, esses ângulos são congruentes.

Isto é, $\hat{A} = \hat{A}'$.

Logo, $\text{sen}\hat{A} = \dfrac{a}{2 \cdot R}$

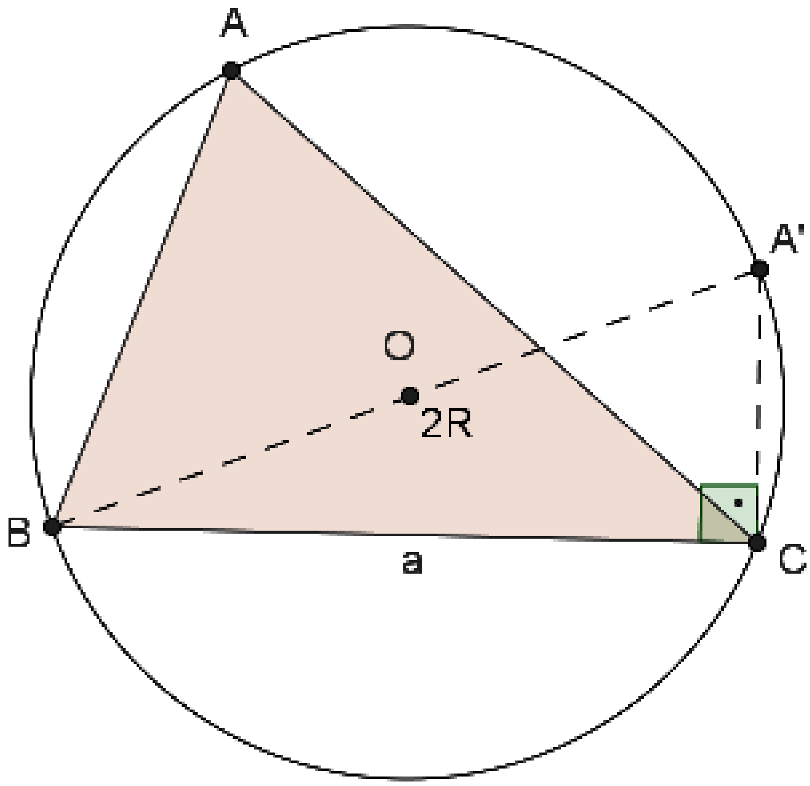

Figura 43: Lei dos Senos

Isto é,

$$\frac{\text{sen}\hat{A}}{a} = 2 \cdot R$$

De forma análoga para os pontos B e C, chega-se a:

$$\frac{\text{sen}\hat{B}}{b} = 2 \cdot R$$

e

$$\frac{\text{sen}\hat{C}}{c} = 2 \cdot R$$

Finalmente:

$$\boxed{\frac{\text{sen}\hat{A}}{a} = \frac{\text{sen}\hat{B}}{b} = \frac{\text{sen}\hat{C}}{c} = 2 \cdot R}$$

Demonstração que explora conhecimentos geométricos do aluno e ajuda a fixar esses conceitos.

4.5.4 LEI DOS COSSENOS

A FÓRMULA

Num triângulo qualquer ABC, de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, temos as relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C}$$

UMA DEMONSTRAÇÃO

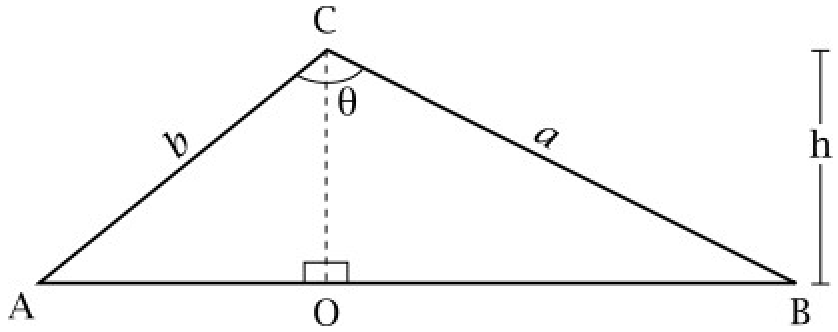

Figura 44: Lei dos Cossenos

Seja um triângulo ABC qualquer de altura $OC = h$.

Temos: $\text{sen}\hat{B} = \dfrac{h}{a}$ e $\cos\hat{B} = \dfrac{OB}{a}$

Logo $h = a \cdot \text{sen}\hat{B}$ e $OB = a \cdot \cos\hat{B}$

Como $c = AO + OB$, temos que $AO = c - OB$,

logo $AO = c - a \cdot \cos\hat{B}$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AOC, temos:

$$b^2 = AO^2 + h^2$$

Logo $b^2 = (c - a.\cos\hat{B})^2 + (a \cdot \operatorname{sen}\hat{B})^2$

Desenvolvendo:

$b^2 = c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B} + a^2 \cdot (\cos\hat{B})^2 + a^2 \cdot (\operatorname{sen}\hat{B})^2$

Ou:

$b^2 = c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B} + a^2 \cdot [(\cos\hat{B})^2 + (\operatorname{sen}\hat{B})^2]$

Pela identidade trigonométrica fundamental, $(\cos\hat{B})^2 + (\operatorname{sen}\hat{B})^2 = 1$

Logo

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}}$$

De forma análoga demonstram-se as outras duas igualdades.

Cabe destacar que esta demonstração explora conceitos trigonométricos no triângulo retângulo, com algumas manipulações algébricas.

4.5.5 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM TANGENTE E COTANGENTE

AS FÓRMULAS

$\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$, com $\cos\theta \neq 0$

$1 + \cot^2\theta = csc^2\theta$, com $\operatorname{sen}\theta \neq 0$

UMA DEMONSTRAÇÃO

A partir da relação fundamental:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

dividindo todos os termos por $\cos^2\theta$, chega-se a:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta},$$

Logo

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$$

Das mesma forma, dividindo todos os termos da relação fundamental por $\operatorname{sen}^2\theta$, obtém-se:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta},$$

Ou seja:

$$\boxed{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta}$$

Demonstração simples com manipulações que não trazem dificuldade.

Em casos práticos, a sua memorização não é imprescindível: sempre é possível recorrer à relação fundamental da trigonometria.

4.5.6 SENO E COSSENO DA SOMA DE DOIS ARCOS

AS FÓRMULAS

$$\operatorname{sen}(ß + \varnothing) = \operatorname{sen}ß \cdot \cos\varnothing + \operatorname{sen}\varnothing \cdot \cos ß \tag{20}$$

$$\operatorname{sen}(ß - \varnothing) = \operatorname{sen}ß \cdot \cos\varnothing - \operatorname{sen}\varnothing \cdot \cos ß \tag{21}$$

$$\cos(ß + \varnothing) = \cos ß \cdot \cos\varnothing - \operatorname{sen}ß \cdot \operatorname{sen}\varnothing \tag{22}$$

$$\cos(ß - \varnothing) = \cos ß \cdot \cos\varnothing + \operatorname{sen}ß \cdot \operatorname{sen}\varnothing \tag{23}$$

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

A demonstração apresentada na coleção “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010) é baseada em dois ângulos no círculo trigonométrico e em quatro triângulos retângulos formados no interior desse círculo. A demonstração não é intuitiva e não é de visualização muito fácil.

Além disso, a demonstração apresentada só tem validade para ângulos agudos, fato que não é mencionado no livro.

UMA DEMONSTRAÇÃO

A seguir, apresenta-se uma demonstração mais adequada ao aluno de Ensino Médio.

Apresentaremos, primeiramente, uma demonstração geométrica quando ambos os ângulos, ß e ∅, são agudos, isto é, ambos estão no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico.

Os demais casos são demonstrados por manipulações algébricas das razões trigonométricas seno e cosseno.

DEMONSTRAÇÃO PARA ÂNGULOS AGUDOS

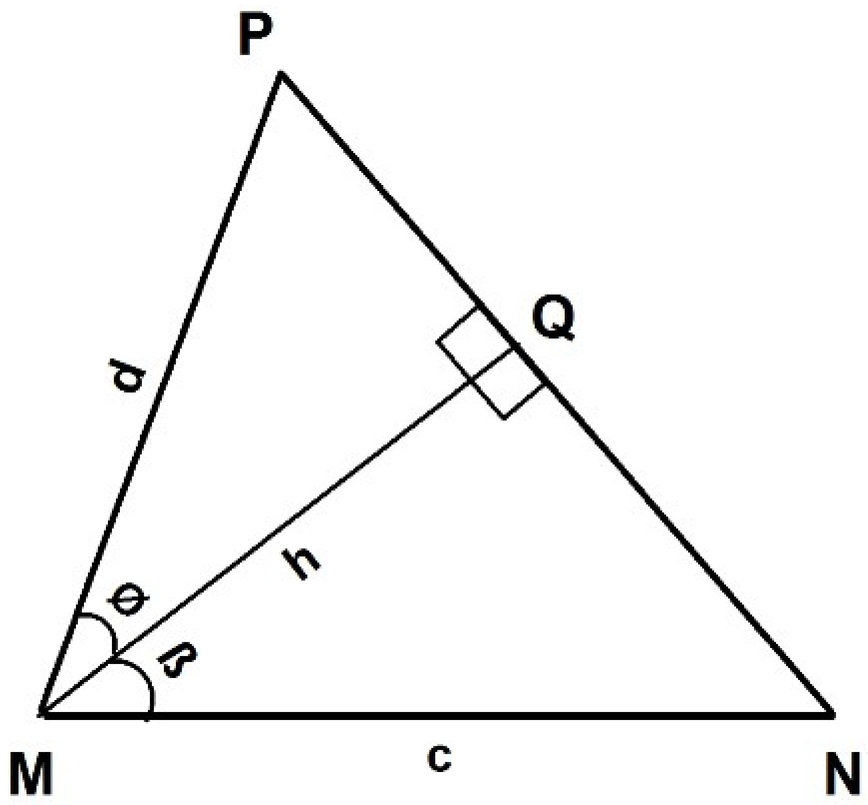

Figura 45: Seno da Soma

Sejam dois ângulos agudos ß e ∅ quaisquer. É possível construir o triângulo MNP, de altura h, conforme Figura 45.

Temos que:

$$Area_{MNP} = Area_{MNQ} + Area_{MPQ} \qquad (24)$$

Mas

$$Area_{MNQ} = \frac{NQ \cdot h}{2} \tag{25}$$

$$Area_{MPQ} = \frac{PQ \cdot h}{2} \tag{26}$$

Utilizando a formula de área demonstrada em (2):

$$Area_{MNP} = \frac{c \cdot d \cdot \text{ sen}(ß + \varnothing)}{2} \tag{27}$$

Substituindo (25), (26) e (27) em (24), teremos:

$$\frac{c \cdot d \cdot \text{ sen}(ß + \varnothing)}{2} = \frac{NQ \cdot h}{2} + \frac{PQ \cdot h}{2}$$

Ou

$$c \cdot d \cdot \text{ sen}(ß + \varnothing) = NQ \cdot h + PQ \cdot h \tag{28}$$

Sabemos que:

$$NQ = c \cdot \text{ sen}ß \tag{29}$$

pois $\text{ sen}ß = \dfrac{NQ}{c}$

$$h = d.\cos\varnothing \tag{30}$$

pois $\cos\varnothing = \dfrac{h}{d}$

Também:

$$h = c \cdot \cos ß \tag{31}$$

pois $\cos ß = \dfrac{h}{c}$

$$PQ = d \cdot \text{ sen}\varnothing \tag{32}$$

pois $\text{ sen}\varnothing = \dfrac{PQ}{d}$

Finalmente, substituindo (29), (30), (31) e (32) em (28), teremos:

$c \cdot d \cdot \text{ sen}(ß + \varnothing) = NQ.h + PQ.h$

$c \cdot d \cdot \text{ sen}(ß + \varnothing) = c \cdot \text{ sen}ß \cdot d \cdot \cos\varnothing + d \cdot \text{ sen}\varnothing \cdot c \cdot \cos ß$

Ou, colocando *cd* em evidência e depois simplificando:

$$\boxed{\text{sen}(ß + \varnothing) = \text{ sen}ß \cdot \cos\varnothing + \text{ sen}\varnothing \cdot \cos ß} \tag{33}$$

Para o seno da diferença, basta utilizar o fato que:

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{ sen}\alpha$ e que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Assim, $\text{sen}(ß - \varnothing) = \text{ sen}(ß + (-\varnothing))$

Utilizando (33), teremos: $\text{sen}(ß + (-\varnothing)) = \text{ sen}ß \cdot \cos(-\varnothing) + \text{ sen}(-\varnothing).\cos ß$

Logo,

$$\boxed{\text{sen}(ß - \varnothing) = \text{ sen}ß \cdot \cos\varnothing - \text{ sen}\varnothing \cdot \cos ß}$$

Para a fórmula do cosseno da soma, basta utilizar o fato que $\cos\alpha = \text{ sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ e substituir na fórmula do seno da diferença, recém demonstrada:

$\cos(ß + \varnothing) = \text{ sen}(\frac{\pi}{2} - (ß + \varnothing))$

Logo: $\cos(ß + \varnothing) = \text{ sen}((\frac{\pi}{2} - ß) - \varnothing)$

Logo:

$$\cos(ß + \varnothing) = \text{ sen}(\frac{\pi}{2} - ß) \cdot \cos\varnothing - \text{ sen}\varnothing \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - ß)$$

Como $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - ß) = \cos ß$ e $\cos(\frac{\pi}{2} - ß) = \text{ sen}ß$, temos finalmente:

$$\boxed{\cos(ß + \varnothing) = \cos ß \cdot \cos\varnothing - \text{ sen}ß \cdot \text{ sen}\varnothing}$$

Para a fórmula do cosseno da diferença, basta aplicar o fato que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ na fórmula recém demonstrada do cosseno da soma de dois arcos.

DEMONSTRAÇÃO PARA ÂNGULOS EM QUALQUER QUADRANTE

Para demonstrar a expressão quando um dos ângulos não é agudo, devemos analisar todas as possibilidades, em função dos quadrantes do ciclo: Q1 (primeiro quadrante), Q2 (segundo quadrante), Q3 (terceiro quadrante) e Q4 (quarto quadrante).

Todas as possibilidades são[4]:

- ß em Q1 e ∅ em Q1: já demonstrado;
- ß em Q1 e ∅ em Q2;
- ß em Q1 e ∅ em Q3;
- ß em Q1 e ∅ em Q4;
- ß em Q2 e ∅ em Q2;
- ß em Q2 e ∅ em Q3;
- ß em Q2 e ∅ em Q4;
- ß em Q3 e ∅ em Q3;
- ß em Q3 e ∅ em Q4;
- ß em Q4 e ∅ em Q4.

Observação: Alguns casos não foram incluídos por serem análogos aos seus simétricos. (Exemplo: ß em Q2 e ∅ em Q1 é simétrico a ß em Q1 e ∅ em Q2).

Vamos demonstrar alguns desses casos, os demais são muito semelhantes.

$\boxed{\text{ß em Q1 e } \varnothing \text{ em Q2}}$:

Como ∅ está em Q2, existirá um ângulo agudo t tal que $\varnothing = t + 90°$.

Teremos: $\text{sen}(\text{ß} + \varnothing) = \text{sen}(\text{ß} + t + 90°)$

Mas $\text{sen}(\alpha + 90°) = \cos\alpha$

Então:

[4]Vale a pena que o professor explore com os alunos quais seriam todas as possibilidades. Além de convencer, é um exercício simples de Análise Combinatória que pode ser explorado em sala de aula.

$\text{sen}(ß + \varnothing) = \cos(ß + t)$

ß e t são ambos agudos. Então vale a expressão já demonstrada (22):

$\text{sen}(ß + \varnothing) = \cos(ß + t) = \cos ß \cdot \cos t - \text{sen}ß \cdot \text{sen}t$

Substituindo t por $\varnothing - 90°$:

$\text{sen}(ß + \varnothing) = \cos ß \cdot \cos(\varnothing - 90°) - \text{sen}ß \cdot \text{sen}(\varnothing - 90°)$

Mas sabemos que $\cos(\varnothing - 90°) = \text{sen}\varnothing$ e que $\text{sen}(\varnothing - 90°) = -\cos\varnothing$

Então:

$\text{sen}(ß + \varnothing) = \cos ß \cdot \text{sen}\varnothing - \text{sen}ß \cdot (-\cos\varnothing)$

Finalmente:

$$\boxed{\text{sen}(ß + \varnothing) = \text{sen}ß \cdot \cos\varnothing + \text{sen}\varnothing \cdot \cos ß}$$

$\boxed{\text{ß em Q1 e } \varnothing \text{ em Q3}}$:

Como $\varnothing$ está em Q3, existirá um ângulo agudo t tal que $\varnothing = t + 180°$.

Teremos: $\text{sen}(ß + \varnothing) = \text{sen}(ß + t + 180°)$

Mas $\text{sen}(\alpha + 180°) = -\text{sen}\alpha$

Então:

$\text{sen}(ß + \varnothing) = -\text{sen}(ß + t)$

ß e t são ambos agudos. Então vale a expressão já demonstrada (20):

$\text{sen}(ß + \varnothing) = -\text{sen}(ß + t) = -(\text{sen}ß \cdot \cos t + \cos ß \cdot \text{sen}t)$

Ou:

$\text{sen}(ß + \varnothing) = -\text{sen}ß \cdot \cos t - \cos ß \cdot \text{sen}t$

Substituindo t por $\varnothing - 180°$:

$\text{sen}(ß + \varnothing) = -\text{sen}ß \cdot \cos(\varnothing - 180°) - \cos ß \cdot \text{sen}(\varnothing - 180°)$

Mas sabemos que $\cos(\varnothing - 180°) = -\cos\varnothing$ e que $\text{sen}(\varnothing - 180°) = -\text{sen}\varnothing$

Então:

$\text{sen}(ß + \varnothing) = -\text{sen}ß \cdot (-\cos\varnothing) - \cos ß \cdot (-\text{sen}\varnothing)$

Finalmente:

$$\boxed{\text{sen}(ß+\varnothing) = \text{sen}ß\cdot\cos\varnothing + \text{sen}\varnothing\cdot\cos ß}$$

$\boxed{ß \text{ em Q1 e } \varnothing \text{ em Q4}}$:

Como $\varnothing$ está em Q4, existirá um ângulo agudo t tal que $\varnothing = -t$.

Teremos: $\text{sen}(ß+\varnothing) = \text{sen}(ß-t)$

ß e t são ambos agudos. Então vale a expressão já demonstrada (21):

$\text{sen}(ß+\varnothing) = \text{sen}(ß-t) = \text{sen}ß\cdot\cos t - \cos ß\cdot \text{sen}t$

Substituindo t por $-\varnothing$:

$\text{sen}(ß+\varnothing) = \text{sen}ß\cdot\cos(-\varnothing) - \cos ß\cdot \text{sen}(-\varnothing)$

Mas sabemos que $\cos(-\varnothing) = \cos\varnothing$ e que $\text{sen}(-\varnothing) = -\,\text{sen}\varnothing$

Então:

$\text{sen}(ß+\varnothing) = \text{sen}ß\cdot\cos\varnothing - \cos ß\cdot(-\,\text{sen}\varnothing)$

Finalmente:

$$\boxed{\text{sen}(ß+\varnothing) = \text{sen}ß\cdot\cos\varnothing + \text{sen}\varnothing\cdot\cos ß}$$

$\boxed{ß \text{ em Q2 e } \varnothing \text{ em Q2}}$:

Como ß está em Q2, existirá um ângulo agudo b tal que $ß = b + 90°$.

Como $\varnothing$ está em Q2, existirá um ângulo agudo t tal que $\varnothing = t + 90°$.

Teremos: $\text{sen}(ß+\varnothing) = \text{sen}(b+90+t+90°)$

Ou:

$\text{sen}(ß+\varnothing) = \text{sen}(b+t+180°)$

Mas $\text{sen}(\alpha+180°) = -\,\text{sen}\alpha$

Então:

$\text{sen}(ß+\varnothing) = -\,\text{sen}(b+t)$

b e t são ambos agudos. Então vale a expressão já demonstrada (20):

$\text{sen}(ß + \varnothing) = -\,\text{sen}(b+t) = -(\,\text{sen}b \cdot \cos t + \cos b \cdot\,\text{sen}t)$

Ou:

$\text{sen}(ß + \varnothing) = -\,\text{sen}b \cdot \cos t - \cos b \cdot\,\text{sen}t$

Substituindo b por $ß - 90°$ e t por $\varnothing - 90°$:

$\text{sen}(ß + \varnothing) = -\,\text{sen}(ß - 90°) \cdot \cos(\varnothing - 90°) - \cos(ß - 90°) \cdot\,\text{sen}(\varnothing - 90°)$

Mas sabemos que $\cos(\alpha - 90°) = \,\text{sen}\alpha$ e que $\text{sen}(\alpha - 90°) = -\cos\alpha$

Então:

$\text{sen}(ß + \varnothing) = -(-\cos ß) \cdot\,\text{sen}\varnothing - \,\text{sen}ß \cdot (-\cos\varnothing)$

Finalmente:

$$\boxed{\text{sen}(ß + \varnothing) = \,\text{sen}ß \cdot \cos\varnothing + \,\text{sen}\varnothing \cdot \cos ß}$$

Os outros casos se demonstram de maneira muito semelhante.

Para as demais fórmulas (seno da diferença, cosseno da soma e cosseno da diferença), a demonstração é idêntica à apresentada para ângulos agudos.

A demonstração para o seno da soma de ângulos agudos é bastante engenhosa, mas não traz grande dificuldade de acompanhamento pelo aluno.

As demais demonstrações são interessantes para fixar as propriedades das funções trigonométricas e para praticar manipulações algébricas com elas.

Observação: Quanto ao seno da diferença de arcos e ao cosseno da diferença de arcos, sugere-se que o aluno não as memorize, mas saiba deduzi-las cada vez que precisar delas, a partir das fórmulas de seno ou cosseno da soma de dois arcos.

4.5.7 TANGENTE DA SOMA DE DOIS ARCOS

AS FÓRMULAS

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \,\text{tg}\beta}{1 - \,\text{tg}\alpha \cdot \,\text{tg}\beta}$$

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \,\text{tg}\beta}{1 + \,\text{tg}\alpha \cdot \,\text{tg}\beta}$$

UMA DEMONSTRAÇÃO

Temos que: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

Basta utilizar as expressões de seno e cosseno da soma de arcos:

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$

Se $\cos\alpha\neq 0$ e $\cos\beta\neq 0$, podemos multiplicar a expressão por:

$1=\dfrac{cos\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta}$

Teremos:

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$

De onde se chega ao resultado final:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}$$

Para a tangente da diferença, basta utilizar o fato que:

$\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$.

Então: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)}$

Logo:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}$$

Não se recomenda fazer os alunos memorizarem as fórmulas de tangente aqui apresentadas, para não saturar os alunos, já que estas não são comparativamente as mais utilizadas. Pode ser dada em forma de exercício para fixar conhecimentos, sem, contudo, formalizar o resultado como uma fórmula a ser memorizada.

4.5.8 FÓRMULAS COM ARCOS DUPLOS

AS FÓRMULAS

$\operatorname{sen}2\alpha = 2\cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\cdot \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cdot\cos^2\alpha - 1$

$\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\cdot \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

UMA DEMONSTRAÇÃO

Basta utilizar as fórmulas da soma de dois arcos, considerando que $2\alpha = \alpha + \alpha$:

$\operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{sen}2\alpha = 2\cdot \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cdot \operatorname{sen}\alpha$

Logo,

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

Para a outra igualdade, basta substituir $\cos^2\alpha$ por $1-\operatorname{sen}^2\alpha$:

$\cos 2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Logo:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\cdot \operatorname{sen}^2\alpha}$$

Para a última igualdade, substituímos $\operatorname{sen}^2\alpha$ por $1-\cos^2\alpha$:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)$

Logo:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cdot\cos^2\alpha - 1}$$

$\operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}$

Logo:

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Pode ser apresentada no escopo de um exercício com supervisão, evitando assim que o aluno tenha a percepção que é uma fórmula a ser memorizada.

4.5.9 FÓRMULAS COM ARCOS METADES

AS FÓRMULAS

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

As demonstrações apresentadas no livro “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010) para seno e cosseno são longas e rebuscadas. Utilizam expressões do cosseno da soma de semiarcos.

Além disso, o livro não elucida em quais situações as expressões são positivas e em quais elas são negativas. A obra utiliza o símbolo $\pm$, sem esclarecimentos adicionais, o que pode tornar nebulosa a compreensão do aluno.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Recomendam-se as demonstrações a seguir, mais acessíveis e simples.

Para as expressões com seno e cosseno, basta utilizar as fórmulas já demonstradas do cosseno do arco duplo:

SENO DO ARCO METADE:

$\cos 2\theta = 1 - 2\cdot \operatorname{sen}^2\theta$

Isolando $\operatorname{sen}^2\theta$:

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

Logo:

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

Fazendo $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$:

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

- *Qual valor utilizar: positivo ou negativo?*

Sabemos que o seno de um ângulo será positivo se este ângulo estiver no primeiro ou no segundo quadrantes.

O seno desse ângulo será negativo se o ângulo estiver no terceiro ou no quarto quadrantes.

Ou seja, teremos $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ quando $\frac{\alpha}{2}$ estiver no primeiro ou no segundo quadrantes.

Por outro lado, teremos $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ quando $\frac{\alpha}{2}$ estiver no terceiro ou no quarto quadrantes.

Se α estiver entre 0 e 2π rad, $\frac{\alpha}{2}$ sempre estará ou no primeiro ou no segundo quadrantes. Portanto, seu seno só assumirá a primeira expressão (positiva).

COSSENO DO ARCO METADE:

Por outro lado, sabemos que:

$\cos 2\theta = 2\cdot\cos^2\theta - 1$

Isolando $\cos^2\theta$:

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

Logo:

$\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$

Fazendo novamente $\theta = \frac{\alpha}{2}$:

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

- *Qual valor utilizar: positivo ou negativo?*

Sabemos que o cosseno de um ângulo será positivo se este ângulo estiver no primeiro ou no quarto quadrantes.

O cosseno desse ângulo será negativo se o ângulo estiver no segundo ou no terceiro quadrantes.

Ou seja, teremos $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ quando $\frac{\alpha}{2}$ estiver no primeiro ou no quarto quadrantes.

Por outro lado, teremos $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ quando $\frac{\alpha}{2}$ estiver no segundo ou no terceiro quadrantes.

Se α estiver entre 0 e 2π rad, $\frac{\alpha}{2}$ sempre estará ou no primeiro ou no segundo quadrantes.

Portanto, valerá a primeira expressão quando $\frac{\alpha}{2}$ estiver no primeiro quadrante (α no primeiro ou no segundo), e valerá a segunda expressão quando $\frac{\alpha}{2}$ estiver no segundo quadrante (α no terceiro ou no quarto quadrantes).

TANGENTE DO ARCO METADE:

Finalmente, para a fórmula da tangente do arco metade, basta considerar que

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

Fazendo a divisão das duas fórmulas recém demonstradas, chega-se ao resultado:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

- *Qual valor utilizar: positivo ou negativo?*

Sabemos que a tangente de um ângulo será positiva se este ângulo estiver no primeiro ou no terceiro quadrantes.

A tangente desse ângulo será negativa se o ângulo estiver no segundo ou no quarto quadrantes.

Ou seja, teremos $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ quando $\frac{\alpha}{2}$ estiver no primeiro ou no terceiro quadrantes.

Por outro lado, teremos $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ quando $\frac{\alpha}{2}$ estiver no segundo ou no quarto quadrantes.

Se α estiver entre 0 e 2π rad, $\dfrac{\alpha}{2}$ sempre estará ou no primeiro ou no segundo quadrantes.

Portanto, valerá a primeira expressão quando $\dfrac{\alpha}{2}$ estiver no primeiro quadrante (α no primeiro ou no segundo), e valerá a segunda expressão quando $\dfrac{\alpha}{2}$ estiver no segundo quadrante (α no terceiro ou no quarto quadrantes).

Essas demonstrações podem ser dadas em forma de exercício, sem, contudo, formalizar o resultado como fórmulas a serem memorizadas. Servem para praticar manipulações algébricas com expressões trigonométricas.

4.5.10 FÓRMULAS DE PROSTAFÉRESE

AS FÓRMULAS

As fórmulas de Prostaférese são as fórmulas de transformação de soma em produto:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

UMA DEMONSTRAÇÃO

Sabemos que:

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

e que $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$

Adicionando estas duas equações:

$\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=(\operatorname{sen}a\cdot\cos b+\operatorname{sen}b\cdot\cos a)+(\operatorname{sen}a\cdot\cos b-\operatorname{sen}b\cdot\cos a)=$

$=2\operatorname{sen}a\cdot\cos b$

Fazendo $a+b=x$ e $a-b=y$, teremos:

$a=\dfrac{x+y}{2}$ e $b=\dfrac{x-y}{2}$

Substituindo a e b na equação anterior, temos:

$\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen}\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

Logo:

$$\boxed{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$$

Para a diferença dos senos, basta considerar que $(-\operatorname{sen}y)=\operatorname{sen}(-y)$, substituindo então na fórmula recém demonstrada y por $-y$:

$\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(-y)=2\operatorname{sen}\dfrac{x+(-y)}{2}\cos\dfrac{x-(-y)}{2}$

De onde:

$$\boxed{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}$$

Para a soma dos cossenos, temos que: $\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$

e que $\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$

Adicionando estas duas equações:

$\cos(a+b)+\cos(a-b)=(\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b)+(\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b)=$

$2\cos a\cdot\cos b$

Fazendo $a+b=x$ e $a-b=y$, teremos:

$a=\dfrac{x+y}{2}$ e $b=\dfrac{x-y}{2}$

Substituindo a e b na equação anterior, temos:

$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

Logo:

$$\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$$

Para a diferença de cossenos, efetuamos $\cos(a+b)-\cos(a-b)$:

$\cos(a+b)-\cos(a-b)=(\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b)-(\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b)=$

$-2\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b$

Novamente, $a=\dfrac{x+y}{2}$ e $b=\dfrac{x-y}{2}$

Logo:

$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\operatorname{sen}\dfrac{x+y}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x-y}{2}$

Logo:

$$\boxed{\cos x-\cos y=-2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}}$$

Para a soma das tangentes, consideremos $\operatorname{tg} x=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e $\operatorname{tg} y=\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}$

Logo, $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}$

Desenvolvendo:

$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\dfrac{\operatorname{sen} x\cos y+\operatorname{sen} y\cos x}{\cos x\cos y}$

Logo:

$$\boxed{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}}$$

Para a diferença de tangentes, basta considerar que $-\operatorname{tg} y=\operatorname{tg}(-y)$, substituindo então y por $-y$ na fórmula acima:

$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}(-y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x+(-y))}{\cos x\cdot\cos(-y)}$

Como $\cos(-y)=\cos y$, chega-se a:

$$\boxed{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}}$$

Sugere-se que o professor analise a conveniência de apresentar este conteúdo em sala de aula, levando em conta se os alunos trabalharão ou não com as fórmulas no futuro.

4.6 NÚMEROS E ÁLGEBRA

4.6.1 TEOREMA DE LAPLACE

A FÓRMULA

Para qualquer matriz $n \times n$, com $n > 1$, temos que:

Seu determinante é a soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer pelos seus respectivos cofatores.

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

No livro "Conexões com a Matemática" (BARROSO; LEONARDO, 2010), que é a obra em que baseamos este trabalho para a seleção das fórmulas, o Teorema de Laplace é apresentado, porém, não é demonstrado.

A demonstração formal deste teorema foge ao escopo do Ensino Médio, pois requer argumentos para os quais os alunos ainda não adquiriram a habilidade/competência necessária.

Possíveis demonstrações demandam conhecimento de Espaços Vetoriais e funções lineares ou de Teoria de Grupos. Por essa razão, não se apresenta neste trabalho nenhuma demonstração.

Procedeu-se a uma análise em cinco livros didáticos para observar de que forma o Teorema de Laplace é tratado. As obras analisadas são BARROSO e LEONARDO (2010), DINIZ e SMOLE (2010), GIOVANNI e BONJORNO (2010), IEZZI et al. (2000) e SPINELLI et al. (2005).

Os livros BARROSO e LEONARDO (2010), DINIZ e SMOLE (2010) e GIOVANNI e BONJORNO (2010) tratam o tema da mesma forma:

- Definem determinantes de ordem 2 e de ordem 3 como uma expressão escalar associada aos elementos das matrizes de ordem 2 e 3 respectivamente.
- Apresentam a expressão do "Teorema de Laplace" para calcular determinantes de ordem 4 ou superior, sem sequer definir o que seria um determinante de ordem 4, nem mencionar que esse teorema é de fato um teorema – ou seja, é demonstrável.

A abordagem destas três obras citadas parece incoerente. Se o aluno (e também o professor) não tiver arraigado o conceito de teorema, certamente esta abordagem não ajuda a esclarecê-lo.

Uma dessas três obras, a coleção DINIZ e SMOLE (2010), explica que o Teorema de Laplace habilita a resolver sistemas $n \times n$ (para qualquer valor natural de n) pela Regra de Cramer, que já havia sido apresentada previamente na obra (para sistemas 2×2 e 3×3). Apresenta também exercícios de aplicação utilizando o teorema.

Já os livros BARROSO e LEONARDO (2010) e GIOVANNI e BONJORNO (2010) optam por apresentar os determinantes dissociados do tópico Sistemas Lineares, que é apresentado num capítulo posterior. Estas obras, após apresentar o Teorema de Laplace, apresentam uma série de exercícios de aplicação mecânica do teorema, sem apresentar nenhuma aplicação do uso dos determinantes. Nesse ponto do livro, não somente não se sabe o que é um determinante de ordem maior que 3, também não se conhece nenhuma finalidade do conceito de determinante.

O livro IEZZI et al. (2000) tem uma abordagem mais simples e mais coerente. A obra só define determinantes de ordem 2 e 3. Não menciona o Teorema de Laplace. A apresentação está associada à resolução de sistemas lineares de ordens 2 e 3. Não é mencionada a existência de sistemas lineares de ordem maior que 3.

O livro SPINELLI et al. (2005) utiliza as expressões da expansão de Laplace como a própria definição de determinante. Dessa forma, não menciona o Teorema, apenas sua expressão algébrica na própria definição de determinante. A vantagem dessa abordagem é que ela guarda coerência, não vincula a definição a casos particulares (2×2 ou 3×3) e habilita a resolução de sistemas de qualquer ordem.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Como já foi dito, não é adequada uma demonstração para esse teorema no Ensino Médio. Mas é proveitoso mostrar a validade do teorema para casos específicos, como para determinantes de ordem 2 ou 3. Uma prova para um desses casos é relevante para que os alunos adquiram o hábito da linguagem matemática abstrata.

Vamos apresentar a demonstração do Teorema para os casos em que $n = 3$ e depois $n = 2$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE LAPLACE PARA O CASO PARTICULAR DE MATRIZES DE ORDEM 3:

Consideraremos a definição de determinante de ordem 2 como sendo[5]:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta$$

Seja A uma matriz qualquer de ordem 3:

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ com a, b, c, d, e, f , g, h e i números reais quaisquer.

Denotamos o determinante D associado a essa matriz como:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

Observemos que a matriz A possui 6 expansões de Laplace: uma para cada linha e uma para cada coluna.

Chamemos de E_{L1}, E_{L2} e E_{L3} as expansões das linhas 1, 2 e 3 respectivamente.

Chamemos de E_{C1}, E_{C2} e E_{C3} as expansões das colunas 1, 2 e 3 respectivamente.

Calculemos então essas 6 expansões. Devemos provar que elas são iguais entre si e iguais a D.

Ou seja, devemos provar que[6]:

$$E_{L1} = E_{L2} = E_{L3} = E_{C1} = E_{C2} = E_{C3} = D$$

Sabemos, por definição de determinante de ordem 3, que

$$D = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

Calculando E_{L1}:

$$E_{L1} = a \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot (-1)^{(1+3)} \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Aplicando a definição de determinante 2×2:

[5] Esta é a definição presente na maioria dos livros escolares de Ensino Médio. Dos cinco exemplos de livros citados, somente o livro SPINELLI et al. (2005) apresenta definição diferente desta. Esta situação será discutida mais adiante.

[6] É pertinente que se mostre ao aluno que a demonstração requer o cálculo de todas as expansões. Escolher uma das seis expansões e provar que ela é igual ao determinante não prova o teorema.

$E_{L1} = a \cdot 1 \cdot (ei - hf) + b \cdot (-1) \cdot (di - gf) + c \cdot 1 \cdot (dh - ge)$

Logo:

$E_{L1} = aei - ahf - bdi + bgf + cdh - cge$

Ou:

$E_{L1} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$

Conclui-se que:

$$\boxed{E_{L1} = D}$$

Calculemos agora E_{L2}:

$E_{L2} = d \cdot (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \cdot (-1)^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + f \cdot (-1)^{(2+3)} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

Aplicando a definição de determinante 2×2:

$E_{L2} = d \cdot (-1) \cdot (bi - hc) + e \cdot 1 \cdot (ai - gc) + f \cdot (-1) \cdot (ah - gb)$

Logo:

$E_{L2} = -dbi + dhc + eai - egc - fah + fgb$

Ou:

$E_{L2} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$

Conclui-se que:

$$\boxed{E_{L2} = D}$$

As outras quatro expansões se demonstram de maneira análoga.

Essa demonstração faz sentido se a definição de determinante é tal como foi apresentada. Se a definição de determinante for dada justamente pela expansão de Laplace, é claro que não faz sentido denominar a expansão de *teorema*. Portanto, não há teorema a demonstrar. É o que faz a coleção SPINELLI et al. (2005). Nesse caso, é possível fazer o contrário, isto é, a partir da expansão de Laplace, provar a expressão numérica para um determinante de uma determinada ordem.

Por exemplo, provar que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

A demonstração é semelhante à apresentada anteriormente, mas basta calcular a partir de uma expansão.

Vamos apresentar a demonstração do Teorema para o caso em que $n = 2$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE LAPLACE PARA O CASO PARTICULAR DE MATRIZES DE ORDEM DOIS[7]:

Consideraremos a definição de determinante de ordem 1 como sendo:

$$\begin{vmatrix} \alpha \end{vmatrix} = \alpha$$

Seja A uma matriz qualquer de ordem 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com a, b, c e d números reais quaisquer.

O determinante associado a essa matriz é:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Observemos que a matriz A possui 4 expansões de Laplace: uma para cada linha e uma para cada coluna.

Chamemos de E_{L1} e E_{L2} as expansões das linhas 1 e 2 respectivamente.

Chamemos de E_{C1} e E_{C2} as expansões das colunas 1 e 2 respectivamente.

Calculemos então essas 4 expansões. Devemos provar que elas são iguais entre si e iguais a D.

Ou seja, devemos provar que:

[7]Assim como foi já observado no caso de ordem 3, se a expansão de Laplace serviu como definição de determinantes, não podemos falar em *teorema*. Nesse caso, a expressão $ad - cb$ não é definição de determinante de ordem 2. Mas podemos demonstrar que essa expressão é válida utilizando a definição de determinante como expansão de Laplace.

$E_{L1} = E_{L2} = E_{C1} = E_{C2} = D$

Sabemos, por definição de determinante de ordem 2, que

$D = ad - cb$

Calculando E_{L1}:

$E_{L1} = a \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} d \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} c \end{vmatrix}$

Aplicando a definição de determinante 1×1:

$E_{L1} = a \cdot 1 \cdot d + b \cdot (-1) \cdot c$

Logo:

$E_{L1} = ad - cb$

Conclui-se que:

$$\boxed{E_{L1} = D}$$

Calculemos agora E_{L2}:

$E_{L2} = c \cdot (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} b \end{vmatrix} + d \cdot (-1)^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} a \end{vmatrix}$

Aplicando a definição de determinante 1×1:

$E_{L2} = c \cdot (-1) \cdot b + d \cdot 1 \cdot a$

Logo:

$E_{L2} = -cb + da$

Ou

$E_{L2} = ad - cb$

Conclui-se que:

$$\boxed{E_{L2} = D}$$

Calculando E_{C1}:

$E_{C1} = a \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} d \end{vmatrix} + c \cdot (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} b \end{vmatrix}$

Aplicando a definição de determinante 1×1:

$E_{C1} = a \cdot 1 \cdot d + c \cdot (-1) \cdot b$

Logo:

$E_{C1} = ad - cb$

Conclui-se que:

$$\boxed{E_{C1} = D}$$

Calculemos agora E_{C2}:

$E_{C2} = b \cdot (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} c \end{vmatrix} + d \cdot (-1)^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} a \end{vmatrix}$

Aplicando a definição de determinante 1×1:

$E_{C2} = b \cdot (-1) \cdot c + d \cdot 1 \cdot a$

Logo:

$E_{C2} = -bc + da$

Ou

$E_{C2} = ad - cb$

Conclui-se que:

$$\boxed{E_{C2} = D}$$

Concluimos então que

$$\boxed{E_{L1} = E_{L2} = E_{C1} = E_{C2} = D}$$

e, assim, termina a demonstração.

O desenvolvimento dessas demonstrações é proveitoso para o aluno, pois, além de promover o raciocínio lógico-matemático, estimula o raciocínio abstrato para definir casos gerais de matrizes e determinantes, evidenciando as diferenças entre exemplos específicos e casos genéricos.

4.6.2 TEOREMA DE BINET

A FÓRMULA

Para quaisquer duas matrizes $n \times n$, temos:

$det(A \cdot B) = detA \cdot detB$

onde A e B são matrizes $n \times n$.

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

No livro “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010), o Teorema de Binet é apresentado, porém, não é demonstrado. A demonstração formal deste teorema foge ao escopo do Ensino Médio, pois requer argumentos para os quais os alunos ainda não adquiriram a habilidade/competência necessária.

Possíveis demonstrações demandam conhecimento de Espaços Vetoriais e funções multilineares. Por essa razão, só se apresenta neste trabalho uma demonstração para o caso de matrizes 2×2.

Procedeu-se a uma análise em cinco livros didáticos para observar de que forma o Teorema de Binet é tratado. As obras analisadas são BARROSO e LEONARDO (2010), DINIZ e SMOLE (2010), GIOVANNI e BONJORNO (2010), IEZZI et al. (2000) e SPINELLI et al. (2005).

Os livros BARROSO e LEONARDO (2010) e GIOVANNI e BONJORNO (2010) citam o Teorema de Binet mas não o demonstram. Nenhum dos dois livros traz aplicações do teorema, a não ser exercícios específicos de aplicação imediata da expressão.

Os livros DINIZ e SMOLE (2010), IEZZI et al. (2000) e SPINELLI et al. (2005) não citam o Teorema de Binet.

Tendo em vista a pouca frequência de aplicação do Teorema de Binet no Ensino Médio, acrescida do fato que é um teorema que não será demonstrado, sugere-se que o professor analise a conveniência de apresentar este conteúdo em sala de aula.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Se a opção for de apresentar o Teorema de Binet em sala de aula, seria adequado mostrar a validade do teorema para casos específicos[8] como, por exemplo, matrizes 1×1 (caso muito simples), 2×2 ou 3×3.

[8]É recomendável explicar ao aluno de Ensino Médio que uma demonstração do teorema para vários casos específicos não valida o teorema para o caso genérico, independentemente da quantidade de casos específicos demonstrados. Ou seja, é importante que o aluno tenha a compreensão de que a indução empírica não é um argumento matemático válido.

Apresentamos aqui a demonstração do Teorema de Binet para o caso particular de matrizes 2×2.

Sejam duas matrizes quaisquer:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, onde a, b, c e d são números reais quaisquer.

$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, onde e, f, g e h são números reais quaisquer.

Pela definição de produto de matrizes, temos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Calculemos então $det(A \cdot B)$:

$det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix}$

Calculando o determinante 2×2:

$det(A \cdot B) = (ae+bg)(cf+dh) - (ce+dg)(af+bh)$

Desenvolvendo:

$det(A \cdot B) = (aecf+aedh+bgcf+bgdh) - (ceaf+cebh+dgaf+dgbh)$

$det(A \cdot B) = aecf+aedh+bgcf+bgdh-aecf-cebh-dgaf-bgdh$

Simplificando os termos $aecf$ e $bgdh$ e seus inversos aditivos:

$$det(A \cdot B) = aedh+bgcf-cebh-dgaf \qquad (34)$$

Agora, vamos calcular $detA \cdot detB$:

$detA \cdot detB = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$

Logo:

$detA \cdot detB = (ad-cb)(eh-gf)$

Desenvolvendo:

$detA \cdot detB = adeh-adgf-cbeh+cbgf$

Reordenando:

$$detA \cdot detB = adeh + cbgf - cbeh - adgf \tag{35}$$

As expressões (34) e (35) são iguais. Portanto:

$$\boxed{det(A \cdot B) = detA \cdot detB}$$

A demonstração do teorema de Binet para matrizes 2×2 é interessante para que o aluno ganhe capacidade de abstração, assimilando a representação de uma matriz genérica 2×2 e manipulando esses dados. Muitos alunos apresentam dificuldades para passar de exemplos particulares para casos genéricos. Este tipo de demonstração pode ajudar a elucidar esse conceito.

4.6.3 DETERMINANTE DA MATRIZ INVERSA

A FÓRMULA

Para qualquer matriz $n \times n$ que seja invertível, temos:

$detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$

onde A é uma matriz $n \times n$ invertível.

UMA DEMONSTRAÇÃO[9]

Como A^{-1} é a matriz inversa da matriz A, vale a relação:

$A \cdot A^{-1} = I$,

onde I é a matriz identidade de ordem n.

Logo, termos:

$det(A \cdot A^{-1}) = detI$

Pelo Teorema de Binet, $det(A \cdot A^{-1}) = detA \cdot detA^{-1}$

Sabemos que $detI = 1$

Logo:

[9] O Teorema de Binet é pré-requisito para esta demonstração.

$detA \cdot detA^{-1} = 1$

Finalmente:

$$\boxed{detA^{-1} = \frac{1}{detA}}$$

Essa demonstração, embora simples, favorece a aprendizagem conceitual de matrizes, matriz identidade, matriz inversa e a operação com matrizes. Pode ser apresentado como um exercício de aplicação do Teorema de Binet.

4.6.4 REGRA DE CRAMER

A FÓRMULA

Para qualquer sistema linear de n equações a n incógnitas,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

em que o determinante principal é não nulo, isto é, se:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

então a solução do sistema será:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

No livro “Conexões com a Matemática” (BARROSO; LEONARDO, 2010), a Regra de Cramer é apresentada, porém, só é explicada para sistemas 2×2 e depois admite-se sua generalização.

A Regra de Cramer pode ser demonstrada de maneira simples com a expressão do sistema linear em representação matricial e com manipulação de matrizes. Requer o conhecimento de matrizes inversas.

Verificou-se primeiramente a forma como a Regra de Cramer é apresentada em cinco livros didáticos.

As obras analisadas são BARROSO e LEONARDO (2010), DINIZ e SMOLE (2010), GIOVANNI e BONJORNO (2010), IEZZI et al. (2000) e SPINELLI et al. (2005).

Duas dessas obras não mencionam a representação matricial de um sistema. São elas DINIZ e SMOLE (2010) e SPINELLI et al. (2005).

As outras três obras, BARROSO e LEONARDO (2010), GIOVANNI e BONJORNO (2010) e IEZZI et al. (2000) definem e apresentam a representação matricial de um sistema linear, mas não exploram o assunto.

Quanto à Regra de Cramer, observou-se que o livro GIOVANNI e BONJORNO (2010) apenas apresenta a regra sem nenhuma justificativa.

Já os outros quatro livros: BARROSO e LEONARDO (2010), DINIZ e SMOLE (2010), IEZZI et al. (2000) e SPINELLI et al. (2005) mostram a origem da Regra de Cramer a partir de um sistema 2×2 genérico. Depois, generaliza-se para sistemas $n \times n$, sem justificar, inserindo exercícios de aplicação direta da regra.

A demonstração da Regra de Cramer para sistemas $n \times n$ é relativamente simples quando se domina a linguagem matricial e suas propriedades.

Para que seja possível trabalhar essa demonstração em sala, é necessário que os alunos estejam habituados a trabalhar com manipulação de matrizes e com o conceito de matriz inversa. Muitos livros didáticos, entretanto, tratam do conteúdo sobre matriz inversa depois da Regra de Cramer.

Outra opção, sem a utilização de representação matricial de sistemas, seria demonstrar a Regra de Cramer somente[10] para sistemas 2×2 e/ou 3×3, por meio de métodos que são normalmente conhecidos pelos alunos.

UMA DEMONSTRAÇÃO

Neste trabalho, discutiremos duas demonstrações: uma com o uso da representação matricial de sistemas, e a outra demonstração será feita com manipulações algébricas, mas restrita a sistemas 2×2.

A primeira não será apresentada com detalhamento em todas as etapas, por envolver inversão de matrizes $n \times n$ bastante trabalhosa.

POR REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Esse Sistema pode ser escrito por uma representação matricial[11]:

$$A \cdot X = B \tag{36}$$

Onde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

[10] É importante esclarecer ao aluno que a dedução da Regra de Cramer para os casos 2×2 e 3×3 não é um argumento matematicamente válido para generalizar a regra para sistemas $n \times n$.

[11] É importante que o professor mostre aos alunos que as duas representações são equivalentes. É conveniente realizar a multiplicação $A \cdot X$ e verificar que se trata da mesma expressão do sistema linear original, mas agora escrito por meio de matrizes

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Como $detA$ é não nulo, A é invertível e podemos provar que $A^{-1} \cdot B$ atende o sistema; pertence, portanto, ao conjunto de soluções.

De fato, calculemos $A \cdot X$ substituindo X por $A^{-1} \cdot B$, e verifiquemos que vale B:

$A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = I \cdot B$,

Pois $A \cdot A^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade.

Mas $I \cdot B = B$, logo verifica-se, de fato, que

$A \cdot (A^{-1} \cdot B) = B$

Também é possível mostrar que $A^{-1} \cdot B$ corresponde justamente à formulação da Regra de Cramer.

Aqui também seria possível operar sem o uso de matrizes.

Com manipulações matriciais, também é possível demonstrar que essa solução é única.

De fato, se existir outra solução $\hat{X}$ para o sistema, teremos:

$A \cdot \hat{X} = B$

Multiplicando à esquerda por A^{-1}:

$A^{-1} \cdot A \cdot \hat{X} = A^{-1} \cdot B$

Mas $A^{-1} \cdot A = I$, onde I é a matriz identidade.

$I \cdot \hat{X} = A^{-1} \cdot B$

Mas $I \cdot \hat{X} = \hat{X}$, logo:

$\boxed{\hat{X} = A^{-1} \cdot B}$

Portanto, a solução é única.

Em geral, a representação matricial de sistemas lineares não é muito explorada no Ensino Médio, também não é muito explorado o cálculo da matriz inversa. Mas é frequente o uso de matrizes para resolver sistemas pelo método do escalonamento.

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DE CRAMER PARA SISTEMAS LINEARES 2×2

Um sistema linear genérico se define assim:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 = & b_2 \end{cases}$$

onde x_1 e x_2 são as incógnitas, as constantes reais a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} são os coeficientes e as constantes reais b_1 e b_2 os termos independentes.

Seu determinante D associado é :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Logo:

$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Vamos primeiro resolver o sistema pelo método tradicional, para depois comparar o resultado com o método da Regra de Cramer.

Vamos analisar 3 casos:

- Caso 1: $a_{12} \neq 0$ e $a_{22} \neq 0$
- Caso 2: $a_{12} = 0$ e $a_{22} \neq 0$
- Caso 3: $a_{12} \neq 0$ e $a_{22} = 0$

Observação: ambos não podem ser nulos, pois, nesse caso, o determinante seria nulo, o que contradiz a hipótese.

Caso 1: $\boxed{a_{12} \neq 0 \text{ e } a_{22} \neq 0}$

Para eliminar a variável x_2, multiplicaremos a primeira linha por a_{22} e a segunda linha por a_{12} . Obteremos:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 & + & a_{12}a_{22}x_2 = & a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x_1 & + & a_{12}a_{22}x_2 = & a_{12}b_2 \end{cases}$$

Subtraindo uma linha da outra, desaparecerá x_2:

$a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{21}x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$

Colocando x_1 em evidência:

$x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$

Mas temos que: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D$

A equação fica então:

$x_1 \cdot D = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$

Como D é , por hipótese, não nulo, chegamos à solução:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{D} \tag{37}$$

Agora, vamos encontrar o valor de x_2, utilizando o mesmo procedimento.

Para encontrar x_2, devemos eliminar a variável x_1 no sistema original:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 = & b_2 \end{cases}$$

Multiplicaremos a primeira linha por a_{21} e a segunda linha por a_{11} . Obteremos:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 & + & a_{12}a_{21}x_2 = & a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 & + & a_{11}a_{22}x_2 = & a_{11}b_2 \end{cases}$$

Subtraindo uma linha da outra, desaparecerá x_1:

$a_{12}a_{21}x_2 - a_{11}a_{22}x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$

Colocando x_2 em evidência:

$x_2(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$

Mas temos que: $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -D$

A equação fica então:

$x_2 \cdot (-D) = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$

Como D é , por hipótese, não nulo, chegamos a:

$x_2 = \dfrac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{-D}$

Que é o mesmo que:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{D} \tag{38}$$

Agora, vamos calcular x_1 e x_2 pela Regra de Cramer e verificar que chegamos aos mesmos valores já calculados.

Pela Regra de Cramer, temos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Observa-se que o denominador das expressões de x_1 e x_2 correspondem a D.

Calculando os determinantes dos numeradores, chegamos às expressões:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{D} \tag{39}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{D} \tag{40}$$

As expressões (39) e (40) coincidem com (37) e (38) respectivamente.

Caso 2: $\boxed{a_{12} = 0 \text{ e } a_{22} \neq 0}$

O sistema, neste caso, se reduz a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = & & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 = & b_2 \end{cases}$$

E o determinante passa a ser:

$D = a_{11}a_{22}$

Como o determinante é não nulo por hipótese, temos $a_{11} \neq 0$ e $a_{22} \neq 0$

Podemos, então, multiplicar a segunda por a_{11} :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = & b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 & + & a_{11}a_{22}x_2 = & a_{11}b_2 \end{cases}$$

Observa-se que o valor $a_{11}x_1$ vale b_1 (primeira linha) aparece no primeiro elemento da segunda linha.

Logo, podemos substituí-lo por b_1:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = & b_1 \\ a_{21}b_1 & + & a_{11}a_{22}x_2 = & a_{11}b_2 \end{cases}$$

Como $a_{11} \neq 0$ e $a_{22} \neq 0$, podemos então escrever:

$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 & = & \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}} \end{cases} \tag{41}$$

Agora vamos calcular as expressões pela Regra de Cramer.

Podemos utilizar as equações (39) e (40):

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{D}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{D}$$

Com $a_{12} = 0$ e $D = a_{11}a_{22}$

Então:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1}{a_{11}a_{22}}$$

Ou

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}}$$

Este resultado coincide com a equação (41), portanto, fica provado o caso 2.

O caso 3 não será apresentado, é muito semelhante ao caso 2.

Fica, assim, provada a Regra de Cramer para sistemas 2×2.

Este tipo de demonstração com operações algébricas é de fácil entendimento do aluno, que já está habituado a resolver sistemas lineares por outra metodologia. Traz a vantagem de fazer com que o aluno se habitue com a linguagem matemática. Permite compreender que uma demonstração genérica, uma vez sucedida, habilita a utilização de seu resultado para exemplos numéricos.

A Regra de Cramer é muito utilizada no Ensino Médio. Por isso, vale a pena que seja formalizada pelo professor para que seja fixada pelos alunos. Por outro lado, é interessante salientar que, em casos reais, muitas vezes se trabalha com sistemas contendo uma grande quantidade de variáveis. Isto é, as matrizes associadas são muito grandes, exigindo métodos computacionais para a resolução, em que normalmente a Regra de Cramer não é a mais adequada. Nesses casos, utilizam-se outros métodos, tais como Eliminação de Gauss (método do escalonamento), Eliminação de Gauss-Jordan ou Decomposição LU (*lower and upper*).

5 CONCLUSÕES

As fórmulas apresentadas neste trabalho foram retiradas do livro BARROSO e LEONARDO (2010). São, portanto, uma amostra significativa dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio.

Analisando as demonstrações presentes neste trabalho, podemos perceber que elas apresentam diversos graus de dificuldade e de nível de abstração para o aluno de Ensino Médio. Apontamos os seguintes casos:

Demonstrações fáceis e com poucos passos argumentativos. Muitas delas podem ser tratadas como exercício (individual ou em grupo), onde o próprio aluno terá papel central na demonstração. Em muitos casos, não convém apresentar a expressão demonstrada como uma fórmula a ser memorizada, mas apenas como a resposta final de um exercício. Isso contribui a evitar a saturação de fórmulas a serem memorizadas e faz com que o aluno tenha que deduzir a expressão sempre que ela for necessária.

Demonstrações difíceis para o aluno de Ensino Médio, por ele não possuir o conhecimento ou a habilidade necessárias nas argumentações. Nesses casos, o professor tem algumas alternativas a seguir:

- Ele pode apresentar diversos exemplos em que se comprova um padrão. A partir desses exemplos, construir a fórmula (preferencialmente com participação dos alunos), ressaltar sua importância e explicar que existe uma demonstração formal que poderá ser estudada em níveis mais avançados (cursos superiores).
- Outra opção seria semelhante a esta, porém, apresentando uma *prova*[1] não rigorosa, em que o aluno percebe os padrões que o convencem da fórmula. É o caso, por exemplo, da área do círculo, como foi apresentada neste trabalho. É preciso deixar claro ao aluno que essa *prova* não possui valor formal.

[1] *Prova* no sentido dado por BALACHEFF (1988).

- Também seria possível, em alguns casos, restringir a hipótese de modo a tornar fácil a demonstração. É o caso por exemplo, do Teorema de Binet para matrizes $n \times n$, que pode ser demonstrado para os casos de matrizes 2×2 e 3×3, como foi feito neste trabalho. É importante que o aluno compreenda que não é matematicamente válido dar por verdadeiro o caso geral ($n \times n$) se comprovarmos casos particulares.

- Por fim, uma opção seria simplesmente omitir o conteúdo em sala de aula, a critério do professor, caso não se pretenda aplicar posteriormente a expressão em exercícios ou problemas. É uma opção razoável omitir a apresentação de uma expressão que não pode ser demonstrada e também não será utilizada em sala de aula. É o que ocorre em alguns livros didáticos, por exemplo, com o Teorema de Binet para o determinante de um produto de matrizes quadradas.

O caso mais comum é de demonstrações que podem ser compreendidas pelos alunos de Ensino Médio, mas que não são extremamente fáceis nem imediatas. Essas demonstrações podem ser muito proveitosas para os alunos, por desenvolverem diversos aspectos intelectuais, tais como capacidade de abstração, raciocínio lógico e, em alguns casos, raciocínio espacial, além de promoverem o entendimento da Matemática como Ciência e fixarem diversos conceitos matemáticos.

Sempre que possível, é importante que o professor, ao apresentar a demonstração, explique a ideia da *tática* de abordagem que será tomada, as etapas que serão percorridas para chegar na expressão final. Assim, o aluno terá participação mais ativa no processo, não entendendo essa *tática* adotada como um ”passe de mágica”.

A vantagem da aprendizagem de demonstrações é que ela não desenvolve somente o raciocínio lógico e o saber matemático especificamente, ela também contribui para que o aluno adquira maior senso crítico, para que ele aprimore o seu conhecimento do mundo, para sua inserção social como cidadão e para a sua futura vida profissional.

Outra vantagem é a satisfação que sente o aluno, seja ao entender a ciência matemática, seja ao concluir exitosamente uma sequência argumentativa de um exercício desafiador. Uma aprendizagem significativa pode despertar a *libido sciendi*, o desejo por conhecimento que é natural a todo ser humano, e que deve ser estimulado em sala de aula.

Constata-se que a grande maioria das demonstrações aqui apresentadas são factíveis de serem trabalhadas no currículo do Ensino Médio. No entanto, percebe-se que os livros didáticos brasileiros dão pouca ênfase ao assunto, omitindo-as muitas vezes ou apresentando-as de forma incompleta.

Diferente é o caso em outros países. Em Portugal, por exemplo, a demonstração faz parte do currículo escolar e sua importância é destacada em documentos oficiais. No Brasil, da mesma forma, as publicações oficiais incentivam o ensino de demonstrações em aulas de Matemática, mas com muito menor ênfase, e sem menção explícita a nenhuma delas.

Parece coerente sugerir que se incluam no currículo educacional brasileiro e nos livros escolares citações de demonstrações de determinadas expressões matemáticas específicas, de forma a tornar seu ensino mais sistemático.

O ensino de demonstrações apresenta-se como estimulante do pensamento e do senso crítico e deve ser incentivado. É importante que o aluno compreenda o caráter abstrato da Matemática, contudo, é também indispensável vinculá-lo a exemplos contextualizados e aplicações do mundo real.

Dada a importância do tema e a inexistência de referências com esses conteúdos, torna-se útil a construção de um listado contendo as fórmulas matemáticas com suas respectivas demonstrações que possam ser trabalhadas no Ensino Médio. É o que foi feito parcialmente neste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; FUSCO, C. A. da S. **Discutindo algumas dificuldades de professores dos ensinos Fundamental e Médio a respeito do conceito de demonstração - Anais do III SIPEM**. 2006. 1 p.

ALMOULOUD, S. A.; REGNIER, J.-C.; FUSCO, C. A. da S. **Resolver problemas envolvendo prova e demonstração: uma dificuldade para professores de ensino básico**. 2009. 1 p. Acessado em 12/01/2016. Disponível em: <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00506497/document>.

AMORIM, M. **Argumentação e prova: uma situação experimental sobre quadriláteros e suas propriedades**. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009. Acessado em 12/01/2016. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4948>.

ARISTÓTELES. **Tratados de Lógica**. 1. ed. Madri: Gredos, 2001.

ARISTÓTELES. **Retórica**. 2. ed. Lisboa: Imprensa Nacional, 2005.

AVILA, G. **Reflexões Sobre o Ensino de Geometria - Revista Professor de Matemática**. 2010.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège**. Grenoble: Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988. Acessado em 6/01/2016. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/326426/filename/Balacheff.Nicolas_1988_these_vol_1_et_2.pdf>.

BARROSO, J. M.; LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

BOSSEZ, D. **Les obstacles rencontrés par les élèves de troisième pour écrire des preuves destinées à valider ou à réfuter une assertion mathématique**. Marseille: Aix-Marseille Université, 2013. Acessado em 4/01/2016. Disponível em: <http://www.irem.univ-mrs.fr/IMG/pdf/mémoire_master2_david_bossez.pdf>.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília: Presidência da República - Casa Civil, 1998. Acessado em 14/11/2015. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Disciplina Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2000.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio- PCN+**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2002.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2006.

BRASIL. **Guia de Livros Didáticos PNLD 2012: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2011.

BRASIL. **Guia de Livros Didáticos PNLD 2015: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2014.

BRASIL. **Edital nº 6 – Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM 2015**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2015.

CARAÇA, B. d. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 1. ed. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CONTENTE MONTEIRO, M. do R. **Práticas avaliativas da capacidade de argumentação matemática de alunos do ensino secundário: um estudo com professores de Matemática A**. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2013.

COSTA, S. I. R.; RODRIGUES, C. I. **Volume de Pirâmides**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, 2011. Acessado em 7/01/2016. Disponível em: <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/17046>.

D'AMBROSIO, B. **Como Ensinar Matemática Hoje? Temas e Debates - SBEM**. 1989. 15-19 p. Acessado em 8/01/2016. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf>.

DANTE, L. R. **Matemática – Contexto e Aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2010.

DE VILLIERS, M. **Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad**. 2001.

DE VILLIERS, M. **Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica**. 2002.

DEGENSZAIJN, D.; IEZZI, G. **Matemática Ciência e Aplicações**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2011.

DINIZ, M. I.; SMOLE, K. **Matemática Ensino Médio**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

DOUAIRE, J. **Analyse didactique des processus de preuve dans le domaine numérique au cycle 3 de l'école primaire. Histoire et perspectives sur les mathématiques**. Paris: Université Denis Diderot, 2006.

DOUEK, N.; PICHAT, M. **Do texto oral ao escrito: uma abordagem da argumentação matemática de longa duração nas séries iniciais**. 1. ed. Campos dos Goytacazes: UNIFLU Centro Universitário Fluminense, 2003.

DUCHET, P. **Drôles de preuves. Math en Jeans**. Paris: Centre national de la recherche scientifique, 1998. 1 p. Acessado em 17/12/2015. Disponível em: <http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/9806preuves/98preuve.html>.

EUCLIDES de ALEXANDRIA. **Elementos**. 1. ed. São Paulo: Cultura, 1944.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. 1. ed. Campinas: Universidade de Campinas, 2004.

FONSECA, L. **Formação Inicial de Professores de Matemática: A Demonstração em Geometria**. Aveiro: Universidade de Aveiro, 2004.

GALE, D. **Proof as explanation. The Mathematical Intelligencer**. [S.l.]: Springer Verlag, 1990. 4 p.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Ciência e Aplicações**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.

GOLDENBERG, P. **Hábitos de pensamento: um princípio organizador para o currículo**. 2006. 1 p. Acessado em 12/12/2015. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/revista/educ47/educ47_6.htm>.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Porto Alegre: UFRGS, 2001.

GROENWALD, C. L. **A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Educação matemática em Revista – SBEM**. 1999. 23-30 p.

GROENWALD, C. L.; NUNES, G. da S. **Currículo de matemática no ensino básico: a importância do desenvolvimento dos pensamentos de alto nível - Relime**. 2007. 1 p. Acessado em 14/11/2015. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v10n1/v10n1a5.pdf>.

GROENWALD, C. L.; TIMM, U. **Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula. Educação matemática em Revista – SBEM**. 2000. 21-26 p. Acessado em 26/11/2015. Disponível em: <http://descobertamat.blogspot.co.id/2010/12/utilizando-curiosidades-e-jogos.html>.

HEALY, L.; HOYLES, C. **A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in Mathematics Education**. 2000. 1 p. Acessado em 17/12/2015. Disponível em: <http://math.arizona.edu/ cemela/english/content/shortcourses/language/reading_materials/healy-hoyles.pdf>.

IEZZI, G. et al. **Matemática Volume Único**. 1. ed. São Paulo: Atual, 2000.

LAGES LIMA, E. **Conceituação, Manipulação e Aplicações, As três componentes do ensino de matemática - Revista Professor de Matemática**. 1999.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 1. ed. Campinas: Papirus, 1997.

NASSER, L.; TINOCO, L. **Helping to develop the ability of argumentation in mathematics - Proceedings**. Haifa: Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1999. 303-306 p.

NASSER, L.; TINOCO, L. **Preparando o raciocínio dedutivo**. 1. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2001.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics Press, 2000.

OLIVEIRA, J. M.; AMARAL, J. R. **O Pensamento Abstrato. Cérebro e Mente**. 2001. 1 p. Acessado em 7/01/2016. Disponível em: <http://www.cerebromente.org.br/n12/opiniao/pensamento.html>.

OTTE, M. F. **Análise de Prova e o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico**. São Paulo: Educação Matemática Pesquisa, 2003.

PAIVA, M. **Matemática – Paiva**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

PARANÁ. **Currículo Básico para a Escola Pública do Paraná**. Curitiba: Secretaria do Estado da Educação, 1990.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática**. Curitiba: Secretaria do Estado da Educação, 2008.

PEDEMONTE, B. **Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques**. Grenoble: Université Joseph Fourier, 2002. Acessado em 2/01/2016. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/46071/filename/tel-00004579.pdf>.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. 2005.

PORTUGAL. **Matemática A – Programas 10.º, 11.º e 12.º anos**. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação, 1997.

PORTUGAL. **Programa de Matemática A do 10º Ano – Cursos Científico-Humanísticos**. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação, 2001.

PORTUGAL. **Metas Curriculares para o Ensino Secundário – Matemática A , Caderno de Apoio – 12º Ano**. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação, 2007.

PORTUGAL. **Programa e Metas Curriculares para o Ensino Secundário**. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação, 2013.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

RIBEIRO, J. **Matemática Ciência Linguagem e Tecnologia - Ensino Médio**. 2. ed. São Paulo: Scipione, 2011.

SOUZA, J. **Novo Olhar – Matemática**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

SPINELLI, W.; SOUZA, M. H.; REAME, E. **Matemática: Ensino Médio**. 1. ed. São Paulo: Nova Geração, 2005.

TEIXEIRA RODRIGUES, M. M. A. **A Demonstração na Prática Social da Aula de Matemática**. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2008.

TOULMIN, S. E. **The uses of argument - Updated Edition**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

VELOSO, E. **Geometria: Temas actuais**. Lisboa: Ministerio da Educação, 2000.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels - Recherches en Didactique des mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.