Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 37, n. 4, 4502 (2015)
www.sbfisica.org.br
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11173741987

Introduzindo problemas e curvas de perseguição no Ensino Médio e universitário

(Introducing pursuit problems and curves to High School and university students)

Reynaldo Lopes de Oliveira Jr.[1]

Escola SESC de Ensino Médio, Jacarepaguá, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Recebido em 22/5/2015; Aceito em 31/8/2015; Publicado em 12/12/2015

Neste trabalho, procuramos mostrar ao professor do ensino superior básico e do ensino médio como é possível tornar as aulas de cinemática mais interessantes com a introdução de um problema de perseguição típico e sua simulação por meio do *software* gratuito *Modellus* que permite a discussão de problemas mais elaborados. Podemos aplicar este tipo de abordagem a várias situações, desde as que envolvem a simulação de conflitos bélicos até aquelas que envolvem o *design* de jogos eletrônicos. Como exemplo de problema de perseguição escolhemos o caso de um navio mercante que é perseguido por um navio pirata que discutimos com detalhes para que o professor tenha a oportunidade familiarizar-se com este tipo de problema e tentar suas próprias simulações.
Palavras-chave: problemas de perseguição, cinemática, simulação com *Modellus*.

The purpose of this paper is to show to the basic university physics instructor and the high school teacher how we can solve interesting kinematic problems with the introduction of a typical pursuit problem. We can discuss this kind of problem in various situations ranging from military applications to applications related to game design. The pursuit of a merchant ship by a pirate ship was the problem chosen as an example. We also discuss a pedagogical approach to this problem, showing as an example how the teacher can simulate this kind of problem using the software *Modellus*.
Keywords: pursuit problems, kinematics, simulations with *Modellus*.

1. Introdução

Talvez um dos primeiros problemas de perseguição interessantes date do século 5 A.E.C. quando o filósofo grego Zenon de Eléia formulou o paradoxo de Aquiles e a tartaruga. No problema proposto, Aquiles obviamente corre muito mais rápido do que a tartaruga, mas para tornar a corrida mais justa, à tartaruga é dada uma vantagem inicial que a coloca a uma certa distância à frente do ponto de partida [1, 2]. Embora o paradoxo possa ser um exemplo simples de problema de perseguição e leve a uma introdução interessante ao conceito matemático de limite, do ponto de vista estritamente filosófico sua solução continua em aberto [1].

Para introduzir e desenvolver um exemplo de problema de perseguição em nossas salas de aula escolhemos uma variante mais simples de um problema originalmente proposto por Apolônio de Perga: a perseguição de um navio mercante por um navio pirata. Na versão simples do problema proposta em 1732 pelo matemático francês Pierre Bouguer (1698-1758) [2], o navio mercante navega com velocidade constante em módulo (v_m), direção e sentido, quando de repente é avistado por um navio pirata. O navio pirata navega com velocidade constante em módulo (v_{P}), mas não em direção e sentido. Façamos a suposição que o navio pirata não "tire os olhos do navio mercante", isto é, a todo momento o vetor velocidade do navio pirata $\mathbf{v}_{\mathrm{P}}$ aponta para o navio mercante. Façamos duas perguntas:

1. *Como será a trajetória de perseguição do navio pirata?*
2. *Em quais condições o navio pirata alcançará o navio mercante?*

Neste trabalho, ao responder estas perguntas resolvendo o problema proposto pretendemos dar um exemplo de como as aulas de cinemática podem ter um enfoque mais atrativo para alunos e professores. Como veremos, nossa proposta é que o professor do ensino básico universitário ou do ensino médio introduza os problemas de perseguição por meio de simulações computacionais interativas. A ideia fundamental é que ao

[1]E-mail: rlojunior@gmail.com.

final como a simulação não é uma caixa preta, o aluno, embora inicialmente guiado pelo professor, possa modelar e simular seus próprios problemas. Na atividade proposta neste trabalho o aluno será levado (i) a observar um problema tópico de perseguição, (ii) modelá-lo matematicamente e simuá-lo a partir do modelo construído, e posteriormente (iii) verificar se o modelo condiz com o esperado.

2. O problema de perseguição

Como mencionado antes, um problema de perseguição pura é definido como sendo a determinação da curva que o perseguidor deve percorrer para alcançar o perseguido que se move ao longo de uma trajetória prescrita ou não, com a condição de que o vetor velocidade do perseguidor aponte sempre para o perseguido. A Fig. 1 ilustra uma perseguição pura. Este tipo de problema tem uma ampla gama de aplicações que vão desde as aplicações militares até o desenvolvimento de jogos eletrônicos e aplicativos para *tablets* e *smartphones*.

De modo geral, estes problemas são resolvidos usando-se as técnicas do cálculo integral e diferencial e de resolução de equações diferenciais complicadas o suficiente para deixá-las fora do alcance dos alunos dos cursos básicos e do ensino médio. Entretanto, muitos desses problemas podem ser tratados como problemas de cinemática bidimensional. Esta simplificação é uma das vantagens do ambiente de modelagem e simulação que propomos. Concentrando-nos nos resultados obtidos por uma simulação, discutimos a validade dos parâmetros do modelo, verificamos os seus limites, e analisamos casos particulares.

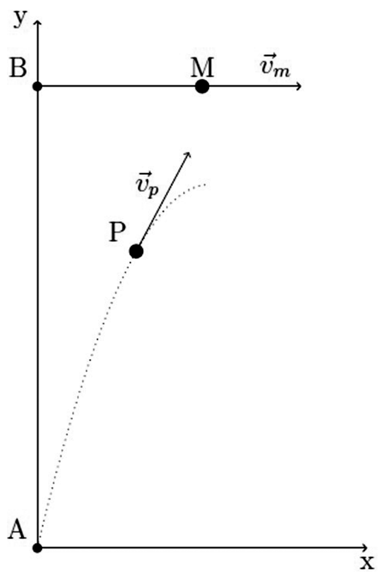

Figura 1 - O navio mercante M navega com velocidade constante $\mathbf{v}_m$ e o navio pirata P com velocidade constante $\mathbf{v}_p$. O vetor velocidade $\mathbf{v}_p$ sempre aponta para a posiçãode M. A trajetória pontilhada de P é a curva de perseguição.

Problemas de perseguição não são comuns nos ensinos básico e médio, embora as competências necessárias para tal entendimento já estejam (ou serão) formuladas ao longo do desenvolvimento das ementas. Os problemas de perseguição fazem parte de um cabedal de situações a partir das quais o professor lançará mão como um apêndice, ou um aprofundamento, no estudo de cinemática, principalmente no ensino do movimento e lançamento de projéteis.

3. Modelagem matemática

Para que haja uma perseguição, dita pura, o perseguidor P deve sempre estar "olhando diretamente" para o perseguido M. As letras P e M fazem menção ao tradicional problema de perseguição envolvendo o navio pirata, o perseguidor, e um navio mercante, o perseguido. Em termos vetoriais, dizemos que esta condição é satisfeita quando o vetor velocidade do perseguidor aponta na mesma direção que a diferença entre o vetor posição do perseguido e o vetor posição do perseguidor (Fig. 2)

Se usarmos o vetor unitário $\hat{u}$ para representar esta perseguição [2]

$$\hat{u} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p|}, \tag{1}$$

Podemos definir a velocidade de P como sendo

$$\mathbf{v}_p = k\hat{u}. \tag{2}$$

Usaremos o vetor unitário $\hat{u}$ para que possamos chegar às equações da velocidade do perseguidor de uma forma mais simples. Podemos simplesmente considerar

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p = Q(t)\mathbf{v}_p \ , \tag{3}$$

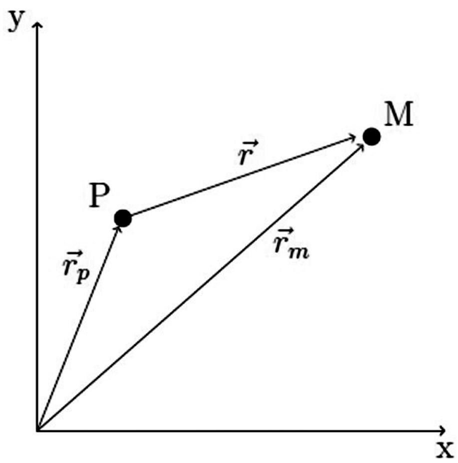

Figura 2 - $\mathbf{r}_p$ é o vetor posição de P, $\mathbf{r}_m$ é o vetor posiçãode M e o vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p$. Para que a perseguiçãoseja dita "pura" o vetor velocidade de P deve estar na mesma direção e sentido de $\mathbf{r}$.

onde o coeficiente $Q(t)$, dependente do tempo, garante a proporcionalidade entre o vetor posição relativa $\mathbf{r}$ e o vetor velocidade do perseguidor $\mathbf{v}_p$. Em $t = 0$ os navios P e M estarão nas suas posições iniciais. E considerando que P esteja na origem do plano cartesiano xy e M esteja sob o eixo y a uma distância d de P, teremos na Eq. (3) as condições

$$Q(0) = \frac{d}{|\mathbf{v}_p|}, \qquad Q(t_{encontro}) = 0 \ , \tag{4}$$

onde $t_{encontro}$ é o instante de tempo em que P e M se encontram ou seja, em $t = t_{encontro}$ temos $\mathbf{r} = 0$. Derivando a Eq. (3),

$$\frac{d\mathbf{r}_m}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt}\mathbf{v}_p + Q(t)\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \ , \tag{5}$$

onde $\frac{d\mathbf{r}_m}{dt} = \mathbf{v}_m$. Uma vez que $|\mathbf{v}_p|$ é constante vemos que este é perpendicular à aceleração sendo assim

$$\mathbf{v}_p \cdot \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = 0 \ , \tag{6}$$

Multiplicando $\mathbf{v}_p$ aos dois membros da Eq. (5)

$$\mathbf{v}_p \cdot (\frac{d\mathbf{r}_m}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_p}{dt}) = \frac{dQ(t)}{dt}\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p \ , \tag{7}$$

rescrevemos a Eq. (7) na forma

$$|\mathbf{v}_m|v_{px} - |\mathbf{v}_p|^2 = \frac{dQ(t)}{dt}|\mathbf{v}_p|^2 \ , \tag{8}$$

onde v_{px} é a componente da velocidade de P na direção x. Como o navio mercante navega na direção x, o produto escalar entre o vetor $\mathbf{v}_p$ e o vetor $\mathbf{v}_m$ será a componente x da velocidade $\mathbf{v}_p$. Integrando a equação acima com relação ao tempo t e tendo 0 e t como limites superior e inferior teremos

$$\int_0^t (|\mathbf{v}_m|v_{px} - |\mathbf{v}_p|^2)dt = \int_0^t \left(\frac{dQ(t)}{dt}|\mathbf{v}_p|^2\right) dt \ ,$$

e usando na equação acima as condições dadas pela Eq. (4),

$$|\mathbf{v}_m|x - |\mathbf{v}_p|^2 t = Q(t)|\mathbf{v}_p|^2 - d|\mathbf{v}_p|. \tag{9}$$

Substituindo fazendo $t = t_{encontro}$, $x = |\mathbf{v}_m|t_{encontro}$ e $Q(t_{encontro}) = 0$, obtemos

$$t_{encontro} = \frac{d|\mathbf{v}_p|}{|\mathbf{v}_p|^2 - |\mathbf{v}_m|^2} \ . \tag{10}$$

Para estudarmos a cinemática do problema de perseguição proposto, voltamos à Eq. (1) e definimos uma constante k tal que

$$k = \frac{|\mathbf{v}_p|}{|\mathbf{v}_m|} \ . \tag{11}$$

A equação que define k nos diz que o módulo da velocidade de P é proporcional à velocidade de M. Uma vez que o vetor unitário da velocidade $\mathbf{v}_p$ é igual ao vetor unitário $\hat{u}$. Lembremos que esta é a condição de perseguição pura que é quando a velocidade de P aponta sempre na direção de $\mathbf{r}$. Assim, combinando a Eq. (1) e a constante k temos

$$\frac{\mathbf{v}_p}{k|\mathbf{v}_m|} = \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p|} \ , \tag{12}$$

onde teremos

$$\mathbf{v}_p = k|\mathbf{v}_m|\frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p|} \ . \tag{13}$$

Considerando $\frac{dx(t)}{dt} = x'(t)$ e $\frac{dy(t)}{dt} = y'(t)$ como sendo as equações paramétricas de $\mathbf{v}_p$ e considerando $q'(t)$ e $p'(t)$ como sendo as equações paramétricas de $\mathbf{v}_m$ temos

$$x'(t) = k[p(t) - x(t)] \times \frac{\sqrt{[p'(t)]^2 + [q'(t)]^2}}{\sqrt{[p(t) - x(t)]^2 + [q(t) - y(t)]^2}}, \tag{14}$$

$$y'(t) = k[q(t) - y(t)] \times \frac{\sqrt{[p'(t)]^2 + [q'(t)]^2}}{\sqrt{[p(t) - x(t)]^2 + [q(t) - y(t)]^2}}, \tag{15}$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são as posições nos eixos horizontal e vertical do perseguidor P e $p(t)$ e $q(t)$ são as posições nos eixos horizontal e vertical do perseguido M. Considerando conhecida a trajetória do perseguido M e desejaremos saber qual será a trajetória do perseguidor P. Assim, consideraremos conhecidas as equações $p(t)$ e $q(t)$ e a partir das Eqs. (14) e (15), com ajuda do *Modellus* calcularemos as equações $x(t)$ e $y(t)$. Em geral, quando temos a equação da velocidade de um móvel $x'(t)$, podemos determinar a equação da posição $x(t)$ por uma simples integração

$$x(t) = \int_{t_0}^t x'(t)\, dt',$$

logo, calcular $x(t)$ e $y(t)$ a partir das Eqs. (14) e (15) por simples integração é uma tarefa trivial. Esta é uma das grandes vantagens do *Modellus*. Por intermédio de um método numérico, o *software* pode calcular as equações da posição $x(t)$ e $y(t)$ com uma boa aproximação.

4. Apresentando a proposta para alunos dos Ensinos Básico e Médio

Esta atividade sugere que os estudantes já tenham familiaridade com os conceitos de velocidade instantânea, vetor posição relativa. Ao contrário do que acontece no ensino básico univeritário, a velocidade instantânea não é muito explorada pelos livros didáticos de ensino médio. Citamos [4] como exemplo de livro onde tal conceito é bem abordado. Se assim desejar o professor poderá usar esta atividade como introdução a estes conceitos.

O professor inicialmente pode sensibilizar a turma quanto ao problema de perseguição aqui proposto. Basta que o professor enuncie o problema a ser tratado, por exemplo, apresentando o problema da seguinte forma:

> Considere um navio mercante que navega com velocidade constante em módulo (v_m), direção e sentido, isto é: $\mathbf{v}_m$ = constante, quando de repente é avistado por um navio pirata. Os piratas, sem titubear, iniciam a perseguição ao navio mercante. O navio pirata navega com velocidade constante somente em módulo (v_p). Suponhamos que o navio pirata não tire os olhos do navio mercante, ou seja, a todo momento o vetor velocidade do navio pirata aponte para o navio mercante.

A ideia é fazer uma animação cujos objetivos são responder às seguintes perguntas:

1. Como será a trajetória do navio pirata? Suponha que conhecemos a trajetória do navio mercante. Note que este é um problema de perseguição e não de interceptação. No problema de interceptação, o vetor velocidade não aponta necessariamente a todo instante para o perseguido.

2. Em quais condições o navio pirata alcançará o navio mercante?

3. Quais são as vantagens/desvantagens de "olhar diretamente" para o navio perseguido? Ou seja, seguir o navio mercante é melhor ou pior do que interceptá-lo?

4. Em quanto tempo o navio pirata irá alcançar o navio mercante?

Como a condição "olhar diretamente para o navio mercante" pode ser modelada matematicamente? Esta condição está representada na Eq. (12). Basta que escrevamos as equações $p(t)$, $q(t)$, $x'(t)$, e $y'(t)$ no *Modellus* para que possamos obter as equações $x(t)$ e $y(t)$ do navio pirata (que é o que buscamos para responder os objetivos propostos na questão acima). Apresentamos no Apêndice deste trabalho como podemos usar o *software Modellus*.

Passado o desafio da animação, o aluno e o professor estão livres para a interação com o modelo matemático. O professor deve incentivar os alunos para que estes alterem os valores dos parâmetros e até mesmo mudem a animação afim de responder às perguntas que foram postas no início desta seção.

Na questão 1 o aluno logo perceberá que a trajetória da perseguição é bem diferente da trajetória estudada e tão comum no estudo de cinemática do ensino médio. Certamente esta curva não é a famosa parábola.

Na questão 2 podemos nos orientar pelas seguintes questões:

- O que acontece quando $k > 1$?
- O que acontece quando $k < 1$?
- O que acontece quando $k = 1$?

Note que k é a constante dada pela razão das velocidades Eq. (11). É por meio da constante k que determinaremos as condições de encontro.

Na questão 3, discutiremos as vantagens e desvantagens de perseguirmos o navio mercante ao invés de interceptá-lo. Esta é uma questão aberta e livre à discussão. A título de exemplo apresentamos uma vantagem e uma desvantagem.

- *Vantagem*: Ao usarmos a condição de perseguiçã oapresentada na Eq. (12) o navio pirata seguirão navio mercante para onde quer que o navio mercante se mova. Se tornarmos a perseguição um pouco mais realística, onde o navio mercante tenta fugir do navio pirata mudando sua rota, imediatamente o navio pirata também mudará sua rota.

- *Desvantagem*: O tempo que o navio pirata demora para encontrar o navio mercante é maior neste tipo de perseguição do que se simplesmente interceptássemos o navio mercante (utilizando a técnica do círculo de Apolônio [5]). Estudar o tempo de encontro entre os navios é uma atividade interessante. Segue abaixo uma atividade onde podemos explorar o tempo de encontro dos navios. Encorajamos assim como sugestão que o estudante e o professor explorarem diferentes possibilidades de perseguição, basta apenas que alteremos as equações para $p(t)$ e $q(t)$.

5. Conclusões

O objetivo principal deste trabalho é sugerir a introdução nos ensinos universitário e médio de um interessante problema de perseguição e de estimular o professor na aplicação dos conteúdos de cinemática estudados em sala de aula. Estes conteúdos, em tese, deveriam ser abordados pelo professor antes da aplicação do trabalho aqui exposto. O professor poderia lançar mão destas atividades a fim de incentivar e motivar o estudante quanto aos tópicos de cinemática vistos por ele em sala de aula. Certamente, as equações da cinemática estudadas parecem um pouco distantes da realidade vivida pelos estudantes. Na simulação proposta, o aluno poderá ver as equações do movimento na prática. Em geral, paradoxalmente, o movimento é visto de maneira "estática", não há (ainda) como animar as tradicionais figuras de movimento que aparecem nos livros didáticos. Nós professores, temos que contar com a imaginação dos alunos e na crença de que os estudantes estão imaginando aquilo que os professores desejam. Numa animação ambos vêem o que acontece no movimento. A modelagem e simulação por meio de *softwares* educacionais simples e gratuitos pode ajudar de forma decisiva a modificação do panorama presente.

Agradecimentos

O autor agradeçe o professor A.C. Tort pela orientação e auxílio na elaboração deste artigo e ao árbitro da revista pelas generosas sugestões feitas ao artigo original.

Apêndice: Animando a proposta no *Modellus*

Para este trabalho foi utilizado o *software* gratuito *Modellus* X[2]. Faremos abaixo o passo a passo da animação de uma perseguição, onde o perseguido segue uma trajetória retilínea. O problema proposto está ilustrado na Fig. 3.

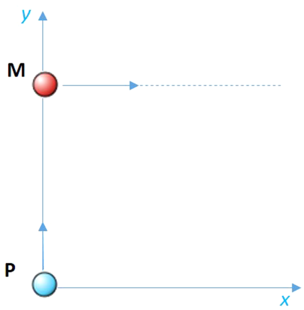

Figura 3 - Se o perseguido M seguir uma trajetória retilínea, como será a trajetória de perseguição de P?

Segue abaixo (Fig. 4) a tela do modelo matemático do problema acima. A Fig. 5 mostra a animação deste modelo.

[2]Para *download* e mais informações acesse `http://modellus.co`.

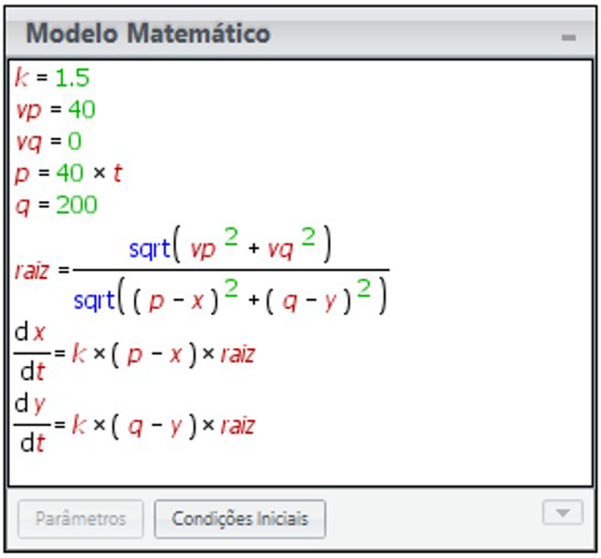

Figura 4 - Modelo matemático da animação da curva de perseguição onde o perseguido segue uma trajetória retilínea.

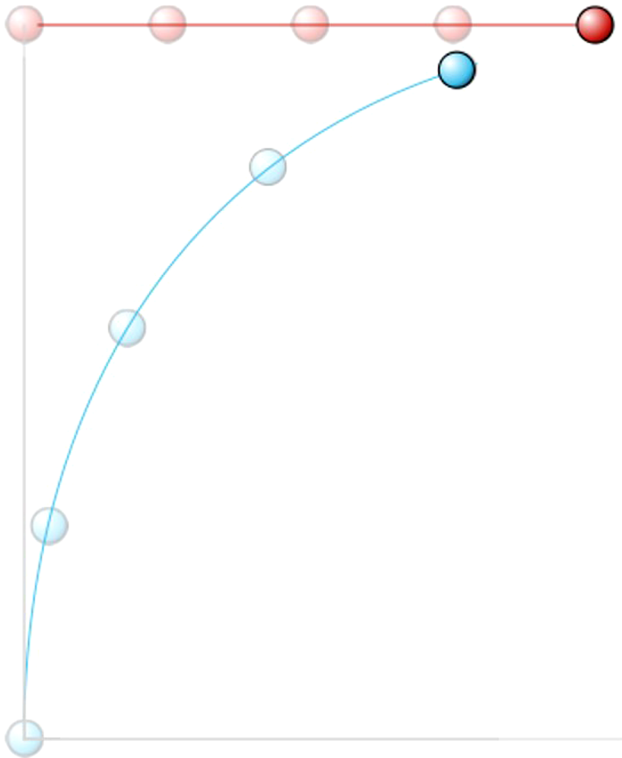

Figura 5 - Animação da perseguição na qual o perseguido segue uma trajetória retilínea.

- Na linha 1 escrevemos a variável k, Eq. (11), onde atribuímos o valor de 1,5 por exemplo.
- Nas linhas 2 e 3 determinamos as componentes horizontal e vertical da velocidade do objeto perseguido. Observe que foi atribuído 40 para a componente horizontal da velocidade de M e atribuímos o valor 0 para a componente vertical

da velocidade de M. Ou seja, o objeto M, seguirá uma trajetória retilínea na horizontal.

- Nas linhas 4 e 5 escrevemos as equações paramétricas $p(t)$ e $q(t)$ do objeto M. A equação da posição $p(t)$ é dada por $40t$ e a equação $q(t)$ é igual a 200. Ou seja, o objeto M seguirá uma trajetória retilínea de acordo com a equação $p(t) = 40t$. O objeto M também seguirá seu movimento a uma distância de 200 unidades do eixo horizontal.
- Na linha 6 foi definida uma variável chamada *raiz*. A única razão desta variável é tornar as linhas 7 e 8 mais limpas. Uma vez que esta variável aparecerá nas linhas 7 e 8.
- Na linha 7 escrevemos a Eq. (14) da velocidade do móvel P na direção horizontal. Para que o *Modellus* calcule a equação da posição em função da equação da velocidade é necessário que a equação da velocidade esteja escrita na forma diferencial $x'(t) = \frac{dx}{dt}$.
- Na linha 8 escrevemos a Eq. (15) da velocidade do móvel P na direção vertical.

Uma vez escrito o modelo matemático, basta que coloquemos duas partículas sobre a mesma origem. Cada partícula deve seguir as variáveis p e q (como coordenadas x e y respectivamente), no caso do objeto M, o perseguido, e as variáveis x e y, calculados pelo *Modellus*, serão as coordenadas do objeto P.

Referências

[1] M. Cohen, *101 Philosophy Problems* (Routledge, London, 2007), 3rd edition, Problema 27.

[2] P.J. Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion* (Princeton University Presss, New Jersey, 2007).

[3] R.L. Oliverira Júnior, *Problemas e Curvas de Perseguição no Ensino Médio: Usando o Modellus como Ferramenta Alternativa.* Dissertação de Mestrado em Ensino de Física, UFRJ, 2011.

[4] L.A. Guimarães e M. Fonte Boa, *Física: Mecânica* (Galera Hipermídia, Niterói, 2006).

[5] R. Lopes e A.C. Tort, Revista Brasileira de Ensino de Física **36**, 3502 (2014).