MATERIAL DO PROFESSOR/A

Sequência didática de matemática

SDs de 1 a 3

SUMÁRIO

FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM

REALIZADORES
IDEALIZAÇÃO
Instituto Reúna
REALIZAÇÃO
Instituto Reúna
Instituto Unibanco
APOIO INSTITUCIONAL
Fundação Lemann
Imaginable Futures

INSTITUTO REÚNA
DIRETORA-EXECUTIVA
Kátia Stocco Smole
CONSELHO CONSULTIVO
Camila Pereira Cardoso
Marisa de Santana da Costa
Priscila Fonseca da Cruz
Wilson Martins Poit
CONSELHO FISCAL
Alex Rodrigues
Camila Anker
Emilio Carlos Morais Martos
Renata Borges La Guardia
COORDENAÇÃO DA INICIATIVA
Cléa Maria da Silva
Isabela Chiferi Vanelli
Lorena Polo
Mariana Costa Marcondes
Priscila Oliveira
EQUIPE DE AVALIAÇÃO
Beatriz Nunes
Filomena Siqueira
Nathaly Corrêa de Sá
Stefanny Lopes Fernandes
EQUIPE DE RELAÇÕES INSTITUCIONAIS E
COMUNICAÇÃO
Fabiana Cabral
Milena Emilião
Roberto Martinez
Vinicius Pinto
ESTRATÉGIA E PRODUTO
Fabiana Cabral
EQUIPE DE PRODUÇÃO
CONSULTORIA PEDAGÓGICA
Marisa Balthasar
COORDENADORA DE MATEMÁTICA
Cristiane R. Chica - Mathema
COORDENADORA DE LÍNGUA PORTUGUESA
Eliane Aguiar
AUTORAS DO TEXTO DA JORNADA DE FORTALECIMENTO E APRESENTAÇÃO DA INICIATIVA
Carolina Rodrigues Miranda
Kátia Stocco Smole
Priscila Oliveira
AUTORAS DE
MATEMÁTICA
Carla S. Moreno Battaglioli - Mathema
Cristiane R. Chica - Mathema
Sandra Regina Corrêa Amorim - Mathema
AUTORAS DE LÍNGUA PORTUGUESA
Eliane Aguiar- Porthema
Cláudia Barros Lima - Porthema
Taila Virgine Costa - Porthema
LEITURA CRÍTICA DE MATEMÁTICA
Kátia Stocco Smole
Daniela Arai
Fernanda Arantes e Silva
LEITURA CRÍTICA DE LÍNGUA PORTUGUESA
Daniela Arai
Fernanda Arantes e Silva
Marisa Balthasar
Paula Cristina Marques
LEITURA CRÍTICA COM FOCO EM PROJETO DE
VIDA, JUVENTUDES E COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS
Carolina Rodrigues Miranda
LEITURA CRÍTICA COM FOCO EM DIVERSIDADE
Mayana Hellen Nunes da Silva
LEITURA CRÍTICA DO TEXTO DA JORNADA DE FORTALECIMENTO E APRESENTAÇÃO DA INICIATIVA
Cristiane R. Chica
Daniela Arai
Fernanda Arantes e Silva
Marisa Balthasar
REVISÃO DE TEXTO
Heloísa Orsi Koch Delgado
Mariane de Mello Genaro
PROJETO GRÁFICO E DIAGRAMAÇÃO
Thaís Bellini
Thaís Martho
Thiago Vieira
INFOGRAFIA
Alessandro Meiguins

INSTITUTO UNIBANCO
CONSELHO DE ADMINISTRAÇÃO
PRESIDENTE
Pedro Moreira Salles
VICE-PRESIDENTE
Pedro Sampaio Malan
CONSELHEIROS
Antonio Jacinto Matias
Claudia Costin
Cláudio de Moura Castro
Cláudio Luiz da Silva Haddad
Marcelo Luis Orticelli
Marcos de Barros Lisboa
Ricardo Paes de Barros
Rodolfo Villela Marino
DIRETORIA
Cláudio José Coutinho Arromatte
Jânio Gomes
Leila Cristiane Barboza Braga de Melo
Marcelo Luis Orticelli
Moises João do Nascimento
Paulo Sérgio Miron
Valéria Aparecida Marretto

EQUIPE TÉCNICA
SUPERINTENDENTE EXECUTIVO
Ricardo Henriques
GERENTES
João Marcelo A. S. Borges
Maria Julia Azevedo Gouveia
Mirela de Carvalho
Núbia Freitas Silva Souza
Tiago Borba
EQUIPE DE PRODUÇÃO
COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO DA GESTÃO
Daniela Arai
EQUIPE
Fernanda Arantes e Silva
Letícia Daidone
Lisandra Saltini

Jornada de fortalecimento das aprendizagens no contexto do Novo Ensino Médio

Já tem algum tempo que as comunidades escolares buscam se adaptar a novas formas de ser e fazer escola, de ensinar e aprender. Com a homologação da BNCC (BNCC) em 2018[1], a disseminação de novas tecnologias e a divulgação de diferentes metodologias ativas, estratégias vêm sendo elaboradas para diminuir as desigualdades educacionais, garantir acesso e permanência de crianças, adolescentes e jovens na escola e assegurar os seus direitos de aprendizagem. Tudo isso a partir do compromisso com a educação integral e o foco no desenvolvimento de competências.

Porém, com os impactos trazidos pela pandemia de Covid-19, os desafios se intensificaram. Estudos mostram que, em novembro de 2020, cerca de 5 milhões de estudantes brasileiros não tiveram acesso à educação no Brasil[2]. O fechamento das escolas e a adoção de modelos de ensino remoto - com aulas gravadas ou ao vivo - que demandam equipamentos e internet, afastou muitos estudantes do cotidiano escolar, seja por falta de recursos ou dificuldade de engajamento com esses novos formatos. Estudos[3] e avaliações locais - como as do estado de São Paulo (Saresp 2021) - indicam que evasão e defasagem de aprendizagem se aprofundaram em níveis preocupantes. Pesquisa da UNESCO (2021)[4] indica que houve perdas de aprendizagem e risco de abandono escolar em muitos países, em especial naqueles nos quais há grande número de famílias em situação de pobreza e extrema pobreza como é o caso do Brasil.

Se muitas foram as dificuldades impostas à educação nos anos de 2020 e 2021, muitas também foram as reflexões suscitadas por esse período e ações colocadas em prática na educação, Brasil afora. Em um curto espaço de tempo, redes de ensino concretizaram oportunidades de colaboração entre si,com outras instâncias da gestão pública e da sociedade civil; práticas didáticas foram revisitadas, revitalizadas e criadas; estudantes tiveram espaço para fortalecer sua autonomia, assumindo maior protagonismo e ampliando suas habilidades de autogestão; ferramentas tecnológicas foram mais utilizadas; e as famílias se aproximaram da comunidade escolar. Neste contexto, destaca-se o compromisso dos educadores com os estudantes, assim como sua criatividade e competência na busca por soluções para assegurar a formação de todos.

1. Para ler o documento completo, acesse https://bityli.com/mecbncc. Complementar à BNCC, indicamos ainda a leitura da Lei nº 13.415/2017, disponível em: https://bityli.com/13415, que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do ensino médio, e a Portaria nº 649, disponível em: https://bityli.com/649, que estabeleceu o Programa de Apoio ao Novo Ensino Médio. Além disso, recomendamos a leitura do referencial curricular do Ensino Médio do estado de sua atuação.

2. Cenário da Exclusão Escolar no Brasil. Estudo realizado pela Unicef, em parceria com o Cenpec. https://bityli.com/unicef. Acesso em: 22/02/2022.

3. Veja mais em Evasão escolar e o abandono: um guia para entender esses conceitos, disponível em https://bityli.com/iuobservatorio. Acesso em: 22/03/2022.

4. Para ler a pesquisa completa, acesse: https://bityli.com/dadosunesco. Acesso em: 22/03/2022.

Para enfrentar esse cenário, há também uma mobilização internacional em torno da recomposição das aprendizagens, isto é, um conjunto de ações que envolve a busca ativa para trazer os estudantes para a escola e um conjunto de ações pedagógicas, sistemicamente organizadas, para diminuir os impactos que o contexto da pandemia trouxe para a aprendizagem.

Vale à pena observar que, neste momento atípico enfrentado pelo cenário educacional, não estamos falando em recuperação das aprendizagens, ou seja, no processo em que alguns estudantes têm a oportunidade de retomar o que foi ensinado durante a sua trajetória escolar regular, presencial, e que não foram plenamente desenvolvidos conforme o esperado. Estamos falando de **recompor aprendizagens, ou seja, de garantir aprendizagens essenciais para todos os estudantes**, sem as quais a continuidade dos seus estudos atuais e futuros pode ficar muito comprometida.

É importante ter em vista que recompor as aprendizagens é um compromisso a ser assumido coletivamente pelas redes, escolas e professores, pois envolve planejamento conjunto e uma série de ações interconectadas. Em primeiro lugar, é preciso analisar as prioridades curriculares, isto é: entre todas as aprendizagens essenciais, quais são aquelas mais essenciais neste momento? Quanto mais foco nas aprendizagens, mais rapidamente será possível alcançar os objetivos esperados - e isso deve ser feito com olhos no passado, no presente e no futuro.

É fundamental que as redes e os educadores, junto às suas escolas tomem uma primeira decisão: **definir as aprendizagens prioritárias ou focais** que serão garantidas a todos os estudantes. Isso implica a revisão dos currículos pensados da seguinte maneira: “o que é estruturante que os estudantes aprendam este ano para que, nos anos seguintes, possam estar mais próximos das aprendizagens esperadas para cada série do Ensino Médio?”. Tendo em vista que os estudantes permaneceram cerca de dois anos em aulas remotas, recomenda-se analisar as habilidades focais do 8º ano e do 9º ano que precisam ser aprendidas para garantir as aprendizagens focais na série em que os estudantes estão em 2022[1].

A priorização curricular, então, mapeia as aprendizagens essenciais para o desenvolvimento dos estudantes e são capazes de colaborar para a construção de conhecimentos e competências importantes para o avanço ou conclusão dos estudos.

Este exercício deve estar associado aos processos de **avaliação diagnóstica,** a qual tem por objetivo saber se os estudantes estão próximos ou distantes das aprendizagens que foram consideradas essenciais. É importante que esse diagnóstico seja feito ainda no primeiro mês de aulas ou a cada novo ciclo para que os planejamentos das escolas levem em consideração o estágio dos estudantes, de modo a planejar e definir os focos mais urgentes de ação.

1. A série Mapas de Foco do Instituto Reúna (Mapas de Foco, Mapas de Foco nas Redes e Mapas de Foco na Escola) pode apoiar esse processo, ainda que esteja organizada para o 1º ao 9º ano, pois os critérios e processos sugeridos valem também para o Ensino Médio. Disponível em: https://bityli.com/mapasdefoco (acesso em 22/03/2022).

O passo seguinte à priorização curricular, é **planejar tempo para a formação dos professores,** com um plano de trabalho definido, para que possa ser acompanhado e avaliado. Os professores precisam realizar intervenções para garantir que os planos de aprendizagem traçados para os alunos se efetivem, para acompanhá-los sem perder de vista as necessidades individuais e socializar os resultados alcançados, oferecendo apoio constante para que sigam aprendendo. Para isso, a **avaliação processual e formativa**[1] é muito relevante.

A avaliação apoia o trabalho orientado para a recomposição das aprendizagens e serve de **bússola para o trabalho do professor:** mostram o ponto de partida em que os estudantes se encontram e a forma como eles estão compreendendo as atividades educativas, oferecem insumos para que sejam encontradas estratégias de correção de rota que melhor se adequem às necessidades dos estudantes e garantem que as aprendizagens, de fato, ocorram.

Vale lembrar que as avaliações formativas são importantes não só no contexto da recomposição das aprendizagens, mas também no contexto do Ensino Médio, visto que fazem parte de um conjunto de práticas voltadas à transformação dessa etapa de ensino, qualificando as práticas pedagógicas dos educadores e o desenvolvimento e engajamento dos estudantes.

A gestão, principalmente na figura do **diretor,** tem um papel essencial na organização dos espaços e na garantia dos tempos adequados para formações, atividades e avaliações, para que esse processo de recomposição das aprendizagens aconteça. É por meio de um trabalho planejado, direcionado e com liderança definida que as ações podem ser mais efetivas. Já a **coordenação pedagógica** é responsável pela formação e acompanhamento pedagógico dos professores, garantindo que essa etapa seja realizada com qualidade.

Um ponto que ainda merece destaque são as muitas ações que podem ser planejadas pela equipe da escola: ampliação dos tempos de aula com uso ou não de tecnologia, momentos de imersão específicos para atender estudantes com necessidades comuns, aulas de reforço com estagiários ou professores especialmente contratados para ajudar a resolver questões como dificuldades com leitura e escrita. No entanto, **a liderança desse processo de recomposição de aprendizagem na sala de aula é de quem atua com os estudantes, isto é, as professoras e professores.**

1. Avaliação processual e formativa é aquela que acompanha, de forma contínua, o processo de aprendizagem e o desenvolvimento dos estudantes. Nela, professores e gestores lançam mão de diferentes instrumentos avaliativos, cujos resultados servem de insumo para o (re)planejamento e a tomada de decisão das equipes escolares.

Por isso, é importante garantir que, a partir da formação, sejam feitas boas escolhas didáticas: uso de materiais adequados que garantam aulas organizadas, uso de materiais didáticos selecionados em função das expectativas de aprendizagem, e aplicação de metodologias ativas voltadas ao desenvolvimento integral dos estudantes.

Os **familiares ou responsáveis pelos estudantes,** quando envolvidos e comunicados sobre as estratégias adotadas pela escola, apoiam e mobilizam os alunos para estar em sala de aula e cumprir suas tarefas e compromissos. No Ensino Médio, em especial, um fator de relevância para a recomposição das aprendizagens e permanência na escola é o **projeto de vida,** uma maneira de apoiar o estudante a pensar sua trajetória presente e futura, a vislumbrar formas de avançar por meio da educação e entender como ele é também responsável pela recomposição de suas aprendizagens.

Tudo isso ganha ainda mais potência quando se tem um olhar permanente de rede, capaz não apenas de apoiar as priorizações e os planos de ação, mas essencialmente de acompanhar as execuções, apoiar as equipes gestoras das escolas e disseminar as práticas de recomposição de maneira ampla e coordenada. Esse papel deve ser assumido pelas **Secretarias de Educação** em conjunto com suas regionais, quando houver.

Vale reforçar que a recomposição é um trabalho que se faz urgente e necessário no cenário atual e envolve todos os atores escolares, para que os estudantes tenham garantido o seu pleno direito ao acesso à educação e, por consequência, a oportunidade de se desenvolverem integralmente na escola e muito além dela.

Para seguir se aprofundando nas estratégias que apoiam o trabalho voltado para recompor aprendizagens, acesse o documento: Percursos formativos e atividades para apoiar o Fortalecimento das Aprendizagens na escola e na rede, disponível em bityli.com/material-apoio.

O material, voltado para professores e gestores, contém sugestões de atividades, e indicações de formações da Plataforma Nosso Ensino Médio, que podem ser realizadas em diferentes momentos do ano. Acesse em bityli.com/nossoem.

Boas-vindas

INICIATIVA FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM

Para contribuir com todo esse movimento o Reúna e o Instituto Unibanco são parceiros no desenvolvimento de ações para o FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM, um convite para todas as redes de ensino do país. Nosso objetivo principal é apoiar os educadores em três movimentos: no mapeamento das lacunas, ou das aprendizagens que não ocorreram, dos jovens matriculados no Ensino Médio, na recomposição das mesmas e colocar o estudante como centro do processo de ensino aprendizagem.

Conheça os institutos envolvidos na iniciativa:

INSTITUTO REÚNA

A organização zela pela qualidade técnico-pedagógica da implementação da BNCC e das inovações do Ensino Médio. Desde 2019, tem como foco criar referências nacionais para a construção de um sistema educacional coerente. Seu propósito é construir bases consistentes para aprendizagens efetivas, mobilizadoras e para todos. Com uma abordagem que procura entender e antecipar desde as necessidades específicas das redes educacionais até as questões mais amplas dos sistemas de educação, o Instituto produz ferramentas que se adequam aos diferentes contextos e inspirem crianças e jovens.

INSTITUTO UNIBANCO

Desde 1982, o Instituto sem fins lucrativos apoia e desenvolve soluções para a melhoria da qualidade da educação pública no Ensino Médio. Seu objetivo é contribuir para a permanência dos estudantes na escola, melhoria da aprendizagem e redução das desigualdades educacionais. Além de resultados sustentáveis de aprendizagem, trabalha pela equidade no ensino, tanto entre as escolas quanto no interior de cada uma delas, com base em quatro valores fundamentais: conectar ideias, acelerar transformações, valorizar a diversidade e ser fundamentado em evidências.

Os recursos do FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM sugerem caminhos possíveis para que diretores escolares, coordenadores pedagógicos e professores continuem apoiando os estudantes a permanecerem ou retomarem suas jornadas escolares e possam se reconectar com suas trajetórias de aprendizagem. Isso se dá pela disponibilização de materiais, em especial sequências didáticas para a sala de aula de Língua Portuguesa e Matemática, bem como pautas para apoiar as equipes das secretarias de educação em atividades de formação continuada docente.

Ao falarmos em recomposição das aprendizagens, nos remetemos a uma reorganização dos currículos, das habilidades, conteúdos e práticas didáticas, para que, frente a tantos desafios, gestores, professores e estudantes, consigam mirar no que é prioritário naquele momento. A recomposição das aprendizagens é um processo que envolve diferentes ações, e não se encerra em apenas uma atividade ou momento do ano letivo. Para que a recomposição aconteça, o currículo priorizado deve substituir, temporariamente, o currículo em curso, de modo que os estudantes tenham tempo de desenvolver aprendizagens essenciais e alcancem uma base sólida capaz de permitir que sigam avançando nos estudos e/ou adentrem o mundo do trabalho nas etapas seguintes de escolaridade.

Os recursos do FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM indicam o uso de métodos ativos de aprendizagem, como a aprendizagem baseada em projetos e problemas, a sala de aula invertida, entre outros, colocam o estudante como centro do processo e caminham na direção de uma maior personalização do ensino, de forma que o professor consegue partir das demandas, desafios e avanços da turma em questão para fazer seu planejamento. Além disso, incentivam a aprendizagem colaborativa entre os estudantes. Essas ações se relacionam diretamente ao desenvolvimento das competências gerais e específicas das áreas, como previsto na BNCC.

E, como não poderia deixar de ser quando falamos em Novo Ensino Médio, a iniciativa FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM tem relação com os projetos de vida dos estudantes. Projeto de vida, em um sentido amplo, tem a finalidade de apoiar os estudantes a avaliar as trilhas de aprendizagem que eles queiram seguir ao longo e depois da sua trajetória escolar, desenvolver valores e competências que os preparem para essas escolhas, e também na construção de caminhos promissores para o seu desenvolvimento em todas as dimensões. É um exercício constante de tornar visível, na linha do tempo de cada um, descobertas, valores, escolhas, perdas e também desafios futuros, aumentando nossa percepção, aprendendo com os erros e projetando novos cenários de curto e médio prazo.

Na jornada do Fortalecimento da aprendizagem há uma intencionalidade de mobilização dos estudantes pela aprendizagem, fazendo com que eles vejam a importância da socialização dos avanços dos seus resultados e da adequação do nível de complexidade das propostas para que os estudantes se sintam envolvidos, capazes e aprendendo.

A escolha é por trabalhar com comunicação, autoconhecimento e autoconfiança (significativas para a construção da identidade dos jovens) além de persistência e capacidade de enfrentar e buscar soluções para as mais diversas situações-problema (mais voltadas para a continuidade dos estudos e para inserção no mundo do trabalho). As propostas das sequências didáticas são o veículo para esta mobilização.

A jornada de Fortalecimento das Aprendizagens, com foco na recomposição, é feita por meio de algumas estratégias:

- Acolhimentos dos estudantes – Para que possam sentir que faz sentido estar na escola, engajando-se e sentindo-se corresponsáveis pelo processo de aprendizagem.
- Adaptação do currículo – Com a priorização de habilidades essenciais a serem desenvolvidas pelos estudantes.
- Adaptação de práticas pedagógicas – Visando a mobilização, engajamento e desenvolvimento dos jovens.
- Avaliação inicial – Ao iniciar o ciclo de aprendizagem com os estudantes, para mapear as lacunas de aprendizagem.
- Avaliação formativa – Durante todo o processo e partindo dos resultados das avaliações para elaborar o planejamento docente e realizar intervenções pedagógicas.
- Material didático apropriado – Elaborado especificamente no contexto da iniciativa, pensando nas realidades brasileiras e respeitando a autonomia de cada professor.
- Formação – Que prepara professores e gestores para o acolhimento dos estudantes e para a utilização dos materiais de recomposição das aprendizagens.

O **acolhimento dos estudantes** deve ser um dos primeiros passos e também um movimento contínuo na recomposição das aprendizagens. Do ponto de vista das sequências didáticas, a sugestão é criar um ciclo de acolhimento e melhoria, propondo ações contínuas e interligadas. Atividades de acolhimento socioemocional estão presentes nas sequências didáticas iniciais e acompanham toda a jornada do estudante. O objetivo é desenvolver o autoconhecimento, a autoconfiança e a persistência, além de aumentar sua autoestima em relação à capacidade de aprender. É possível encontrar ainda atividades que levantam questões em debate na contemporaneidade, mundo do trabalho e tecnologia, a fim de contribuir para a formação integral dos estudantes e se aproximar do contexto e das realidades juvenis.

Para um desafio como este, o trabalho colaborativo é essencial, com cada ator da comunidade escolar desempenhando um papel significativo:

- Diretor/a escolar – É o agente mobilizador do processo, aquele que viabiliza as ações de recomposição da aprendizagem na escola. Sua função é planejar e executar estratégias de engajamento e de articulação com os estudantes e com as famílias, organizando agendas, espaços e recursos para as ações previstas e apoiar os atores envolvidos sempre que necessário.


FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM
JORNADAS E PRODUTOS

INÍCIO ÍNDICE ESTRUTURA REALIZADORES 16

INTRODUÇÃO
ESTRUTURA DO CICLO
JORNADAS E PRODUTOS

Jornada do Diretor **Palavras-chave:** Mobilizar e Viabilizar

	Avaliação Inicial / final	Atividades de Fortalecimento da Aprendizagem	Protocolo de Avaliação Formativa
O que faz	Antes da aplicação do levantamento inicial até o momento posterior, mobiliza os estudantes e as famílias para a realização da avaliação, e sistematiza e analisa os resultados obtidos. Planeja com a equipe pedagógica, as estratégias de acompanhamento desde os resultados iniciais até os finais.	Planeja e executa estratégias de engajamento e de articulação com os estudantes e com as famílias. Organiza agendas, espaços e recursos para as ações previstas. Apoia os atores envolvidos sempre que necessário.	Acompanha os dados de avaliação provenientes da utilização do Protocolo de avaliação formativa.
O que promove	Sua jornada contempla a escuta e o cuidado do outro, considerando a legitimidade do que é dito pela pessoa acolhida, a criação de vínculos e a construção de sentido nas atividades junto aos jovens. Realiza essa ação em parceria com os docentes, de forma que a gestão fortaleça o trabalho dos professores e vice-versa.	Ajuda a equipe a se sentir apoiada e valorizada, assim ficam mais tranquilos para colocar em cena novas práticas, aprofundar-se nas temáticas e envolver os estudantes nesta proposta, em um clima de motivação e de engajamento. Para colocar as propostas em prática, analisa de forma crítica o cenário em que a escola está e suas práticas cotidianas.	
Ao que tem acesso		• Protocolos de acolhimento • Rotina de prevenção ao abandono	• Instruções de uso do Protocolo de Avaliação Formativa

- **Coordenador/a pedagógico da escola ou pedagogo/a** – É a pessoa responsável por formar os professores em serviço, orientando, acompanhando e apoiando o grupo de docentes.

FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM
JORNADAS E PRODUTOS

INÍCIO ÍNDICE ESTRUTURA REALIZADORES 15

INTRODUÇÃO
ESTRUTURA DO CICLO
JORNADAS E PRODUTOS

Jornada do coordenador pedagógico / formador

Palavras-chave: Formar e Acompanhar

	Avaliação Inicial / final	Atividades de Fortalecimento da Aprendizagem	Protocolo de Avaliação Formativa
O que faz	**Forma os professores** para a aplicação das provas de avaliação inicial e final. Apoia a **análise e a discussão dos resultados**, e colabora na definição de **ações para a aprendizagem dos jovens.**	**Forma os professores em serviço**, orientando, **acompanhando e apoiando o grupo de docentes**. Para tal, compreende como o professor se apropria, planeja e põe em prática as Sequências Didáticas que contemplam **o acolhimento do estudante** e o fortalecimento das aprendizagens em Língua Portuguesa e em Matemática.	**Forma os professores** para o **acompanhamento** das aprendizagens dos estudantes e **incentiva** o uso do protocolo.
O que promove	Coordenadores pedagógicos juntamente com os Diretores apoiam nas ações de **busca e acolhimento dos jovens**. Assim, quando o docente entra em ação, ele **amplia** e **fortalece** o **acolhimento** por meio do trabalho realizado em sala.	Apoia e forma os professores para realizarem o **acolhimento socioemocional dos jovens**, usarem **novas metodologias de ensino**, em classe, compreenderem a **priorização curricular** e prepararem, as devolutivas de avaliação dos estudantes, **considerando o contexto em que a escola está inserida** e as práticas que formam seu cotidiano.	Realiza o **acompanhamento do trabalho** do professor no dia a dia com o objetivo de traçar, conjuntamente, as **estratégias de intervenção pedagógica** e **planejamento** das aulas e atividades.
Ao que tem acesso		• **Pautas Formativas** de Matemática 1, 2, 3 e 4 • **Pautas Formativas** de Língua Portuguesa 1, 2, 3 e 4	• **Instruções de uso do Protocolo de Avaliação Formativa**

- **Professor/a** – É quem coloca as ações e atividades em prática na sala de aula, junto aos estudantes. Sua função é participar da formação continuada, de olho no currículo a ser usado no desenvolvimento de habilidades essenciais, planejar e executar sequências didáticas de forma adequada. É importante também que realize as atividades de acolhimento, aplique as avaliações formativas e oriente os estudantes na realização dos planos de estudos individuais em momentos de autogestão.

FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM
JORNADAS E PRODUTOS

INÍCIO ÍNDICE ESTRUTURA REALIZADORES

14

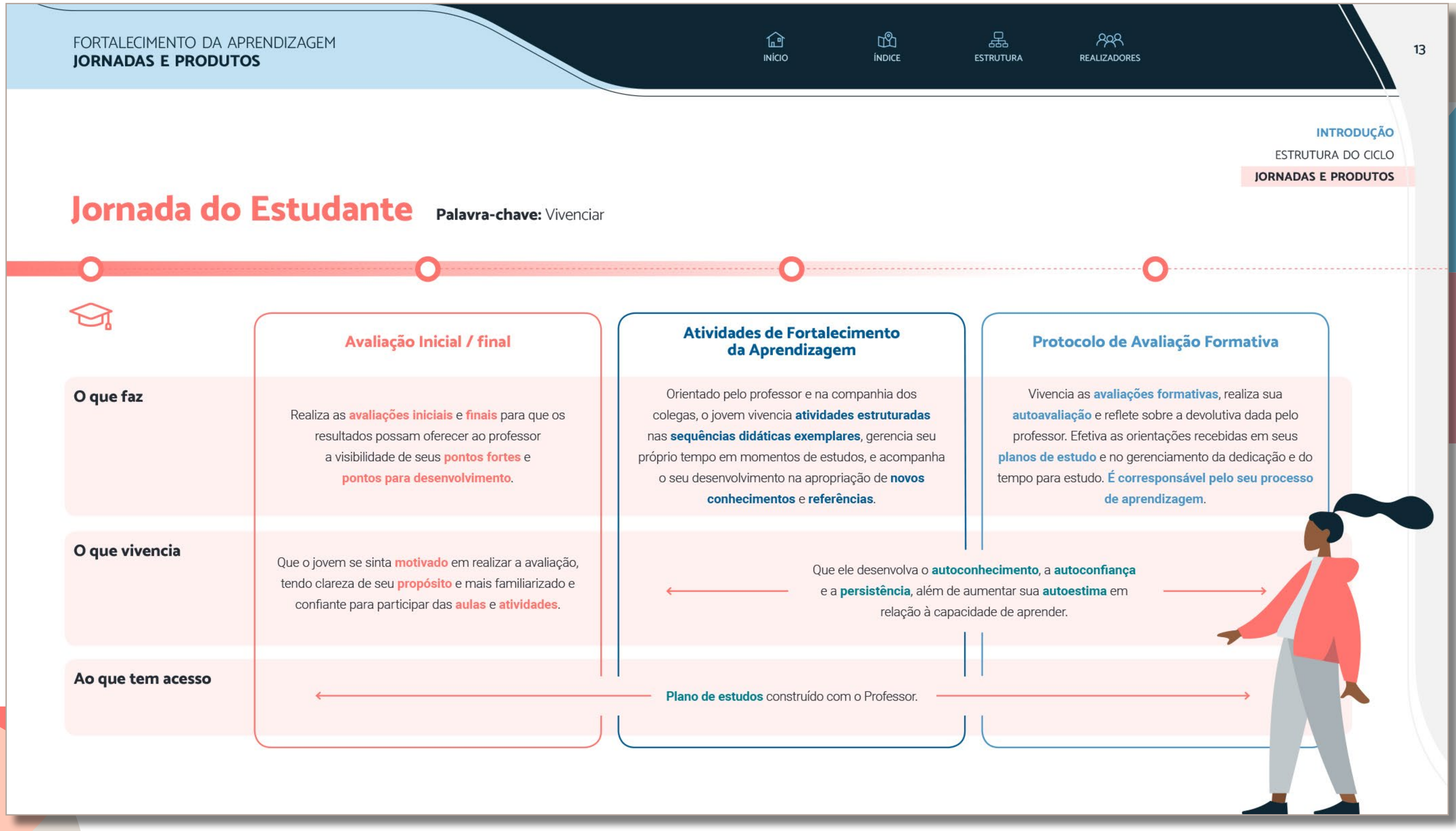
INTRODUÇÃO
ESTRUTURA DO CICLO
JORNADAS E PRODUTOS

Jornada do Professor

Palavras-chave: Promover, planejar e acompanhar

	Avaliação Inicial / final	Atividades de Fortalecimento da Aprendizagem	Protocolo de Avaliação Formativa
O que faz	Ao professor, cabe aplicar as **avaliações inicial** e **final**. A primeira delas é proposta na primeira Sequência Didática e, a segunda, prevista para o fim da terceira Sequência Didática. Ele também realiza a **análise dos resultados** e retoma as habilidades priorizadas.	Participa da **formação continuada** para apropriação das Sequências Didáticas. **Planeja e executa as aulas** com apoio das Sequências Didáticas. Complementa as Sequências com **planos de estudos individualizados** para momentos de autogestão dos estudantes e os acompanha. **Acompanha, analisa e compartilha** com a **gestão da escola** o **percurso de aprendizagem** de cada jovem.	**Identifica** momentos de avaliação conforme as situações de aula. **Planeja e realiza as avaliações**. Organiza os **planos de estudo** dos jovens com base nas **autoavaliações** e nas **devolutivas** das atividades de avaliação realizadas.
O que promove	O objetivo é que o professor consiga **diagnosticar o estágio dos estudantes** e **orientar melhor** a proposição de planos de estudos específicos e individualizados para eles.	A jornada docente começa no momento da formação, junto com a coordenação pedagógica, momento em que **entende a proposta e se apropria do conjunto de ferramentas**. Ao longo de toda a sua jornada, o professor realiza com os estudantes atividades de **acolhimento socioemocional**.	As devolutivas do docente, após as avaliações formativas, **ajudam os estudantes a realizarem a autoavaliação**, a organizar melhor a **gestão do tempo** e a dedicação aos **estudos**.
Materiais que terá acesso	• **Anexos do Professor** – Avaliação Inicial Matemática • **Anexos do Professor** – Avaliação Inicial Língua Portuguesa • **Plataforma de apoio á Aprendizagem**	• **Sequências Didáticas** de Matemática 1, 2 e 3 • **Sequências Didáticas** de Língua Portuguesa 1, 2 e 3 • Orientações para elaboração de planos de estudos em momentos de autogestão do estudante	• Protocolo de Avaliação Formativa

- **Estudante –** Deve ser o protagonista das ações, sendo corresponsável por sua aprendizagem. A jornada do estudante começa com uma avaliação inicial para identificar o ponto de partida do aprendizado, permitindo a análise de seus pontos fortes e de seus pontos de desenvolvimento. Depois disso, o estudante vai vivenciar as sequências didáticas e acompanhar seu próprio desenvolvimento pelas atividades de avaliação formativa que se encontram em cada sequência.



FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM
JORNADAS E PRODUTOS

INÍCIO ÍNDICE ESTRUTURA REALIZADORES

13

INTRODUÇÃO
ESTRUTURA DO CICLO
JORNADAS E PRODUTOS

Jornada do Estudante

Palavra-chave: Vivenciar

	Avaliação Inicial / final	Atividades de Fortalecimento da Aprendizagem	Protocolo de Avaliação Formativa
O que faz	Realiza as avaliações iniciais e finais para que os resultados possam oferecer ao professor a visibilidade de seus pontos fortes e pontos para desenvolvimento.	Orientado pelo professor e na companhia dos colegas, o jovem vivencia atividades estruturadas nas sequências didáticas exemplares, gerencia seu próprio tempo em momentos de estudos, e acompanha o seu desenvolvimento na apropriação de novos conhecimentos e referências.	Vivencia as avaliações formativas, realiza sua autoavaliação e reflete sobre a devolutiva dada pelo professor. Efetiva as orientações recebidas em seus planos de estudo e no gerenciamento da dedicação e do tempo para estudo. É corresponsável pelo seu processo de aprendizagem.
O que vivencia	Que o jovem se sinta motivado em realizar a avaliação, tendo clareza de seu propósito e mais familiarizado e confiante para participar das aulas e atividades.	Que ele desenvolva o autoconhecimento, a autoconfiança e a persistência, além de aumentar sua autoestima em relação à capacidade de aprender.	
Ao que tem acesso	Plano de estudos construído com o Professor.		

MATERIAIS PARA O FORTALECIMENTO DAS APRENDIZAGENS

Agora que você já sabe o que é a recomposição das aprendizagens, porque ela é importante no contexto do Novo Ensino Médio e como fazer o acolhimento dos estudantes, apresentamos materiais que poderão apoiar professores e equipe pedagógica a potencializar essa jornada.

Os materiais para o FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM foram elaborados com foco na recomposição das aprendizagens e tendo em vista as diferentes realidades brasileiras. O ponto de partida são habilidades da BNCC, presentes nos currículos referenciais do Ensino Médio, consideradas essenciais, selecionadas levando em conta a urgência no fortalecimento da relação entre os estudantes e o conhecimento e o tempo que se tem, e que deve ser aproveitado ao máximo, para uma ação efetiva de aprendizagem.

Para essa priorização curricular, foram consideradas três dimensões e, com base em cada uma delas, os seguintes critérios:

O engajamento dos estudantes e as exigências da vida em sociedade

- Atividades mais motivadoras, que permitam protagonismo dos estudantes.
- Trabalho transversal, com abordagem socioemocional, inclusiva e socialmente diversa.
- Favorecimento à inclusão de temas do mundo do trabalho, disparadores de saberes que permitam maior propriedade em processos seletivos.
- Possibilidade de desenvolvimento de saberes tecnológicos e digitais.

Os componentes curriculares de Língua Portuguesa e Matemática

- Abrangência de diferentes campos de atuação social da Língua Portuguesa e diferentes unidades temáticas de Matemática.
- Favorecimento de relações entre conceitos, processos e representações.
- Possibilidade de retomada de conhecimentos já adquiridos, para que o estudante avance em sua aprendizagem.
- Desenvolvimento das competências gerais e específicas da área ou do componente, previstas na BNCC e nos referenciais curriculares.

As demandas das avaliações nacionais

- Compatibilidade com descritores com baixo resultado nas avaliações SAEB para a 3ª série do Ensino Médio de 2019,
- As avaliações realizadas pelos estados em 2021 visando identificar o estado da aprendizagem de seus estudantes, em especial aquelas realizadas com as turmas de 9o ano e 3a série do Ensino Médio.
- Compatibilidade com descritores com baixo resultado nas avaliações diagnósticas realizadas pela rede.
- Compatibilidade com conteúdos mais cobrados no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Articulando os critérios dos três grupos acima, a expectativa é promover o desenvolvimento integral dos estudantes, permitindo que continuem estudando, trilhem um percurso de aprendizagem mais efetivo e adentrem no mundo do trabalho sentindo-se mais preparados.

MATERIAIS PARA O PROFESSOR

Para apoiar os docentes, as habilidades selecionadas foram distribuídas em três sequências didáticas exemplares para Língua Portuguesa e três para Matemática, sendo a primeira de cada componente sempre associada a conteúdos e contextos em que os jovens possuem algum conhecimento e propõem fazer retomadas do conhecimento para que os jovens reconheçam o que sabem e se sintam motivados para continuar aprendendo. Com isso, a ideia é justamente engajá-los na aprendizagem. Já as demais sequências têm como foco novos conhecimentos e habilidades nas quais os estudantes demonstram mais dificuldades tendo como referências as lacunas identificadas nas avaliações diagnósticas, sempre considerando o desenvolvimento de habilidades prioritárias para aprender mais e a preparação para desafios futuros na continuidade dos estudos ou no mundo do trabalho.

As propostas apresentadas como exemplares possuem uma lógica em seu desenvolvimento e apresentam atividades com resultados comprovados de aprendizagem. Do ponto de vista das sequências didáticas, a sugestão é criar um ciclo de acolhimento e melhoria, propondo ações contínuas e interligadas. No entanto, elas são sugestões, modelos que podem ser adaptados para o trabalho com os alunos e integradas a outras habilidades, respeitando as necessidades específicas identificadas em cada turma e a cultura de cada unidade escolar. O tempo de duração sugerido para cada proposta tem em média 16 horas/aula.

Além das sequências didáticas apresentadas, faz parte da iniciativa a Caixa de Ferramentas do Professor, com os seguintes materiais:

- Uma sugestão de avaliação inicial e outra de avaliação final, para acompanhar os jovens durante o processo.
- Os documentos Orientações ao professor e Propostas de intervenção na forma de orientações de estudos, para elaboração e execução de planos de estudos com sugestões de itens, vídeos e questões que podem compor tarefas estabelecidas pelo professor, para auxiliar os alunos em momentos de estudo individual e de autogestão.
- O Protocolo de Avaliação Formativa, documento com recursos estruturados para o acompanhamento e o registro sobre o processo de aprendizagem, além de orientações para compartilhar essas informações com os jovens e com a gestão da escola.
- Sugestões e estratégias para o desenvolvimento das aulas no contexto híbrido. Acesse o documento Como tornar as suas estratégias de ensino e aprendizagem híbridos com dicas de mediação.

MATERIAIS PARA A EQUIPE PEDAGÓGICA

Para apoiar o trabalho da equipe pedagógica, a Caixa de Ferramentas do Formador apresenta orientações para a realização dos momentos formativos, na forma de pautas, textos de apoio, conteúdos anexos e apresentações para apoiar os momentos formativos. As pautas formativas contemplam oito horas de formação para cada um dos componentes (Língua Portuguesa e Matemática) e têm como objetivo facilitar a compreensão das sequências didáticas, da metodologia proposta para o desenvolvimento das habilidades essenciais. As pautas formativas têm, ainda, as Instruções de uso do Protocolo de Avaliação Formativa, que auxilia a compreensão do Protocolo de Avaliação Formativa (presente na Caixa de Ferramenta do Professor).

Acesse os materiais do Volume 1 aqui: https://www.institutoreuna.org.br/ensino-medio/content/Fortalecimento-da-Aprendizagem

CONECTANDO SEQUÊNCIAS

VOLUME 1 E VOLUME 2 DO FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM

O Volume 1 do Fortalecimento da Aprendizagem tem os mesmos princípios de organização do Volume 2, mas foi feito para **atender, em um primeiro momento, aos estudantes da 3ª série do Ensino Médio,** que estavam finalizando a educação básica após um longo período de interrupção de aulas, e aos quais se desejava garantir aprendizagens essenciais para que eles se sentissem seguros para participar de processos seletivos para o ensino superior, além de garantir conhecimentos que permitissem seguir no mundo do trabalho.

Já o Volume 2 amplia esse olhar para apoiar a recomposição de aprendizagens aos estudantes que iniciam o percurso pelo Novo Ensino Médio.

Por isso, leva em conta os Mapas de Foco da BNCC do Instituto Reúna para 8ºs e 9ºs anos, bem como o Referencial para Seriação das Matrizes Curriculares de Língua Portuguesa e Matemática no Ensino Médio e as Matrizes Curriculares da Fundação Roberto Marinho.

Todos esses documentos se relacionam à BNCC (2018) e, por consequência, aos currículos referenciais dos estados. Por isso, favorecem a organização temporária das aprendizagens de tal forma a garantir o *continuum* curricular e as aprendizagens essenciais que não foram alcançadas no final do ensino fundamental, e que podem comprometer o desenvolvimento dos estudantes no ensino médio.

Apesar desses focos específicos, os dois volumes são complementares e podem ser utilizados em conjunto a depender do diagnóstico da aprendizagem dos estudantes, uma vez que, se constituem por atividades exemplares, para apoiar os ajustes que se fizerem necessários nas três séries. As atividades foram pensadas para os diferentes momentos que eles irão se deparar no seu percurso formativo, como reflexões que os apoiam a pensar na sua trajetória ao longo das séries e nos caminhos que irão seguir após a conclusão dos estudos escolares.

Nossa recomendação é para que os professores de Língua Portuguesa e Matemática das primeiras séries do ensino médio **iniciem pelo Volume 2 e que, conforme indicação, utilizem complementarmente o** [Volume 1]. Os recursos formativos disponibilizados foram referenciados nas propostas dos dois Volumes. Materiais como livros didáticos, projetos, planos de aula, entre outros, são importantes para o desenvolvimento das propostas como complementares ao que as Sequências Didáticas propõem.

VOLUME 2 DO FORTALECIMENTO DAS APRENDIZAGENS

Como o Volume 2 foi pensado para apoiar a recomposição das aprendizagens no contexto da implementação da nova arquitetura do Ensino Médio, em especial para apoiar a Formação Geral Básica segundo os pressupostos da BNCC, são destaques na proposta:

- Consolidação, aprofundamento e ampliação das aprendizagens iniciadas no ensino fundamental, que marca o pressuposto de progressão das aprendizagens na educação básica previsto na BNCC. Isto significa que as sequências orientam recompor as aprendizagens não realizadas anteriormente pelos estudantes, bem como desenvolver as essenciais para a série em que está.

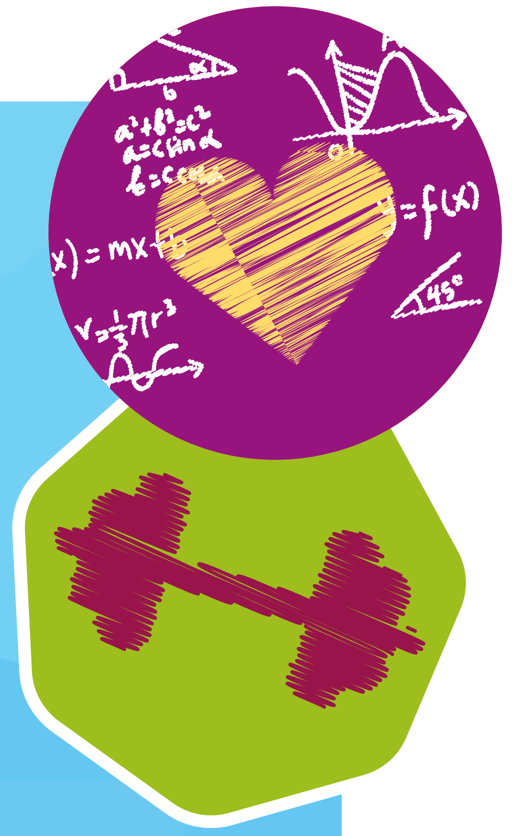
- A avaliação processual em compromisso com a abordagem formativa ganha mais evidência, com orientações de diferentes momentos, instrumentos e estratégias para observar as evidências de aprendizagem e nela intervir.

- O compromisso com o desenvolvimento integral dos/das jovens fica mais evidente, com proposição de situações de aprendizagem que mobilizam o desenvolvimento de aspectos das competências gerais da BNCC simultaneamente ao desenvolvimento de competências e habilidades específicas dos componentes, apoiando o professor a perceber como os desafios propostos e os caminhos metodológicos escolhidos concorrem para isso.

- O exercício de priorização curricular é apresentado de forma modelar e formativa, e abre caminhos para o professor estabelecer relações com as propostas do Volume 1 e com outras que seja do seu repertório, evitando-se a ideia de seriação das aprendizagens, ao mesmo passo em que reforça a lógica da progressão das aprendizagens na medida em que as atividades vão se complexificando.

Todo o material é flexível e adaptável, sendo possível integrá-los com outros recursos e estratégias didáticas já utilizadas pelos professores.

Bom trabalho!



SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1:

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS, PLANO CARTESIANO E SEMELHANÇA

Atividades

Introdução das atividades

Olá, professor/a!

Seja bem-vindo/a às sequências didáticas de Matemática para o Ensino Médio.

Os objetivos que permearão o percurso composto por três sequências didáticas são: a retomada e/ou desenvolvimento de habilidades propostas para os anos finais e ainda não consolidadas, e o desenvolvimento das habilidades prioritárias propostas para o Ensino Médio pela BNCC.

No início de cada sequência encontra-se um quadro com as habilidades priorizadas e suas respectivas expectativas de aprendizagem propostas para as atividades sugeridas. Essas informações podem auxiliá-lo no acompanhamento das aprendizagens dos estudantes ao longo do desenvolvimento de cada atividade.

Durante a realização das atividades o estudante é desafiado a manter-se cognitivamente ativo, realizando análises, formulando e validando hipóteses, fazendo descobertas e consolidando aprendizagens. Nas propostas o convite é para que os estudantes participem do processo ativamente e de forma autônoma, pois o convite é para que investiguem, estabeleçam relações, produzam, representem matematicamente uma situação. Cabe aos professores(as) conduzir todo o processo, acompanhar os estudantes em suas trajetórias, auxiliá-los na organização dos estudos e garantir as sistematizações das aprendizagens.

A ideia é que o estudante seja avaliado durante o processo (avaliação processual e formativa), além de realizar autoavaliação ao longo das atividades, tomando consciência do seu processo de aprendizagem e identificando o que ainda é preciso investir mais esforços.

Essa primeira sequência didática inicia com uma atividade para acolher os estudantes nessa nova etapa de suas vidas (Atividade 1), a segunda proposta tem como foco o estudo das transformações geométricas (simetrias e homotetia), apoiado nas obras do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Também são objetos de estudo nesta etapa o plano cartesiano, as figuras semelhantes e as congruentes. A Atividade 3 tem como foco o estudo dos gráficos aliado à retomada dos números racionais e as operações entre eles.

Bom trabalho!

No quadro a seguir, você encontra a relação das **Competências Específicas e Habilidades de Matemática** na etapa da **BNCC do Ensino Médio** selecionadas para essa Sequência Didática, bem como sua **relação com as Habilidades do EF Anos Finais, e descritores do SAEB.**

TEMPO SUGERIDO PARA O DESENVOLVIMENTO DA SD1: 16 HORAS/AULA

TEMA 1 - TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS, HOMOTETIAS E CONGRUÊNCIA			
COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DA ÁREA: PROPOSTAS PARA O ENSINO MÉDIO	**HABILIDADES FOCAIS DO EF ANOS FINAIS QUE SÃO CONHECIMENTOS PRÉVIOS**	**DESCRIÇÃO DAS HABILIDADES FOCO DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO**	**DESCRITORES SAEB**
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas ou fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. 2. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade ou não de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o plano simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem. (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	EM13MAT105 Utilizar noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.	D7 Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram. D9 Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas. • Identificar regularidades em coordenadas cartesianas de vértices de figuras obtidas por simetria (reflexão, translação), ampliação ou redução.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.	EM13MAT308 **Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos** que se aplicam às relações métricas ou as **noções de congruência e semelhança**.	D7 Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram. • As simetrias dão origem a figuras congruentes e as homotetias dão origem a figuras semelhantes.

TEMA 2: NÚMEROS E ESTATÍSTICA

<table>
<tr><th>COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DA ÁREA: PROPOSTAS PARA O ENSINO MÉDIO</th><th>HABILIDADES FOCAIS DO EF ANOS FINAIS QUE SÃO CONHECIMENTOS PRÉVIOS</th><th>DESCRIÇÃO DAS HABILIDADES FOCO DE MATEMÁTICA DO EM</th><th>DESCRITORES SAEB</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.</td><td>(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem o uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.</td><td>EM13MAT101 Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza, que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT102 Analisar gráficos e métodos de amostragem de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.</td><td>D36. Resolver problemas, envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
• Construir, ler e interpretar informações contidas em gráficos.
• Identificar erros em escalas de gráficos que podem levar a interpretações incorretas.</td></tr>
<tr><td>(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
(EF0MA804) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.</td><td>EM13MAT104 Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como o Índice de Desenvolvimento Humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.</td><td>D25. Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
D28. Resolver problema que envolva porcentagem.</td></tr>
</table>

TEMA 2: NÚMEROS E ESTATÍSTICA (CONTINUAÇÃO)			
COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DA ÁREA: PROPOSTAS PARA O ENSINO MÉDIO	HABILIDADES FOCAIS DO EF ANOS FINAIS QUE SÃO CONHECIMENTOS PRÉVIOS	DESCRIÇÃO DAS HABILIDADES FOCO DE MATEMÁTICA DO EM	DESCRITORES SAEB
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na **representação de números em notação científica**. (EF08MA01) **Resolver** e elaborar **problemas com números reais, inclusive em notação científica**, envolvendo diferentes operações.	EM13MAT313 Resolver e elaborar **problemas que envolvem medições em que se discuta o emprego de algarismos significativos** e algarismos duvidosos, utilizando, quando necessário, a **notação científica**. EM13MAT103 Interpretar e compreender o emprego de **unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades**, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas.	D26. **Resolver problemas com números racionais, envolvendo** as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, **potenciação**). • Representar números grandes e pequenos utilizando notação científica.

Neste quadro você encontra o **resumo das atividades** desta Sequência Didática, bem como os **objetivos específicos** e o **tempo sugerido** para cada uma delas.

ATIVIDADE	TEMPO SUGERIDO	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	RESUMO: COMO A PROPOSTA ESTÁ ORGANIZADA
1. Acolhimento e apresentação do grupo.	1 aula	Acolher os estudantes e conhecer suas expectativas em relação a esta nova etapa escolar: o ensino médio.	• Acolher os estudantes e levantar as suas expectativas em relação ao estudo da Matemática no Ensino Médio. • Apresentação da proposta de estudos da sequência didática.
2. Matemática e arte: transformações geométricas.	9 aulas	O foco da atividade é o estudo das transformações geométricas e suas propriedades, explorados nas obras de Maurits Cornelis Escher (1898-1972).	A proposta está dividida em 5 momentos: **Momento 1:** uma aula. Aquecimento para o tema: pesquisa sobre M. C. Escher. **Momento 2:** três aulas. Rotação por estações: conhecendo e explorando as simetrias. **Momento 3:** uma aula. Organizando as aprendizagens. **Momento 4:** uma aula. Ampliando as aprendizagens. **Bora se preparar?** uma aula. **Momento 5:** duas aulas. Transformações geométricas no plano cartesiano.
3. Muitos números nos gráficos	9 aulas	O foco é realizar o estudo dos números racionais, inteiros, porcentagem e notação científica por meio da construção e análise de tabelas e gráficos presentes na mídia.	A proposta está dividida em 5 momentos: **Momento 1:** uma aula. Aquecimento para o tema: reconhecer a importância dos elementos de um gráfico. **Momento 2:** uma aula. Gráfico de linhas e números racionais: construir, ler e interpretar gráficos de linhas. Analisar problemas na escala do gráfico (escolher o mais adequado). **Momento 3:** duas aulas. Notação científica/cálculo mental: identificar a notação científica como uma forma de representar números muito grandes e muito pequenos. **Momento 4:** duas aulas. Gráfico de barras e os números racionais - construir, ler e interpretar gráficos de barras. Abordar os números racionais e inteiros, incluindo operações **Momento 5:** duas aulas. Gráfico de setores e porcentagem/cálculo mental: construir, ler e interpretar gráficos de setores. Abordar os números racionais e inteiros, incluindo operações e porcentagem. **Bora se preparar?** uma aula.

ATIVIDADE	TEMPO SUGERIDO	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	RESUMO: COMO A PROPOSTA ESTÁ ORGANIZADA
4. Cálculo mental	1 aula extra	Propiciar aos alunos a possibilidade do exercício de capacidades mentais como memória, dedução, análise, síntese, analogia e generalização, como também o desenvolvimento de conceitos e habilidades fundamentais para aprofundar os conhecimentos matemáticos.	Cálculo mental: porcentagem.
5. Cálculo mental	1 aula extra	Propiciar aos alunos a possibilidade do exercício de capacidades mentais como memória, dedução, análise, síntese, analogia e generalização, como também o desenvolvimento de conceitos e habilidades fundamentais para aprofundar os conhecimentos matemáticos.	Cálculo mental: potenciação.
6. Resolução de problemas	1 aula extra	Ler e interpretar textos de matemática, desenvolver argumentações; ampliar vocabulário matemático; desenvolver uma variedade de estratégias para abordar e resolver um problema; aprender a comunicar-se matematicamente.	Nesta aula traremos um problema de lógica, sem números.

ORIENTAÇÕES GERAIS

UMA CONVERSA INICIAL

Sabemos dos desafios de iniciar o ensino de matemática com estudantes que trazem diferentes experiências, dos anos anteriores, com este componente curricular. Há quem tenha aprendido o esperado, mas as estatísticas nacionais mostram que ainda não são todos que chegaram lá. Também sabemos que, muitas vezes, além de desconhecerem os conceitos básicos, as experiências pessoais nas aulas não foram as melhores, o que pode ter ocasionado sentimentos de desinteresse, medo, angústia e até de baixa estima com relação à própria capacidade de aprender. Por isso, organizamos esta sequência didática com alguns princípios que desejamos compartilhar com você:

- Atuaremos em duas direções: retomando noções muito fundamentais dos anos anteriores (em especial do 8° e 9° anos) e, ao mesmo tempo, avançando para as habilidades essenciais dos anos iniciais do ensino médio, especialmente a 1ª série. Faremos isso integrando e conectando os conhecimentos, sem dizer ”vamos retomar porque vocês não sabem”. Lembre-se que a BNCC (ano) fala em consolidar, ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos dos estudantes no ensino médio e esse será o princípio que seguiremos.

- Não perderemos de vista que os estudantes precisam alcançar o letramento matemático. Por isso, ler, escrever, argumentar, explicar etc. serão muito reforçados nas sequências didáticas deste material.

- Considerando suas experiências e a forma como afetam sua capacidade de aprender e seu envolvimento nas aulas, optamos por trabalhar os conceitos e as habilidades de uma forma mais lúdica, investigativa, estimulando muitos sentidos dos estudantes. Isso pode ser um pouco diferente, mas dê uma chance a você e aos estudantes de fazer a mesma matemática de uma forma diferente.

Vai valer a pena, pode acreditar!

LEITURAS INDICADAS

- Utilizaremos duas metodologias ativas: a rotação por estações e a sala de aula invertida. Para saber mais sobre esses temas, realize a leitura dos textos “Para uma aula diferente, aposte na Rotação por Estações de Aprendizagem” disponível em https://bityli.com/nova1 e “O que muda nas aulas quando se aplica a sala de aula invertida?”, disponível em: https://bityli.com/nova2 (acesso em 28/03/2022). Enquanto realiza as leituras, registre os pontos importantes para o planejamento de uma aula com essas metodologias.
- Apoiaremos o estudo das transformações geométricas em algumas gravuras de Maurits Cornelis Escher. Para conhecer um pouco mais sobre o artista e como a matemática está presente em sua obra, sugerimos a leitura do texto “A arte matemática nas obras de Escher: explorando conceitos da geometria”,disponível em: https://bityli.com/artemat (acesso em 05/05/2022).
- Para saber mais sobre as transformações geométricas, acesse o texto “Geometria das transformações”, disponível em: https://bityli.com/nova3 (acesso em 28/03/2022).

Atividade 1

ATIVIDADE 1

ACOLHIMENTO E APRESENTAÇÕES

- **Foco:** acolher os estudantes e conhecer suas expectativas em relação a esta nova etapa escolar: o ensino médio
- **Tempo sugerido:** 1 hora/aula
- **Possíveis materiais:** post-it ou etiqueta (uma para cada estudante)

Professor/a, para acolher os estudantes e conhecer o que eles esperam das aulas de matemática do ensino médio, sugerimos esta primeira atividade. No entanto, é importante que você lembre que o período de transição dos estudantes – em que voltam para a escola - merece cuidado, para que se sintam acolhidos, confortáveis e recebidos em um ambiente preparado para eles. Ainda que nem todas as condições escolares estejam adequadas para isso, a sua aula pode ser um diferencial. Veja algumas sugestões que você pode utilizar ao longo do ano para que eles sempre sintam que você os espera e confia neles.

Se estiver acolhendo os estudantes pela primeira vez, organize um espaço para que, em duplas, apresentem--se para um colega. Peça para que falem seus nomes e suas expectativas em relação ao que esperam das aulas de matemática. Faça duas questões bem focadas, que “quebrem o gelo” e tragam certo humor, aproximando você desses jovens, como no exemplo a seguir.

1. **Como você considera sua relação com a Matemática? Justifique.**

☐ Relacionamento sério
☐ Às vezes eu gosto, às vezes não gosto
☐ Prefiro nem ver!

2. **De que forma você considera que a Matemática pode contribuir com a sua vida de estudante e fora da escola?**

☐ Não tenho ideia do que quero fazer, está muito longe ainda
☐ Aprender matemática me ajudará em conquistas futuras.

Caso você já tenha iniciado as atividades com sua turma, foque essa dinâmica nas duas questões acima e deixe que relatem o que viveram até o momento.

Enquanto um estudante fala, o seu colega anota, em um post-it ou etiqueta, as informações relevantes. Após 5 minutos, peça para trocarem de papel, aquele que estava anotando passa a falar e o outro anota. Essa etapa também terá duração de 5-10 minutos.

O próximo passo é organizar todos os estudantes em uma grande roda, e cada um vai apresentar o colega com quem conversou na etapa anterior: fala o nome dele, suas expectativas e relação com a Matemática. As respostas serão anotadas no post-it e, depois, coladas em um mural coletivo.

Professor/a, prepare-se para respostas bem diversas, algumas positivas e outras, talvez, negativas. Escute-a, sem qualquer julgamento de valor, e desafie-os a construir uma postura de estudante que possa contribuir com as expectativas otimistas sobre o percurso com a matemática que vivenciarão nos próximos meses. Para isso, mencione que é comum algumas pessoas terem certo medo ou receio das aulas de matemática porque muitas ouviram, por muitos anos, que são conteúdos difíceis. Mas todos podem aprender a matemática ao longo da vida e agora, no início de uma nova etapa, pode ser um ótimo momento de estabelecer uma nova relação com essa área do conhecimento.

Guarde esse mural com as expectativas de todos os estudantes. Ele poderá ser retomado durante o percurso para cada um verificar se suas expectativas estão sendo alcançadas, se a relação deles com a Matemática mudou e se há novos planos em ação.

Para finalizar essa etapa, apresente aos estudantes a sua proposta de trabalho docente. Fale dos temas que serão abordados e das expectativas de aprendizagem.

Aproveite o momento para ressaltar a importância da participação ativa dos estudantes em todas as propostas, da relevância das atividades para os momentos de autogestão de estudos e sinalize que eles serão avaliados por você e por eles mesmos durante todo o percurso (avaliação formativa).

Fale que sabe dos desafios de aprender matemática, mas que na sua aula há espaço para dúvidas, e que aprender qualquer coisa (andar de skate, de bicicleta, dançar, compor uma música) também exige esforço, mas que é possível chegar lá. Afirme que confia que conseguirão.

Atividade 2

ATIVIDADE 2

MATEMÁTICA E ARTE: TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

- **Foco:** estudo das transformações geométricas e suas propriedades, explorados nas obras de Maurits Cornelis Escher (1898-1972).

- **Tempo sugerido:** 9 horas/aula

- **Objetivos:** essa atividade objetiva estudar as transformações geométricas, a congruência e semelhança de figuras focadas no desenvolvimento de habilidades do ensino fundamental dos anos finais (EF07MA19, EF07MA20, EF07MA21 E EF09MA12) em articulação com as habilidades previstas no ensino médio (EM13MAT105, EM13MAT308).

- **Possíveis materiais:**

Estação 1
- Cópia impressa ou virtual do Anexo 1.
- Malha quadriculada.
- Canetinhas coloridas ou lápis de cor.

Estação 2
- Cópia impressa ou virtual do Anexo 2.
- Uma folha de papel sulfite ou papel dobradura.
- Uma folha de papel quadriculado para cada estudante.
- Tesoura.
- Cola.

Estação 3
- Cópia impressa ou virtual do Anexo 3.
- Malha quadriculada. Modelo disponível no Anexo 5.
- Materiais de desenho geométrico: régua, compasso e transferidor.
- Outra opção é disponibilizar dispositivo tecnológico com acesso ao Geogebra, disponível em: https://bityli.com/Geogebra.

Estação 4
- Cópia impressa ou virtual do Anexo 4.
- Projeção do Anexo 4 para os estudantes.
- Cópia para cada um a imagem da Etapa 2.
- Cópia das imagens disponíveis no Anexo 5.
- Outra opção é substituir a exploração das figuras do Anexo 5 pelo acesso ao aplicativo Geogebra e explorar situações com diferentes valores e r ($r>1$, $0<r<1$ e $r = 1$). Disponível em: https://bityli.com/Geogebra2.
- Papel quadriculado. Modelo disponível no Anexo 5.
- Acesse o geoplano virtual, disponível em: https://bityli.com/geoboard. Caso esse acesso não seja possível, disponibilize os modelos de malha pontilhada e de folha quadriculada, disponíveis no Anexo 5.
- Cópia impressa ou virtual das atividades disponíveis na seção Bora se Preparar.
- Projeção das atividades da seção Bora se Preparar.

GEOPLANOS

Os geoplanos físicos são tabuleiros de madeira na forma quadrada ou retangular, com pinos parcialmente pregados, configurando uma malha. Com ligas de borracha ou elásticos enlaçados nos pinos, os estudantes podem construir, analisar e identificar características de figuras planas. Esse recurso é muito utilizado no estudo de geometria.

Orientações para a gestão da aula

Toda aula deve ter começo, meio e fim, para que os estudantes vejam sentido no estudo dedicado à disciplina.

Propomos que o foco de cada aula seja colocado no quadro, em itens, e que os cinco minutos finais sejam dedicados a verificar se o objetivo foi ou não cumprido. Os estudantes devem identificar o que ajudou ou prejudicou no cumprimento do que foi proposto na aula.

As aulas, exigem preparação e planejamento. Fique atento, estude-as em profundidade, com antecedência e, se possível, realize as propostas antes de levá-las aos estudantes. Isso permitirá que você tenha dimensão dos possíveis desafios e possa realizar as adequações necessárias.

ATIVIDADE 2 ▶ MOMENTO 1

Aquecimento para o tema

1 AULA

Professor/a, para iniciar a proposta, proponha que os estudantes, organizados em pequenos grupos, realizem uma pesquisa sobre o artista M. C. Escher (1898-1972) e procurem responder às seguintes questões: Quem foi Escher? Onde ele viveu? Quais as características de suas obras? Como a matemática está presente nas gravuras deste artista? Oriente-os, também, a analisar uma das gravuras desse artista, identificando características e pontos que chamaram a sua atenção.

Após a pesquisa, você pode abrir uma roda de conversa e convidar cada grupo para contar suas descobertas e falar um pouco das características da gravura escolhida. Eles podem falar livremente das impressões, cores, do sentido das imagens.

Para encerrar esse momento, é importante deixar claro como a contribuição de Escher é significativa, principalmente porque suas gravuras possibilitam a identificação e a compreensão de muitos conceitos matemáticos, de forma prática e prazerosa. Anuncie que eles iniciarão o estudo das simetrias apoiados em algumas gravuras desse autor.

ATIVIDADE 2 ▶ MOMENTO 2

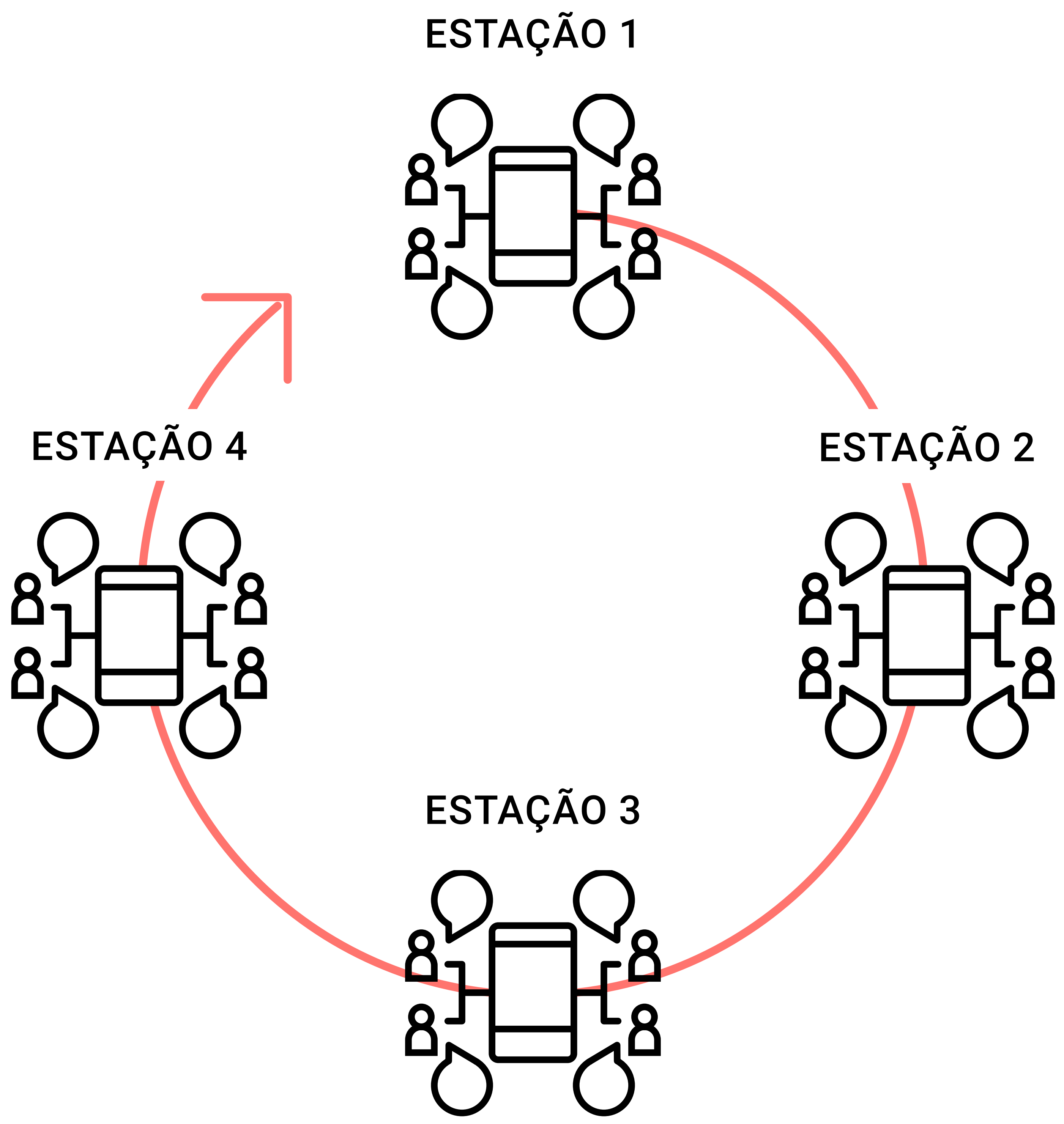
Rotação por estações

3 AULAS

Professor/a, é importante iniciar o momento explicando aos estudantes que eles realizarão um estudo de transformações geométricas e que cada grupo percorrerá quatro (4) estações. Em cada uma delas, analisarão gravuras de Escher, seguindo as orientações apresentadas nas fichas de trabalho que estão sobre as mesas e, após a análise, deverão produzir uma gravura/faixa decorativa própria. É importante que registrem suas dúvidas e aprendizagens em seu caderno. Eles terão cerca de 30 minutos para realizar a proposta de cada estação (se necessário, você pode rever esse tempo e adaptá-lo às necessidades de sua turma).

Atenção, professor/a: os estudantes devem estar organizados em quatro (4) grupos, com quatro (4) ou cinco (5) componentes cada, e cada grupo deverá passar pelas quatro (4) estações. Oriente-os a fazer os registros no caderno, pois o material disponível em cada estação será utilizado por todos os grupos.

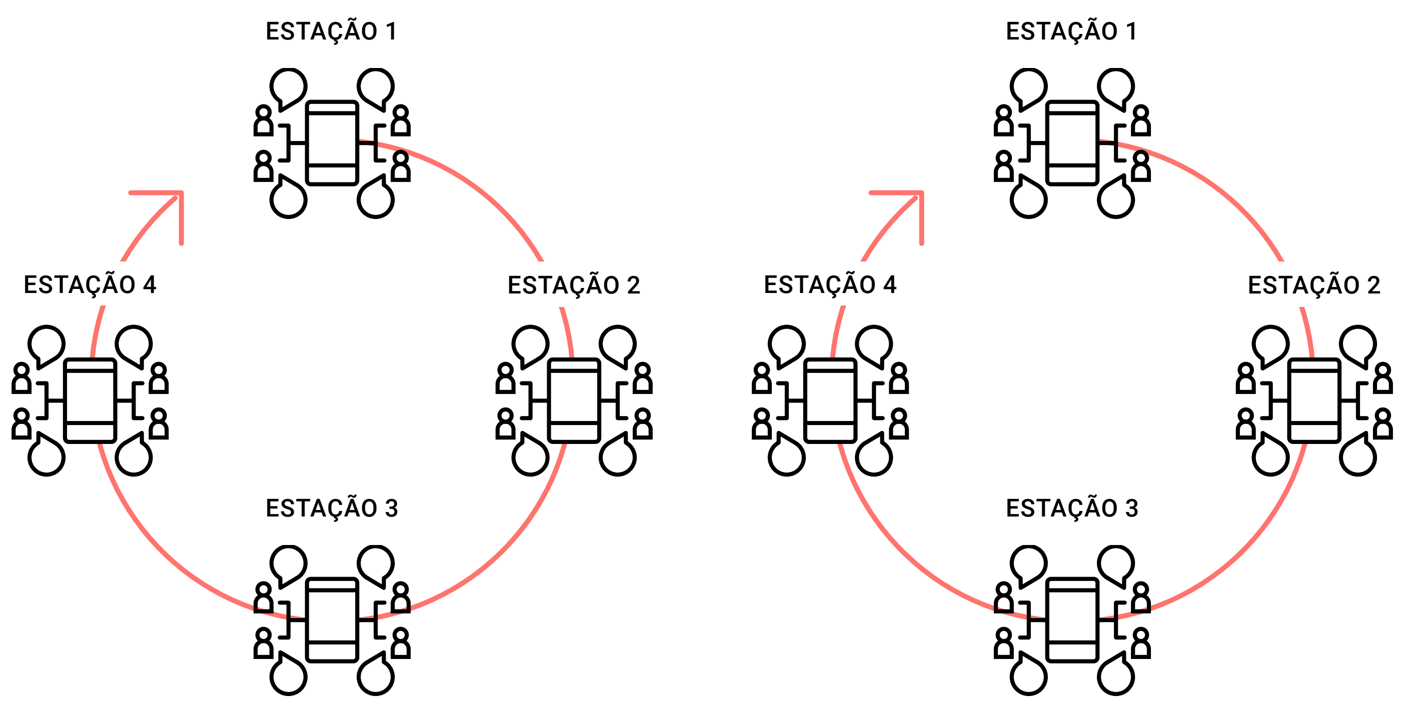
Faça combinados com eles: cada grupo deverá eleger um controlador do tempo e um componente que



terá como objetivo organizar o trabalho e registrar as conclusões do grupo naquela estação.

Se for a primeira vez que os estudantes vivenciam essa metodologia, faça um ensaio, enfatizando o sentido da rotação entre as estações, os materiais coletivos que deverão permanecer na mesa e os pessoais que os estudantes deverão carregar para a próxima estação.

Observação: caso sua turma seja mais numerosa, você pode organizar duas estações 1, duas estações 2, duas estações 3 e duas 4, conforme figura abaixo.



Organize a sala com antecedência, disponibilizando o material necessário em cada estação, conforme orientações seguir.

Estação 1:
- Uma cópia do Anexo 1 (pode ser uma versão impressa ou virtual).
- Malha quadriculada.
- Canetinhas coloridas ou lápis de cor.

Estação 2:
- Uma cópia do Anexo 2 (pode ser uma versão impressa ou virtual).
- Uma folha de papel sulfite ou papel dobradura.
- Uma folha de papel quadriculado para cada estudante.
- Tesoura.
- Cola.

Estação 3:
- Uma cópia do Anexo 3 (pode ser uma versão impressa ou virtual).
- Malha quadriculada.
- Régua.
- Compasso.
- Transferidor.
- Outra opção é disponibilizar dispositivo tecnológico com acesso ao geogebra, disponível em: https://bityli.com/geogebra.

Estação 4:
- Uma cópia do Anexo 4 (pode ser uma versão impressa, sendo uma cópia ou versão virtual para ser projetada aos estudantes).
- Uma cópia para cada um da imagem da etapa 2 do Anexo 4.
- Uma cópia das imagens disponíveis no Anexo 5.
- Caso seja possível, outra opção é substituir a exploração das figuras do anexo 5 pela exploração do aplicativo disponível em: https://bityli.Com/geogebra2 e explorar situações com diferentes valores e r ($r>1$, $0<r<1$ e $r = 1$).
- Papel quadriculado (modelo disponível no Anexo 6).

Fixe um espaço na sala, colocando um cartaz com os seguintes títulos: simetria de reflexão; simetria de translação; simetria de rotação e homotetia. Diga que a produção final de cada estação deve ser afixada nos devidos cartazes para posterior exploração. Os estudantes podem identificar suas produções com seus respectivos nomes.

De olho no conteúdo

Você sabia que uma das inovações propostas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017) é uma maior ênfase ao estudo da Geometria das Transformações e, consequentemente, uma maior exploração desses conceitos nos anos finais do Ensino Fundamental?

Alinhada às pesquisas mais recentes sobre a aprendizagem de Geometria e em consonância com os currículos de diversos países, a BNCC propõe, entre tantas habilidades a serem desenvolvidas nesta área, que o estudante seja capaz de:

- reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria;

- reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros;

- reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) por meio de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Certamente este trabalho tornará mais dinâmica a interação que os estudantes podem desenvolver com as figuras geométricas no plano. Por exemplo, se, em outra época, a congruência de triângulos era vista como um conjunto de critérios e casos nos quais os estudantes deveriam memorizar e selecionar para provar algo que já observavam visualmente, com um trabalho voltado para as transformações geométricas, os estudantes poderão reconhecer como uma composição de transformações leva um triângulo a outro e mostrar sua congruência.

Nesta sequência didática, estamos realizando esse estudo por entender a sua relevância como conhecimento prévio para o desenvolvimento de conceitos importantes no ensino médio, como o estudo do plano cartesiano, da leitura e construção de gráficos, das relações de geometria plana que vão contribuir para conceitos relacionados às relações métricas e trigonométricas nos triângulos. Além disso, a compreensão de simetria também será útil na revisão de números e na aprendizagem das funções, em especial as quadráticas.

Professor/a, enquanto os estudantes realizam as propostas, circule pelos grupos para solucionar possíveis dúvidas e fazer boas perguntas que possibilitem a investigação e a formulação/validação de hipóteses.

Assim, por exemplo, caso os estudantes não consigam compreender as informações propostas nas situações-problema para que possam desenvolver uma estratégia de resolução, pergunte:
Você pode me dizer o que o problema pede? Conte novamente o problema para mim com suas palavras. Qual é mesmo a pergunta?

Caso o grupo esteja parado por não conseguir chegar a um consenso sobre como prosseguir, pergunte:
O que vocês já pensaram, qual é a dificuldade que estão sentindo, como pensam em resolver?
Isso permite compreender o que eles estão pensando e ajudá-los a superar as barreiras sem dar resposta pronta, mas encorajando-os a seguir em frente.

Observe se eles estão identificando as transformações geométricas e suas características, no caso da análise de duas obras, em que os estudantes precisam identificar a simetria presente, analisando diferenças e semelhanças entre elas. Por exemplo, pergunte:
Como essa informação sobre translação escrita te ajuda a buscar um caminho para a resolução?

Procure incentivar a observação cuidadosa das produções realizadas por eles, a percepção de regularidades, sistematização de conceitos e construção de generalizações:
Como vocês podem ter certeza de que essa composição feita por vocês têm a simetria de reflexão (ou de rotação ou translação)?

Use os procedimentos dos estudantes como base para produzir avanços, esta é uma meta do ensino da matemática.

Ao término de cada etapa, certifique-se que todos os grupos concluíram a proposta e oriente-os a movimentar-se para a próxima estação.

No final da proposta, reserve uns cinco (5) minutos para avaliar a experiência junto aos estudantes, analisar se conseguiram realizar o que foi proposto no dia, e para fazer combinados para melhorar a dinâmica da próxima vez.

ATIVIDADE 2 ▶ MOMENTO 3

Organizando as aprendizagens

1 AULA

Após a realização da proposta, convide os estudantes a contemplarem os cartazes produzidos pela turma. Solicite que alguns estudantes contem suas descobertas na estação 1, simetria de translação: quais as suas características, quais os elementos envolvidos e qual estratégia utilizada para construir as gravuras. Repita o procedimento com as demais transformações estudadas: simetria de reflexão (estação 2), simetria de rotação (estação 3) e homotetia (estação 4). Aproveite o momento para fazer os alinhamentos adequados em função das suas observações e percepções no acompanhamento da proposta e para sistematizar as aprendizagens. Uma sugestão é que identifiquem os conceitos trabalhados e anotem as ideias principais no caderno. Garanta que os estudantes percebam que:

- **Simetria de translação:** todos os pontos da figura inicial são deslocados a uma mesma distância, em uma mesma direção e no mesmo sentido.
- **Simetria de reflexão:** todos os pontos correspondentes têm a mesma distância em relação ao eixo de simetria.
- **Simetria de rotação:** todos os pontos da figura inicial "giram" em torno de um ponto fixo, num determinado sentido e com a medida de um determinado ângulo.
- **Homotetia:** aumento ou redução de uma figura, a partir do centro de homotetia (ponto) e da razão de semelhança. As figuras obtidas por homotetia apresentam a mesma forma, ângulos correspondentes congruentes e medida dos lados correspondentes proporcionais.

Professor/a, durante o momento de organização das aprendizagens, converse e tranquilize os estudantes, para que não se preocupem em memorizar nomes, mas foquem nos principais movimentos que constituem a base dessa geometria: rotação, translação e reflexão. Os outros nomes poderão ser consultados nos dicionários on-line, utilizando o próprio celular.

Caso deseje ampliar o trabalho com as transformações geométricas e aprofundar o desenvolvimento das habilidades, leia a EF07MA21: reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. Sugerimos que utilize os planos de aula da Nova Escola, disponíveis em: https://bityli.com/nova4 (acesso em 05/05/2022).

ATIVIDADE 2 ▶ MOMENTO 4

Ampliando as aprendizagens

1 AULA

O foco desta proposta é utilizar as aprendizagens acerca das transformações geométricas para retomar o estudo de congruência, relacionando-o às isometrias e semelhanças associadas à homotetia. Faremos essa aula no formato de uma aula expositiva dialogada.

Orientações para a gestão da aula

É importante que, em aulas expositivas, os estudantes sejam encorajados a tomar notas de pontos importantes como a formalização de um conceito, um procedimento, uma propriedade etc., para que possam fazer uso desse material e consultá-lo sempre que necessário.

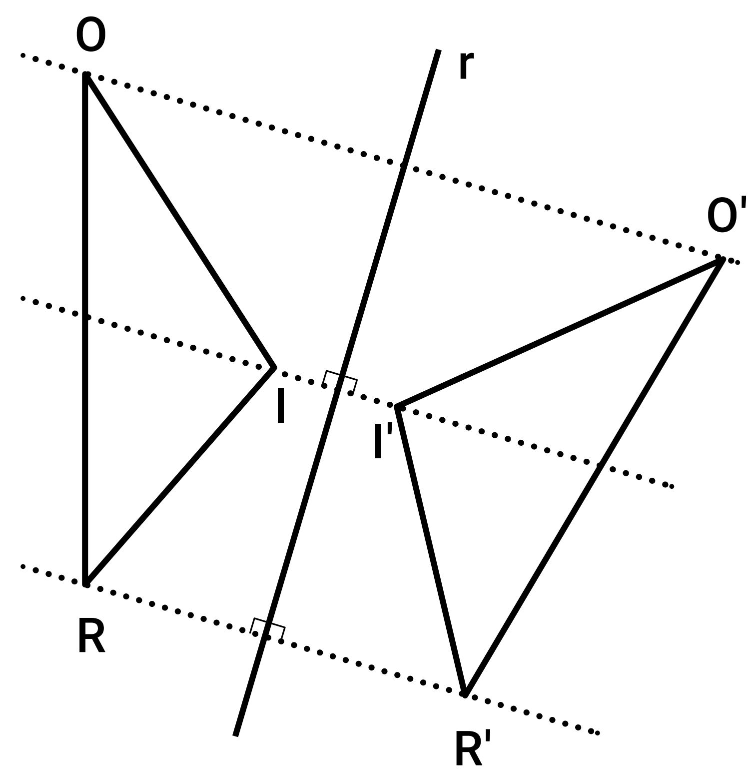
Nem sempre os estudantes conhecem essa prática tão importante na sala de aula, em especial, nas aulas de matemática. Por esse motivo, colocamos aqui algumas reflexões para você, professor/a: será que os estudantes sabem o que anotar? Ou anotam tudo sem discriminar o nível de importância de cada coisa?

Veja as orientações a seguir!

Ensiná-los a anotar é também conteúdo de ensino. Para isso, sugerimos que faça paradas ao longo da aula e solicite que anotem um conceito ou conteúdo, conforme sua orientação. Ao final, organize uma pequena síntese da aula com toda a turma e peça que a registrem em seus cadernos. Isso mostra o sentido e a lógica do percurso de estudo que foi realizado.

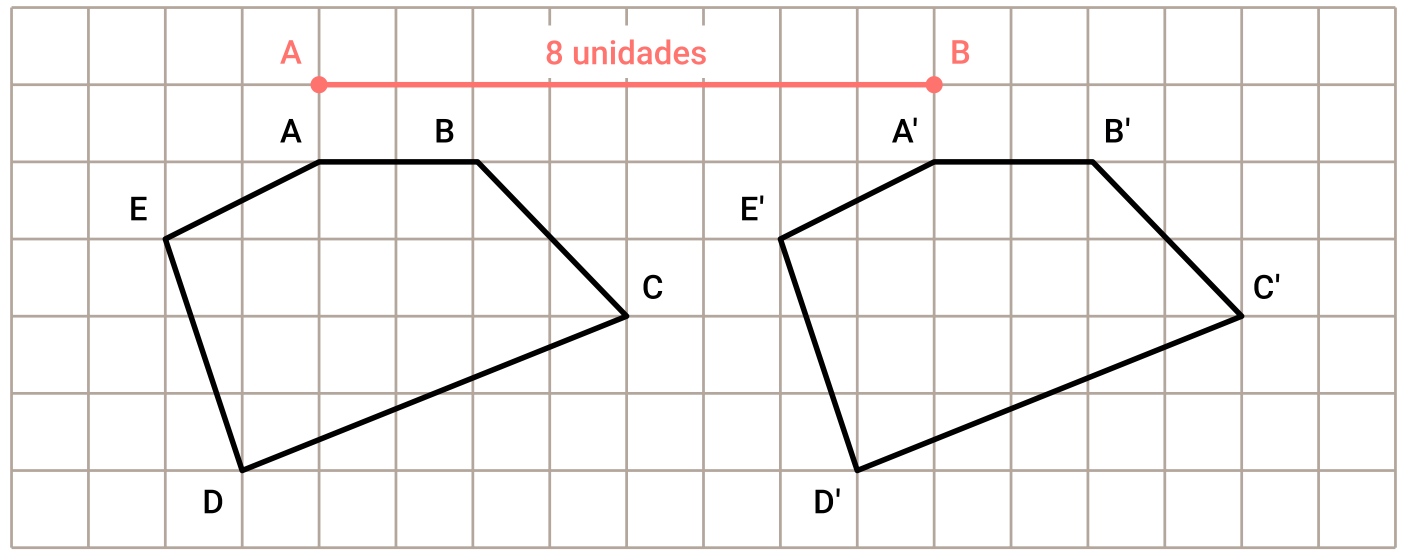
Proponha aos estudantes a realização das atividades 1 e 2 do Anexo 7.

Explore com os estudantes que, na 1ª atividade, os triângulos obtidos são congruentes, pois um foi obtido do outro por um movimento já conhecido por eles: a reflexão de uma figura em relação a uma reta/eixo. Por exemplo:



Nesta figura, o triângulo R'I'O', foi obtido pela reflexão do triângulo RIO em relação à reta r. Assim, o triângulo R'I'O' simétrico ao triângulo RIO e a reta r é a mediatriz de cada segmento RR', II'e OO'.

Ao abordar a atividade 2, converse com os estudantes, para que percebam que o pentágono A'B'C'D'E' foi obtido por meio de uma translação por um segmento horizontal, de comprimento oito (8) unidades, orientado da esquerda para a direita.



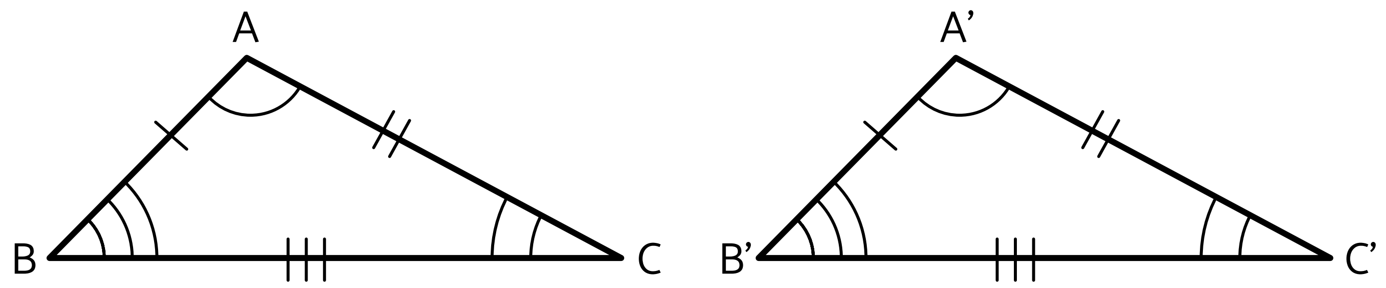
Uma translação no plano pode ser descrita por uma flecha, ou seja, um segmento orientado, $\overrightarrow{AB}$ que nos permite associar a cada ponto P do plano um ponto P', de tal forma que o segmento orientado $\overrightarrow{PP'}$ tenha a mesma medida, a mesma direção e o mesmo sentido do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Essa correspondência se chama translação associada ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ e o ponto P' é a imagem do ponto P pela translação determinada por $\overrightarrow{AB}$.

Informe-os que as simetrias de translação, de reflexão e até mesmo de rotação são chamadas de isometrias, pois mantêm a forma e o tamanho da figura original, quando aplicadas seus movimentos. Figuras obtidas a partir dessas simetrias são chamadas figuras congruentes (mesma forma, mesmo tamanho, mesmas medidas de lados e de ângulos).

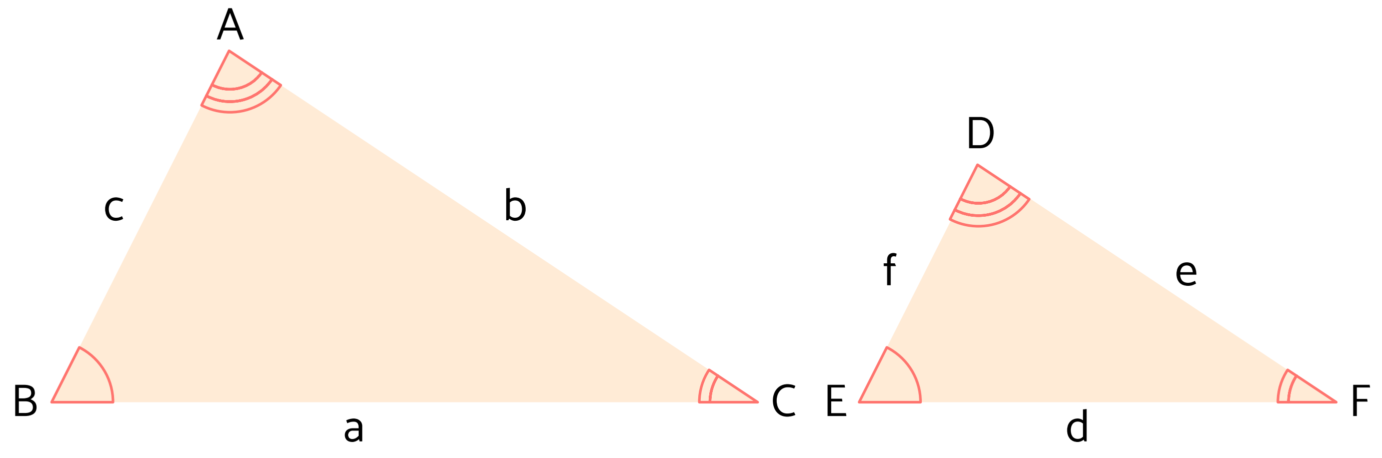
Se considerar adequado, mostre também o vocabulário e a simbologia matemática utilizadas no estudo de congruência (com foco no estudo das isometrias).

Proponha que realizem a atividade 3 do Anexo 7. Explore com os estudantes que os triângulos A'B'C' e A"B"C" são semelhantes, pois possuem ângulos correspondentes congruentes e lados homólogos proporcionais (a medida do lado A"B" é o dobro da medida do lado A'B') e a razão de semelhança é igual a 2.

Se considerar adequado, mostre também o vocabulário e a simbologia matemática utilizadas no estudo de semelhança (com foco no estudo da homotetia).



Indicamos: $\Delta\, ABC \underset{\text{congruente}}{\equiv} \Delta\, A'B'C'$ se $\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{cases}$ e $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$



Indicamos: $\Delta\, ABC \underset{\text{semelhante}}{\sim} \Delta\, DEF$ se $\dfrac{a}{d} = \dfrac{c}{f} = \dfrac{b}{e}$ e $\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{C} = \hat{F} \end{cases}$

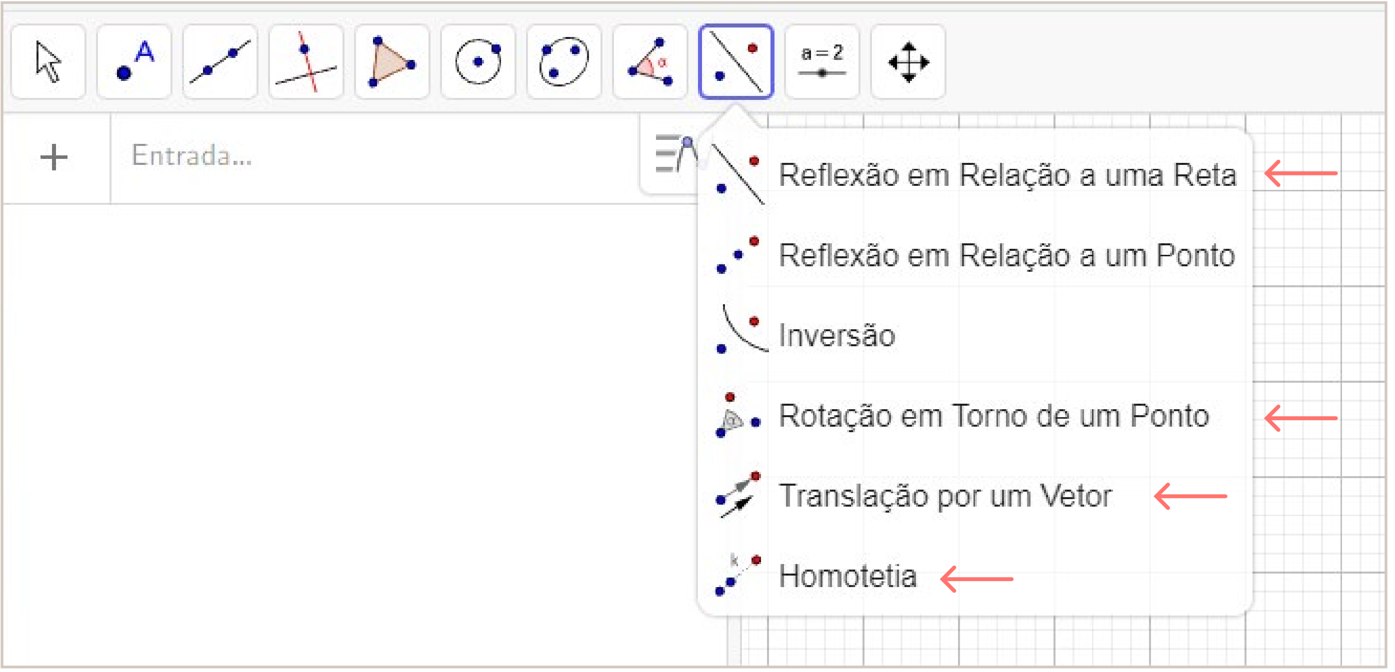
Aprofundando a aprendizagem

Se desejar ampliar essa exploração com seus estudantes, sugerimos realizar os seguintes planos da Nova Escola:

- Transformações no plano e figuras congruentes, disponível em: https://bityli.com/nova5.
- Simetria nos triângulos e quadriláteros e a congruência de triângulos, disponível em: https://bityli.com/nova6.
- Homoterias de figuras planas, disponível em: https://bityli.com/nova7.
- Triângulos semelhantes, disponível em: https://bityli.com/nova8.
- Simetria de reflexão, disponível em: https://bityli.com/reflexao.
- Simetria de rotação, disponível em: https://bityli.com/rotacao.
- Simetria de translação, disponível em: https://bityli.com/translacao.

Outra sugestão é propor a resolução de exercícios disponíveis no material didático. Selecionar atividades que convidem os estudantes a desenhar figuras simétricas com o apoio de malhas quadriculadas ou mesmo a identificar simetrias em figuras já construídas podem ser excelentes opções para este momento.

Havendo tempo disponível e acesso ao aplicativo, os estudantes podem aprofundar seus estudos sobre o tema, explorando as transformações geométricas, disponíveis em https://bityli.com/Geogebra. Veja, na figura abaixo, onde estão localizados os botões relacionados a essas transformações:



Atenção para a avaliação!

Chegou o momento de verificar se os estudantes conseguiram avançar no conteúdo proposto, se identificam corretamente as simetrias estudadas e suas características e se possuem argumentos para justificar e corrigir os erros que aparecem na proposta. A ideia é que a atividade seja realizada individualmente. Enquanto realizam a proposta, circule pela sala e procure identificar e anotar os pontos de dúvidas e dificuldades. Esses comentários poderão ser registrados em seu planejamento para nortear as possíveis intervenções. No final, reserve um tempo para um debate coletivo e incentive os estudantes a encontrar a solução para o problema.

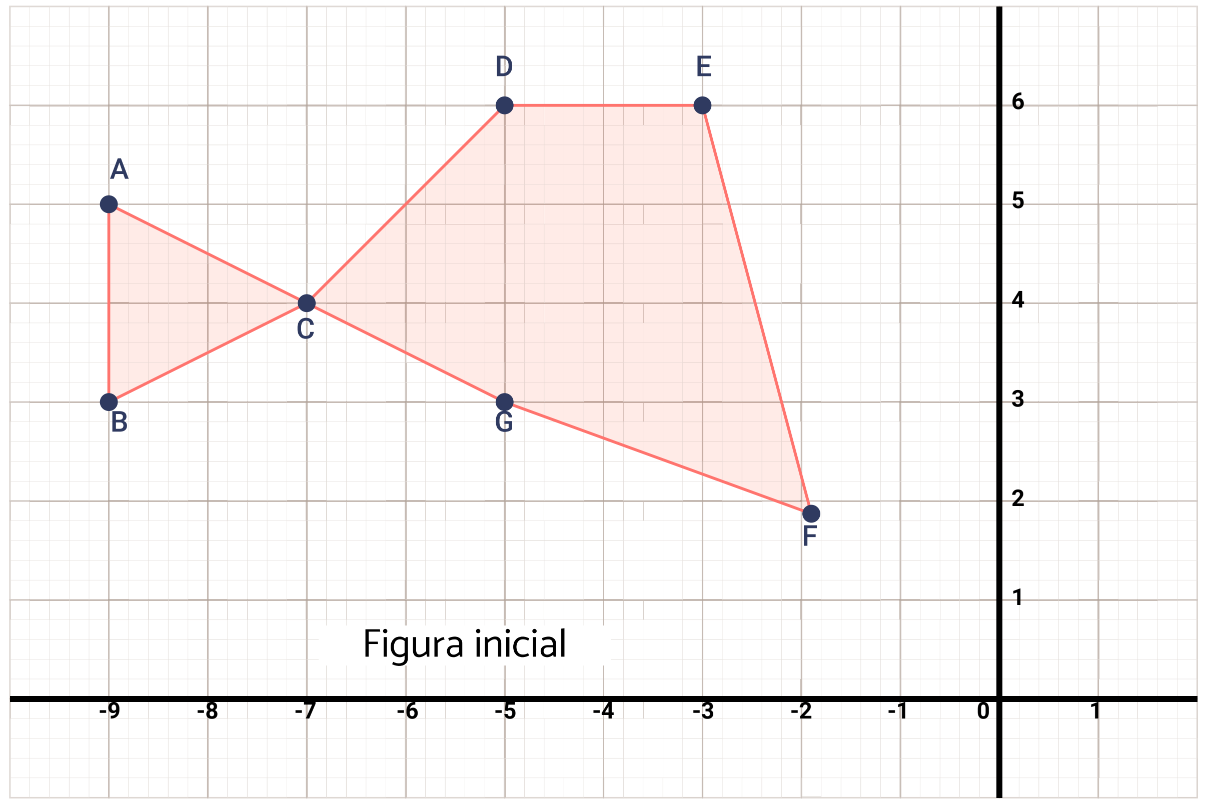
A professora de artes pediu para Felipe desenhar, em malha quadriculada, uma figura congruente à figura dada, obtida a partir de duas transformações consecutivas.

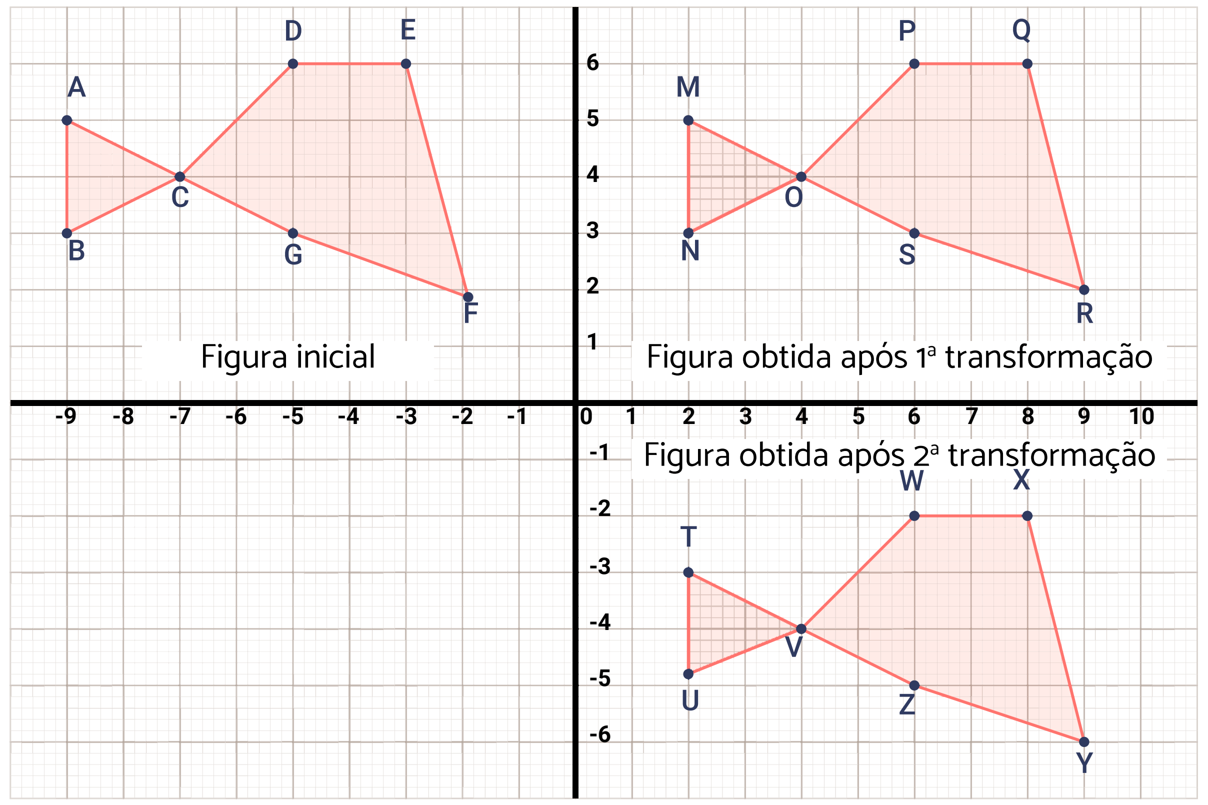
1º: Translação horizontal de cinco (5) unidades para a direita.

2º: Simetria de reflexão em relação ao eixo x.

Veja as figuras desenhadas por Felipe e analise se ele aplicou corretamente as simetrias, conforme orientações do professor/a. Explique sua resposta e, caso necessário, escreva um pequeno bilhete para Felipe, dando "algumas pistas" sobre como corrigir sua atividade.

Resposta esperada: espera-se que o estudante identifique que a 1ª simetria aplicada por Felipe foi uma translação horizontal para a direita, porém não foi uma translação de cinco (5) unidades, mas sim, de 11 unidades para a direita. Já a 2ª simetria aplicada foi novamente uma translação, só que agora vertical, e não uma reflexão conforme sugerido pela professora.





“Bora” se preparar?

1 AULA

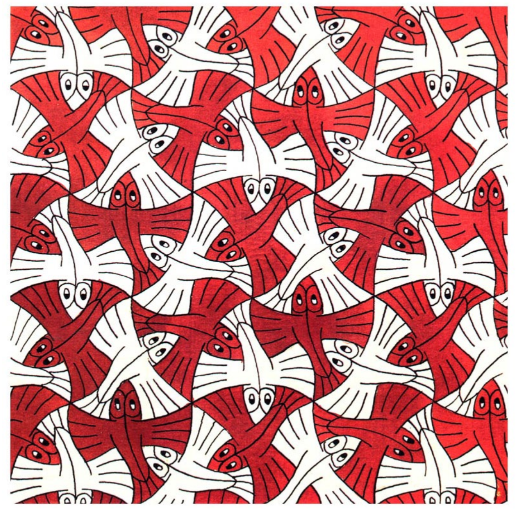
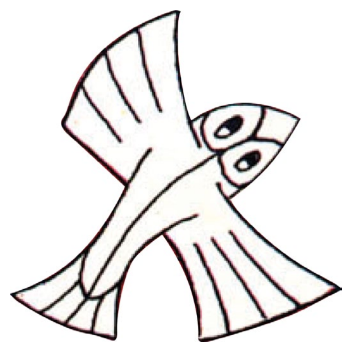
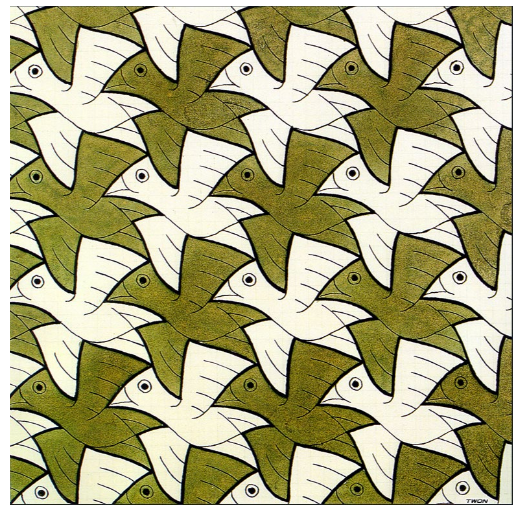
Professor/a, para ampliar as aprendizagens dos estudantes e permitir que pensem mais a respeito das transformações geométricas estudadas, peça que resolvam as questões a seguir e, caso surja alguma dúvida, poderão discuti-las com seus colegas e professor/a na próxima aula. (você pode disponibilizar esses itens na versão impressa ou virtual, por e-mail, ou WhatsApp).

Enquanto eles realizam os exercícios propostos, circule pela sala para solucionar possíveis dúvidas e fazer os alinhamentos necessários. Mas tome cuidado para não dar respostas prontas. Faça boas perguntas para conduzir a investigação e a reflexão dos estudantes, de modo que formulem/validem hipóteses, façam descobertas e tirem suas conclusões: como você pensou para fazer isso? Por que essa não é a alternativa correta? O que te faz escolher essa alternativa? Se necessário, escolha o exercício que eles apresentaram mais dificuldades para resolver/discutir coletivamente. Você também pode propor desafios semelhantes, no material didático adotado por você.

QUESTÃO 1

(SLMANDIC Medicina - adaptado) O artista holandês contemporâneo e de renome internacional M. C. Escher, falecido em 1972, utilizou muitos conceitos matemáticos nos seus trabalhos e dentre outros, dedicou grande parte do seu tempo ao estudo das pavimentações do plano. A pavimentação de um plano consiste em cobrir o plano com figuras também planas, de modo a não existirem espaços nem sobreposições entre elas. As pavimentações do plano de Escher são conseguidas recorrendo a isometrias, a partir de uma figura inicial. Observe as gravuras de Escher apresentadas a seguir. Nas pavimentações I e II, Escher usou, respectivamente, isometrias de:

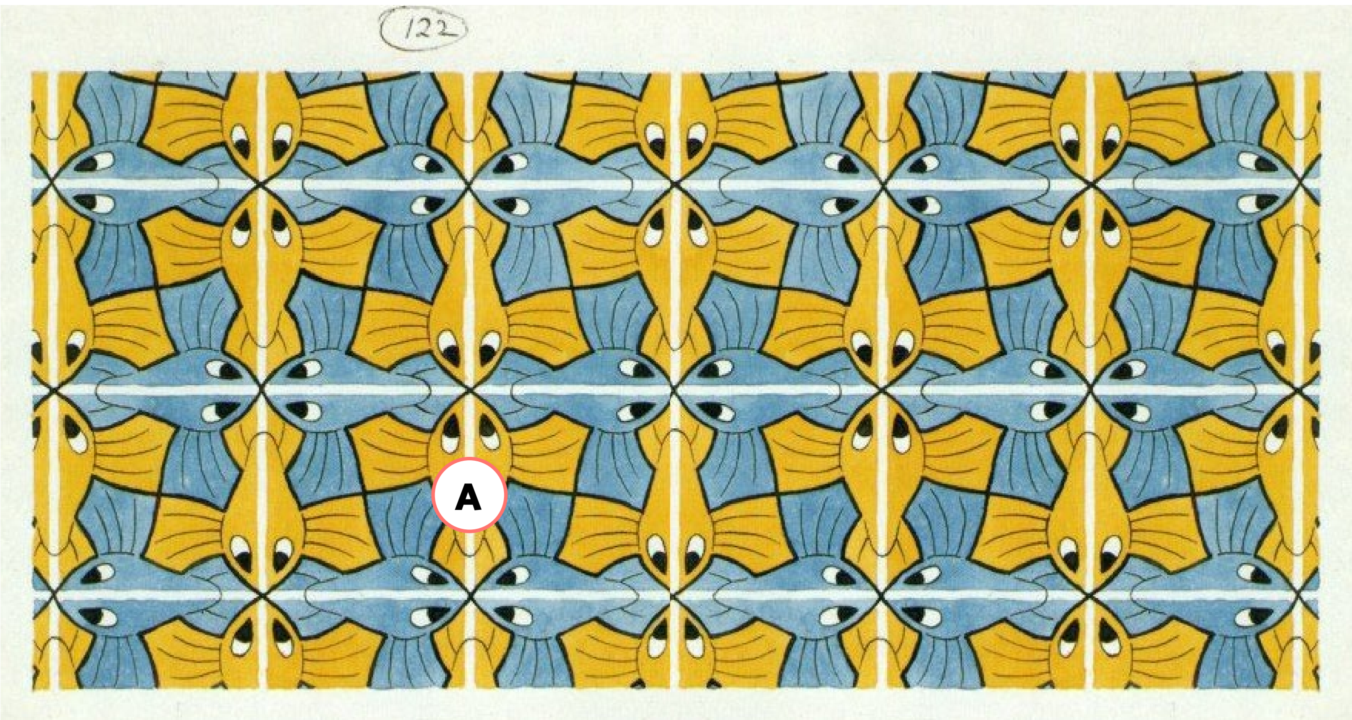
a) translação e reflexão.
b) rotação e translação.
c) translação e rotação.
d) rotação e reflexão.
e) reflexão e translação.

	Gravura	Figura Inicial
I		
II		

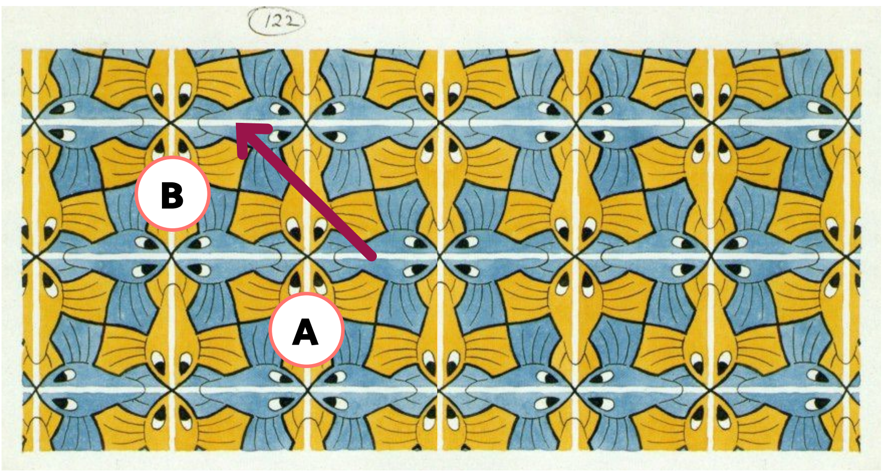
QUESTÃO 2

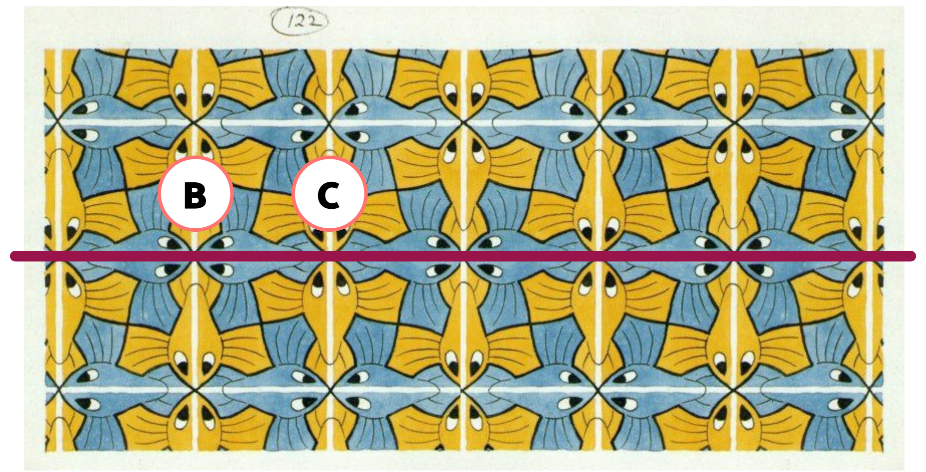
Observe a imagem de uma das obras de Escher. Considere a imagem denominada de ponto A e, a partir dela, identifique na obra um peixe que seja a imagem de A:

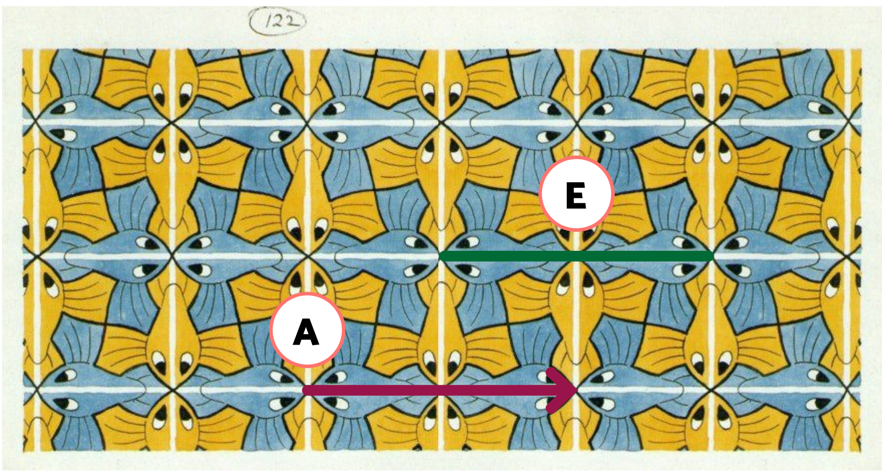
a) por uma translação e identificação do vetor (direção, sentido, tamanho) a ela associado;
b) por uma reflexão e indicação do eixo de simetria;
c) por uma composição de duas simetrias e indicação de todos os elementos envolvidos (sentido, direção, vetor e eixo de simetria).



Respostas esperadas:







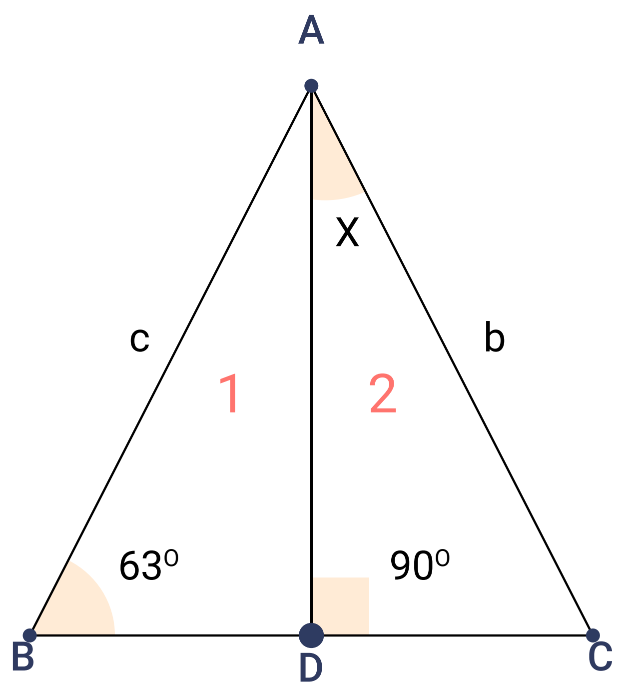
a) Figura B. O vetor está desenhado na imagem (existem outras possibilidades).

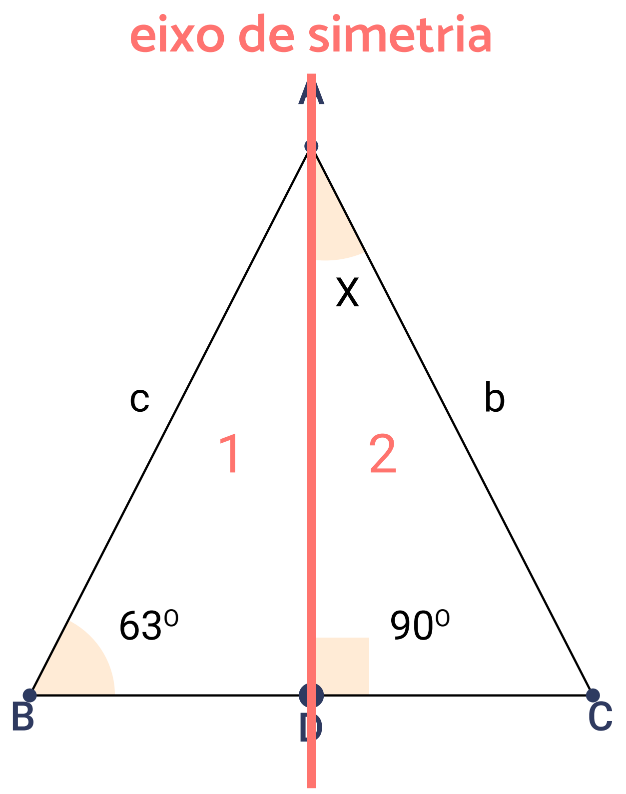
b) Figura C. O eixo de simetria está desenhado na imagem.

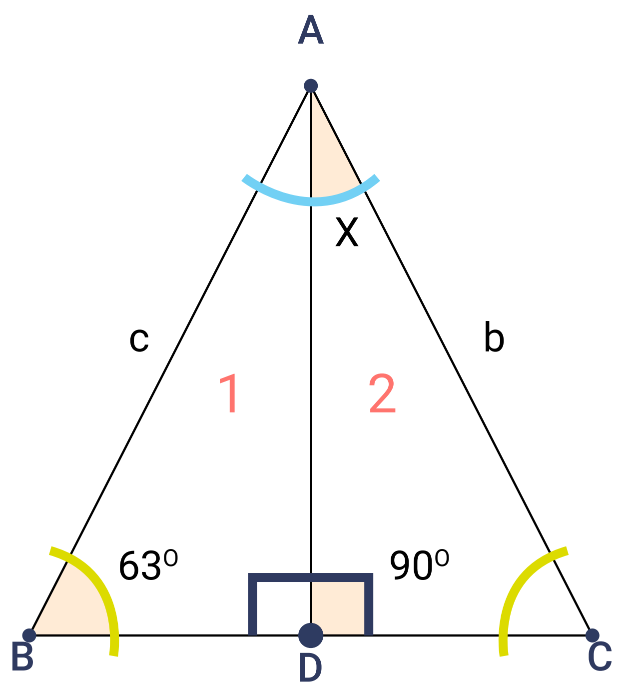
c) Figura E. Inicialmente, aplicou-se uma translação cujo sentido, direção e tamanho estão indicados no vetor desenhado na figura. Em seguida, aplicou-se a reflexão em relação ao eixo de simetria desenhado na figura. O eixo de simetria está desenhado na imagem.

QUESTÃO 3

Observe a figura.







a) O triângulo 2 foi obtido a partir de uma transformação geométrica aplicada no triângulo Qual o nome dessa transformação?
Resposta: reflexão.

b) Essa transformação envolve um vetor ou um eixo de simetria? Desenhe-o na figura.
Resposta: reflexão envolve eixo de simetria, conforme desenhado na figura.

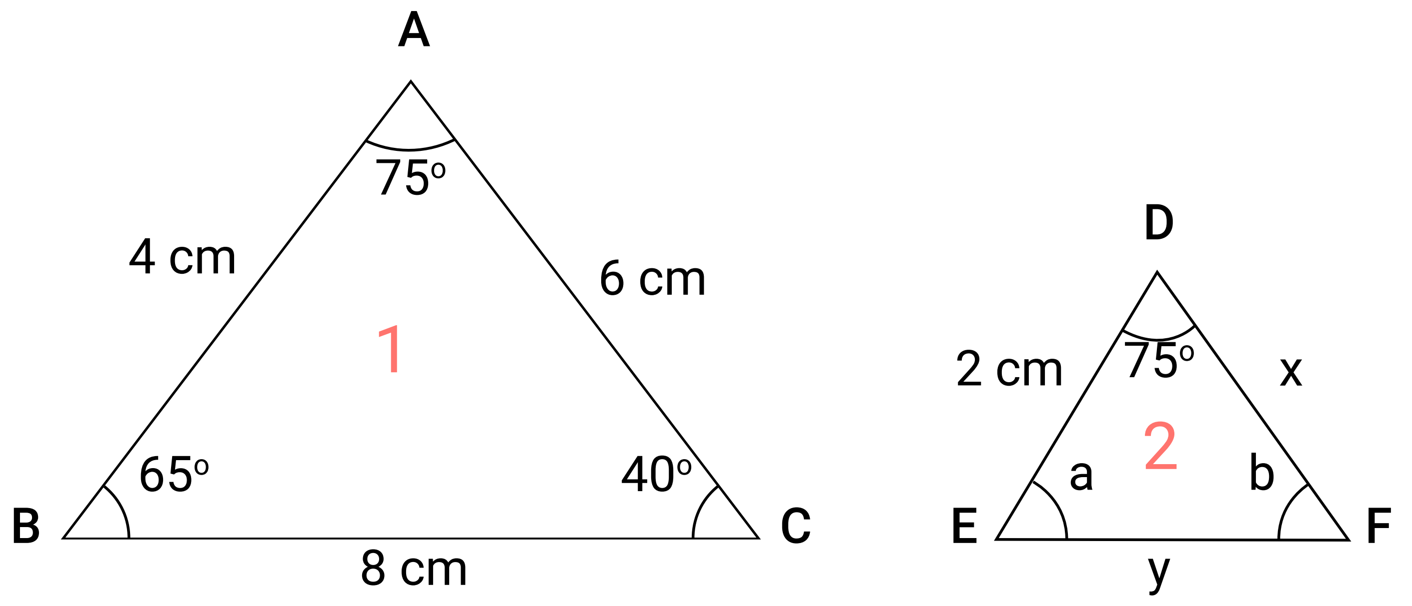
c) Os triângulos 1 e 2 são congruentes? Explique!
Resposta: sim, os triângulos 1 e 2 são congruentes, pois possuem a mesma forma, os lados correspondentes congruentes e os ângulos correspondentes congruentes.

d) Quais são os ângulos congruentes? Indique-o na figura utilizando cores iguais para ângulos de mesma medida. Resposta:

e) Qual a medida do ângulo x?
Resposta: a medida do ângulo x é 27º.

QUESTÃO 4

O triângulo 2 da figura abaixo foi obtido a partir de uma transformação geométrica aplicada no triângulo 1.

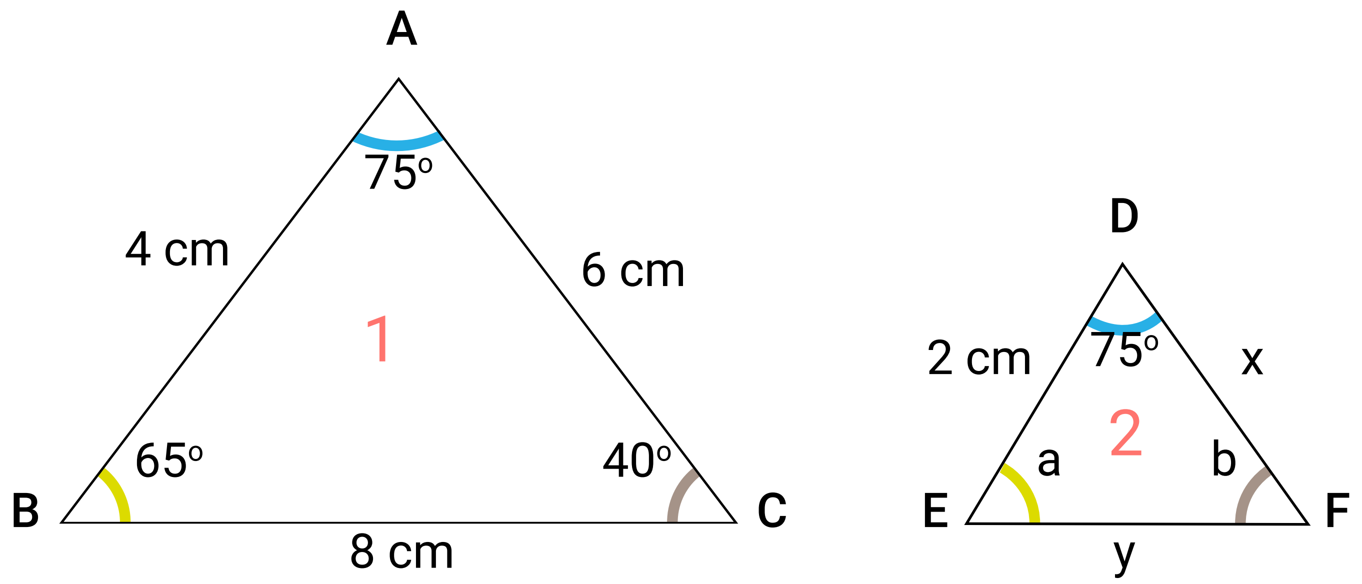


a) Qual o nome dessa transformação?
Resposta: homotetia.

b) Essa transformação envolve um eixo de simetria ou uma razão de semelhança? Explique.
Resposta: a homotetia envolve uma razão de semelhança.

c) Os triângulos 1 e 2 são congruentes? Explique.
Resposta: os triângulos 1 e 2 são semelhantes, pois possuem ângulos correspondentes congruentes e lados homólogos proporcionais.

d) Quais são os ângulos congruentes? Indique-os na figura utilizando cores iguais para ângulos de mesma medida. Resposta:



e) Quais são os lados proporcionais?
Resposta: os lados proporcionais são: AB com DE, BC com EF e AC com DF.

f) Determine as medidas desconhecidas do triângulo 2.
Resposta: a = 65o , b= 40o , ox = 3 cm e y =4 cm.

ATIVIDADE 2 ▶ MOMENTO 5

Transformações geométricas no plano cartesiano

2 AULAS

Neste momento da atividade, o foco é estudar as transformações geométricas com o apoio do plano cartesiano. Dessa forma, é necessário iniciar a proposta retomando o plano cartesiano, suas características e suas funcionalidades.

Explique aos estudantes que a metodologia utilizada para estudar o plano cartesiano será a **aula invertida**, que é uma modalidade do ensino em que o aluno estuda o tema antes da aula: realiza as propostas encaminhadas pelo professor/a (vídeo, texto, exercícios) e, se necessário, amplia o seu estudo pesquisando materiais didáticos na internet, entre outros. Posteriormente, esse tópico estudado é retomado e aprofundado na aula, com a ajuda dos colegas e do/a professor/a. Nesse momento, todos poderão solucionar dúvidas, debater o que aprenderam e realizar tarefas complementares. Deixe claro para eles a importância do 1º momento de pesquisa/ estudo, pois se ele não se preparar para a aula com antecedência, provavelmente não conseguirá participar das discussões e nem realizar as atividades de aprofundamento.

Em seguida, apresente o roteiro abaixo para o momento de estudo inicial. Os estudantes poderão realizar as propostas em casa. Nesse caso, é muito importante combinar a data que deverão apresentar as tarefas. Caso não seja possível realizar o estudo em casa, disponibilize um tempo adequado no início da aula, para que realizem o roteiro de estudos. Eles podem trabalhar individualmente ou em duplas.

Roteiro de estudos

1. Assista ao vídeo, disponível em: https://bityli.com/introcarte (acesso em 31/03/2022).

2. Assista ao vídeo disponível em: https://bityli.com/quadrantes (acesso em 31/03/2022).

3. Enquanto assiste aos vídeos, anote os pontos que chamaram sua atenção, o que você descobriu e quais dúvidas teve.

4. Após assistir aos vídeos, elabore um resumo com as ideias principais. Você pode fazer um esquema, um desenho, um mapa de ideias ou, até mesmo, um texto.

5. Resolva os exercícios, disponíveis em: https://bityli.com/quadrantes2 (acesso em 31/03/2022). Caso surja alguma dúvida nos exercícios acima, registre-a no caderno para discuti-la posteriormente com seus colegas e professor/a.

6. Resolva exercícios, disponíveis em: https://bityli.com/pontoscarte (acesso em 31/03/2022). Caso surja alguma dúvida nos exercícios acima, registre-a no caderno para discuti-la posteriormente com seus colegas e professor/a.

Professor/a, caso os estudantes **não tenham acesso à internet** para realizar esse roteiro de estudo, é possível adaptá-lo com propostas impressas, semelhantes àquelas que realizariam no aplicativo on-line indicado.

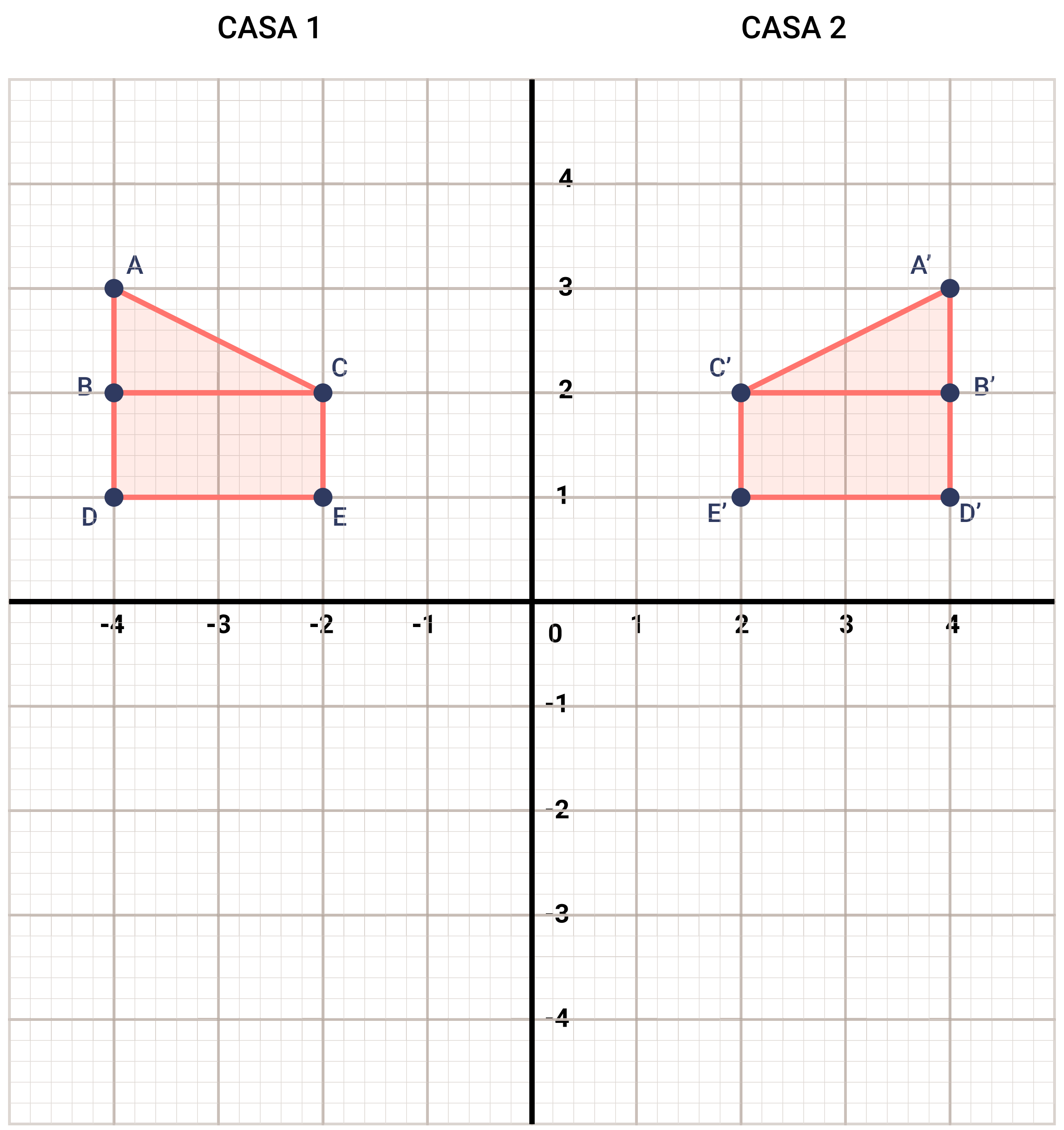
Na data combinada (após a realização do roteiro de estudos), abra uma roda de conversa e convide os estudantes a contarem suas descobertas e aprendizagens. Proponha que socializem seus registros e apresentem suas dúvidas. Aproveite para fazer os alinhamentos necessários, pois um estudante pode ajudar a responder a dúvida levantada pelo outro. Certifique-se de que todas as dúvidas foram respondidas e que compreenderam o plano cartesiano e a representação de pares ordenados no plano.

Professor/a, o próximo passo é propor situações que envolvam as **transformações geométricas em figuras que estão representadas no plano cartesiano**. O objetivo é aprofundar a aprendizagem, proporcionando situações que envolvam a exploração de regularidades e generalizações. A ideia é que os estudantes trabalhem em pequenos grupos. Incentive-os a investigar, argumentar, justificar, fazer registros. Veja algumas possibilidades de exploração.

Para realizar as propostas a seguir você pode utilizar um papel quadriculado ou a malha virtual, como a disponível em: disponível em: https://bityli.com/Geogebra.

QUESTÃO 1

Observe a casa 2 da figura abaixo. Ela foi obtida a partir da figura 1, por meio de uma de uma transformação geométrica.



a) Qual foi a transformação geométrica realizada?
Resposta: reflexão.

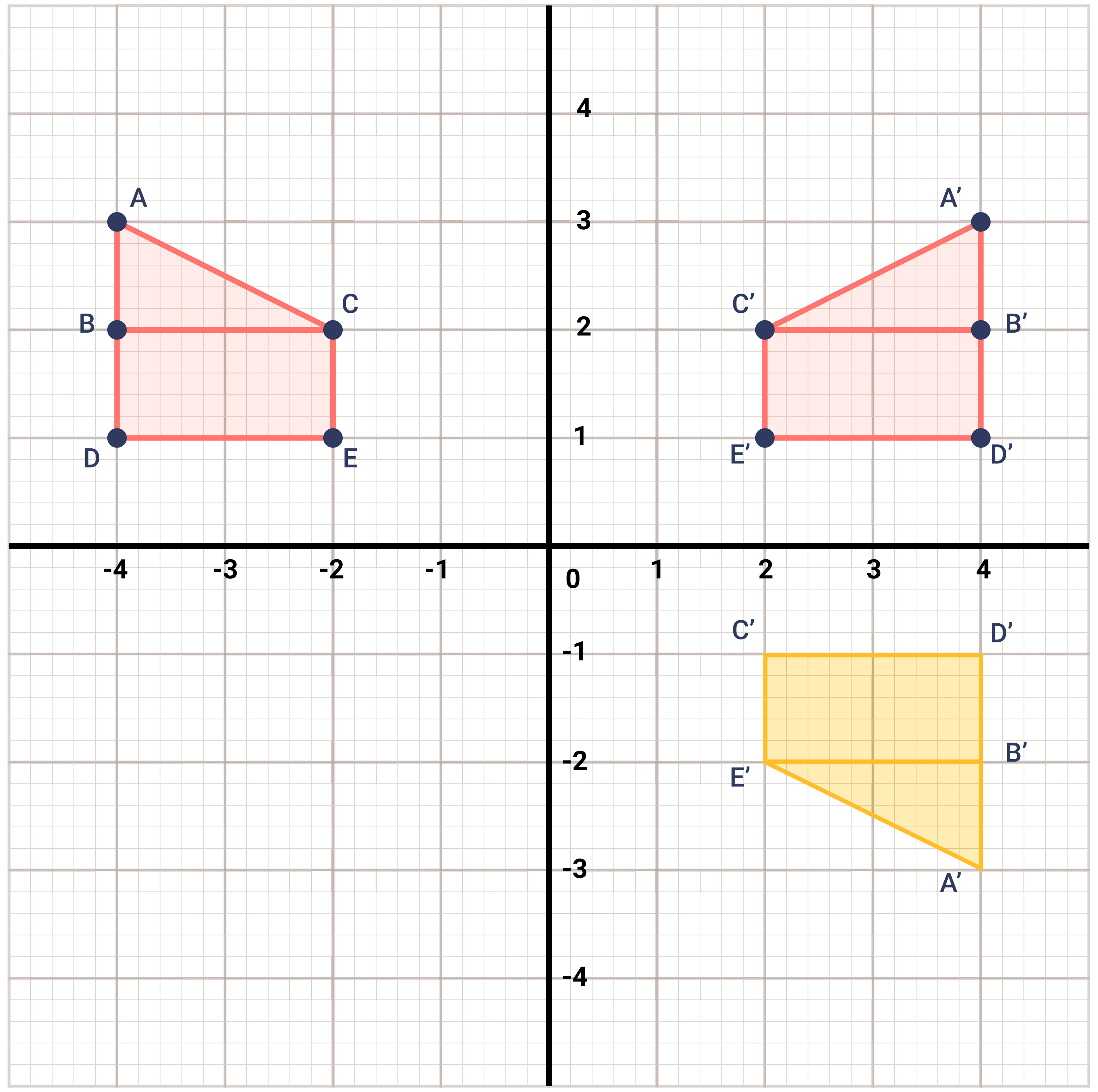
b) Escreva as coordenadas dos pontos da figura 1 – polígono ABCDE .
Resposta: as coordenadas dos pontos são: A=(-4, 3), B=(-4, 2), C = (-2, 2) , D = (-4,1) , E=(-2, 1).

c) Escreva as coordenadas dos pontos da figura 2 – polígono A'B'C'D'E'.
Resposta: as coordenadas dos pontos são: A' = (4,3), B' = (4,2), C' = (2,2), D' = (4,1) e E' = (2,1).

d) Qual a regularidade que você observa entre as coordenadas dos pontos simétricos? Por que isso acontece?
Resposta: nesse caso, os pontos simétricos têm ordenadas iguais e abscissas com sinais contrários (números opostos). Isso acontece porque a simetria é em relação ao eixo y e, por isso, conserva a ordenada e inverte o sinal da abscissa.

QUESTÃO 2

Observe as figuras representadas na atividade anterior.



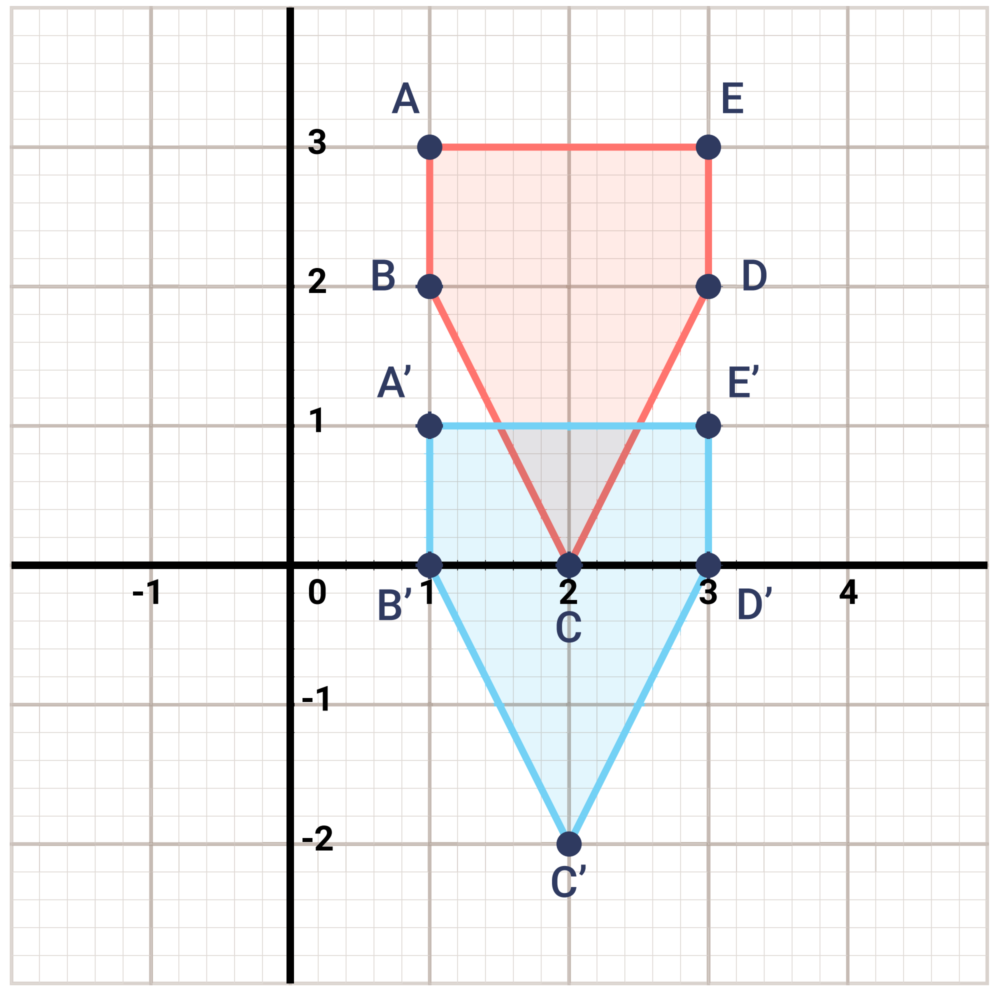
a) Aplique, na casa 2, uma simetria de reflexão em relação ao eixo x e desenhe a figura 3, A" B" C" D" E', simétrica à figura 2.

b) Escreva os pares ordenados dos vértices da figura 3.
Resposta: as coordenadas dos pontos são: A"=(4,-3), B" = (4,-2), C" = (2,-2), D" = (4,-1)) e E" = (2,-1).

c) Qual a regularidade que você observa nas coordenadas dos pontos simétricos: A' e A", B' e B", C' e C", D' e D", E' e E". Por que isso acontece?
Resposta: nesse caso, os pontos simétricos têm abscissas iguais e ordenadas com sinais contrários (números opostos). Isso acontece porque a simetria é em relação ao eixo x e, por isso, conserva a abscissa e inverte o sinal da ordenada.

QUESTÃO 3

Desenhe a figura A'B'C'D'E', congruente à figura dada, obtida por uma simetria de translação, de duas (2) unidades, no sentido vertical e para baixo.



a) Escreva as coordenadas dos pontos correspondentes: A e A' , B e B', C e C', D e D', E e E'.
Resposta: as coordenadas dos pontos simétricos são: A=(1, 3) e A'=(1, 1), B=(1, 2) e B'=(1, 0), C=(2, 0) e C'=(-2, 0), D=(3, 2) e D'=(3, 0), E=(3, 3) e E'=(3, 1).

b) Qual a regularidade que você observa nas coordenadas desses pontos. Por que isso acontece?
Resposta: os pontos correspondentes possuem a mesma abscissa e os pontos da segunda figura têm ordenadas duas (2) unidades menores, isso porque o deslocamento foi vertical (eixo das ordenadas) e para baixo (2 unidades a menos).

Conexões com o Volume 1 do material Fortalecimento da Aprendizagem e outra explorações

As propostas elaboradas na atividade 2 desta sequência foram pensadas para serem executadas com estudantes que iniciam o ensino médio e trazem poucos conceitos a respeito da geometria das transformações, da congruência e semelhança de figuras.

Dependendo do conhecimento dos estudantes e dos dados de avaliação obtidos, é possível ampliar esse trabalho para o **segundo ou terceiro ano do ensino médio** a partir de uma atividade com problemas sobre ladrilhamentos, tendo em vista o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT505**: resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar sobre os tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

Uma possibilidade para iniciar esse tema é realizar propostas semelhantes às apresentadas pelos Planos de Aula da Nova Escola:

- Plano de aula: ladrilhando com polígonos regulares, disponível em: https://bityli.com/nova9.
- Plano de aula: ângulos em polígonos – construindo mosaicos e ladrilhamentos, disponível em: https://bityli.com/nova10.

Ainda é possível ampliar o estudo explorando propostas da plataforma Khan Academy:

- Polígonos regulares e pavimentações no plano, disponível em: https://bityli.com/poligonos.

Outras habilidades que se conectam a essa são:

- **(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e suas composições) e transformações homotéticas. para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
- **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Esta última foi explorada no **Volume 1 do material Fortalecimento da Aprendizagem** na Sequência Didática 3 - Atividade 2 (acesse em: https://bityli.com/SD3), em que foi contemplado o estudo de figuras semelhantes, Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo. No entanto, o estudo das leis do seno e cosseno não foi contemplado e, por isso, sugerimos que seja explorado com as propostas indicadas a seguir.

- Lei dos senos, disponível em: https://bityli.com/senos.
- Lei dos cossenos, disponível em: https://bityli.com/cossenos.

Atividade 3

ATIVIDADE 3

MUITOS NÚMEROS NOS GRÁFICOS

Foco: nesta proposta, os focos são a leitura, a construção e a interpretação de gráficos, além da retomada das operações com números racionais.

Tempo sugerido: 9 horas/aula

Objetivos: nesta sequência didática estamos trabalhando **habilidades essenciais de anos anteriores, como a EF09MA22, que trata da construção e análise de gráficos; a EF07MA12, de operações com números racionais; e a habilidade EM13MAT102, proposta para o Ensino Médio,** que aborda o estudo e interpretação de gráficos, possibilitando que o estudante avance com suas aprendizagens. Essa atividade está dividida em 4 momentos.

Materiais necessários:

- Gráfico apresentado no Momento 1 (pode ser versão digital para ser projetada ou impressa, uma cópia para cada grupo).
- Atividades 1 a 8 sobre a análise e construção de gráficos (podem ser projetadas ou disponibilizadas na versão impressa).
- Acesso a um plotador virtual de gráficos (Geogebra, Winplot, entre outros) ou uma folha de papel quadriculado para cada dupla (modelo disponível no Anexo 6).
- Régua e transferidor para construir o gráfico de setores (Exercício 5).

ATIVIDADE 3 ▶ **MOMENTO 1**

Aquecimento para o tema

1 AULA

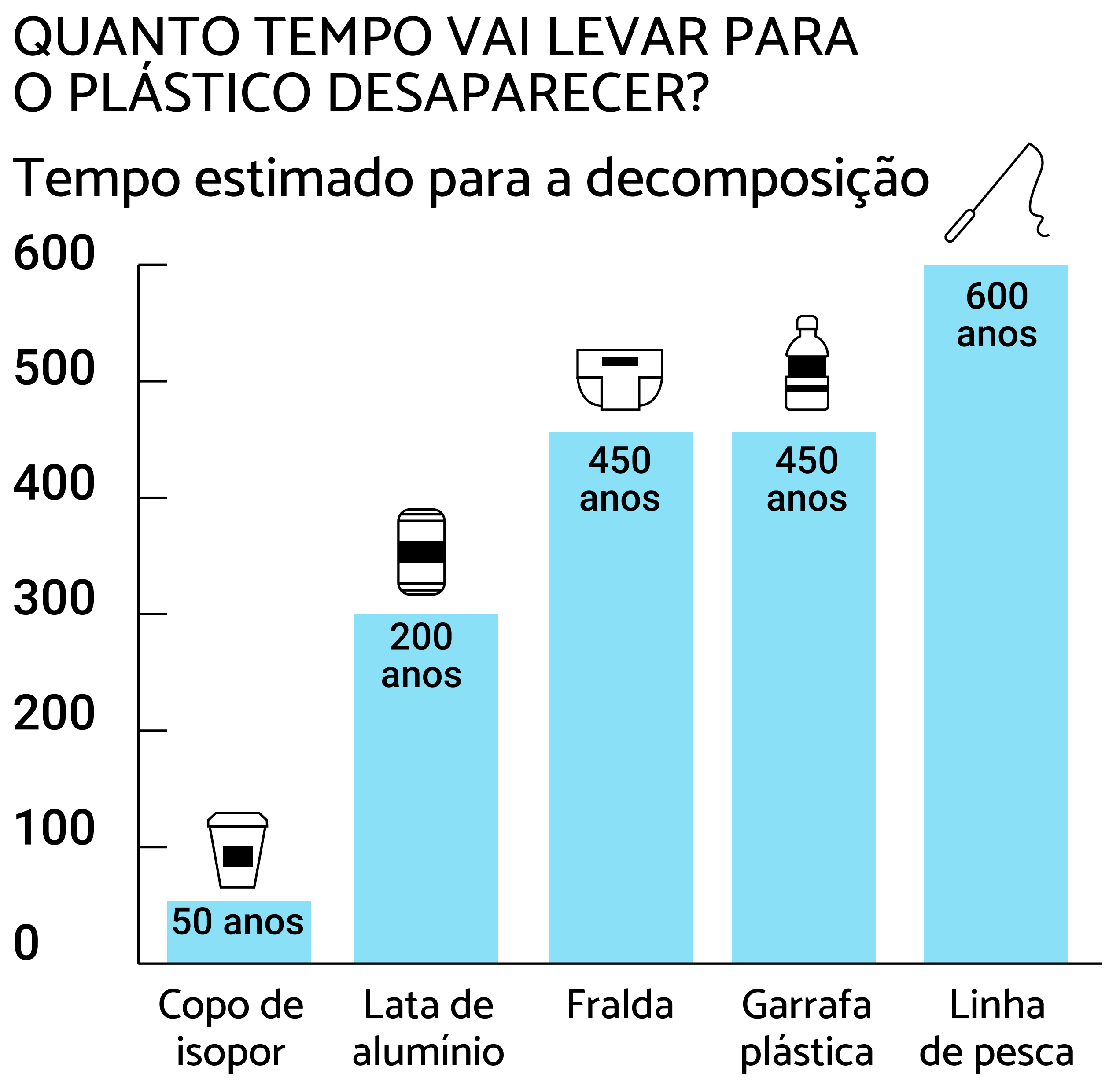
Inicie uma roda de conversa para conhecer os saberes dos estudantes a respeito de gráficos. Essa roda pode ser uma organização física de carteiras em círculos ou semicírculos, dentro da sala de aula ou fora dela. O importante, nesse momento, é buscar uma configuração diferente da convencional, proporcionando que cada estudante veja todos os colegas, a fim de estimular a comunicação entre eles.

Você pode, por exemplo, iniciar o tema dizendo que eles devem ter visto vários tipos de gráficos na televisão, internet, em jornais e revistas e, em seguida, apresentar algumas perguntas norteadoras, tais como: o que são gráficos? Para que servem? Quais os tipos de gráficos você conhece?

Como próximo passo, apresente o gráfico a seguir e a proposta. Do que o gráfico trata? Quais informações ele apresenta?

ATIVIDADE 3 ▶ **MOMENTO 1** ▶ **QUESTÃO 1**

Identifique os seguintes elementos no gráfico:



Tempo exato varia de acordo com o tipo de produto e as condições ambientais
FONTE: NOAA / Woods Hole Sea Grant - BBC

Fonte: BBC News - Cinco gráficos que explicam como a poluição por plástico ameaça a vida na Terra, 12/2017. Disponível em https://www.bbc.com/portuguese/geral-42308171 (acesso em 25/06/2022).

a) Título do gráfico
Resposta: quanto tempo vai levar para o plástico desaparecer?

b) Legenda
Resposta: não há.

c) Rótulos dos eixos
Resposta: vertical: tempo estimado para decomposição, com números na escala de 100 anos. Horizontal: nomes dos produtos com plásticos.

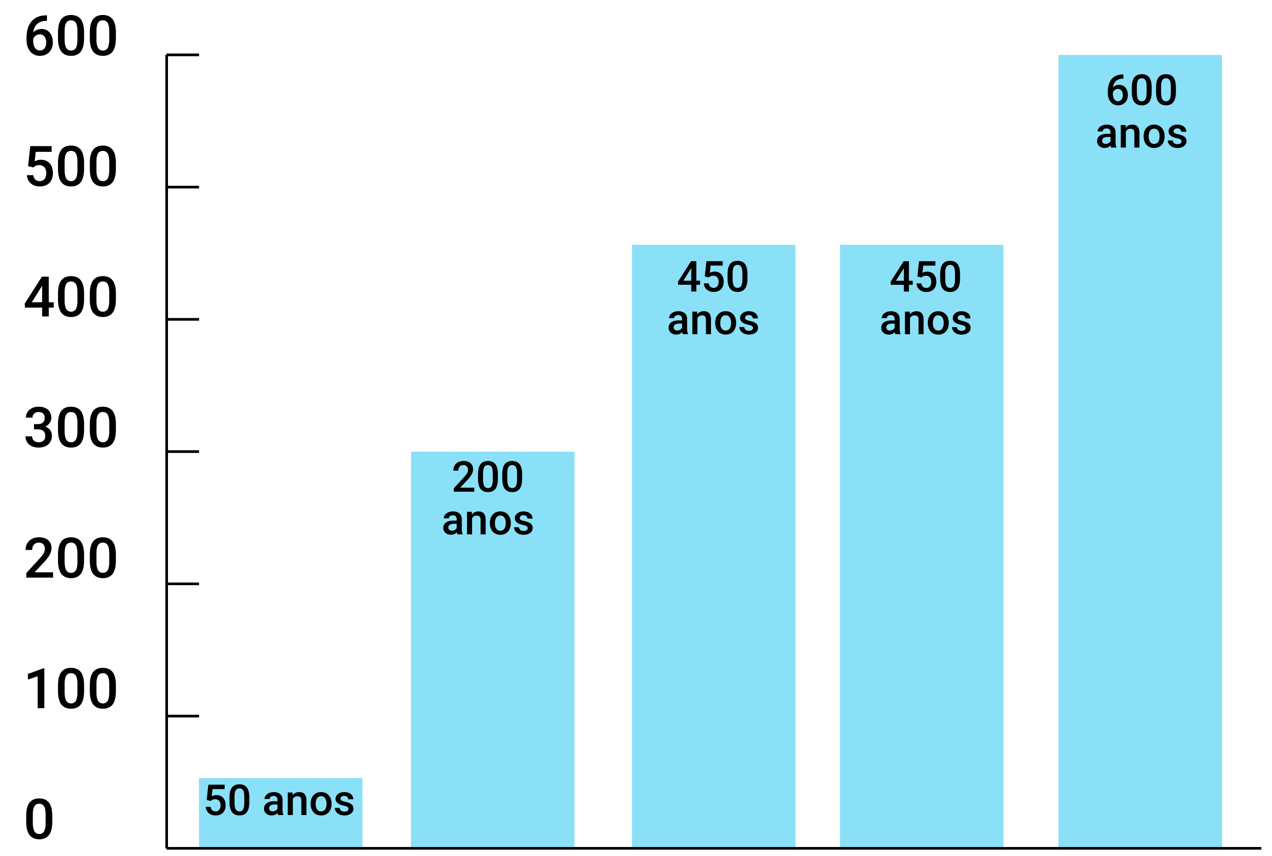
d) Linhas de grade
Resposta: não há.

e) Títulos dos eixos
Resposta: não há.

f) Fonte
Resposta: NOAA / Woods Hole Sea Grant - BBC.

Finalize esse momento com uma roda de conversa. Enfatize a importância dos elementos de um gráfico: todas essas informações são de grande importância na representação de dados em um gráfico, para que ele possa ser lido e compreendido com clareza e precisão. Você pode também propor o seguinte exercício: se no gráfico do exemplo fosse retirado o título, ou as unidades do eixo vertical, você conseguiria entender tudo que o gráfico se propôs a comunicar?

Retome a discussão sobre os diferentes tipos de gráficos: quais gráficos conhecem e questione em qual situação cada um deles é mais indicado. Deixe que busquem, em seus celulares, exemplos de gráficos diferentes dos apresentados e falem sobre o que representam a partir dos títulos, da apresentação, do tema, da legenda (se tiver) etc.



Tempo exato varia de acordo com o tipo de produto e as condições ambientais
FONTE: NOAA / Woods Hole Sea Grant - BBC

ATIVIDADE 3 ▶ **MOMENTO 2**

Gráfico de linhas e números racionais

1 AULA

Anuncie aos estudantes que estudarão mais detalhadamente alguns tipos de gráficos, seus elementos e situações em que são mais adequados. Oriente-os a trabalhar em duplas e incentive-os a registrar suas conclusões em todos os exercícios propostos, pois, ao final, algumas duplas serão convidadas a socializar suas respostas.

Professor/a, os exercícios propostos a seguir são abrangentes, pois, além de contemplar a construção e análise de gráficos, têm como proposta retomar os conjuntos dos números racionais e as operações fundamentais com esses números. Dessa forma, é muito importante ter um olhar especial para os momentos de ampliação da discussão e atenção ao conteúdo já familiar dos estudantes, para ajudá-los a sistematizar as aprendizagens, fazer reflexões e auxiliá-los nos momentos adequados.

Além dos exercícios apresentados, você pode também utilizar outras propostas envolvendo construção e análise de gráficos de linha, disponíveis no material didático adotado ou mesmo nos planos de aula da Nova Escola disponíveis em:

- Plano de aula: representação gráfica, disponível em: https://bityli.com/nova11.
- Plano de aula: elaboração de gráficos, disponível em: https://bityli.com/nova12.

Organize os estudantes em duplas e proponha que resolvam os exercícios 1 e 2 do Anexo 8. Dê tempo adequado para que possam conversar a respeito das propostas, formular hipóteses e fazer seus registros. Enquanto os estudantes realizam a atividade, procure observar e registar como resolvem as duas situações. Anote os nomes daqueles que encontram estratégias diferentes ou cole um post-it em seus lugares para lembrar depois.

Aproveite para analisar a postura deles na execução da atividade. Combine previamente com os estudantes algumas ações que você espera deles: participação ativa, colaboração na resolução dos problemas, respeito à opinião dos colegas, levamento de dúvidas ou perguntas, persistência, dentre outros.

Observe os estudantes durante a realização da proposta e registre suas conclusões. Lembre-se que a formação integral deve desenvolver não só as habilidades cognitivas, mas também as competências socioemocionais do jovem. Ao final da atividade. os estudantes podem dizer se conseguiram realizar as orientações solicitadas e expressar o que foi bom e o que pode melhorar.

Aproveite o momento para solucionar dúvidas, realize perguntas que fortaleçam o caminho de pensar do estudante, procure compreender como ele está pensando e evite fazê-lo seguir o seu raciocínio. Ajude-o - do ponto em que estão - a seguir em frente, persistir, buscar um caminho e não desistir. Uma possível intervenção, caso note que o estudante esteja desenvolvendo a questão de forma inadequada, é incentivá-los a dialogar com os colegas. Aprender com o outro é uma forma de analisar a própria produção. Por exemplo, pare a classe um minuto e diga: pessoal, estou um pouco confuso, pois já vi duas respostas diferentes para o exercício 2, alguns consideram que o gráfico está correto e outros não. Considerando que esse não é um problema com mais de uma resposta, o que pode estar acontecendo? Quem está com a razão? Pensem que depois vamos debater isso e vocês precisarão convencer o grupo de que sua resposta é a esperada.

Anote as dúvidas comuns para conversar com os estudantes no momento das discussões coletivas.

QUESTÃO 1

Observe o gráfico a seguir.

a) Quais as características desse gráfico? Para quais situações ele é indicado? Quais os pontos de atenção no momento da construção desse tipo de gráfico?
Exemplo de resposta esperada: esse é um gráfico de linhas, indicado para representar informações ao longo de um período de tempo.

b) Quais informações apresenta?
Resposta: ele apresenta o número de inscritos no ENEM no período de 2009 a 2017.

c) Segundo os dados observados, em algum momento, houve diminuição no número de inscritos? Quando?
Resposta: em 2015 e em 2017, houve diminuição do número de inscritos.

d) Em que ano ocorreu o maior número de inscritos? Qual foi esse número? Escreva-o por extenso (como se lê).
Resposta: em 2014 ocorreu o maior número de inscritos: oito milhões e setecentos mil inscritos.

e) Qual a diferença entre o número de inscritos em 2016 e 2015?
Resposta: a diferença entre o número de inscritos em 2016 e 2015 é de 900 000.

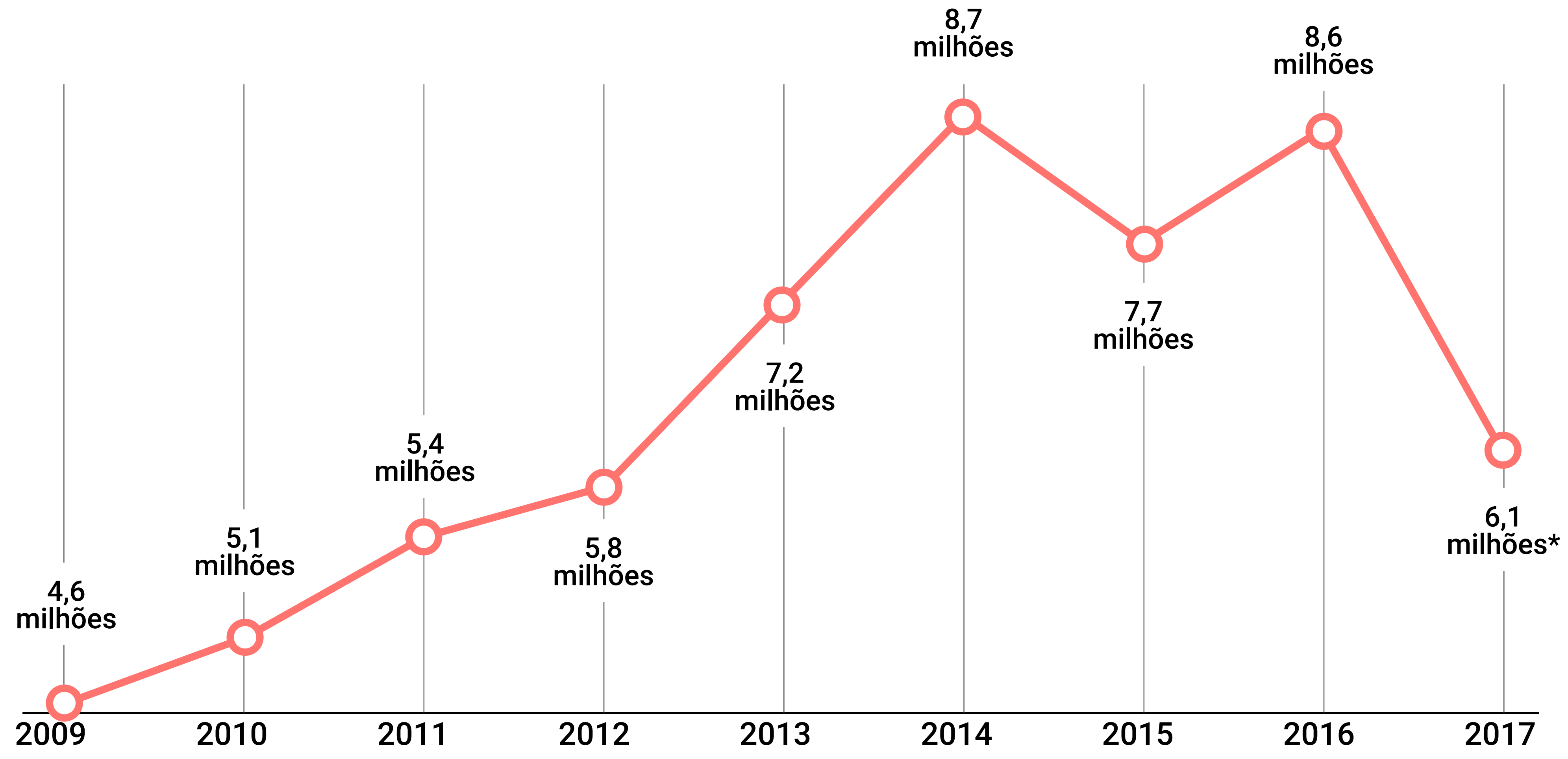
f) O menor número de inscritos que aparece no gráfico é 4,1. Escreva esse número por extenso. Esse é um número natural? O que representa a vírgula que aparece na escrita desse número?
Resposta: 4,1 milhões representa quatro milhões e cem mil, que é um número natural escrito na forma reduzida e a vírgula é utilizada para separar a classe dos milhões da classe dos milhares.

Fonte: CARVALHO, L. Enem 2017 tem o menor número de inscritos confirmados desde 2013. G1, maio 2017. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/enem/2017/noticia/enem-2017-teve-pelo-menos-61-milhoes-de-inscricoes-confirmadas.ghtml (acesso em 25/06/2022).

ENEM - HISTÓRICO DE INSCRIÇÕES

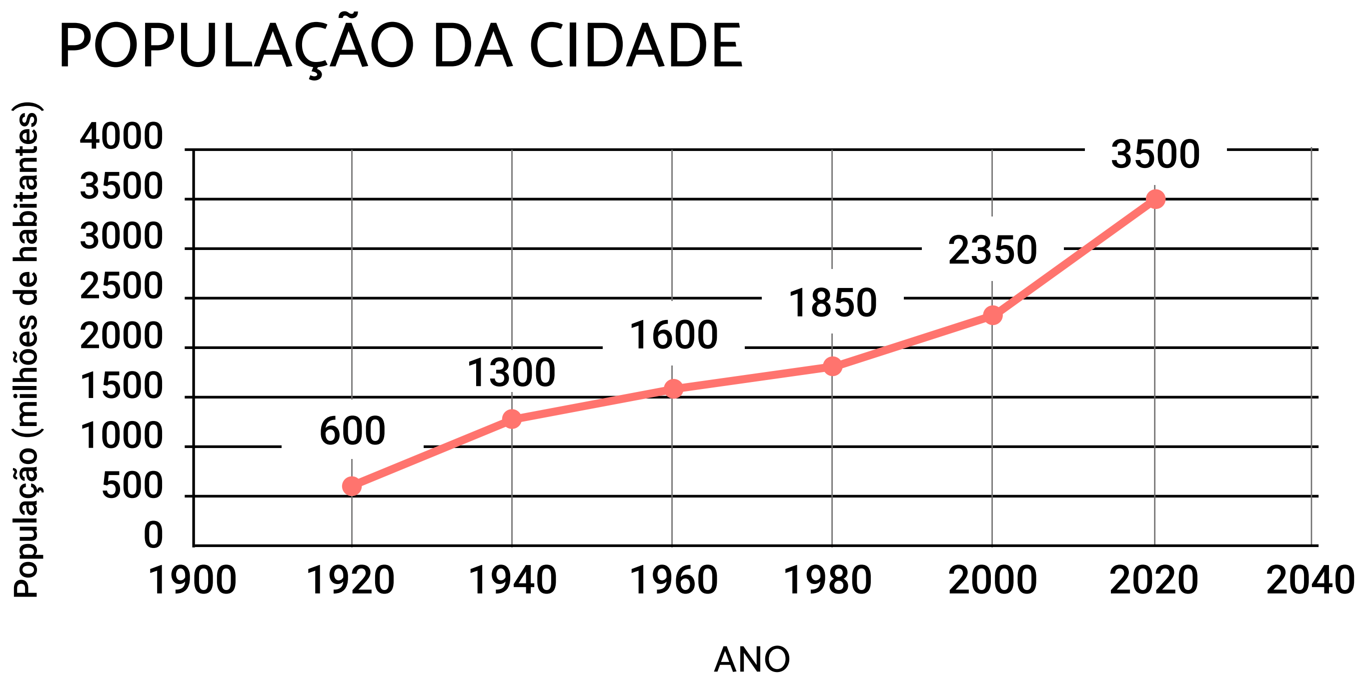
Número de inscrições confirmadas no Enem desde 2009

FONTE: MEC/Inep (*o número de inscrições confirmadas ainda podem mudar, após o prazo de análise de recursos sobre as isenções



QUESTÃO 2

Um pesquisador realizou um estudo sobre o crescimento populacional de uma determinada cidade e construiu o gráfico ao lado para apresentar os resultados dessa pesquisa.



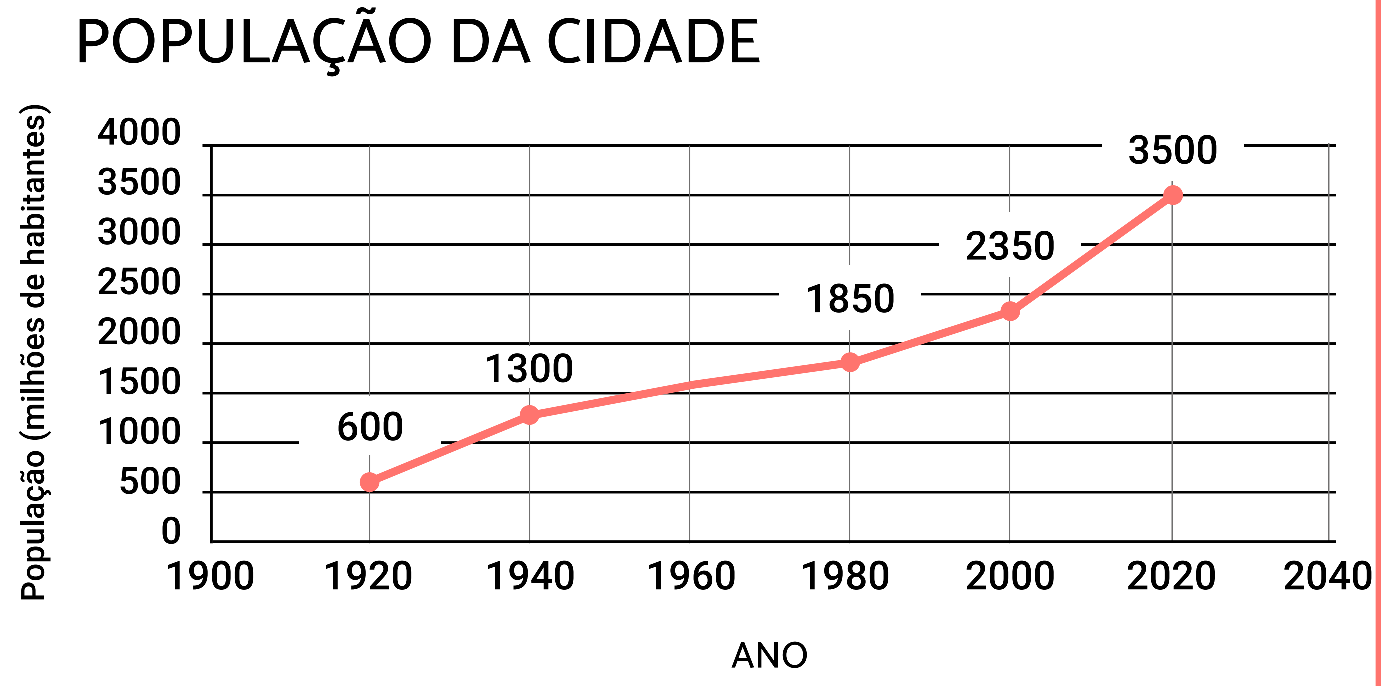
a) Escreva um pequeno texto contando quais as informações contidas no gráfico. Descreva as características do crescimento da população estudada.
Exemplo de resposta esperada: o gráfico apresenta o crescimento da população de uma cidade entre 1920 e 2020. É possível observar que a população cresceu nesse período.

b) Após analisar atentamente o gráfico, um estatístico afirmou que ele não representa corretamente o crescimento populacional da cidade estudada, visto que ele identifica erro nessa construção.

i. Converse com seus colegas: que erro seria esse?

ii. Após encontrar o erro, construa corretamente o gráfico. Você pode utilizar uma planilha eletrônica ou um plotador de gráficos (como o Geogebra, disponível em https://bityli.com/Geogebra, ou mesmo em planilhas eletrônicas como o Excel), para essa construção. Caso não seja possível, utilize um papel quadriculado.

Resposta: o gráfico esperado é:



iii. O erro cometido no 1º gráfico pode induzir a quais erros de interpretação?
Exemplo de resposta esperada: o erro na construção do gráfico está na escala do eixo horizontal, visto que foi utilizada a mesma distância para diferentes períodos. Esse tipo de erro pode levar o leitor a acreditar que o crescimento populacional foi mais lento e bem menos acentuado do que o realmente ocorreu entre 2000 e 2020.

Depois do trabalho em duplas, organize a sala em círculo e proponha que, pelo menos dois ou três estudantes (aqueles que você observou e marcou), registrem no quadro suas soluções por escrito, de modo que vocês possam analisar semelhanças, diferenças, e eventuais equívocos nas soluções encontradas.

Professor/a, no momento de discussão coletiva das atividades 1 e 2, garanta que os estudantes percebam que o gráfico de linhas é mais indicado para situações que envolvem a análise de dados numéricos ao longo do tempo. **Geralmente, no eixo horizontal (das abscissas ou eixo x),** representa-se o tempo, que pode ser dado em anos, meses, dias, horas etc., **enquanto o eixo vertical (das ordenadas ou eixo y),** representa a outra grandeza - no exemplo apresentado, a população.

Aproveite, também, para destacar a importância da escala, uma vez que os erros mais comuns vistos em gráficos da mídia estão relacionados à inadequação de escalas. Retome, ainda, a escrita dos números relacionadas ao valor posicional do sistema de numeração decimal, muito relevante para a representação decimal dos números racionais.

É importante que eles percebam que 8,7 milhões é a forma reduzida de escrever 8 milhões e 700 mil ou 8.700.000 e que 4,1 milhões é a forma reduzida de escrever 4 milhões e 100 mil ou 4.100.000. Se necessário, represente os números que aparecem no gráfico, utilizando o quadro valor lugar. Como essa aprendizagem é central para o letramento matemático, não considere aprendizagem dada.

Se for, eles relembram, se não for, aprendem. Isso é um exemplo de recuperação em processo. Se sentir que alguns alunos ainda têm dúvidas após a próxima proposta, faça, especialmente para eles, uma pequena lista de atividades e explique que elas são necessárias para aprender uma ideia de matemática que está em todos os lugares, ou seja, os números.

Assegure-se que todos conseguiram identificar que o erro na construção do 2º gráfico está na escala do eixo horizontal, visto que foi utilizada a mesma distância para diferentes períodos de tempo. Esse tipo de erro pode levar o leitor a acreditar que o crescimento populacional foi mais lento e bem menos acentuado do que o realmente ocorreu entre 2000 e 2020, por exemplo.

3ª CLASSE			2ª CLASSE			1ª CLASSE		
Classe dos milhões			Classe dos milhões			Classe dos milhões		
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
C	D	U	C	D	U	C	D	U
		8	7	0	0	0	0	0

ATIVIDADE 3 ▸ MOMENTO 3

Notação científica

2 AULAS

Professor/a, a próxima atividade tem como foco o estudo da notação científica e um conhecimento prévio necessário para o desenvolvimento deste tema, o conceito de potenciação. Se considerar adequado, faça uma retomada desse tema. Você pode, por exemplo, selecionar uma ou mais atividades dentre as disponíveis nos planos de aula da Nova Escola. Selecionamos os três, a título de exemplo:

- Plano de aula: conceito de potenciação, disponível em: https://bityli.com/nova13
- Plano de aula: propriedade de potenciação, disponível em: https://bityli.com/nova14

Sugerimos que você realize algumas atividades envolvendo o cálculo mental e a potenciação, como os disponibilizados a seguir, de modo que os estudantes possam discutir como pensaram e realizaram cada exercício.

Perceber regularidades é o que permite que os cálculos se tornem cada vez mais eficientes e, por isso, é preciso que os jovens sejam incentivados a explicitar como pensaram o cálculo e possam comparar sua forma de pensar com a de outros estudantes. Ao comunicar o modo de pensar, é feita a exercitação de estratégias denominadas metacognitivas, ou seja, quando se reflete sobre o que se sabe e o que falta aprender, construindo relações entre ideias e consolidando aprendizagens. Ao mesmo tempo, ao se comunicar com os colegas, o estudante pode ampliar seu repertório de estratégias de cálculo ao conhecer outras formas de fazê-lo, diferentes das suas. Veja que estamos trabalhando na perspectiva do letramento matemático, conforme proposto pela BNCC.

Nessa proposta de atividades para o desenvolvimento do cálculo mental, estabelecemos dois objetivos gerais. O primeiro deles é promover a memorização de um repertório de cálculos, que serão usados em outros mais complexos. Já o segundo deles, é mais próximo da competência específica 5 da área de matemática: "Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas". Veja que o desenvolvimento desta competência é possível a partir da comunicação de estratégias de cálculos pensados, pela construção, compreensão e comparação de diferentes procedimentos usados pelos estudantes e, consequentemente, melhoria nas habilidades de argumentação, registro escrito e posicionamento fundamentado em escolhas refletidas.

Anuncie para os estudantes que serão desafiados a resolver uma atividade de cálculo mental! A tarefa de cada um deles é efetuar cálculos que envolvem potenciação. Sinalize que não vale usar calculadora nesta proposta. Ao final de cada exercício, eles deverão socializar como pensaram para realizá-los.

Professor/a, não precisa realizar todos os exercícios de uma única vez, selecione ao menos um deles para iniciar a aula ao longo de uma semana, por exemplo.

ATIVIDADE EXTRA

Cálculo mental: potenciação

1 AULA EXTRA

a) Calcule o resultado das seguintes potências:

$2^2=$	$2^3=$	$-2^4=$	$3^2=$	$3^3=$	$-3^4=$	$10^2=$	$-10^3=$
$(-2)^2=$	$(-2)^3=$	$(-2)^4=$	$(-3)^2=$	$(-3)^3=$	$(-3)^4=$	$(-10)^2=$	$(-10)^3=$
$0^2=$	$0^3=$	$0^4=$	$1^2=$	$1^3=$	$1^4=$	$(-1)^2=$	$(-1)^3=$
$(-0{,}2)^2=$	$(-0{,}2)^3=$	$(-0{,}2)^4=$	$(-0{,}2)^2=$	$(-0{,}3)^3=$	$(-0{,}3)^4=$	$(-0{,}1)^2=$	$(-0{,}1)^3=$
$\left(\frac{3}{5}\right)^2=$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3=$	$\left(\frac{3}{5}\right)^4=$	$\left(-\frac{3}{5}\right)^2=$	$\left(-\frac{3}{5}\right)^3=$	$\left(-\frac{3}{5}\right)^4=$	$\left(-\frac{3}{5}\right)^0=$	$\left(-\frac{3}{5}\right)^1=$

b) Escreva o resultado das expressões usando uma única potência:

$7^4.7^5=$	$6^3.6=$	$(-2)^2.(-2)^4=$	$4^3.4.4^2=$	$(^1/_9)^2.\ (^1/_9)^4=$	$5.5^3.5^4.5=$
$5^4:5^2=$	$(-8)^7:(-8)^3=$	$9^3:9^2=$	$4^3:4^2=$	$(^1/_6)^6/(^1/_6)=$	$8^4:8^0=$
$(5^4)^2=$	$(7^2)^4=$	$(3^2)^5=$	$(4^3)^2=$	$(-9^4)^4=$	$(5^2)^7=$

c) Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das sentenças abaixo:

$(8^4)^2=8^6$	$10^3:10=10^3$	$2.2^4=2^5$	$4^5.(4^3)^2=4^{10}$
$(9^4)^4:9^4=9^{16}$	$(5)^3.\ (5^3)^4=5^{24}$	$(3^5)^2=3^{10}$	$(-5)^2:(-5)=-5$
$(-4)^5:(-4)^5=-1$	$(2^3)^2.(2^3)^2=(4^3)^2$	$(2^3)^2.(2^3)^2=2^{12}$	$(-9)^5:(-9)^5=1$

Para finalizar, reflita sobre as dificuldades que você teve para resolver essa atividade de cálculo mental! Quais ações você pode tomar que auxiliem a diminuir essas dificuldades?

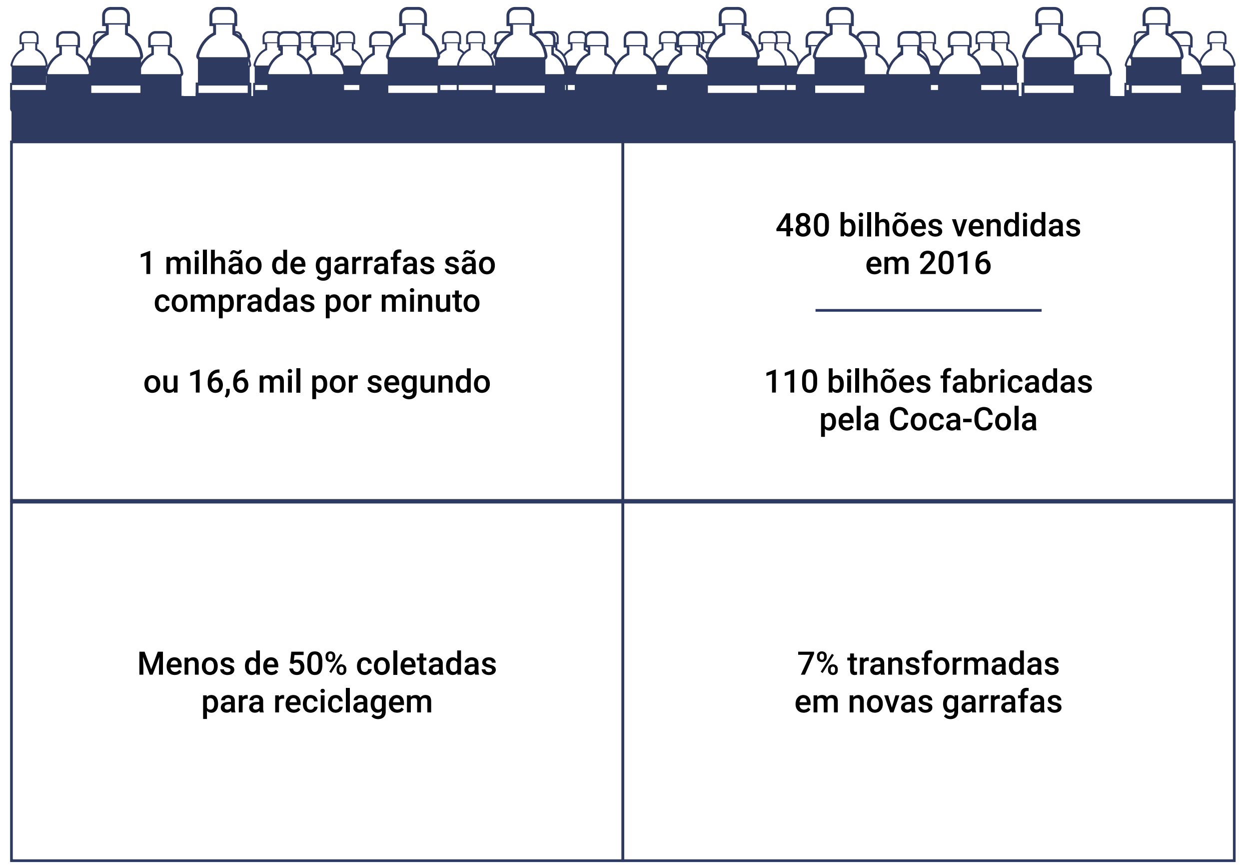
Em seguida, anuncie para os estudantes que conhecerão diferentes formas de representar um número e apresente o exercício 3 do Anexo 8.

QUESTÃO 3

Observe o infográfico:

GARRAFAS DE BEBIDAS

Um ”mar” de plástico



Fonte: Euromonitor

FONTE: CINCO gráficos que explicam como a poluição por plástico ameaça a vida na Terra. BBC News, dez. 2017. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-42308171. Acesso em: 25 jun. 2022.

a) Quais as informações que ele apresenta?
Resposta: o gráfico apresenta informações sobre as garrafas plásticas, que são compradas, fabricadas, vendidas e recicladas.

b) Segundo esse infográfico, quantas garrafas foram vendidas em 2016?
Resposta: 480 bilhões.

I. Escreva esse número, explicitando todas as suas ordens e classes.
Resposta: 480.000.000.000.

II. Escreva esse número a partir de um produto.
Existem muitas respostas como, por exemplo:
2 x 240.000.000.000 ou 4 x 120.000.000.000.

III. Escreva esse número a partir de um produto de maneira que um dos fatores seja uma potência de 10.
Existem muitas respostas como, por exemplo:
4.800.000 x 10^2, 480.000 x 10^3, 480 x 10^6

Professor/a, a resposta esperada no item I é única, 480.000.000. Já nos itens II e III existem muitas possibilidades. Convide alguns estudantes para compartilhar sua resposta (item II). Anote no quadro essas respostas, por exemplo:

Exemplos de respostas esperadas:
2 x 240.000.000
5 x 90.000.000
10 x 48.000.000.

É importante que percebam que esse é um problema com muitas respostas.

Repita o processo para o item III.

Exemplos de respostas esperadas:
48.000.000 x 10^1
4.800.000 x 10^2
480.000 x 10^3
480 x 10^6

É muito importante que os estudantes percebam que todos os produtos escritos no quadro são iguais a 480.000.000. Desafie-os a pensar o porquê:

480.000.000 = 480 x 1.000 x 1.000 = 480 x 103 x 103 ou seja, 480 x 106. É importante entenderem que existem muitas maneiras de escrever um número natural utilizando produtos.

Peça, então, que observem todos os números escritos e identifiquem se existe, entre eles, algum que obedeça a seguinte condição: "um dos fatores é um número n que pertence ao intervalo e o outro fator é uma potência de 10". Caso eles concluam que não existe essa escrita, desafie-os a escrevê-la. Espera-se que o estudante perceba que a forma procurada é 4,8 x 10^8. Aproveite o momento para lembrá-los que esse número está escrito em notação científica, uma maneira de escrever números muito grandes ou muito pequenos, para fornecer mais facilmente a ordem de grandeza de um número.

Organize a tarefa no caderno com os estudantes:

Para representar um número usando a notação científica, é necessário, por convenção, que este seja escrito da seguinte forma:

Número entre 1 e 10 → ▨ x10 ▨ ← Expoente negativo ou positivo

ou

p = a x 10^b, onde:

- a é um número entre 1 e 10, se p for positivo, ou entre -10 e -1, se p for negativo;
- b é um número inteiro, positivo ou negativo.

Para ampliar a aprendizagem, você pode convidá-los a escrever, também, outros números grandes, utilizando notação científica como, por exemplo, o número de garrafas compradas por minuto, que aparece no infográfico.

Apresente um texto como este: "o coração humano bate cerca de 110.000.000 de vezes em três anos e que, no corpo humano, há aproximadamente 97.000.000 metros de veias, artérias e vasos capilares ou que, no Universo, existem cerca de 10.000.000.000.000.000.000.000 de estrelas." e convide-os a escreverem os números em notação científica.

Em outra aula, proponha que resolvam o Exercício 4 apresentado a seguir.

QUESTÃO 4

Observe as informações a seguir:

- De maneira geral, o diâmetro das células animais variam de 0,01 mm a 0,02 mm enquanto nos vegetais medem de 0,02 mm a 0,05 mm.
- O tamanho médio das bactérias varia de 0,002 mm a 0,005 mm.

a) Segundo as informações apresentadas, a célula animal é maior ou menor que uma bactéria? Explique.
Exemplo de resposta esperada: a célula animal é maior que a bactéria, pois 2 centésimos é maior que 5 milésimos.

b) Qual o tamanho máximo de uma bactéria?
Resposta: 0,005 mm.

I. Escreva esse número a partir de uma divisão. Nesse momento, você pode utilizar a calculadora.
Exemplos de respostas esperadas:
0,01 : 2
0,025 : 5
Entre outras.

II. Escreva esse número a partir de uma divisão de maneira que o divisor seja uma potência de 10. Nesse momento, você pode utilizar a calculadora.
Exemplos de respostas esperadas:
$5 : 10^3$
$50 : 10^4$
Entre outras.

Professor/a, convide alguns estudantes para socializar suas conclusões. Incentive-os a explicar suas conclusões e aproveite o momento para verificar se eles utilizam o vocabulário correto relacionado aos números decimais (décimos, centésimos etc.) e se comparam corretamente esses números. Verifique, também, se utilizam argumentos convincentes para justificar suas respostas; por exemplo, a célula animal é maior que a bactéria, pois 2 centésimos é maior que 5 milésimos.

É importante que percebam que no item i existem várias respostas corretas, por exemplo:
0,01 : 2
5 : 1000
0,0015 : 3
Entre outras.

Enquanto os estudantes apresentam suas respostas, anote-as no quadro. Repita o processo para o item II.
Exemplos de respostas esperadas:
$0{,}5 : 10^2$
$5 : 10^3$
$50 : 10^4$
Entre outras.

Nesse momento, retome com os estudantes, num momento expositivo dialogado, as seguintes relações:

Sabemos que:

$10^3 = 1000$

$10^2 = 100$ (:10)

$10^1 = 10$ (:10)

$10^0 = 1$ (:10)

E agora, como continuar?

$10^0 = 1$

$10^{-1} = \frac{1}{10}$ ou 0,1 (:10)

$10^{-2} = \frac{1}{100}$ ou 0,01 (:10)

$10^{-3} = \frac{1}{1000}$ ou 0,001 (:10)

Essa escrita na forma de potências como expoentes negativos é uma convenção da linguagem matemática.

Proponha, então que, de forma coletiva, reescrevam as respostas do item II, que aparecem no quadro, utilizando multiplicação, em que um dos fatores é uma potência de 10. Espera-se que percebam o seguinte:

$0,5 : 10^2 = 0,5 \,.\, 10^{-2}$ $\quad$ $5 : 10^3 = 5 \,.\, 10^{-3}$ $\quad$ $50 : 10^4 = 50 \,.\, 10^{-4}$

Retome o conceito de notação científica e pergunte qual dos números escritos no quadro representa o tamanho máximo de uma bactéria na forma de notação científica. Caso eles concluam que não existe essa escrita, desafie-os a escrevê-la. Espera-se que o estudante perceba que a forma procurada é $5 \,.\, 10^{-3}$. Em seguida, convide-o a reescrever todos os números que aparecem no texto utilizando a notação científica.

Peça que os alunos identifiquem semelhanças e diferenças entre números grandes e pequenos, quando escritos em notação científica. Espera-se que identifiquem que os números grandes possuem expoentes positivos das potências de base 10 e que os números pequenos possuem expoentes negativos.

Atenção para a avaliação!

As produções ou registros produzidos pelos estudantes podem se constituir em excelentes instrumentos para avaliar o seu caminhar rumo aos objetivos desejados.

Ao final desta etapa, propomos que realizem um podcast contando a um colega o que aprenderam sobre potências e notação científica.

Trata-se de uma produção que permitirá o encerramento do assunto com uma etapa de reflexão e sistematização de noções e conceitos. Sugerimos um podcast, por ser uma tipologia textual bem atual e de conhecimento dos estudantes, mas é possível solicitar a produção de uma síntese, resumo ou até mesmo um parecer sobre o tema desenvolvido. Neste tipo de proposta, os estudantes terão que roteirizar o seu podcast, que deverá ter, no máximo, três minutos. Essa escrita é essencial para fazer o áudio e deverá ser entregue junto com o podcast. Para essa produção, os estudantes vão percebendo o caráter de fechamento do conteúdo e a importância de apresentar informações precisas, ideias centrais e significativas do tema abordado. Nesse momento, você aproveita para verificar como as noções e os conceitos foram compreendidos ou identificar equívocos que ainda permanecem, para reavaliar o seu planejamento e propor intervenções mais assertivas.

Não se pretende passar aqui a falsa impressão de que todos os estudantes acham simples a elaboração de registros ou que, desde o início, suas produções serão completas. São necessárias intervenções do professor para qualificar e melhorar esse processo. Então, ações em que os estudantes compartilhem suas produções, ouçam os áudios uns dos outros, discutam o que registraram e façam uma revisão coletiva são intervenções adequadas.

Nesse sentido, a produção de textos, áudio ou registros pelos estudantes não é solicitada para atribuição de nota, mas para se obter pistas sobre o caminhar do estudante em relação ao processo de ensino e aprendizagem.

O conjunto de informações obtidas com a análise dos registros dos estudantes, integrado às suas observações como professor, permitirá uma reflexão sobre os estudantes e sobre o seu próprio trabalho. De outro lado, constitui para o estudantes um momento de aprendizagem, um processo metacognitivo de pensar sobre a própria aprendizagem, organizando suas ideias para transformá-las em texto.

Para finalizar, você poderá propor outros exercícios envolvendo potenciação e notação científica e solicitar que os estudantes os resolvam utilizando o texto ou o áudio produzido como consulta. Você pode selecionar exercícios no material didático adotado.

ATIVIDADE 3 ▶ **MOMENTO 4**

Gráfico de barras e os números racionais

2 AULAS

Professor/a, anuncie aos estudantes que, nesse momento, continuarão explorando gráficos e números. Os focos agora são os gráficos de barras (horizontais ou verticais) e os números racionais. Proponha que formem duplas para realizar as propostas abaixo. Diga que, no final, algumas duplas serão convidadas a socializar seus registros e suas conclusões.

Orientações para a gestão da aula

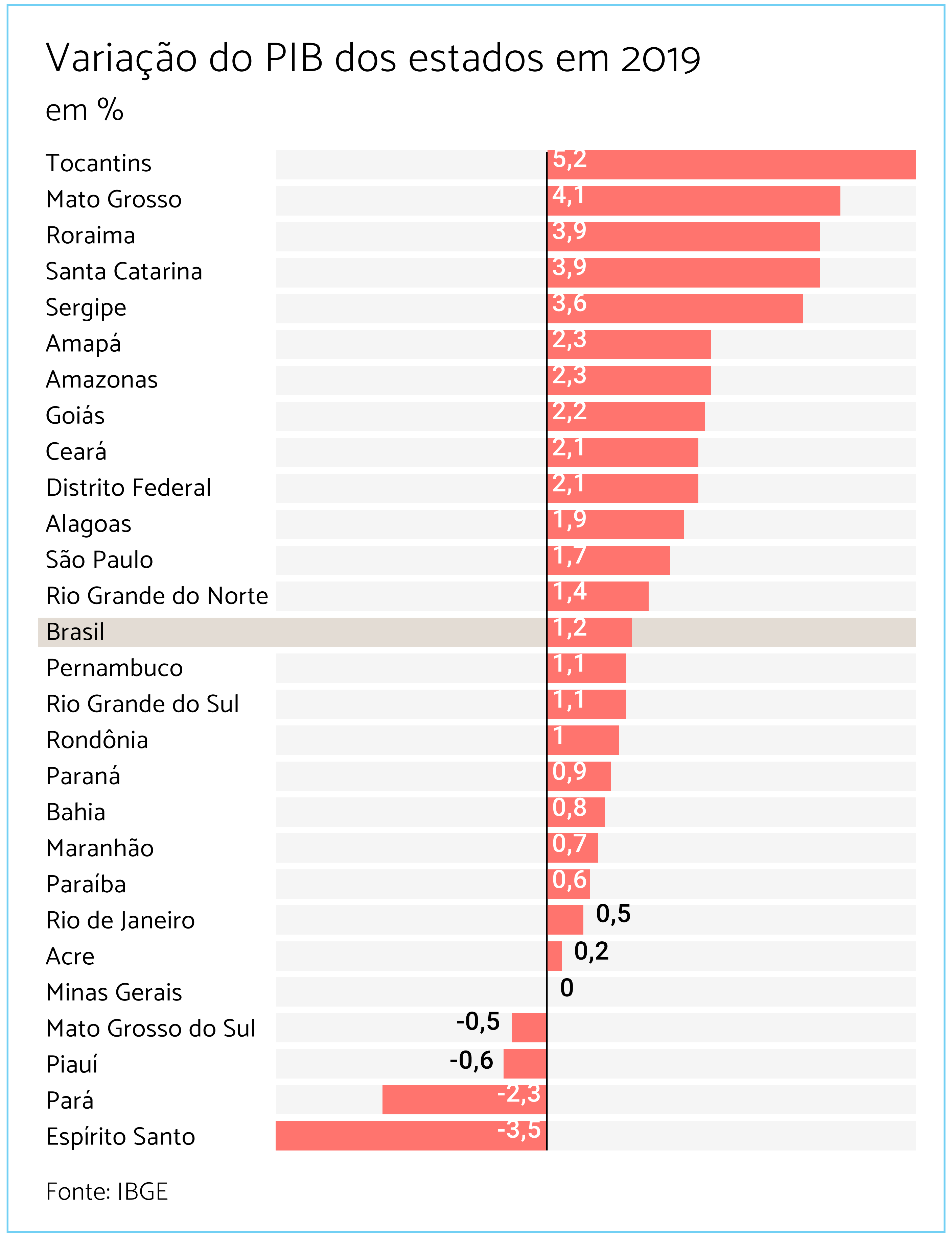
Temos utilizado várias vezes o recurso do diálogo com a sala toda, chamado de roda de conversa. Nesses momentos, faça uma boa mediação de conversa, de modo que:

- um clima acolhedor às ideias seja instaurado, fazendo com que todos se sintam à vontade de compartilhar o que pensam e sentem. Quando houver divergências de opiniões, valorize todas, propondo uma atitude de respeito do grupo em relação à diversidade. Evidenciar as singularidades e coincidências de valores, ideias, habilidades e pontos de vista é importante para que a turma se conheça e se reconheça como tal;
- os mais tímidos sejam incentivados a se expressarem e a compartilharem momentos de fala com os colegas;
- os jovens não "personalizem" a participação em alguém, como, por exemplo, nos líderes dos quartetos, pois esse momento é de caráter coletivo;
- a importância do registro seja enfatizada, orientando os alunos a anotarem o que de mais importante for discutido.

Apresente as situações 5 e 6 do Anexo 8 aos estudantes. Elas envolvem um trabalho com gráficos de barras horizontais e verticais e a exploração dos números racionais.

QUESTÃO 5

Observe o gráfico a seguir



FONTE: TOCANTINS teve maior alta do PIB entre os estados em 2019. G1, 12 nov. 2021. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2021/11/12/tocantins-teve-maior-alta-do-pib-entre-os-estados-em-2019-apenas-4-tiveram-queda-aponta-ibge.ghtml. Acesso em: 25/06/2022.

a) Quais as informações contidas no gráfico? Como descobriu? Quais as informações representadas no eixo horizontal? E no eixo vertical?
Exemplo de resposta esperada: o gráfico apresenta informações (em %) a respeito da variação do PIB do Brasil e dos seus estados. Essas informações estão no título do gráfico e no eixo vertical.

b) Converse com seu professor de geografia ou pesquise em revistas ou mesmo na internet: o que é PIB? O que significa dizer que a variação do PIB foi positiva? E o que significa se foi negativa?
Exemplo de resposta esperada: o PIB (Produto Interno Bruto) é um indicador que funciona como um termômetro da economia. : quanto maior o PIB de um país, maior sua atividade econômica e por sua vez, quanto maior a atividade econômica de um país, mais se consome, vende e investe nele.

c) Segundo as informações contidas no gráfico, qual estado apresentou a maior variação percentual do PIB em 2019? Qual foi essa variação?
Exemplo de resposta esperada: maior variação ocorreu em Tocantins e foi de 5,2%

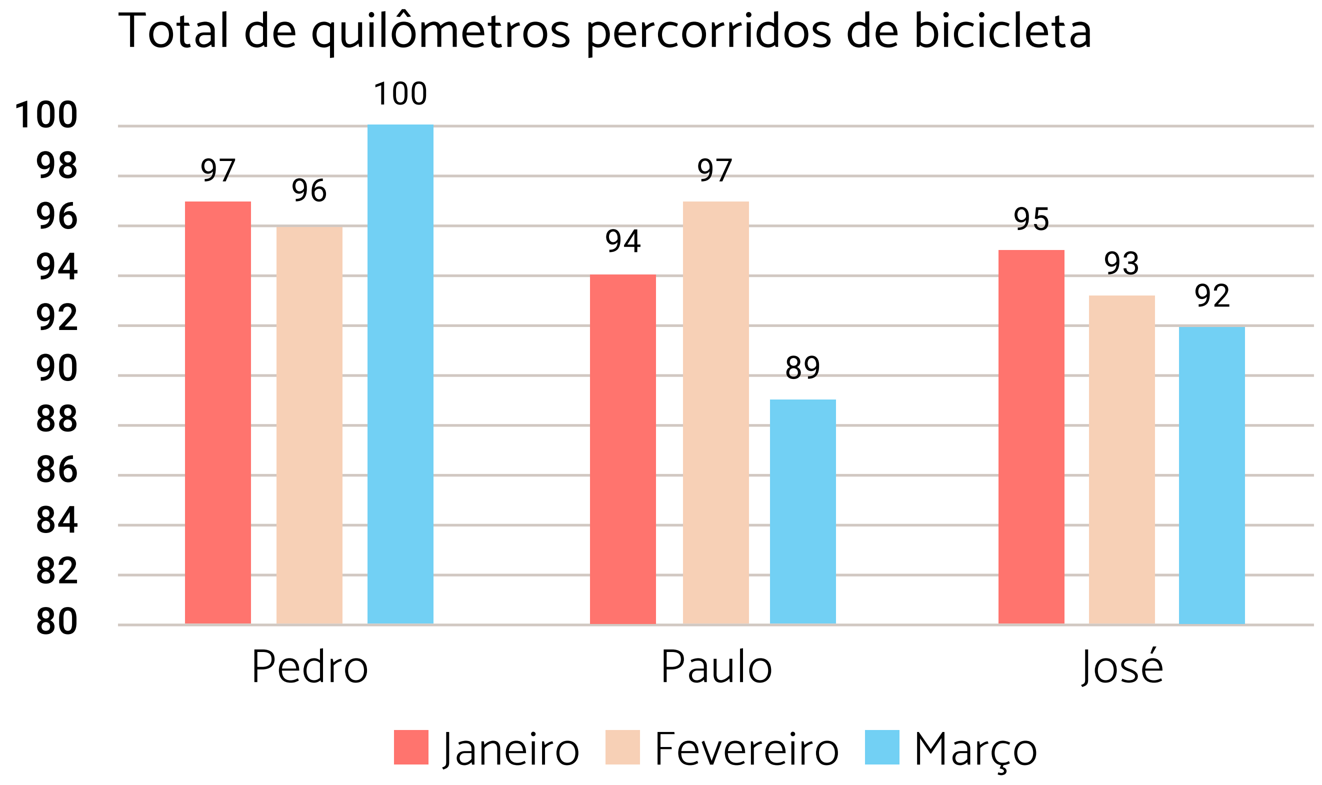
d) Qual estado apresentou a menor variação percentual do PIB em 2019? Qual foi essa variação?
Exemplo de resposta esperada: menor variação ocorreu no Espírito Santo e foi de -3.8%

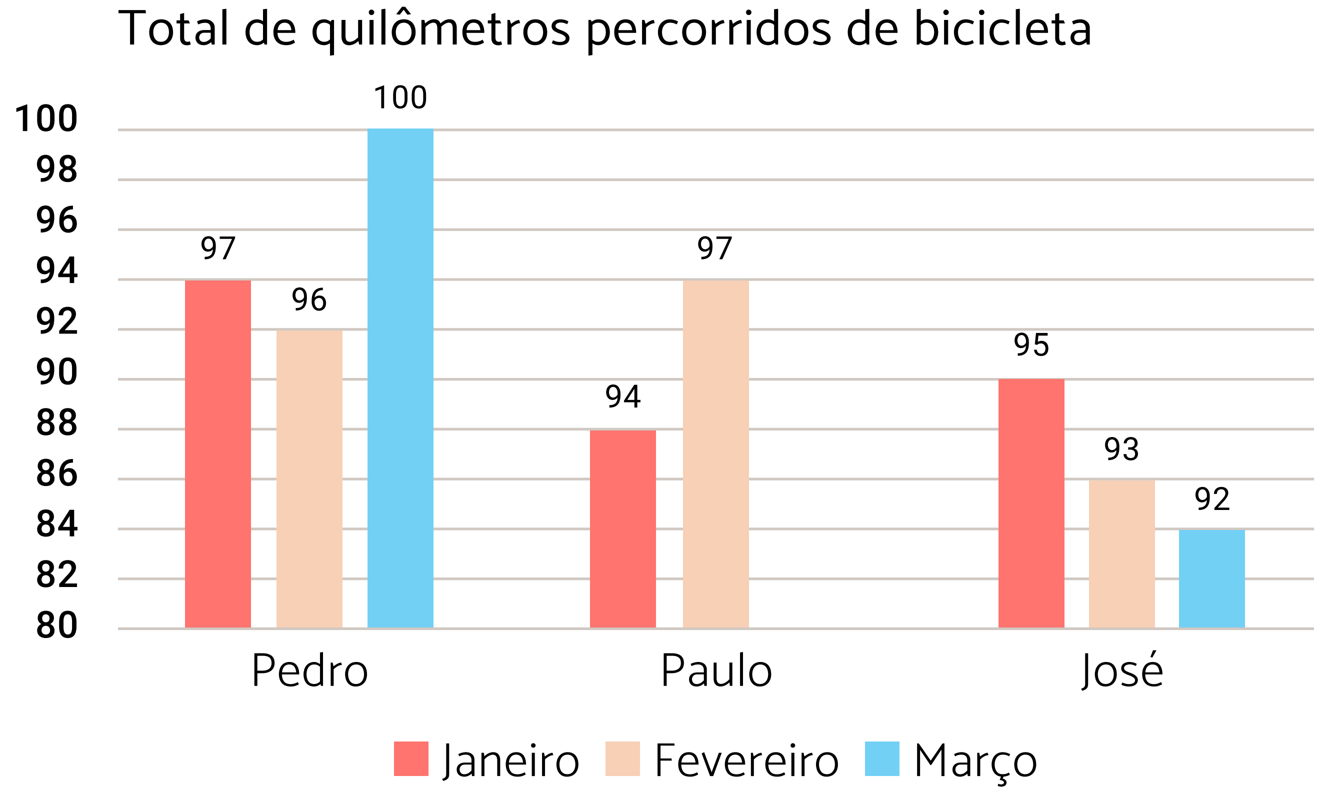
e) Qual a diferença entre a maior e a menor variação do PIB? Escreva uma expressão matemática para representar essa situação.
Resposta: Diferença: 5,2 - (-3,8) = 9,0

f) Quais os estados que apresentaram variação negativa do PIB (contração da economia)? Qual a diferença entre o índice de MS e do ES? Escreva uma expressão matemática para representar essa situação.
Exemplo de resposta esperada: os estados que apresentaram variação negativa do PIB foram: Mato Grosso do Sul, Piauí, Pará e Espírito Santo. A diferença entre o índice de MS e do ES é de 3,3% e pode ser representada por:
-0,5 - (-3,8) = 3,3

QUESTÃO 6

Analise os gráficos a seguir:





a) Quais as informações que eles apresentam no eixo horizontal? E no eixo vertical?
Exemplo de resposta esperada: eixo horizontal: nome dos atletas e no eixo vertical a quantidade de quilômetros percorridos de bicicleta.

b) Quais as semelhanças e diferenças entre eles?
Exemplo de resposta esperada: semelhanças: mesmos atletas, mesma quantidade de quilômetros percorrida por eles em janeiro e março. Diferença: quilometragem de Paulo no mês de março.

c) Qual o erro e a interpretação que o gráfico no 2 pode induzir? Por que isso acontece?
Exemplo de resposta esperada: como no gráfico 2 a escala está inadequada, pois começa no 90, pode dar a falsa impressão que Paulo não pedalou no mês de março.

Professor/a, no momento de discussão coletiva das atividades 5 e 6, converse com os estudantes a respeito dos cuidados ao construir um gráfico de barras (horizontais ou verticais): as barras devem sempre possuir a mesma largura e o seu comprimento tem como referência a escala apresentada no eixo (no caso do gráfico do PIB, a escala está no eixo horizontal e no caso do gráfico dos quilômetros percorridos, a escala está no eixo vertical). Além disso, é importante que percebam que a distância entre as barras deve ser constante.

Ao explorar a Atividade 5, aproveite para retomar o conjunto dos números racionais (forma decimal) e as operações e comparações entre esses números. Caso identifique que os estudantes ainda não dominam as operações com números inteiros ou decimais, você pode utilizar a metodologia de aula invertida, para que retomem esses temas em momentos individuais de estudo (que podem ocorrer em casa ou na aula) e, posteriormente, converse com seus colegas e professor/a na aula, para solucionar suas dúvidas e avançar com suas aprendizagens.

Dica

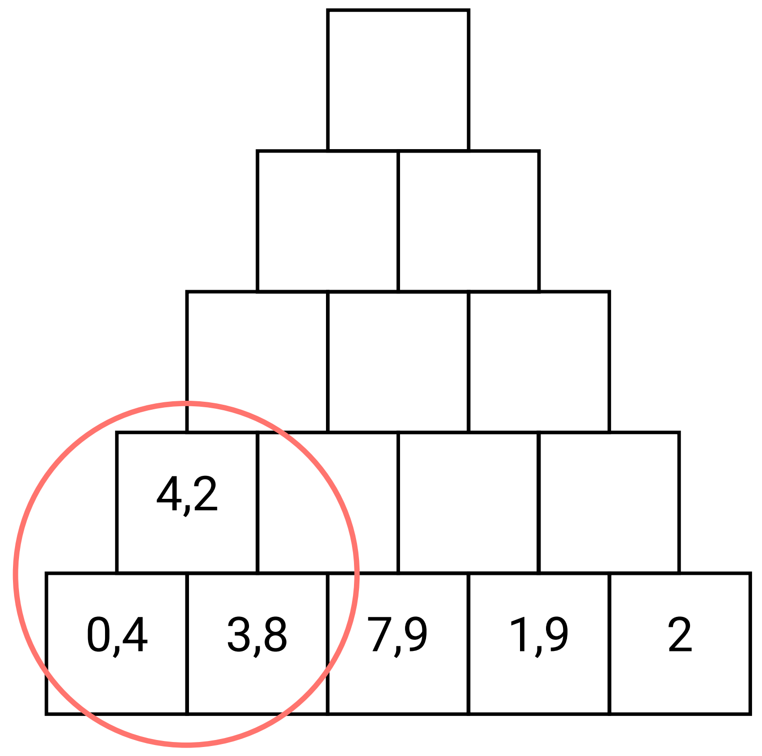
- Caso **opte pela aula invertida** para retomar as operações com números inteiros e com decimais, apresentamos a seguir materiais que podem ser disponibilizados para os estudantes.

- Se você identificar **fragilidade na adição e subtração** com os números inteiros, proponha que o estudante assista aos dois vídeos e resolva os exercícios, disponíveis em: https://bityli.com/somasub (acesso em 05/04/2022).

- Caso seja necessário **retomar multiplicação e divisão com números inteiros**, proponha que o estudante assista aos dois vídeos e resolva os exercícios, disponíveis em: https://bityli.com/multipli (acesso em 05/04/2022).

- Se você identificar **fragilidade na potenciação envolvendo números inteiros,** escolha e aplique algumas das propostas disponíveis em: https://bityli.com/nova15 (acesso em 27/04/2022).

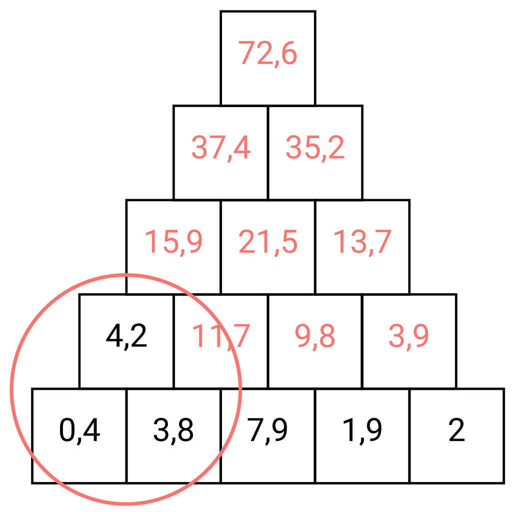
- Se você identificar **fragilidade na adição e subtração com os números racionais na forma decimal,** proponha situações desafiadoras envolvendo essas operações, como por exemplo:
  - Observe a figura e descubra o segredo: qual a relação entre os três números que estão dentro do círculo? Em seguida, escreva os números que estão faltando, seguindo sempre o mesmo "segredo". Não vale usar a calculadora, o objetivo é que você treine o cálculo mental!



- A figura abaixo representa um quadro mágico, em que a soma dos elementos de cada linha, coluna e diagonal é um número constante, a chamada "constante mágica". Descubra essa constante no quadro ao lado e complete o quadro.

0,5		7	2
		3,5	
4	5		
6,5	1,5		8

Respostas esperadas:



0,5	7,5	7	2
6	3	3,5	4,5
4	5	5,5	2,5
6,5	1,5	1	8

Retomando o momento de discussão coletiva da Atividade 6, apresentada anteriormente, assegure-se que os estudantes concluam que as informações nos dois gráficos são as mesmas, porém a escala utilizada no gráfico 2 (começando no 90) não é a mais adequada e pode induzir o leitor a concluir, de forma equivocada, que Paulo não percorreu nenhuma distância no mês de março.

ATIVIDADE 3 ▸ MOMENTO 5

Gráfico de setores e porcentagem

2 AULAS

Professor/a, anuncie aos estudantes que, para ampliar o estudo de gráficos e números, o foco agora é estudar o gráfico de setores e o cálculo de porcentagens.

Nesse momento, é importante conhecer o que os estudantes sabem a respeito de porcentagens e em que pontos eles ainda precisam avançar. Você pode fazer uma sondagem oralmente para obter um diagnóstico da turma. Apresente algumas perguntas norteadoras, como por exemplo:

Você já viu esse símbolo %?
Em quais situações ele aparece?
É possível escrever 60% na forma de fração?
O que significa calcular 10% de 80 reais?
O que é maior 50% de 80 ou metade de 80?

Encaminhe o diálogo de modo que percebam que a porcentagem aparece em gráficos, em índices tais como inflação, descontos, acréscimos, entre outros. Garanta que percebam que a porcentagem está relacionada a uma fração, cujo denominador é 100; por exemplo, 60% também pode ser escrito como 60/100=6/10=3/5, cuja metade é equivalente a 50%, e que existem diferentes estratégias para calcular porcentagem, sendo que algumas delas serão exploradas nas atividades apresentadas a seguir. Aborde, também, o conceito de proporcionalidade existente na porcentagem:

Se 10% de 50 é 5, então:
20% de 50 é 10 (o dobro de 10%)
30% de 50 é 15 (o triplo de 10%) etc.

Vale lembrar que perceber regularidades e fazer relações permitem que os cálculos se tornem cada vez mais significativos para os estudantes.

Proponha que formem duplas para realizar as propostas 7 e 8 apresentadas a seguir. Oriente-os a registrar suas estratégias e diga que, no final, algumas duplas serão convidadas para socializar seus registros e suas conclusões.

QUESTÃO 7

Considere a seguinte situação: em uma escola, foram ofertadas três (3) eletivas para os 120 estudantes do ensino médio. Observe na tabela quais foram essas eletivas e qual o percentual de estudantes que escolheu cada uma delas.

a) Denis escolheu o Laboratório de Química e decidiu investigar qual o percentual de estudantes que fizeram essa mesma escolha. Observe, na figura acima, os registros do jovem.

Eletiva	**Total de estudantes**	**Percentual dos estudantes**
Robótica	48	**40%**
Produção textual	42	**35%**
Laboratório de Química	30	**25%**
total	**120**	**100%**

:4

:4

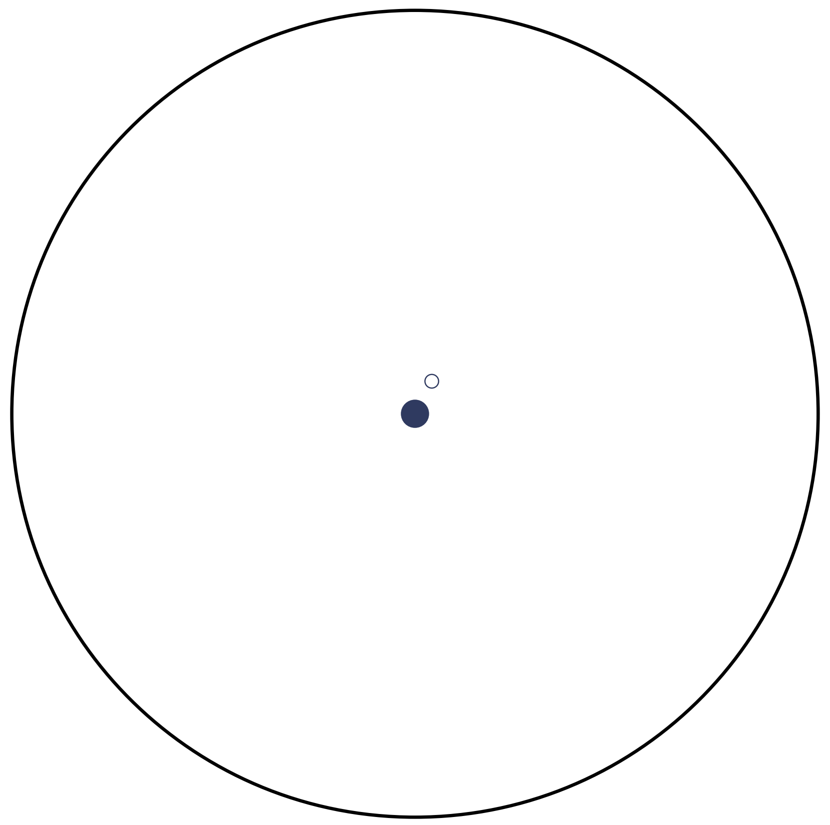
b) Você saberia explicar como ele pensou? Você acha que o raciocínio dele está correto?
Exemplo de resposta esperada: ele identificou que 100 : 4 = 25, então para encontrar o total de estudantes de laboratório ele dividiu 120 por 4 e encontrou 30.

c) Qual o número de estudantes que ele encontrou como resposta?
Resposta: 30

d) Calcule o número de estudantes que optou por Produção Textual e Robótica e preencha a 3ª coluna da tabela acima. Você pode utilizar a mesma estratégia do Denis ou optar por outra estratégia com a qual você se sente mais seguro/a. Se desejar, pode utilizar a calculadora.

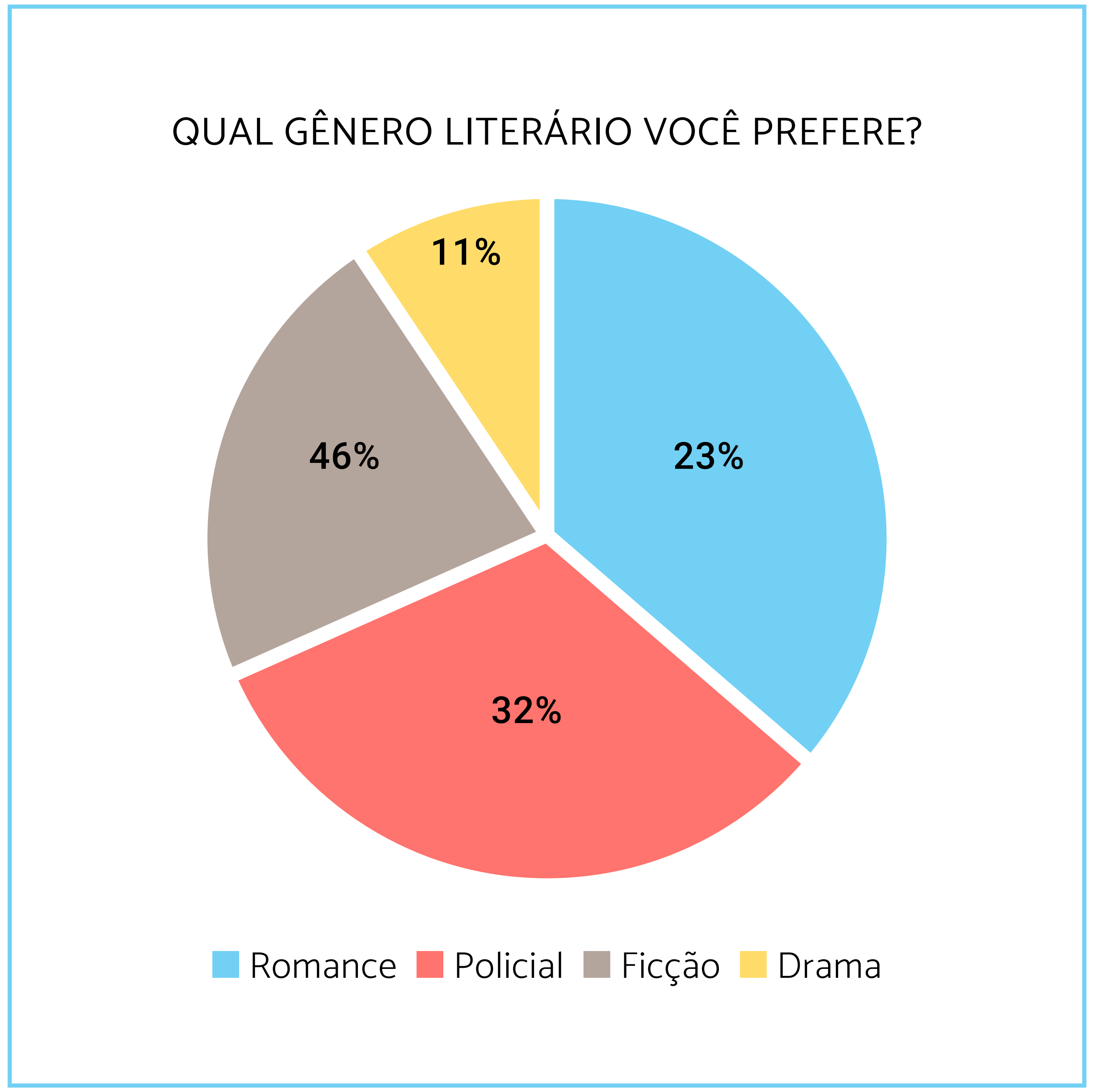
e) O seu desafio agora é construir um gráfico de setores para representar esses dados (utilize o círculo disponibilizado abaixo). Mas, antes de começar, converse com seu colega como determinar a medida de cada ângulo desse gráfico. Registre os seus cálculos para socializar no momento de discussão coletiva e utilize transferidor para obter um gráfico bem preciso. E não esqueça de colocar os elementos necessários no gráfico: título, legenda e rótulos.

f) O gráfico de setores é adequado para representar essa situação? Explique.



QUESTÃO 8

Observe o gráfico a seguir.



a) Quais as informações contidas no gráfico? Como descobriu?
Exemplo de resposta esperada: as informações são os gêneros literários preferidos e o % de preferência de cada um deles. Eu descobri lendo o título e os rótulos que estão no gráfico.

b) Você acha que tem algum erro na construção desse gráfico? Ele poderia dar origem a uma interpretação incorreta do leitor? Explique.

c) Qual o percentual total que aparece no gráfico? Você saberia explicar por que isso aconteceu?

d) O gráfico de setores é o mais indicado para representar essa situação? Por quê?

Resposta esperada: para os itens b) c) e d):
o erro é que o percentual dos gêneros, somados, resultam em 112%, isso pode ter acontecido porque algumas pessoas votaram em mais de um gênero textual. O gráfico de setores não é o mais indicado para representar essa situação.

Professor/a, após a realização das propostas, convide os estudantes a contarem quais os cuidados que precisam ter para construir um gráfico de setores e quais as características desse tipo de gráfico. Geralmente, eles possuem a crença de que o gráfico de setores é indicado quando as informações estão em porcentagem e esse é momento de desconstruí-la, enfatizando que esse tipo de gráfico só pode ser utilizado para representar as partes de um todo (100%). Além disso, a área de cada setor circular deve ser proporcional ao valor que ela representa.

Aproveite o momento de discussão coletiva do exercício 7 para retomar o conceito de porcentagem relacionado à fração de denominador 100 e a proporcionalidade direta que existe no cálculo de porcentagem. É possível que a maioria dos estudantes conheça apenas a regra de três como uma estratégia para efetuar esses cálculos, então esse é o momento adequado para ampliar o repertório dos estudantes: convide as duplas que utilizaram diferentes estratégias para explicar como pensaram e fazer seus registros no quadro. No final, peça aos estudantes identificarem semelhanças e diferenças entre as resoluções apresentadas. Oriente-os a escolher o registro que mais chamou sua atenção e copiá-lo em seu caderno. Veja algumas possibilidades:

1

$0{,}25 \cdot 120 = 30$

2

120	100%
x	25%

$100x = 120 \cdot 25$

$100x = 3\,000$

$x = 30$

3

$120 : 4 = 30$

4

10% de 120 = 12

20% de 120 = 2 . 10% de 120 = 2 . 12 = 24

+

5% de 120 = 10% : 2 de 120 = 12 : 2 = 6

25% de 120 = 24 + 6 = 30

ATIVIDADE EXTRA

Cálculo mental: porcentagem

1 AULA EXTRA

Esta seção tem por finalidade auxiliar os estudantes a desenvolver fluência em alguns cálculos, de modo que possam melhorar a sua capacidade crítica, reflexão e a memória, fornecendo, assim, ferramentas que os liberam para pensar em aspectos mais complexos de um problema do que a realização de contas básicas. De modo geral, isso os auxiliará a:

- construir e selecionar procedimentos adequados à situação-problema apresentada;
- desenvolver e sistematizar procedimentos de cálculo e estratégias de verificação e controle de resultados;
- utilizar instrumentos de cálculo, decidindo, em cada situação, sobre a pertinência e vantagem que representa sua utilização.

Lembre-se: o que permite que os cálculos se tornem cada vez mais eficientes é incentivá-los a explicitar como pensaram para calcular e comparar sua forma de pensar com a de outros estudantes. Ao comunicar o modo de pensar, é feita a exercitação de estratégias denominadas metacognitivas, ou seja, quando se reflete sobre o que se sabe e o que falta aprender, construindo relações entre ideias e consolidando aprendizagens. Ao mesmo tempo, ao se comunicar com os colegas, o estudante pode ampliar seu repertório de estratégias de cálculo ao conhecer outras formas de fazê-lo, diferentes das suas.

Vale lembrar que, nas atividades de cálculo mental, não é proibido o uso de registros e nem de lápis e papel, pois a ideia de cálculo mental não está associada a fazer "conta de cabeça", mas sim, a efetuar cálculos sem os algoritmos convencionais

Nesta atividade, convide os estudantes a realizar uma proposta para desenvolver o cálculo mental de porcentagem. Veja o exemplo apresentado no quadro a seguir.

Você já sabe que a porcentagem é uma fração de denominador 100. Assim:

$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ então calcular 10% de 80 significa efetuar $\frac{10}{100} \cdot 80 = \frac{1}{10} \cdot 80 = 80 : 10 = 8$

$20\% = 2 \cdot 10\% = 2 \frac{10}{100} = 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ então calcular 20% de 80 significa efetuar $\frac{20}{100} \cdot 80 = \frac{1}{5} \cdot 80 = 80 : 5 = 16$ ou então 20% de 80 = 2 . 10% de 80 = 2 . 8 = 16

$50\% = 5 \cdot 10\% = 5 \cdot \frac{10}{100} = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ então calcular 50% de 80 significa efetuar $\frac{50}{100} \cdot 80 = \frac{1}{2} \cdot 80 = 80 : 2 = 40$

Agora é a sua vez! Faça como nos exemplos anteriores: estabeleça relações e efetue os cálculos a seguir. Mas agora não é permitido o uso da calculadora, ok?

1. Complete a tabela calculando as porcentagens indicadas:

Número	10%	20%	30%	50%	60%	80%	150%
70							
110							
520							

2. Complete a tabela calculando as porcentagens indicadas:

Número	50%	25%	20%	10%	5%
100					
50					
150					
300					
500					

3. Calcule:

a) 30% de 1500;
b) 12% de 120;
c) 25% de 900;
d) 50% de 300;
e) 90% de 450.

“Bora” se preparar?

1 AULA

Professor/a, convide os estudantes a realizarem os exercícios a seguir. Eles podem trabalhar em duplas ou pequenos grupos, pois, assim, podem discutir as propostas, compartilhar as aprendizagens e escolher boas estratégias para resolver os desafios.
Enquanto eles realizam os exercícios propostos, circule pela sala para solucionar possíveis dúvidas e fazer os alinhamentos necessários.

QUESTÃO 1

(ENEM) Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, ao lado. A Companhia Vilatel respondeu, publicando dias depois o gráfico II, em que pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas.

Gráfico 1

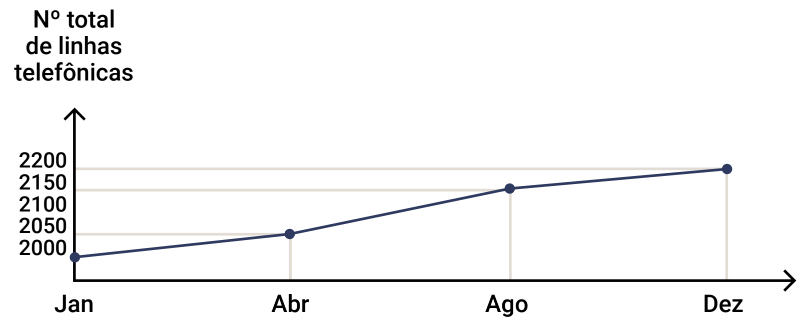
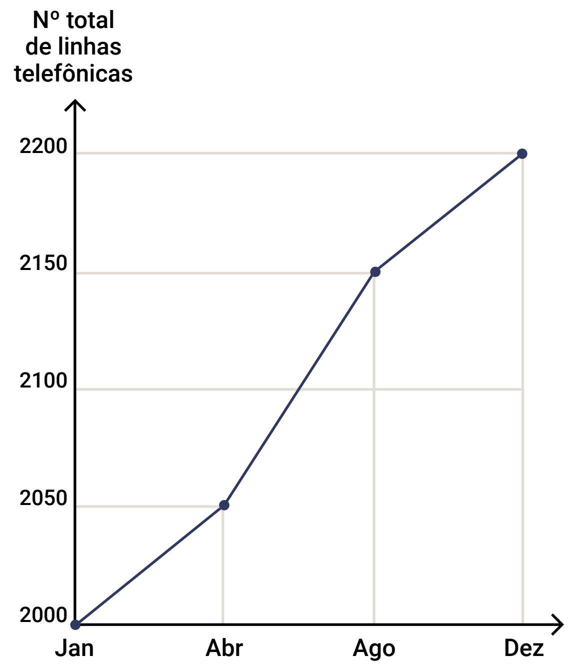


Gráfico 2



Analisando os gráficos, pode-se concluir que:

a) o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I;
b) o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto;
c) o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto;
d) a aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas;
e) os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

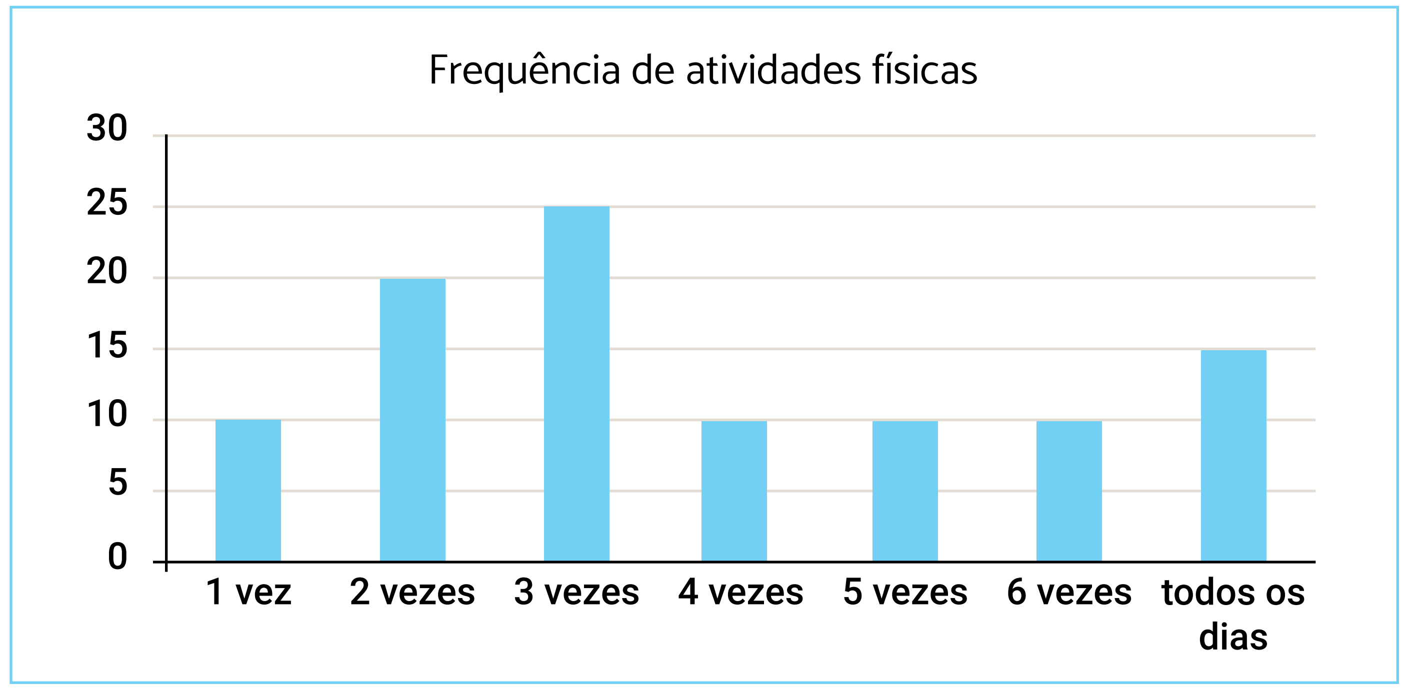
QUESTÃO 2

(ENEM 2017) Uma das principais provas de velocidade do atletismo é a prova dos 400 metros rasos. No Campeonato Mundial de Sevilha, em 1999, o atleta Michael Johnson venceu essa prova, com a marca de 43,18 segundos. Esse tempo, em segundo, escrito em notação científica é:

a) $0{,}4318 \times 10^{2}$
b) $4{,}318 \times 10^{1}$
c) $43{,}18 \times 10^{0}$
d) $431{,}8 \times 10^{-1}$
e) $4\,318 \times 10^{-2}$

QUESTÃO 3

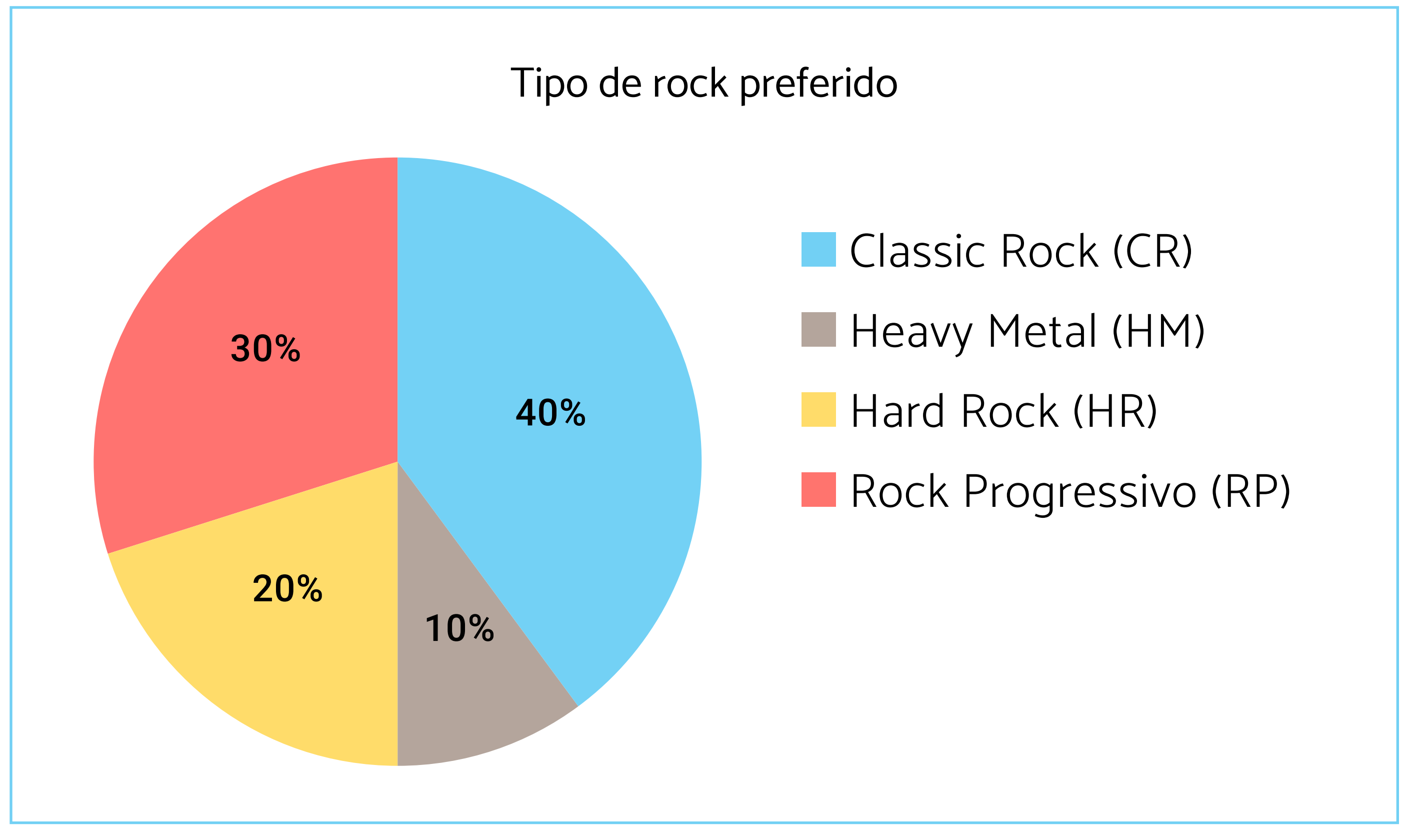
Uma pesquisa sobre a prática de atividade física foi realizada em um shopping center, em que os entrevistados eram convidados a responder se tinham o hábito de praticar alguma atividade física ao longo da semana e com que frequência a faziam. Cinquenta por cento afirmaram ter o hábito de praticar atividades físicas regularmente. A frequência semanal com que as faziam é a apresentada no gráfico abaixo. Qual é a porcentagem dos entrevistados que afirmaram fazer algum tipo de atividade física pelo menos 4 vezes por semana?



a) 22,5% b) 65% c) 35% d) 50% e) 45%

QUESTÃO 4

Certa emissora de rádio de rock fez uma pesquisa com 500 ouvintes sobre qual estilo de rock preferiam. O gráfico abaixo mostra o resultado dessa pesquisa.



A tabela que mostra o número de ouvintes associado ao gráfico acima é:

a)

Tipo de rock	CR	RP	HR	HM
Número de ouvintes	150	200	100	50

b)

Tipo de rock	CR	RP	HR	HM
Número de ouvintes	200	150	50	100

c)

Tipo de rock	CR	RP	HR	HM
Número de ouvintes	200	150	100	50

d)

Tipo de rock	CR	RP	HR	HM
Número de ouvintes	150	200	50	100

e)

Tipo de rock	CR	RP	HR	HM
Número de ouvintes	50	100	200	150

Atenção para a avaliação!

Professor/a, aproveite o momento de retomada dos exercícios da seção Bora se preparar para verificar e registrar o que os estudantes demonstram saber sobre os elementos de um gráfico e se conseguem construir e interpretar informações organizadas em gráficos. Verifique, também, se conseguem calcular porcentagem e utilizar notação científica de maneira adequada. Esses registros poderão ser muito úteis para preparar futuras intervenções, com o intuito de mitigar as fragilidades nas aprendizagens dos estudantes.

Esse é o momento de finalização de uma etapa, por isso é importante dar uma devolutiva para eles sobre suas aprendizagens e, também, sobre sua postura de estudante. Incentive-os a realizarem uma nova autoavaliação: como se percebem agora, após esse tempo de estudo e dedicação às aulas. Questione como está a sua motivação para iniciar a próxima sequência e, finalmente, convide-os a escrever para si mesmos como se veem agora em relação ao estudo de matemática.

Esse processo de reflexão é mais um momento de aprendizagem. Embora ainda possam achar que sentem dificuldade em relação ao conteúdo, espera-se que se sintam mais confiantes e persistentes frente aos desafios e ao seu processo de aprendizagem.

Conexões com o Volume 1 e outras explorações

Realizamos, nesta atividade, a retomada do trabalho com números naturais, inteiros e racionais e, ao mesmo tempo, a exploração de diferentes tipos de gráficos, focando em habilidades do ensino fundamental dos anos finais. Centramos esforços no trabalho com potência, notação científica e porcentagem.

É possível **ampliar a exploração do trabalho com números,** abordando ainda a reta numerada e focando no desenvolvimento das seguintes habilidades - **EM13MAT104,** que trata do cálculo de taxas e índices; **EM13MAT203,** que aborda a simulação de juros compostos e simples com planilhas eletrônicas e **EM13MAT303,** que envolve interpretar e comparar situações envolvendo juros simples e compostos por meio de representações gráficas ou análise de planilhas.

Uma exploração aprofundada do estudo de gráficos foi realizada na **Sequência Didática 1, Volume 1 do Fortalecimento da Aprendizagem** (disponível em: https://bityli.com/SD1) do material Fortalecimento da aprendizagem. O foco dessa sequência foi a **análise de dados,** identificando a importância de seus elementos, reconhecendo qual o gráfico mais indicado para representar uma determinada situação e detectando possíveis erros de interpretação por conta da escala, por exemplo. Em seguida, foi realizado um estudo acerca das **medidas de tendência central: moda, média e mediana,** identificando qual delas melhor representa um determinado conjunto de dados, abordando deste modo as seguintes habilidades previstas no EM: **EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT314 e EM13MAT316.**

Em se tratando do estudo de estatística, ainda é possível explorar, a partir da 2ª serie do ensino médio, as habilidades **EM13MAT102,** que tem como foco a discussão acerca do uso de amostras não apropriadas; a habilidade **EM13MAT202,** cujo foco é planejar e executar pesquisa amostral para produção de gráficos e EM13MAT406, que amplia e complementa a habilidade EM13MAT316 com foco em frequência absoluta, relativa e acumulada.

O estudo de probabilidade se concentra no desenvolvimento de **três habilidades focais no ensino médio: EM13MAT311, EM13MAT312 e EM13MAT511,** que poderão ser desenvolvidas na 3ª série. Para essa abordagem, sugerimos que você consulte a **Sequência Didática 1, Volume 1 do Fortalecimento da Aprendizagem** (disponível em: https://bityli.com/SD1), em que exploramos a probabilidade da ocorrência de alguns eventos aleatórios sucessivos. Caso seja necessário retomar conceitos estruturantes de probabilidade, sugerimos que você faça uso dos seguintes materiais:

- Conceito de probabilidade, disponível em: https://bityli.com/probabi.
- Site do Mathema, dispoível em: https://bityli.com/mathemapro e https://bityli.com/roledados.

ATIVIDADE EXTRA

Resolvendo outro tipo de problema

1 AULA EXTRA

- Foco: resolução de um problema sem números.
- Tempo sugerido: 1 hora/aula
- Possíveis materiais: uma cópia do problema para cada grupo ou a sua versão digital para ser projetada para os estudantes

Quando o estudante se depara apenas com exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas estudadas anteriormente, não se transforma em um resolvedor de problemas experiente, pois, nesses casos, busca na memória um exercício já conhecido e desenvolve passos análogos, muitas vezes de forma mecânica, não garantindo que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações mais complexas.

Para impulsionar o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas, é preciso apresentar situações que possibilitem aos estudantes mobilizar conhecimentos adquiridos e criar novas estratégias de resolução, de modo a pensar por si mesmo, a argumentar, a perseverar na busca da solução e na tomada de decisão dentre os diferentes caminhos de resolução. Desta forma, é importante apresentar, com frequência e regularidade, problemas de lógica, estratégia, com muitas soluções ou mesmo sem solução. Nesta proposta, apresentaremos um em cada sequência didática.

Pensando nisso, reúna os estudantes em pequenos grupos e proponha a situação a seguir: anuncie que o desafio é resolver um problema sem números.

Incentive os jovens a ler e interpretar o texto com calma e atenção, visto que esse problema possui muitas informações que precisam ser “cruzadas” para resolvê-lo. Esclareça que eles podem fazer desenhos, esquemas ou tabelas para encontrar a resposta e que, no final, não devem esquecer de checar se a resposta encontrada torna verdadeira todas as premissas apresentadas. Mostre, também, que esse exercício pode parecer um pouco diferente, mas que você confia que eles conseguirão fazer e que gostarão de vencer o desafio.

André, Bruna, Caio, Daniel e Eliana são irmãos. Sabemos que:

- André não é o mais velho.
- Caio não é o mais novo.
- André é mais velho que Caio.
- Eliana é mais velha que Caio e mais nova que André.
- Bruna é mais velha que André.

O seu desafio é descobrir a ordem de nascimento dos cinco irmãos. Após a leitura das informações, responda:

- Qual é o desafio que você precisa resolver?
- Quais as informações sobre André?
- Quais as informações sobre Caio?
- Quais as informações sobre Bruna?
- Quais as informações sobre Eliana?
- Como você vai organizar tantas informações?
- E no final, responda: qual a ordem de nascimento dos cinco irmãos.

Resposta esperada: do mais velho para o mais novo: Bruna, André, Eliana, Caio e Daniel.

APÓS A RESOLUÇÃO

Enquanto os estudantes resolvem a situação proposta, circule pela sala e identifique os grupos que utilizaram diferentes estratégias. Após a resolução do problema, convide esses grupos para apresentá-las aos colegas.

A IMPORTÂNCIA DA AULA

A sala de aula é um espaço no qual cada aluno desenvolve o conhecimento matemático a partir de experiências pessoais, juntamente com a interação com colegas e professor. Cada aula é um momento único de encontro, com um percurso bem definido, para que o estudante saiba o que vai aprender e o que se espera dele naquele tempo determinado. A abordagem colaborativa e problematizadora, nesse momento, deve garantir oportunidades de diálogo entre todos os participantes e favorecer a organização das aprendizagens, a explicitação das dúvidas, a convivência entre os diferentes. Na aula, que se caracteriza como espaço de compartilhamento e construção de conhecimento, há lugar para errar, tentar, voltar atrás, confrontar ideias e aprender por aproximações.

Você, professor/a, atua para que haja um envolvimento consciente e assumido do estudante na realização das tarefas. A vivência de experiências de aprendizagem só ocorre com essa participação intensa. Daí a importância de se propor ao grupo situações fora da rotina e com algum grau de complexidade, ajudando-os a desenvolver capacidades como a determinação, a resiliência e a responsabilidade.

Todo esse processo deve acontecer em um ambiente em que os alunos propõem, exploram e investigam problemas que provêm tanto de situações reais quanto de situações lúdicas ou de investigações relacionadas à própria matemática. Esse é um ambiente positivo que encoraja os alunos a propor soluções, explorar possibilidades, levantar hipóteses, justificar seu raciocínio e validar suas próprias conclusões. Como afirma Boaler (2019), desenvolver a mentalidade de crescimento porque a matemática será ensinada como uma “disciplina aberta e criativa, relacionada a conexões, aprendizagem e crescimento, onde os erros são encorajados e coisas incríveis acontecem” (p. 19).

A aula de matemática, voltada para um enfoque problematizador, exige do professor/a uma condução organizada e que respeite o tempo e a possibilidade de trabalho pessoal dos alunos, seja individualmente ou em grupos. Dessa forma, eles poderão se envolver nas atividades e ter disciplina e organização para pensar, analisar e discutir, que é o sonho da maioria dos educadores em relação aos seus alunos e suas aulas. John Van de Walle (2009, página), em seu livro, sugere o seguinte esquema para a condução da aula de problemas.

FASE ANTES (duração: 10-15 min)	Os alunos precisam compreender o problema. Os alunos devem saber por que estão trabalhando com problemas. Os alunos precisam saber o que aprenderão fazendo aquele problema.
FASE DURANTE (duração: 20-30 min)	Os alunos trabalham e o professor acompanha-os, observando, avaliando, anotando. Os alunos precisam se concentrar, então não é hora de interromper para brincar com o aluno, nem fazer comentários desnecessários. O professor deve atender apenas o aluno ou grupo, em caso de dúvida, não devendo responder para a “classe toda ouvir”. O professor tem um problema extra com alunos que trabalham muito rápido na tarefa originalmente proposta.
FASE DEPOIS (duração: o restante da aula)	Os alunos são encorajados a partilhar suas soluções, dúvidas e processos realizados. O professor escuta, aceita e questiona as apresentações. A classe se torna uma comunidade de discussão e aprendizagem. As soluções são analisadas, debatidas; e as conclusões, anotadas. Uma síntese de ideias é feita.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental, Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. 6. ed. São Paulo: Artmed, 2009.

Materiais de apoio

Plano de estudos

Orientações para o estudante em momentos de autogestão

Caro/a, professor/a,

As atividades a seguir têm como objetivo possibilitar que os estudantes **aprofundem as aprendizagens** construídas na 1ª sequência didática para o ensino médio, em momentos de estudos individuais. Lembramos que **estudar individualmente** é uma parte importante do processo de fortalecimento da aprendizagem. Assim, nesses momentos, o estudante depara-se com o que ele sabe e o que falta aprender.

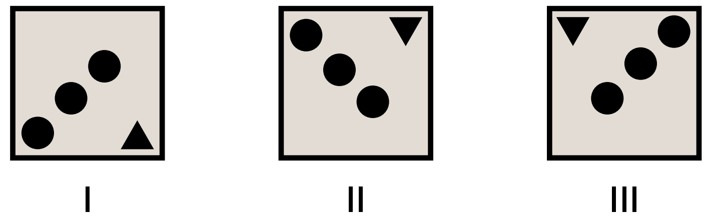
Sugerimos que você convide os estudantes a resolver as questões a seguir, ao final de cada atividade vivenciada em sala, uma vez que elas estão diretamente relacionadas aos temas desenvolvidos em cada sequência didática.

Incentive o estudante a consultar as anotações e materiais produzidos nas aulas, bem como oriente-o a registrar uma justificativa para as questões de múltipla escolha, lembrando-o de que **o importante não é a resposta certa, mas saber como chegar a ela.** Diga também que em caso de dúvidas, ele pode procurar os colegas ou o/a professor/a.

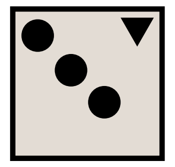
Bloco de questões referentes à Atividade 2

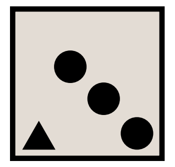
QUESTÃO 1

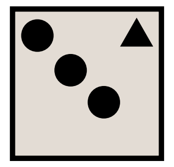
(ENEM) Um decorador utilizou um único tipo de transformação geométrica para compor pares de cerâmicas em uma parede. Uma das composições está representada pelas cerâmicas indicadas por I e II.

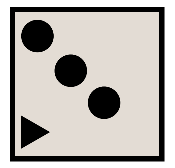


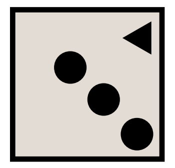
Utilizando a mesma transformação, qual é a figura que compõe o par com a cerâmica indicada por III?

a)


b)


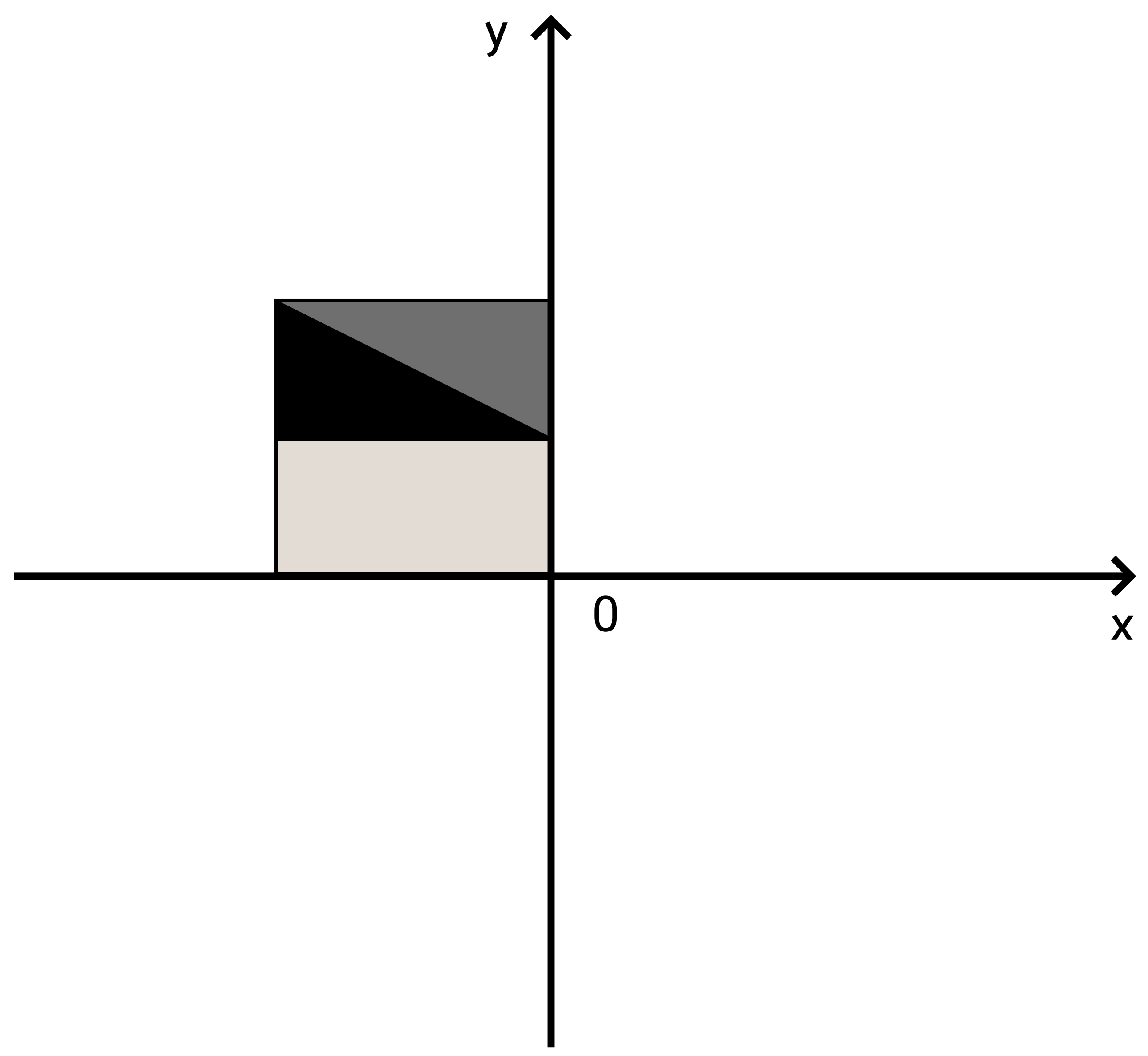
c)


d)


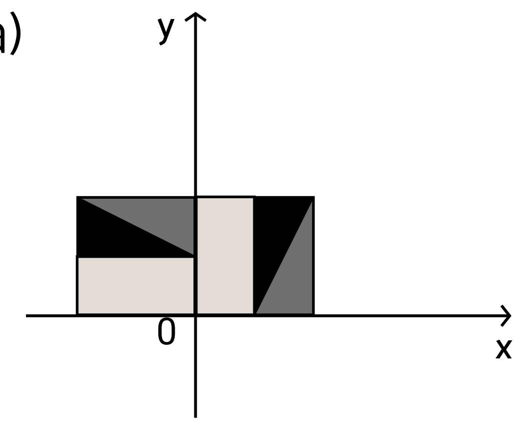
e)


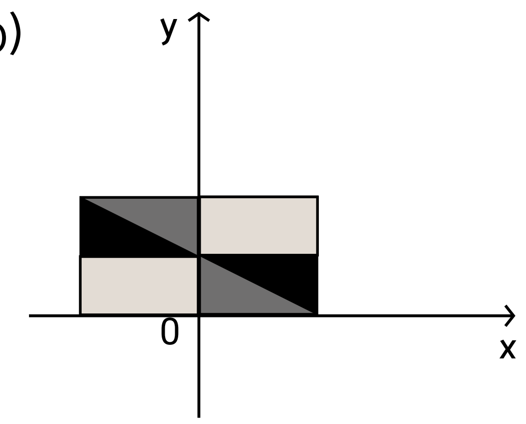
QUESTÃO 2

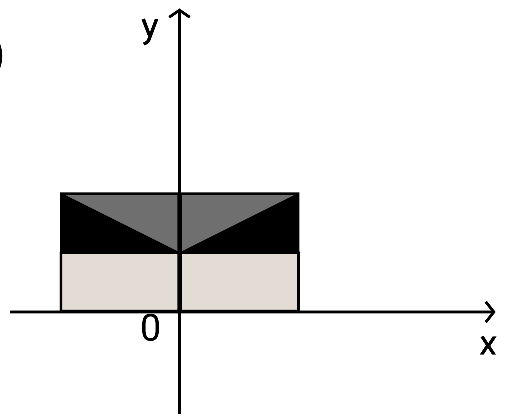
(ENEM – adaptado) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras originais em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar duas simetrias de reflexão: a primeira em relação ao eixo x e a segunda em relação ao eixo y.

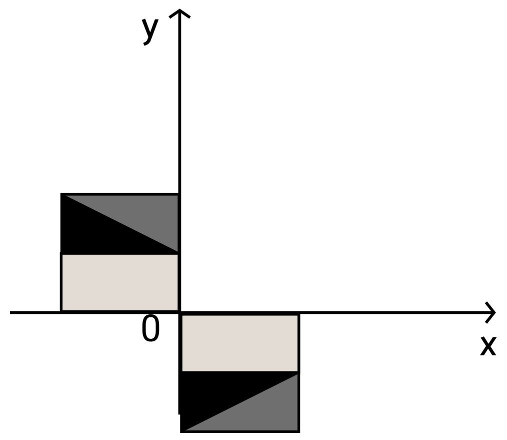


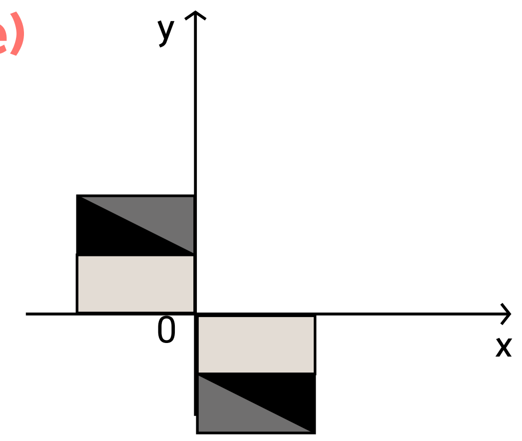
A imagem que representa a nova figura é:

a)


b)


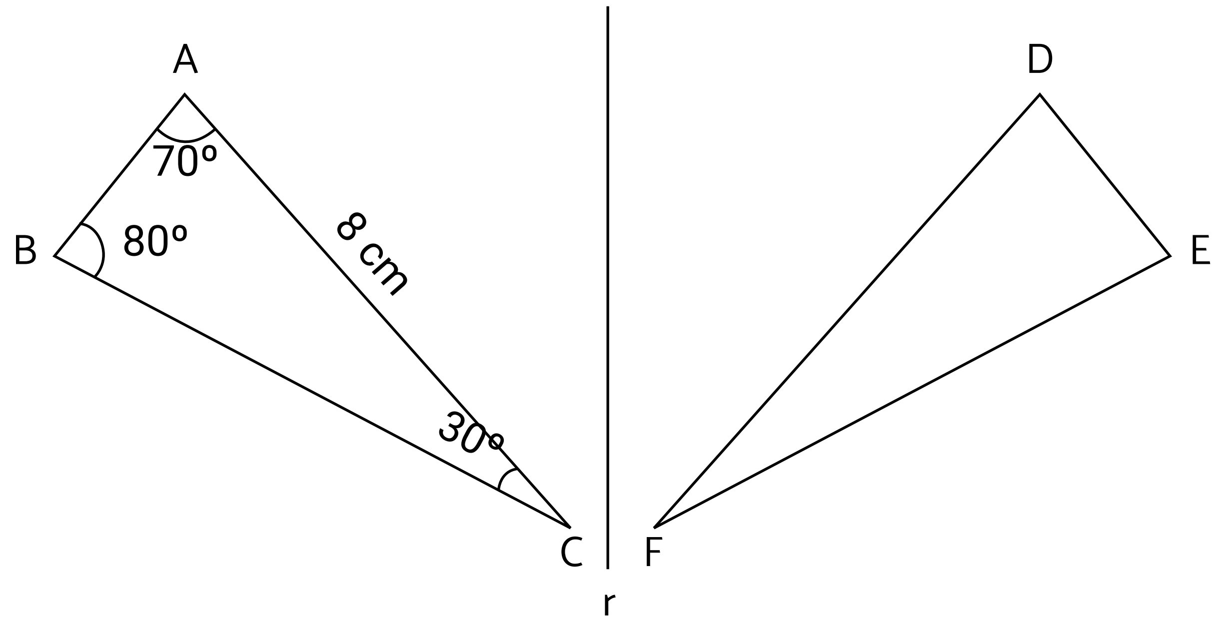
c)


d)


e)


QUESTÃO 3

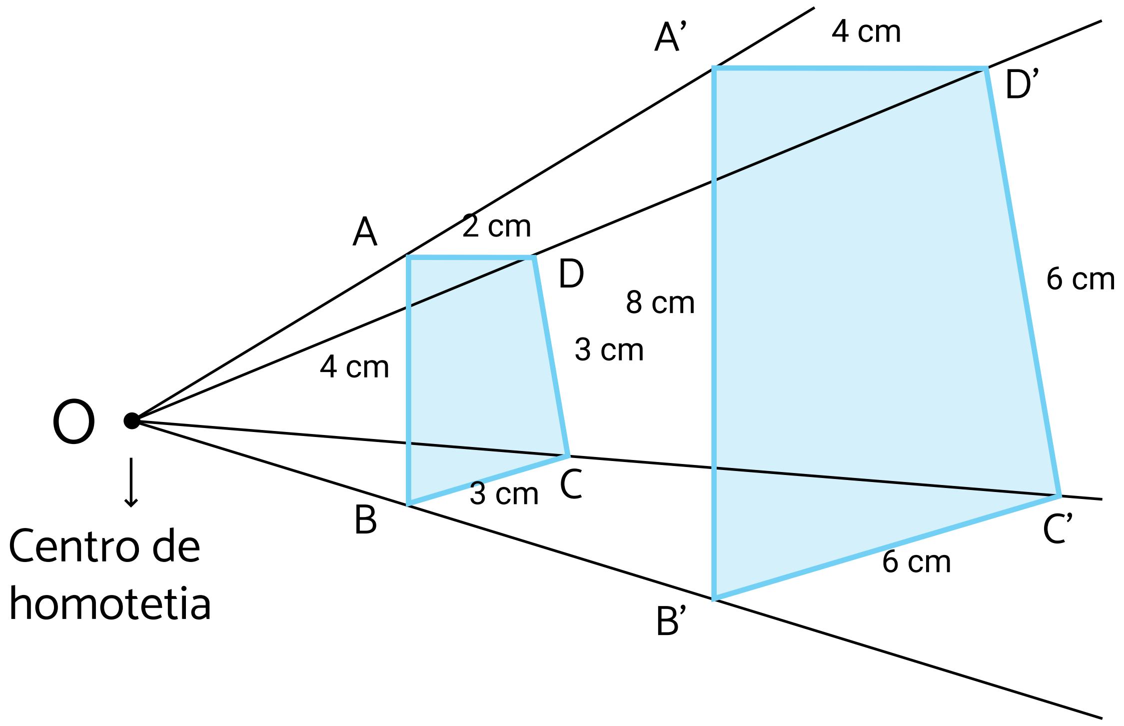
(SARESP - adaptado) Na figura abaixo, os triângulos ABC e DEF são simétricos em relação à reta r. Observando a figura, é correto afirmar que:



a) o ângulo E mede 80°
b) o ângulo D mede 30°
c) o ângulo F mede 70°
d) o lado DE mede 8 cm
e) o lado BC mede 8 cm

QUESTÃO 4

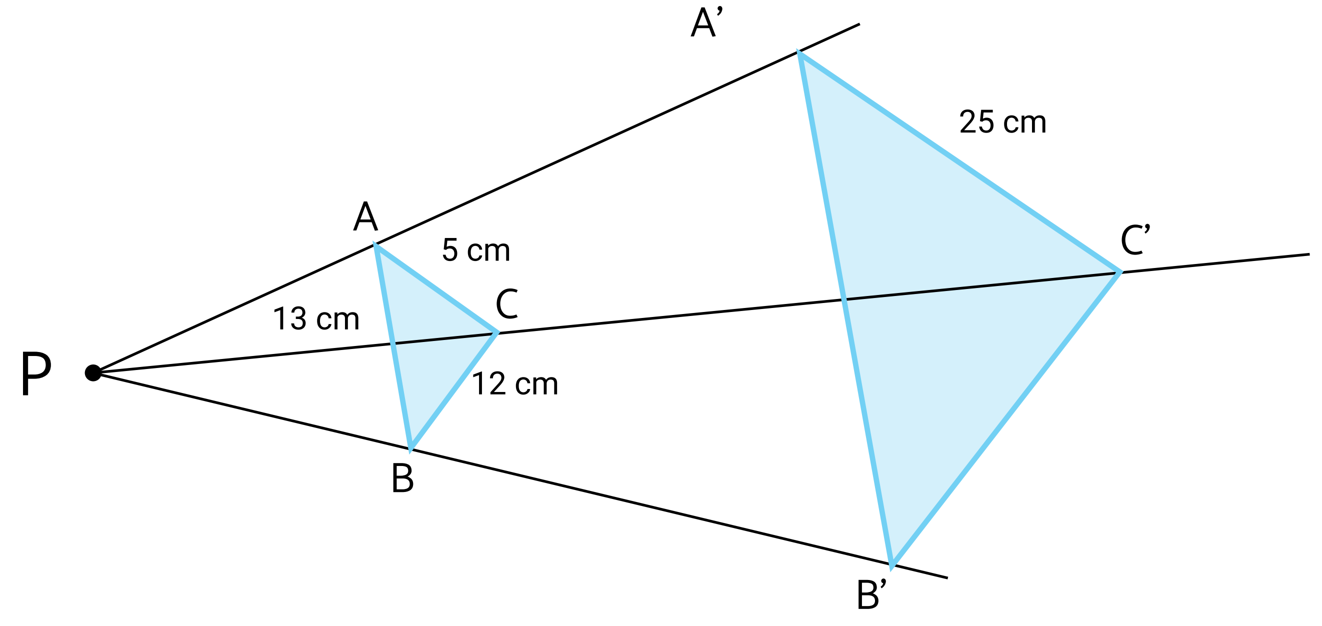
Pedrinho fez a ampliação de um quadrilátero ABCD, utilizando o método da homotetia. Qual foi a razão de semelhança utilizada pelo Pedrinho para obter o quadrilátero A'B'C'D'?



a) 0,5
b) 1
c) 1,5
d) 2

QUESTÃO 5

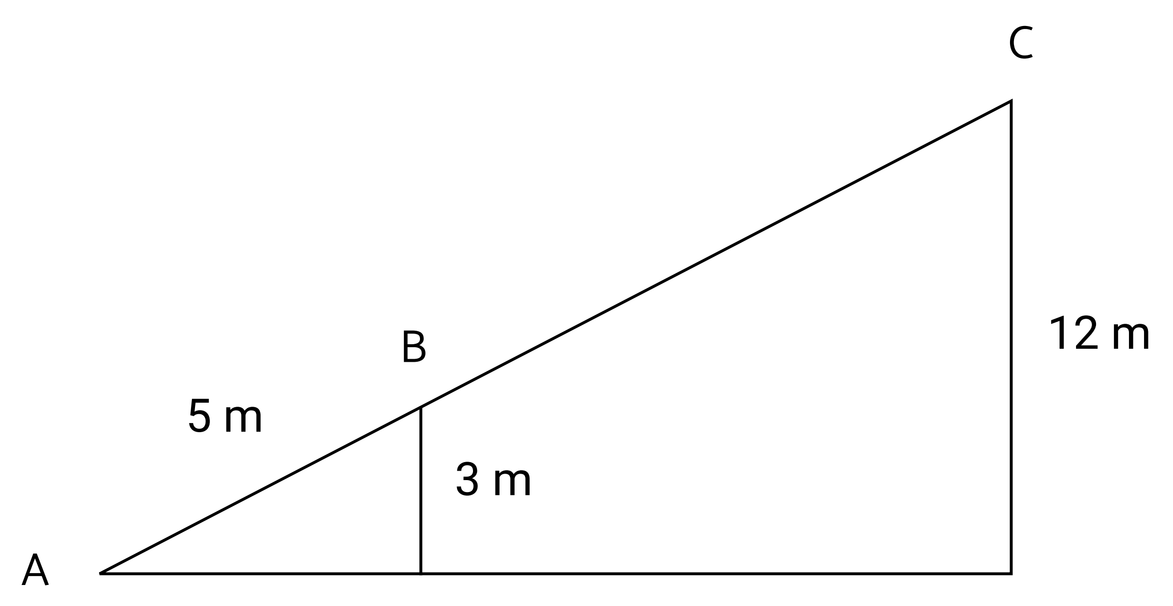
Determine o perímetro do triângulo A'B'C' da homotetia abaixo:



a) 25 cm
b) 100 cm
c) 180 cm
d) 30 cm
e) 150 cm

QUESTÃO 6

(SARESP) Priscila está subindo uma rampa a partir do ponto A em direção ao ponto C. Após andar 5 metros, ela para no ponto B, situado a 3 metros do chão, conforme a figura. Para que Priscila chegue ao ponto C, situado a 12 metros do chão, ela ainda precisa andar quantos metros?



a) 20 m
b) 15 m
c) 10 m
d) 5 m

QUESTÃO 7

Para ampliar seus estudos sobre triângulos semelhantes, sugerimos alguns exercícios online, exercícios on-line, como os disponíveis em: https://bityli.com/triangulos (acesso em 31/03/2022). Agora, alguns exercícios mais desafiadores, como os disponíveis em: https://bityli.com/triangulos1. Nestes, você vai ter que pensar um pouco mais, mas você consegue. Não tenha pressa e, se precisar, retome as anotações realizadas durante as aulas (acesso em 31/03/2022).

Bloco de questões referentes à Atividade 3

QUESTÃO 8

(UFRJ) O censo populacional realizado em 1970 constatou que a população do Brasil era de 90 milhões de habitantes. Recentemente, o censo estimou uma população de 150 milhões de habitantes. A ordem de grandeza que melhor expressa o aumento populacional é:

a) 10^6
b) 10^7
c) 10^8
d) 10^9
e) 10^{10}

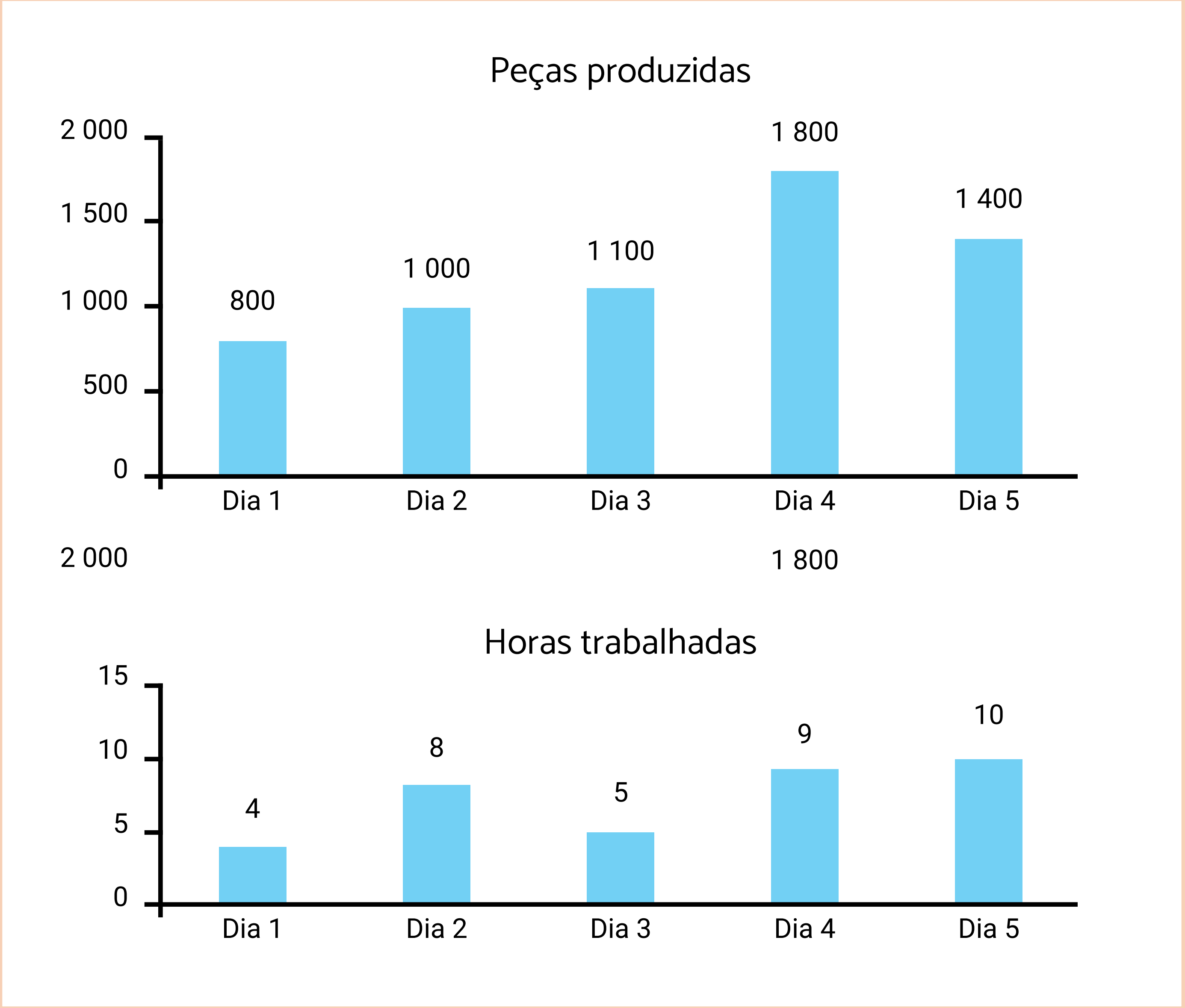
QUESTÃO 9

(ID da Questão: 1973. Código do Descritor: M263 - Questões – fase 2) O preço de custo de uma mercadoria é de R$ 640,00. Qual deve ser o valor de venda dessa mercadoria para que a porcentagem de lucro, sobre o preço de venda, seja de 20%?

a) R$ 840,00
b) R$ 800,00
c) R$ 660,00
d) R$ 512,00
e) R$ 768,00

QUESTÃO 10

(ENEM) Os gráficos representam a produção de peças em uma indústria e as horas trabalhadas dos funcionários no período de cinco dias. Em cada dia, o gerente de produção aplica uma metodologia diferente de trabalho. Seu objetivo é avaliar a metodologia mais eficiente para utilizá-la como modelo nos próximos períodos. Sabe-se que, nesse caso, quanto maior for a razão entre o número de peças produzidas e o número de horas trabalhadas, maior será a eficiência da metodologia. Em qual dia foi aplicada a metodologia mais eficiente?



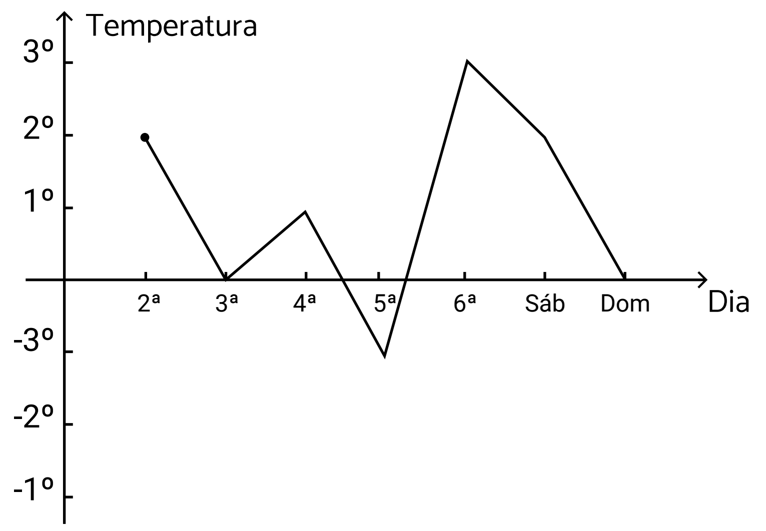
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

QUESTÃO 11

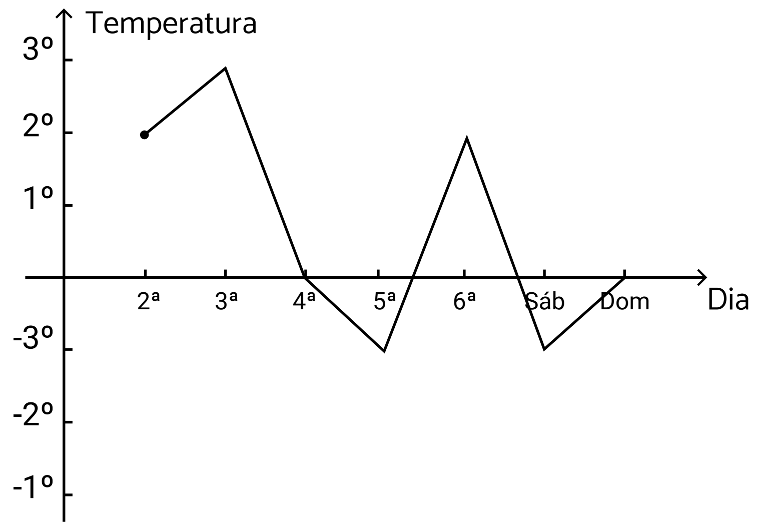
(Prova Brasil) A tabela ao lado mostra as temperaturas mínimas registradas durante uma semana do mês de julho, em uma cidade do Rio Grande do Sul. Qual é o gráfico que representa a variação da temperatura mínima nessa cidade, nessa semana?

Dia	Mínima Temperatura
2ª feira	2º
3ª feira	0º
4ª feira	-1º
5ª feira	3º
6ª feira	2º
Sábado	-2º
Domingo	0º

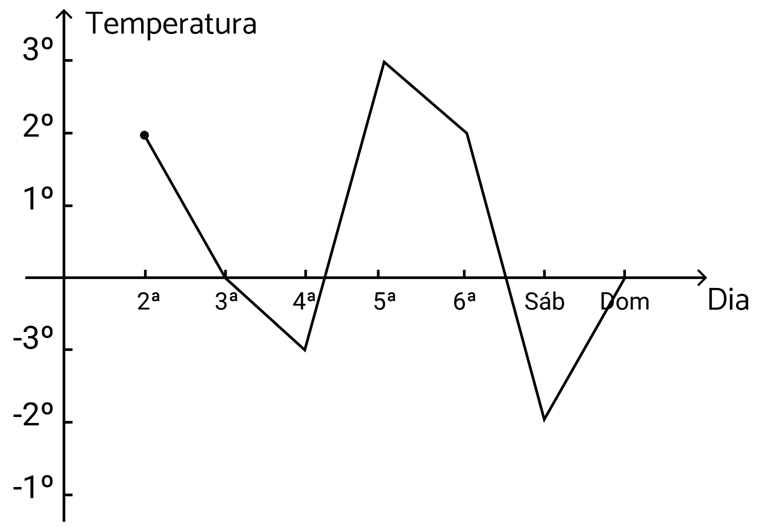
a)



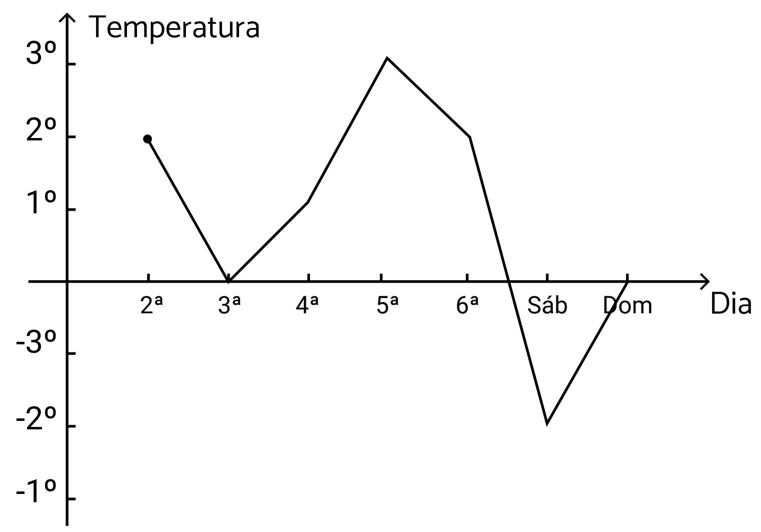
b)



c)

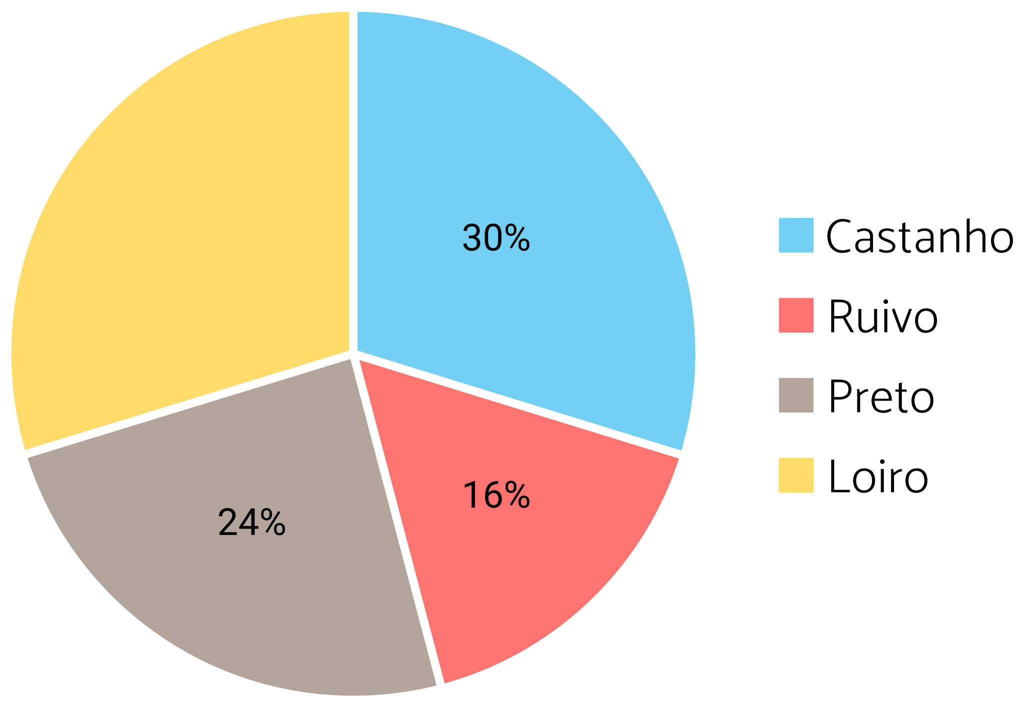


d)



QUESTÃO 12

(OBM – adaptado) Os resultados de uma pesquisa das cores de cabelo de 1.200 pessoas são mostrados no gráfico abaixo. Quantas dessas pessoas possuem cabelo loiro?



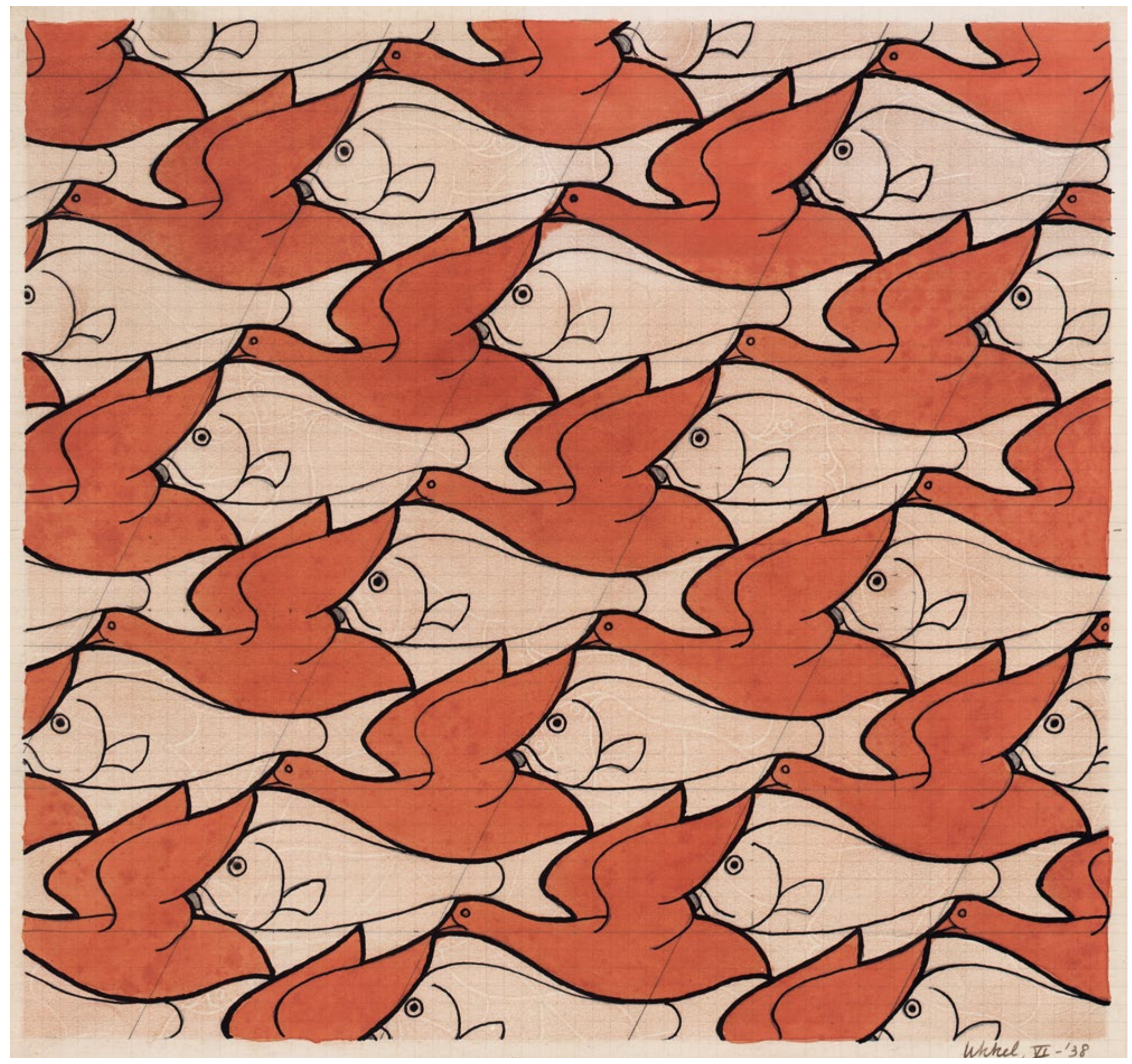
a) 300
b) 330
c) 360
d) 380
e) 400

Anexo 1

ANEXO 1

Simetria de translação

ETAPA 1



FONTE: WIKIART. Bird Fish. Disponível em: https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/bird-fish. Acesso em: 25 jun. 2022.

Observe a gravura *Bird fish* de M.C. Escher (1938).

Agora, converse com seus colegas a respeito dos seguintes temas.

- Qual o nome da obra? Qual seria o motivo para o artista ter dado esse nome à gravura?
- Quais os elementos que você identifica na imagem?

Foque sua atenção apenas nas figuras das aves.

- Elas têm todas a mesma forma? E o mesmo tamanho? O que elas têm de diferente?
- Há algum padrão de repetição das figuras?
- Quais os elementos que o artista considerou para repetir as imagens das aves?

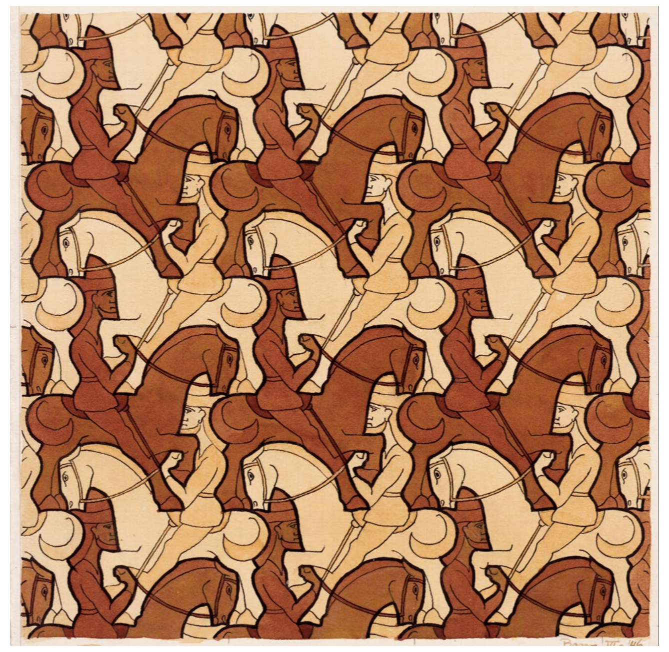
Foque sua atenção apenas nas figuras dos peixes.

- Elas têm todas a mesma forma? E o mesmo tamanho? O que elas têm de diferente?
- Há algum padrão de repetição das figuras? Qual é este padrão?
- Quais os elementos que o artista considerou para repetir as imagens das aves?

Registre as conclusões do grupo.

ANEXO 1 ▸ **ETAPA 2**

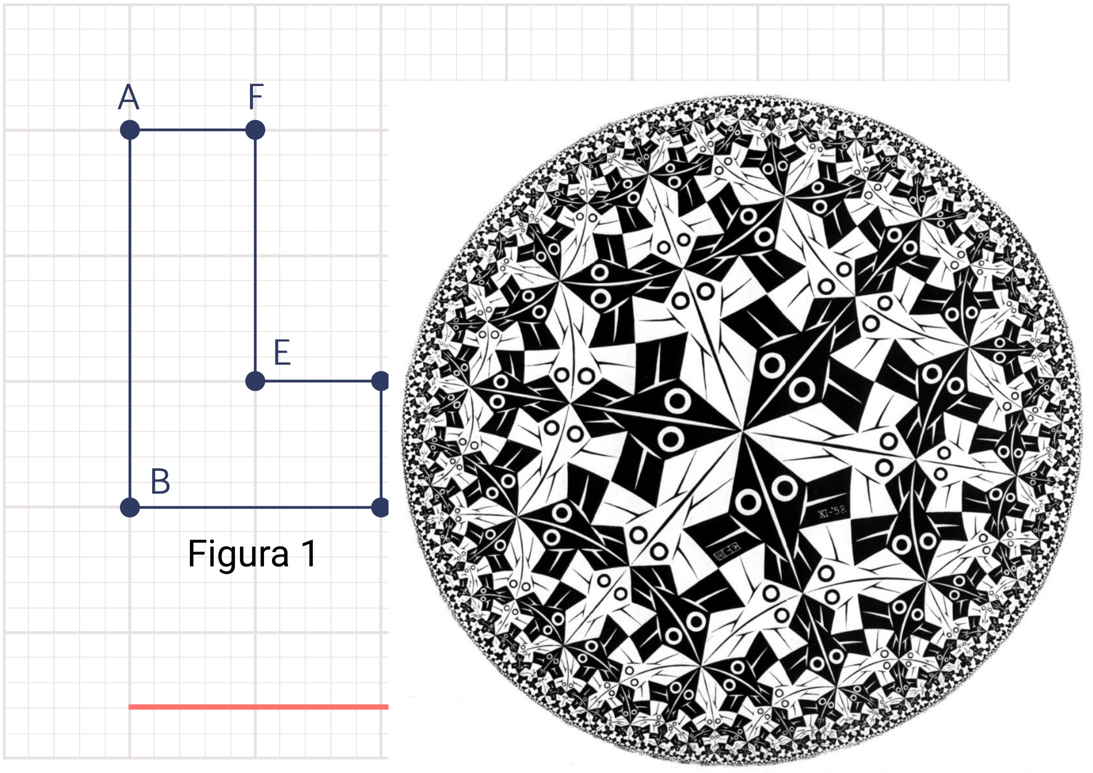
Assinale qual das obras de Escher abaixo apresenta o mesmo tipo de movimento apresentado na obra *Bird fish*. Explique sua resposta, apontando as semelhanças e as diferenças observadas. Registre suas conclusões.



Horseman (M. C. Escher)
Fonte: WIKIART. Horseman. Disponível em: https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/horseman-1. Acesso em: 25 jun. 2022.

O limite do círculo (M. C. Escher)
Fonte: WIKIART. O limite do círculo. Disponível em: https://www.wikiart.org/pt/maurits-cornelis-escher/o-limite-do-circulo-i-1958. Acesso em: 25 jun. 2022.

Você percebeu? O movimento observado nas obras de Escher é denominado de simetria de translação. A repetição da figura se faz deslocando-a sempre em uma mesma direção e sentido.

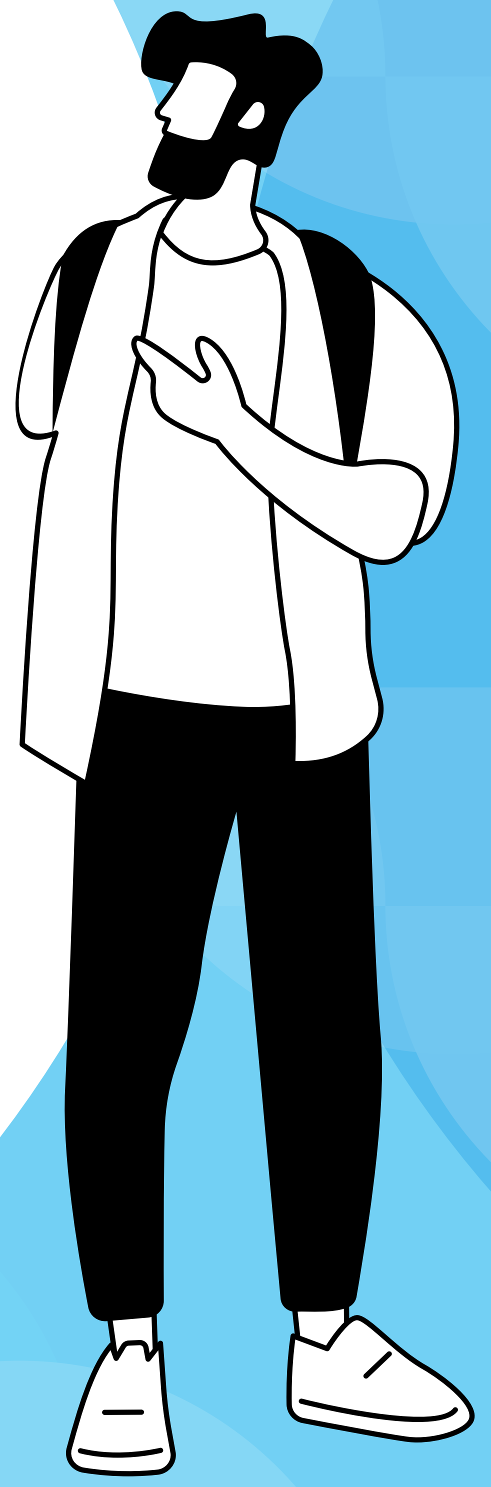


ANEXO 1 ▸ **ETAPA 3**

Agora é a sua vez! O seu último desafio dessa "estação" é fazer como Escher e produzir uma faixa decorativa ou uma imagem a partir da simetria de translação. Para isso:

- Utilize uma malha quadriculada e crie uma figura inicial. Ela pode ter o formato que desejar.
- Converse com seus colegas e decida os elementos necessários para transladar essa imagem (como, por exemplo, a direção).
- Aplique a simetria de translação na figura inicial para obter uma bela faixa decorativa ou uma linda gravura. Utilize canetas coloridas ou lápis de cor.
- Não esqueça de colocar o nome dos componentes do grupo na figura elaborada, pois ela será utilizada em outro momento.
- Para finalizar, registre quais elementos você precisou considerar na simetria de translação. Se necessário, volte à etapa 1 desta atividade e complete sua resposta relativa à seguinte questão: quais elementos o artista considerou para repetir as imagens das aves?

Anexo 2



ANEXO 2

Simetria de reflexão

ETAPA 1

Observe a gravura *Systematic Study* - M.C. Escher (1936).

FONTE: WIKIART. Systematic Study. Disponível em: https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/systematic-study. Acesso em: 25 jun. 2022.

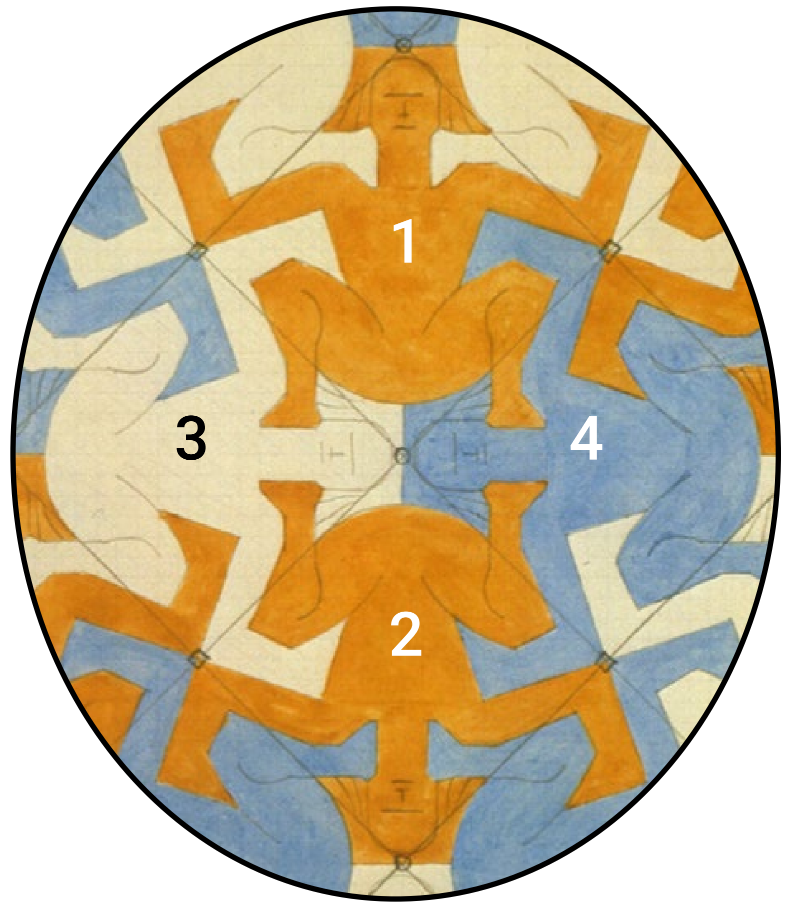
Agora, converse com seus colegas a respeito dos seguintes temas.

- Qual o nome da obra? Qual seria o motivo para o artista ter dado esse nome à gravura?
- Quais os elementos que você identifica na imagem?
- Eles têm todas a mesma forma? E o mesmo tamanho? O que elas têm de diferente?
- Há algum padrão de repetição das figuras?

Observe a imagem a seguir, que é um recorte da obra Systematic Study.

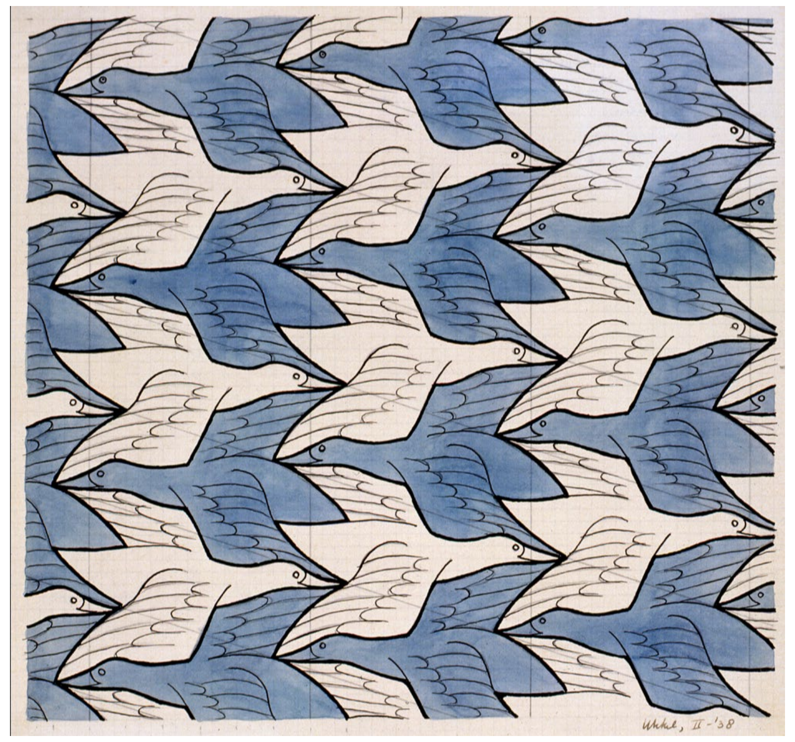
- Considere as figuras 1 e 2 da. Elas têm a mesma forma? E o mesmo tamanho? O que elas têm de diferente?
- A partir da figura 1, é possível obter a figura 2? Como?
- É possível obter a figura 4 a partir da 3? Como?

Registre as conclusões do grupo.

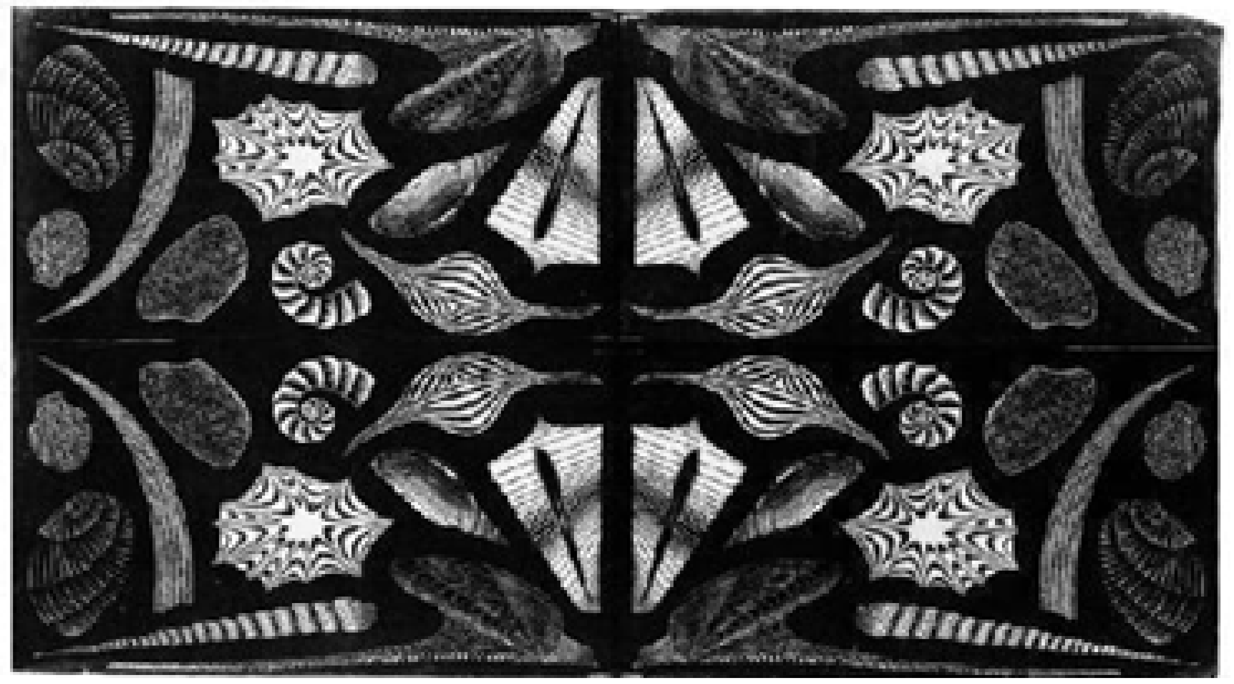


ANEXO 2 ▸ ETAPA 2

Assinale qual das obras de Escher abaixo apresenta o mesmo tipo de simetria daquela apresentada na obra *Systematic Study*. Explique sua resposta, apontando as semelhanças e as diferenças observadas. Registre suas conclusões.

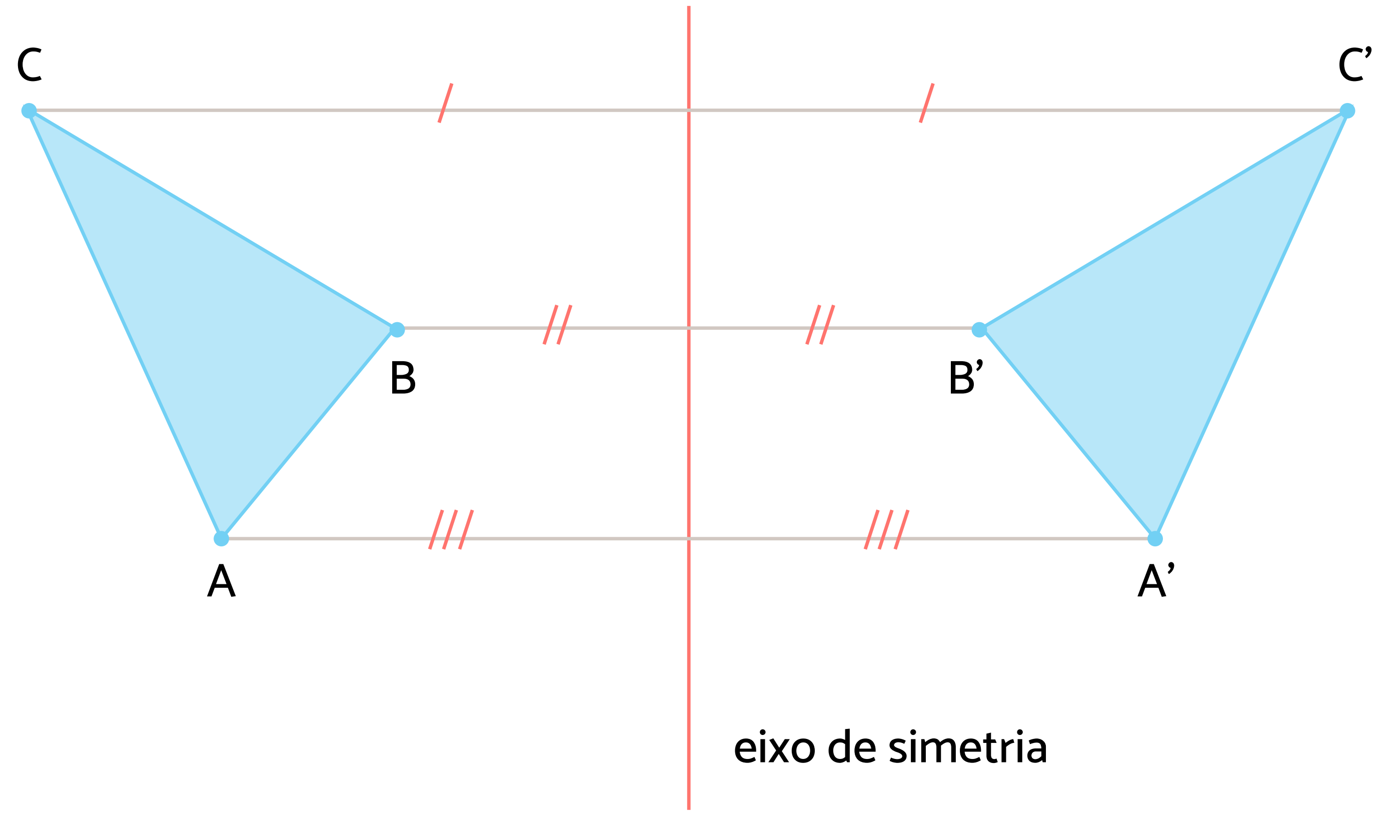


FONTE: WIKIART. Two birds. Disponível em: https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/two-birds. Acesso em: 25 jun. 2022.



FONTE: WIKIART. Sea shells. Disponível em: https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/not_detected_204649. Acesso em: 25 jun. 2022.

Você percebeu? A simetria que você estudou nessas obras é a simetria de reflexão ou axial. Na simetria de reflexão, quando dobramos a imagem a partir de um eixo de simetria, a figura pode ser perfeitamente sobreposta a outra. Isso acontece porque pontos simétricos estão em lados opostos, mas a uma mesma distância do eixo de simetria.



ANEXO 2 ▸ **ETAPA 3**

Agora é a sua vez! O seu último desafio dessa "estação" é fazer como Escher e produzir uma faixa decorativa ou uma imagem a partir da simetria de reflexão. Para isso:

- Pegue uma folha de papel e dobre-a algumas vezes.
- Desenhe uma figura na folha dobrada e recorte-a. Dessa forma, você vai obter várias figuras iguais (visto que a folha estava dobrada).
- Faça uma composição com essas figuras, utilizando a simetria de reflexão, para obter uma faixa decorativa. Cole todas as figuras da faixa decorativa e trace (use régua) todos os eixos de simetria utilizados para essas reflexões. Se achar adequado, você pode apoiar-se em uma malha quadriculada, para ajudar na sua elaboração.
- Para finalizar, registre quais os elementos que você precisou considerar na simetria de reflexão.

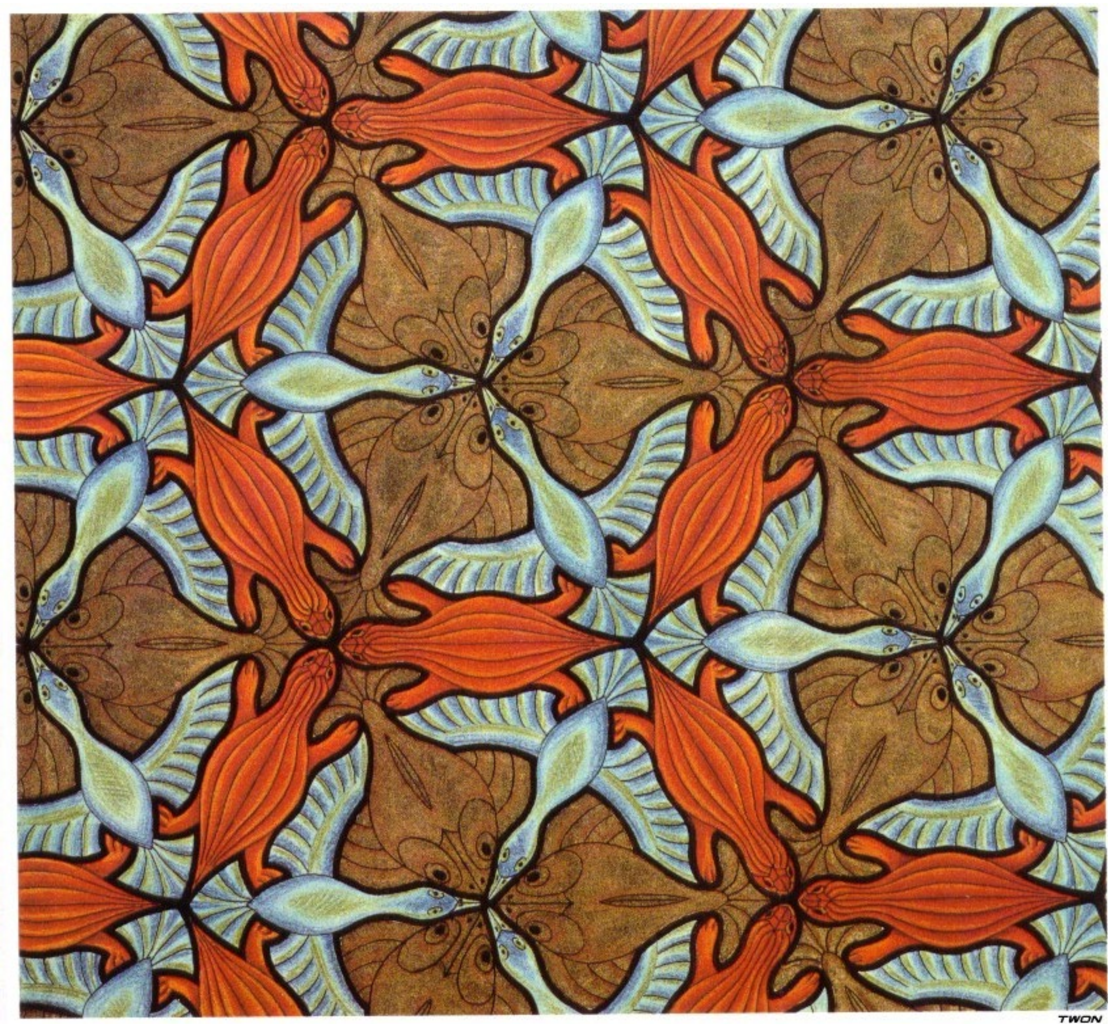
Anexo 3

ANEXO 3

Simetria de rotação

ETAPA 1

Observe a obra *Symmetry Drawing* de M.C. Escher - 1948.



FONTE: WIKIART. Symmetry drawing. Disponível em: https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/symmetry-drawing. Acesso em: 25 jun. 2022.

Agora, converse com seus colegas a respeito dos seguintes temas.

- Qual o nome da obra?
- Quais os elementos que você identifica na imagem?
- Foque sua atenção apenas nas figuras desenhadas na cor marrom. Elas têm todas a mesma forma? E o mesmo tamanho? O que elas têm de diferente?
- Observe a figura 1 na gravura ao lado. Qual movimento que o artista precisou fazer nessa figura para obter a figura 2? Quais os elementos que precisam ser considerados para realizar esse movimento?
- Para obter a figura 3, a partir da figura 2, o autor pode considerar os mesmos elementos citados anteriormente? Explique.

Registre as conclusões do grupo.

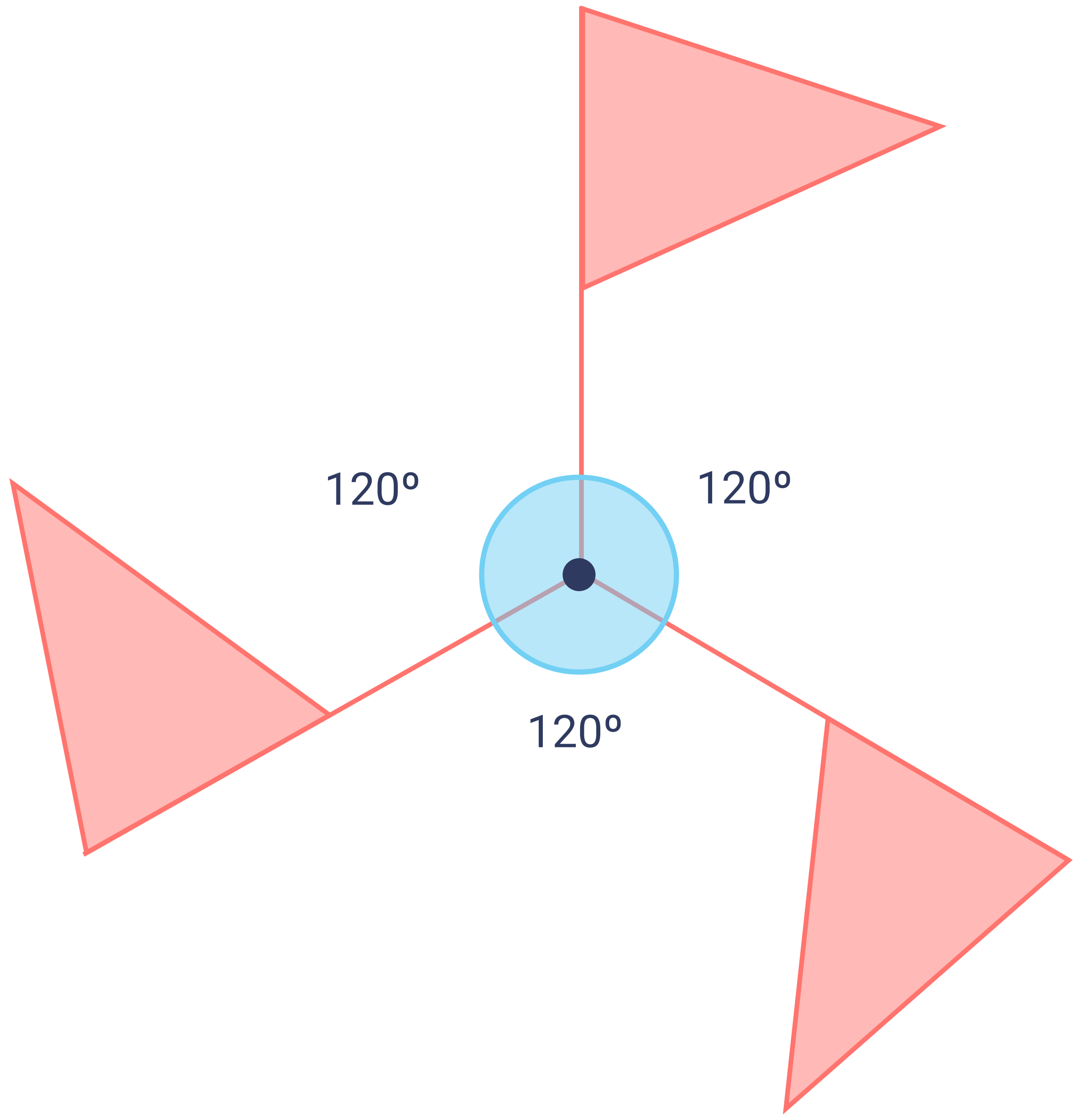
ANEXO 3 ETAPA 2

Assinale qual das obras de Escher abaixo apresenta o mesmo tipo de simetria daquela apresentada na obra *Symmetry Drawing*. Explique sua resposta, apontando as semelhanças e as diferenças observadas. Registre suas conclusões.

FONTE: WIKIART. Shells and starfish. Disponível em: https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/shells-and-starfish. Acesso em: 25 jun. 2022.

FONTE: WIKIART. Pegasus (n. 105). Disponível em: https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/pegasus-no-105-1959. Acesso em: 25 jun. 2022.

Você percebeu? Nessas obras de Escher, a simetria que você estudou se chama rotação. A rotação de uma figura é obtida pelo giro (medida de um ângulo) em torno de um ponto (vértice do ângulo de giro) em um determinado sentido.



ANEXO 3 ▸ ETAPA 3

Agora é a sua vez! O seu último desafio dessa "estação" é fazer como Escher e produzir uma imagem a partir da simetria de rotação com o apoio da tecnologia.

Você pode fazer uma imagem a partir da simetria de rotação, utilizando uma malha quadriculada (disponível no final deste documento) e materiais de desenho geométrico: régua, compasso, transferidor.

Caso tenha acesso a recursos tecnológicos, você pode utilizar, por exemplo, o Geogebra, disponível em: https://bityli.com/Geogebra, ou mesmo na loja do seu smartphone para produzir uma imagem a partir da simetria de rotação. Veja algumas orientações para trabalhar com esse aplicativo sugerido:

- Acesse o aplicativo Geogebra, disponível em: https://bityli.com/Geogebra ou, então, baixe-o em seu celular (disponível na loja do smartphone).
- Selecione o ícone "polígono" no 5º botão da barra de ferramentas disponível na parte superior da tela.
- Desenhe um polígono/figura na malha quadriculada disponível na tela.
- Marque um ponto na malha quadriculada, que será o referencial da rotação (sugerimos a origem do plano cartesiano disponível): selecione "ponto" no 2º botão da barra de ferramentas disponível na parte superior da tela e clique sobre o ponto que deseja marcar.
- Obtenha uma nova figura, a partir da rotação da figura inicial. Selecione a opção" Rotação em torno de um ponto", disponível no 9º botão da barra de ferramentas. Depois, clique sobre a imagem inicial e o ponto referencial para a rotação. Em seguida, indique os novos elementos envolvidos na simetria, que serão solicitados (medida do ângulo e sentido).
- Pronto. Você encontrou a nova figura, utilizando a rotação.
- Repita o processo quantas vezes desejar, para completar a sua gravura.
- Imprima a gravura construída, tire uma foto ou reproduza-a em um papel se possível. Não esqueça de colocar o nome dos componentes do grupo na figura elaborada, pois ela será utilizada em outro momento.
- Registre, para finalizar, quais os elementos que você precisou considerar na simetria de rotação. Se necessário, volte na etapa 1 dessa atividade e complete sua resposta relativa à seguinte questão: quais os elementos que precisam ser considerados para realizar esse movimento?

Anexo 4

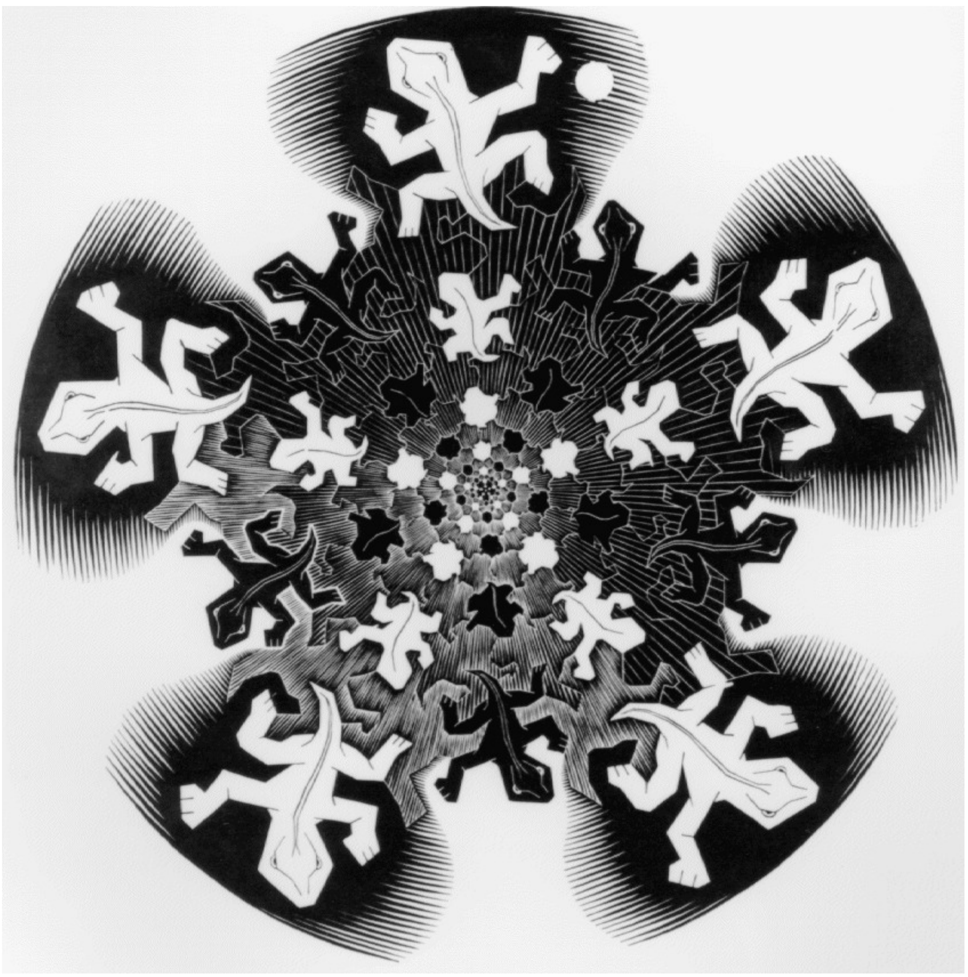
ANEXO 4

Homotetia

ETAPA 1

Observe a obra *Development II* de M.C. Escher – 1939

.



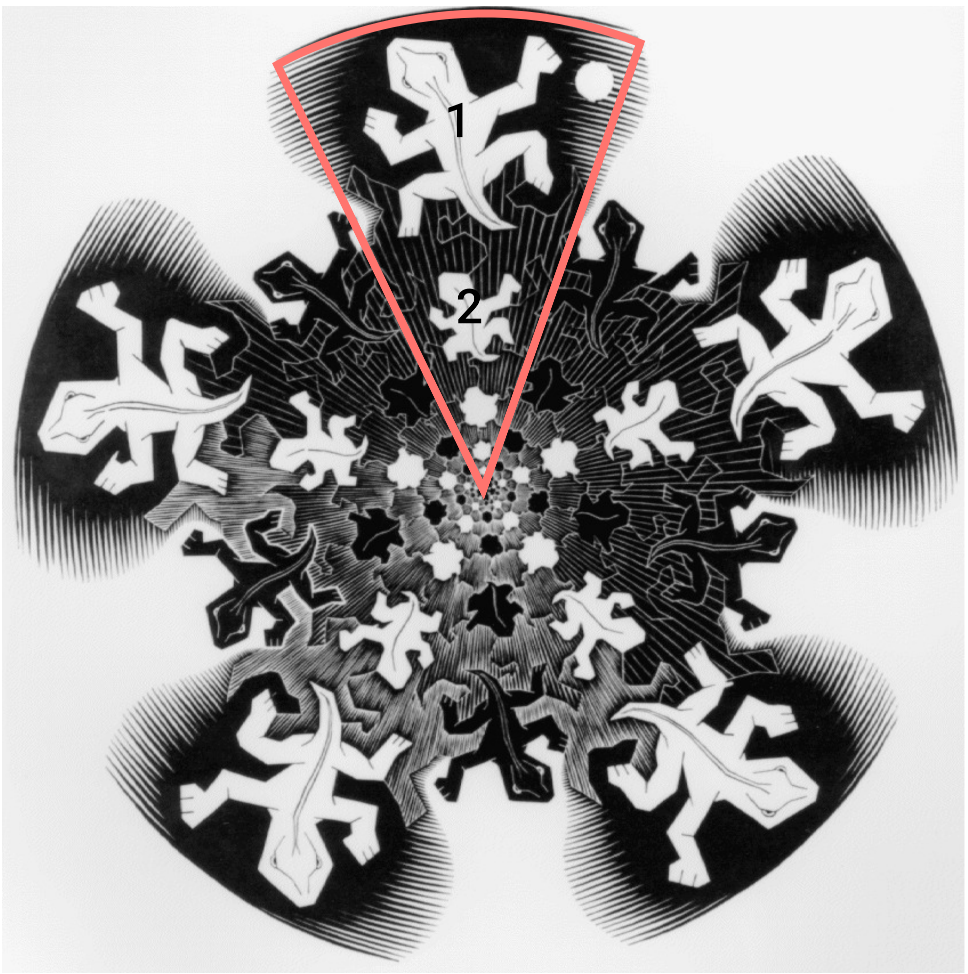
FONTE: WIKIART. Development II. Disponível em: https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/development-ii. Acesso em: 25 jun. 2022.

Agora, converse com seus colegas a respeito dos seguintes temas.

- Qual o nome da obra?
- Quais os elementos que você identifica na imagem?
- Quais pontos chamam a sua atenção?

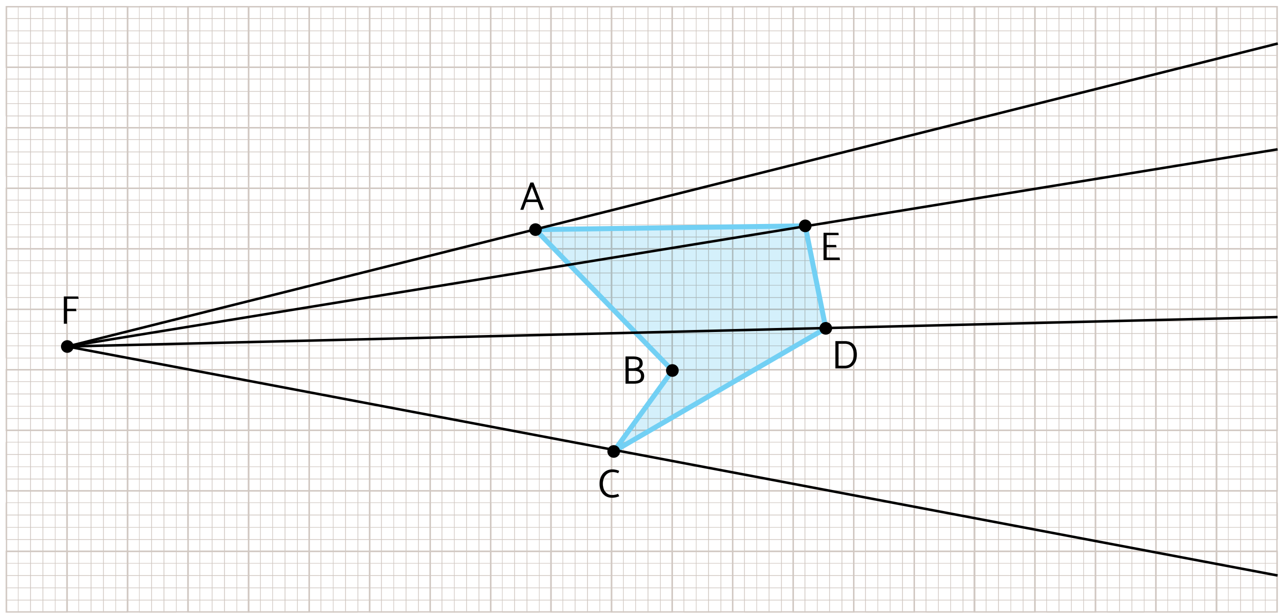
Foque sua atenção na parte da obra destacada na figura a seguir. O que você observa?

- Observe as imagens 1 e 2. Quais as semelhanças e diferenças entre elas?
- Elas possuem a mesma forma?
- Elas possuem o mesmo tamanho?



ANEXO 4 ▶ **ETAPA 2**

Agora é com você! Observe o polígono da figura abaixo. O seu desafio é fazer como Escher: desenhar um novo polígono, que tenha a mesma forma, porém tamanho diferente: ele deve ser menor que o polígono dado (redução). Discuta com seus colegas qual a melhor estratégia para resolver esse desafio. Obs.: utilizar materiais de desenho geométrico, como régua e/ou compasso, pode auxiliar na resolução da proposta.



O próximo passo é desenhar, na malha quadriculada, um polígono que tenha a mesma forma e seja maior que a figura inicial (ampliação). Como resolver esse desafio?

Converse com seus colegas sobre o seguinte tema: quais os elementos foram considerados para ampliar ou reduzir a figura inicial? Registre-os!

Não esqueça de colocar o nome dos componentes do grupo na figura elaborada, pois ela será utilizada em outro momento.

Agora, recorte as três figuras e investigue.

- Quais as semelhanças e diferenças entre elas?
- Existe alguma regularidade entre as medidas dos ângulos correspondentes das figuras? Qual?
- Existe alguma regularidade entre as medidas dos lados homólogos das figuras? Qual?

Registre suas conclusões.

Você percebeu?

As figuras obtidas apresentam tamanhos diferentes. Contudo, os ângulos correspondentes entre elas são iguais e todos os lados correspondentes são proporcionais. Nesse caso, para obter uma figura a partir de outra, a transformação geométrica utilizada recebe o nome de homotetia. O ponto F da figura acima é chamado de centro de homotetia. A razão (divisão) entre a medida do lado da figura construída e a medida do lado da figura construída é chamada de razão de semelhança.

ANEXO 1 ▶ **ETAPA 3**

Para conhecer um pouco mais sobre a razão de semelhança de figuras homotéticas, acesse https://bityli.com/Geogebra2. Movimente o controle deslizante r (razão de semelhança), seguindo as seguintes orientações:

- Atribua, para r, valores maiores do que 1.
  Qual a regularidade observada?

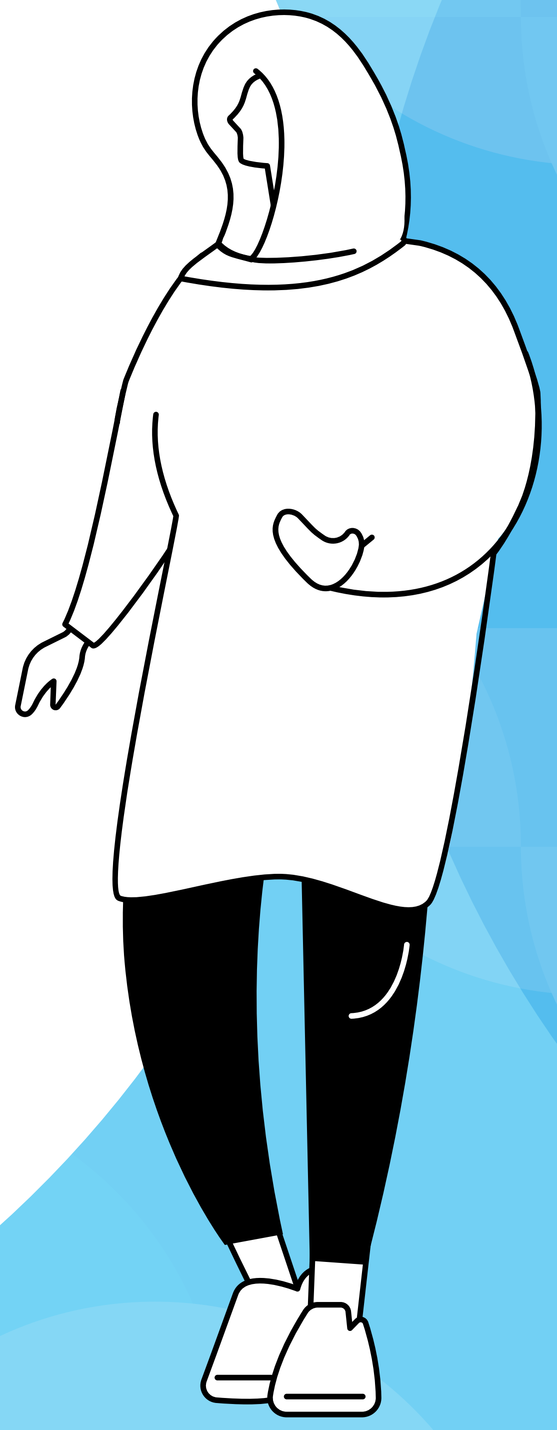
- Atribua, para r, valores menores do que 1.
  Qual a regularidade observada?

- Atribua r = 1 e analise as figuras obtidas.

Registre suas conclusões.

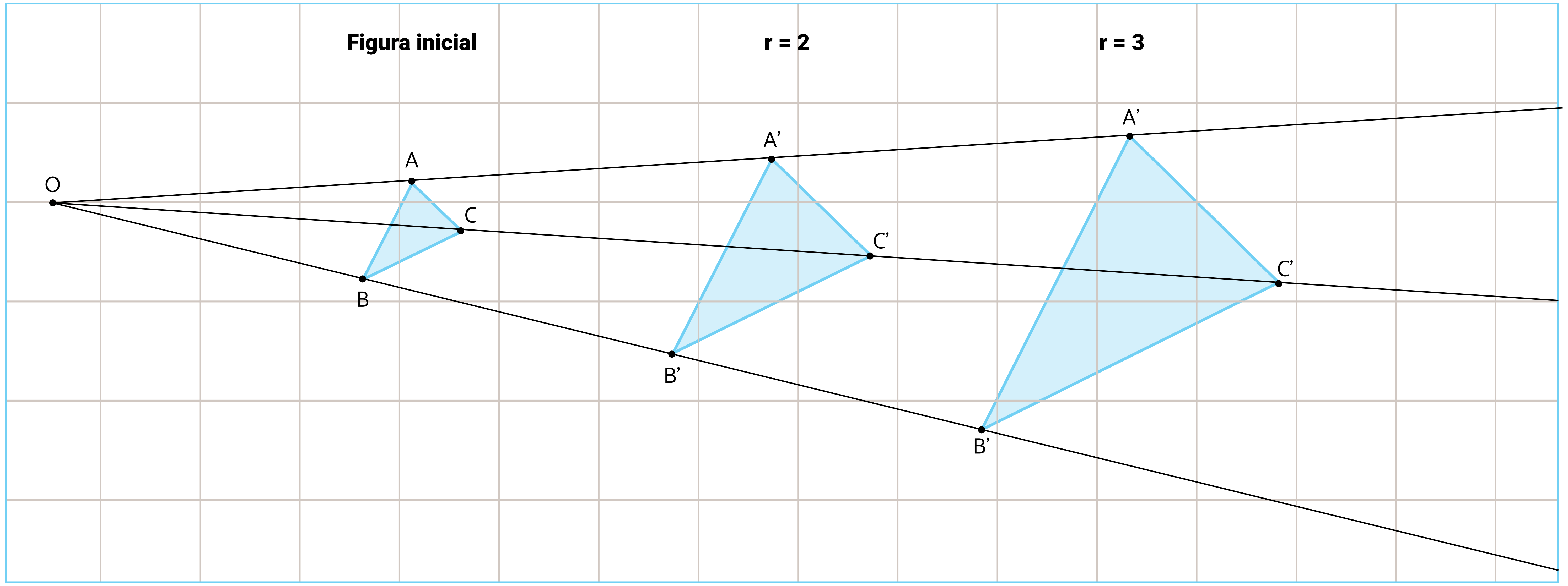
Caso não seja possível o acesso, analise as figuras disponibilizadas pelo seu professor.

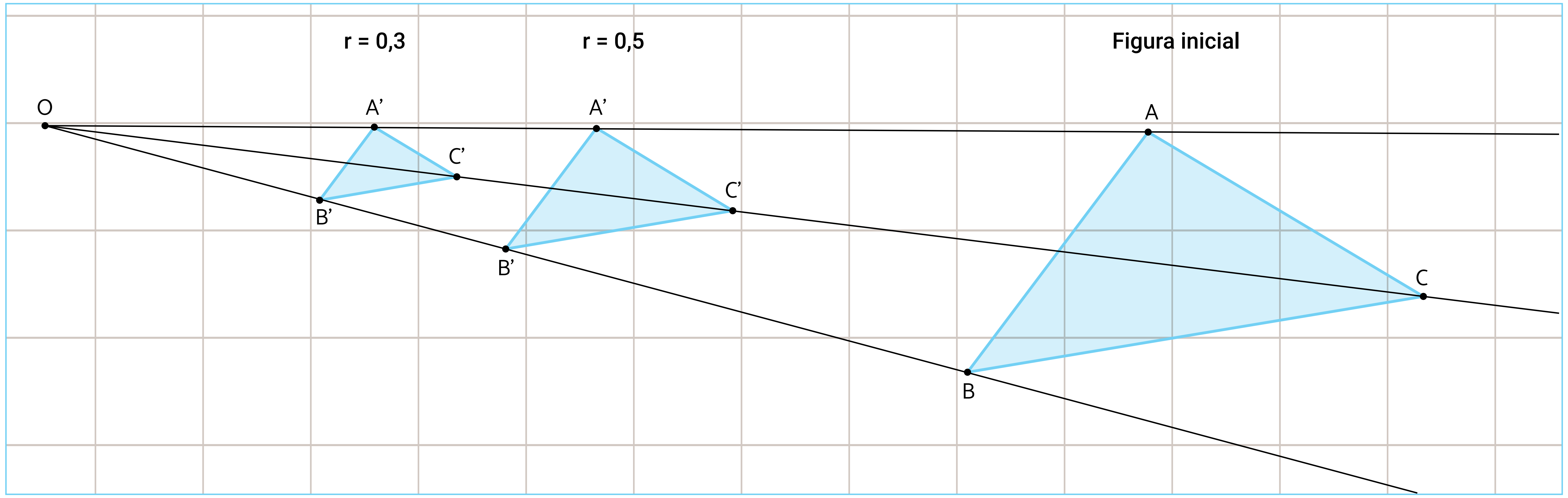
Anexo 5



ANEXO 5

Figuras para serem disponibilizadas

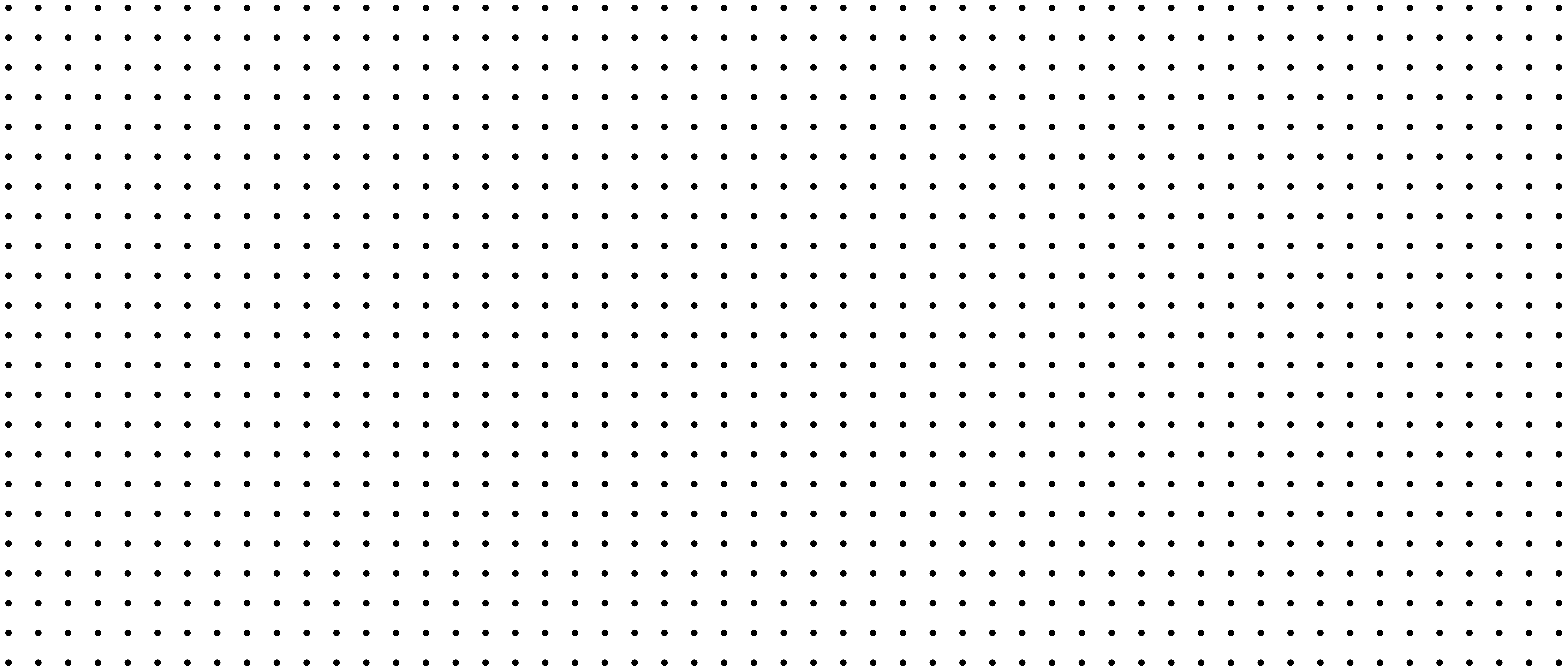




Anexo 6

ANEXO 6 ▸ MODELO 1 Malha quadriculada

ANEXO 6 ▸ MODELO 2 Malha pontilhada



Anexo 7

ANEXO 7

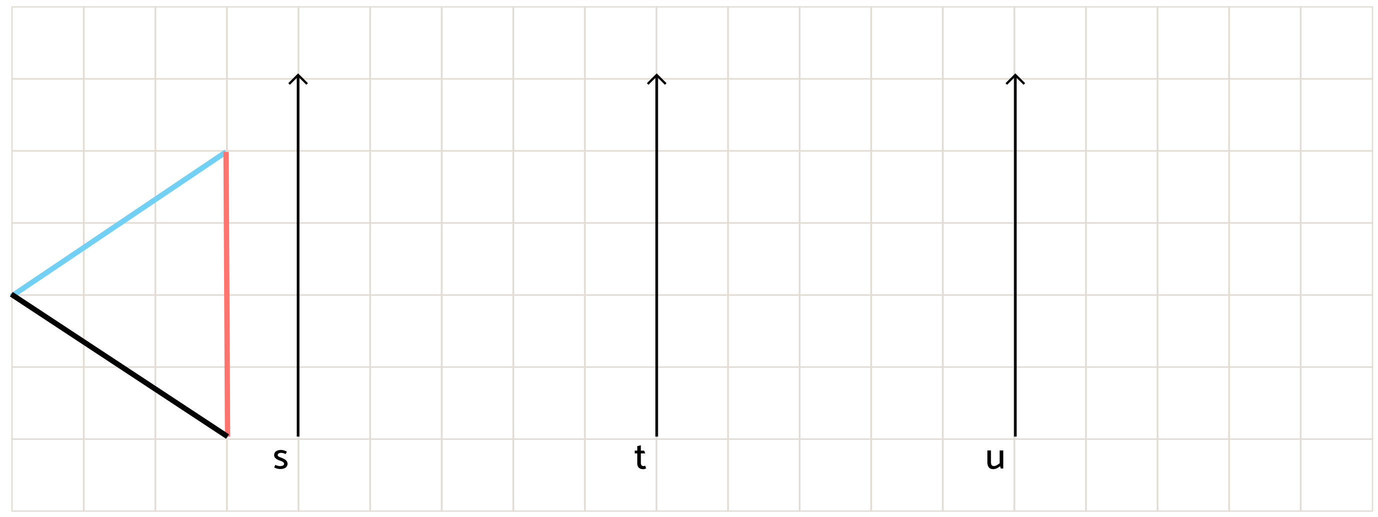
Movimentos e congruência

ETAPA 1

Faça reflexões sucessivas do triângulo, de acordo com as retas dadas. Pinte os lados correspondentes da mesma cor do triângulo inicial.

a) Meça os lados e os ângulos de cada triângulo desenhado e verifique se são iguais ou diferentes das medidas do triângulo dado.

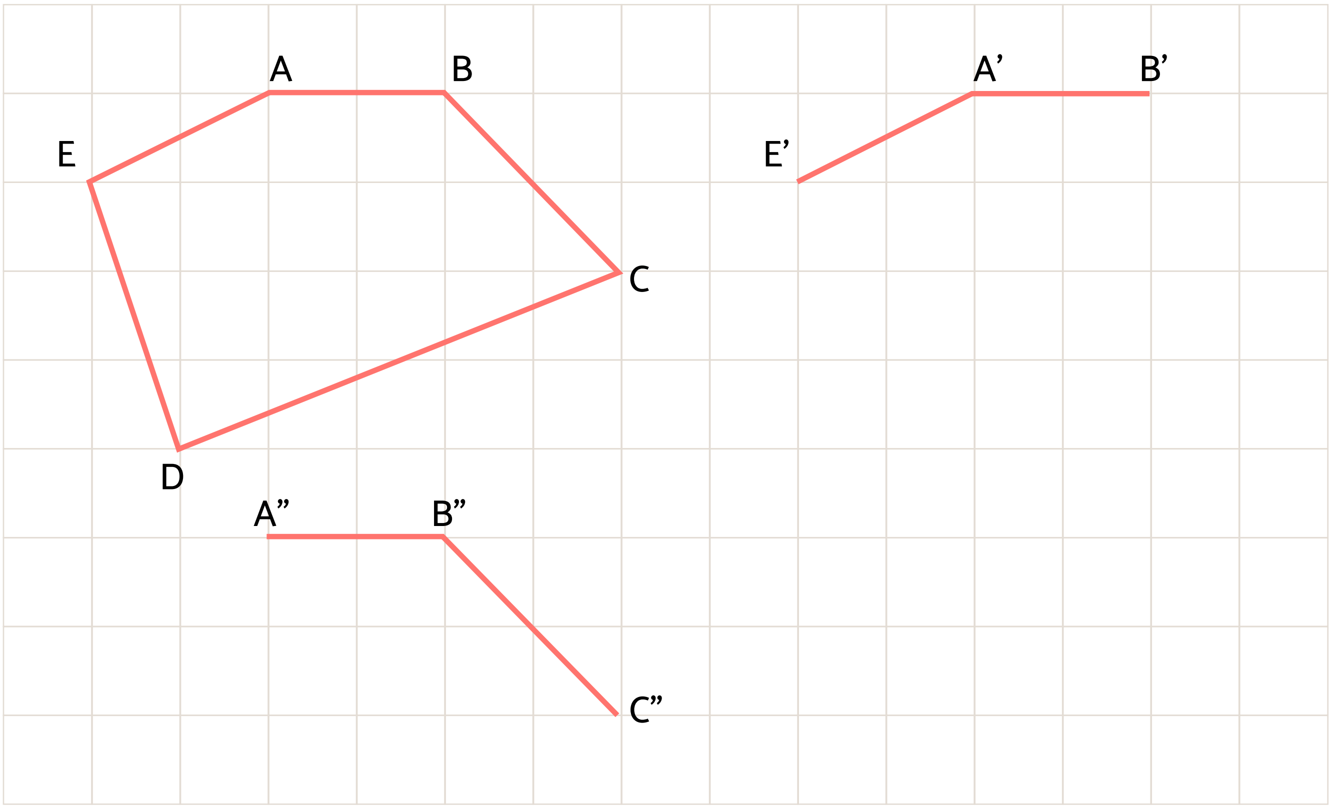
b) Podemos afirmar que os triângulos são congruentes? Por quê?



ETAPA 2

Reproduza a figura ABCDE duas vezes na malha quadriculada, de tal modo que o lado AB se transforme em A'B' e em A"B". Observe que os desenhos já foram começados, complete-os:

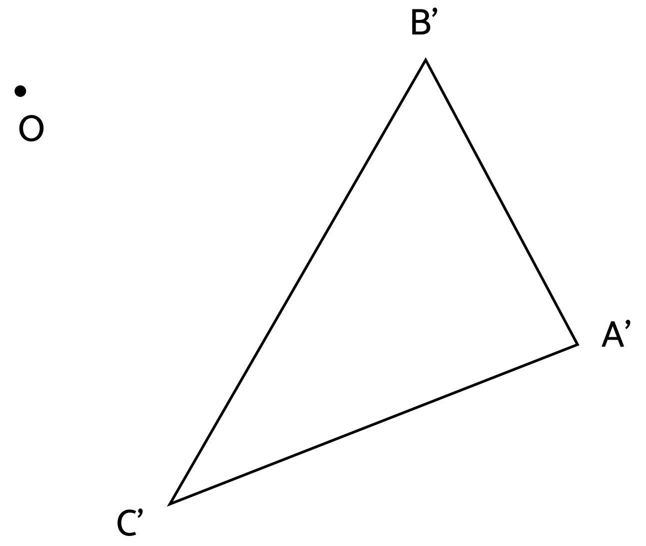
- Como são os três desenhos feitos na malha?
- O que eles têm em comum?
- E o que têm de diferente?



ETAPA 3

Observe o triângulo A'B'C' e siga as instruções:

- Una cada ponto desse triângulo ao ponto O.
- Marque na semirreta OA' a medida do segmento OA', a partir de A' e obtenha o ponto A".
- Na semirreta OB', transporte a medida do segmento OB', de modo a obter o segmento B'B".
- Use o mesmo procedimento com relação a O e C'.
- Una os pontos A", B" e C".
- Compare os triângulos A'B'C' e A"B"C". O que eles têm em comum?



Anexo 8

ANEXO 8

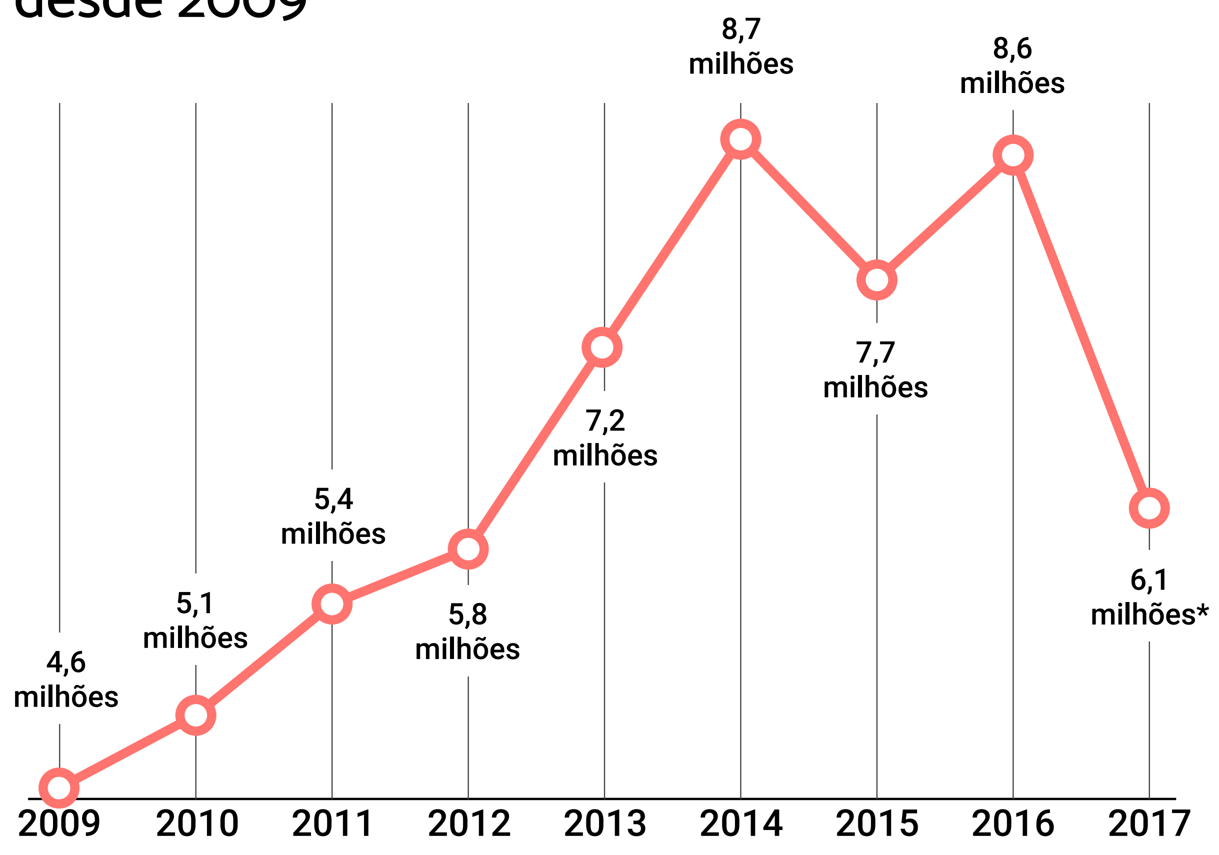
Gráficos de linha

ETAPA 1

Observe o gráfico a seguir.

ENEM - HISTÓRICO DE INSCRIÇÕES

Número de inscrições confirmadas no Enem desde 2009



FONTE: MEC/Inep (*o número de inscrições confirmadas ainda podem mudar, após o prazo de análise de recursos sobre as isenções

FONTE: CARVALHO, L. Enem 2017 tem o menor número de inscritos confirmados desde 2013. G1, maio 2017. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/enem/2017/noticia/enem-2017-teve-pelo-menos-61-milhoes-de-inscricoes-confirmadas.ghtml. Acesso em: 25/06/2022.

a) Quais as características desse gráfico? Para que situações ele é indicado? Quais os pontos de atenção no momento da construção desse tipo de gráfico?

b) Quais as informações que apresenta?

c) Segundo os dados observados, houve diminuição no número de inscritos em algum momento? Quando?

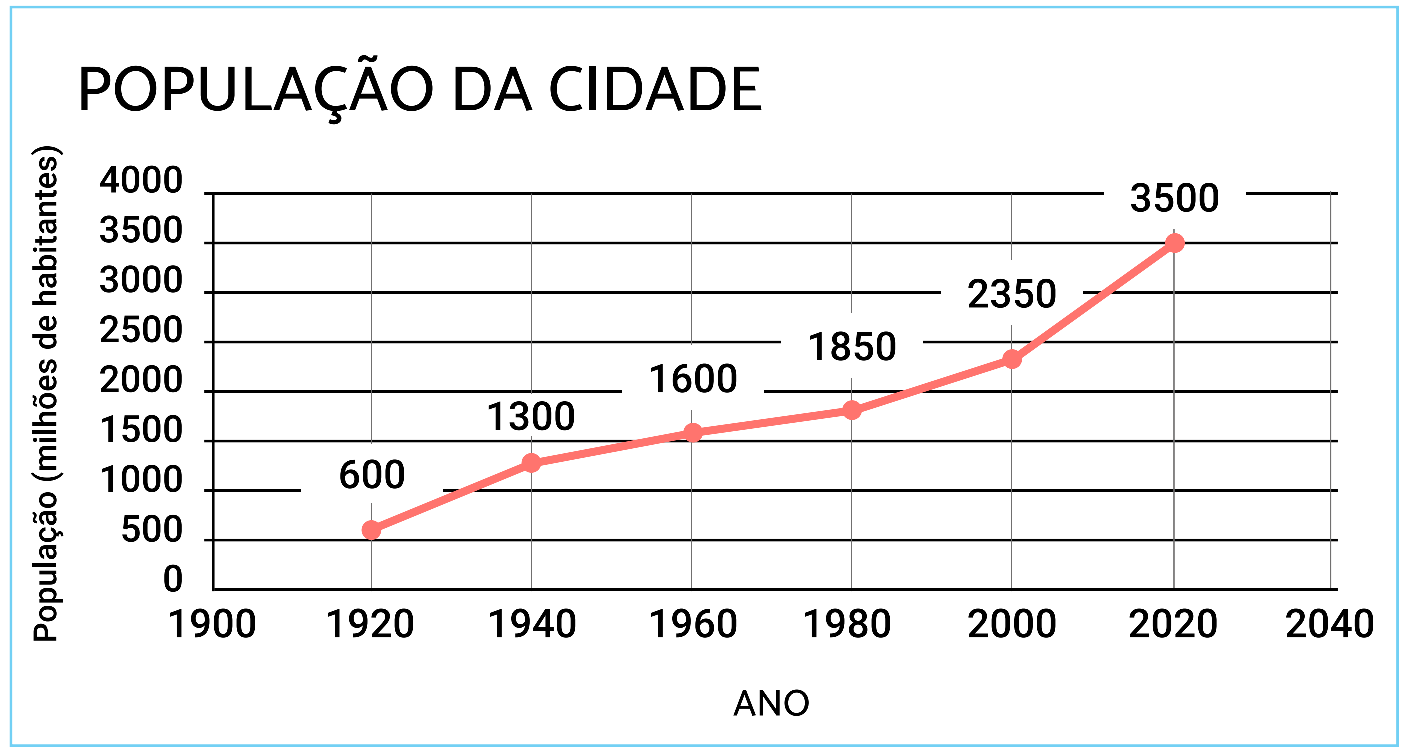
d) Em que ano ocorreu o maior número de inscritos? Qual foi esse número? Escreva-o por extenso (como se lê).

e) Qual a diferença entre o número de inscritos em 2016 e 2015?

f) O menor número de inscritos que aparece no gráfico é 4,1. Escreva esse número por extenso. Esse é um número natural? O que representa a virgula que aparece na escrita desse número?

ANEXO 8 ▶ **ETAPA 2**

Um pesquisador realizou um estudo a respeito do crescimento populacional de uma determinada cidade e construiu o gráfico abaixo para apresentar os resultados dessa pesquisa.



a) Escreva um pequeno texto, contando sobre as informações contidas no gráfico. Descreva as características do crescimento da população estudada.

b) Um estatístico afirmou , após analisar atentamente o gráfico e identificar erro nessa construção, que esta não representa corretamente o crescimento populacional da cidade estudada.

- Converse com seus colegas: que erro seria esse?

- Após encontrar o erro, construa corretamente o gráfico. Você pode utilizar uma planilha eletrônica ou um plotador de gráficos (como o Geogebra, disponível em: https://bityli.com/Geogebra, ou mesmo planilhas eletrônicas como o Excel), para essa construção. Caso não seja possível, utilize um papel quadriculado.

ANEXO 8 ▶ **ETAPA 3**

Observe o infográfico apresentado na figura.

a) Quais as informações que ele apresenta?

b) Segundo esse infográfico, quantas garrafas foram vendidas em 2016?

- Escreva esse número, explicitando todas as suas ordens e classes.
- Escreva esse número a partir de um produto.
- Escreva esse número a partir de um produto de maneira que um dos fatores seja uma potência de 10.

GARRAFAS DE BEBIDAS

Um "mar" de plástico

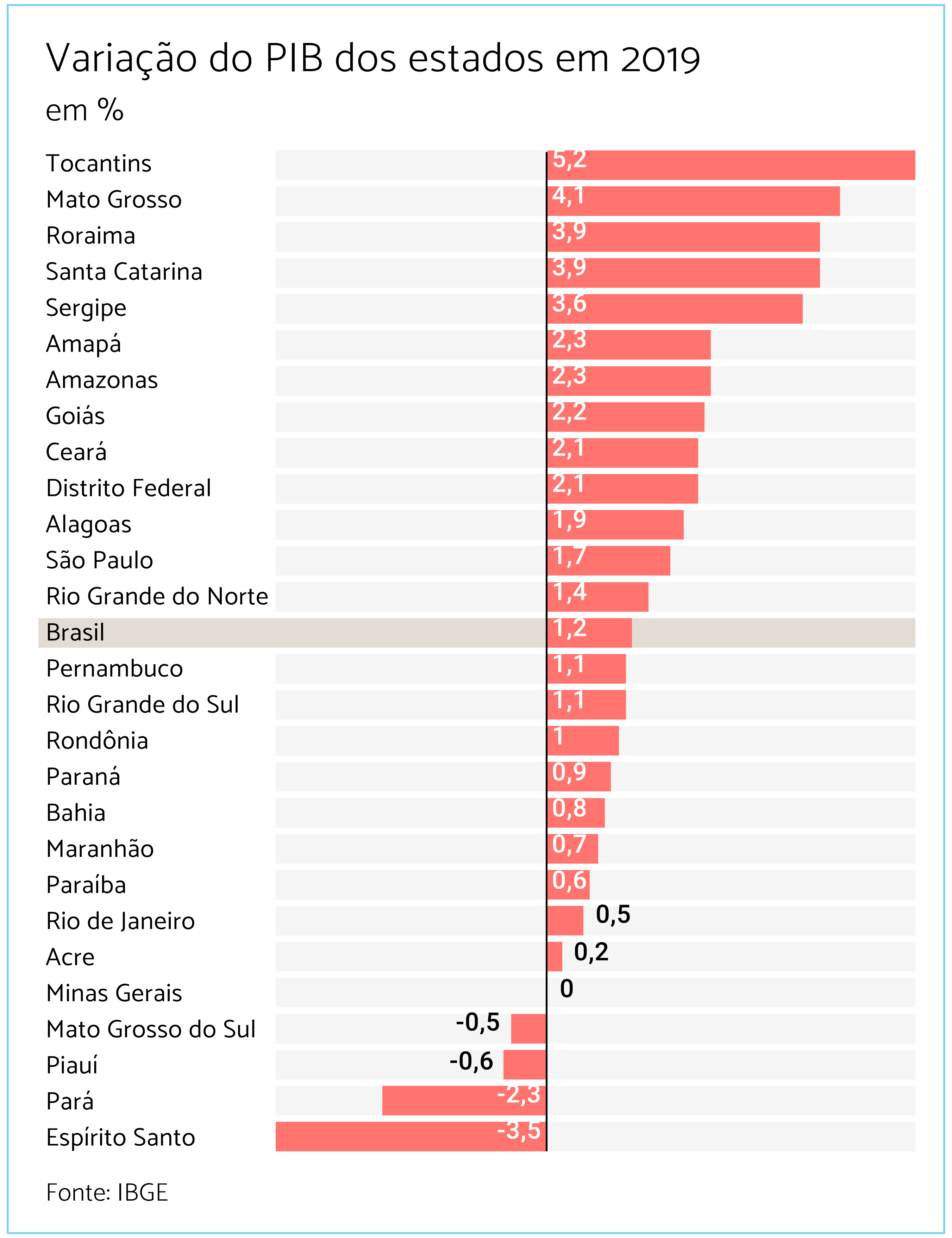
1 milhão de garrafas são compradas por minuto ou 16,6 mil por segundo	480 bilhões vendidas em 2016 110 bilhões fabricadas pela Coca-Cola
Menos de 50% coletadas para reciclagem	7% transformadas em novas garrafas

Fonte: Euromonitor

FONTE: CINCO gráficos que explicam como a poluição por plástico ameaça a vida na Terra. BBC News, dez. 2017. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-42308171. Acesso em: 25 jun. 2022.

ANEXO 8 ▸ ETAPA 4

Observe o gráfico a seguir.



Fonte: TOCANTINS teve maior alta do PIB entre os estados em 2019. G1, 12 nov. 2021. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2021/11/12/tocantins-teve-maior-alta-do-pib-entre-os-estados-em-2019-apenas-4-tiveram-queda-aponta-ibge.ghtml. Acesso em: 25 jun. 2022.

a) Quais as informações contidas no gráfico? Como descobriu? Quais as informações representadas no eixo horizontal? E no eixo vertical?
Exemplo de resposta esperada: o gráfico apresenta informações (em %) a respeito da variação do PIB do Brasil e dos seus estados. Essas informações estão no título do gráfico e no eixo vertical.

b) Converse com seu professor de geografia ou pesquise em revistas ou mesmo na internet: o que é PIB? O que significa dizer que a variação do PIB foi positiva? E o que significa se foi negativa?
Exemplo de resposta esperada: o PIB (Produto Interno Bruto) é um indicador que funciona como um termômetro da economia. : quanto maior o PIB de um país, maior sua atividade econômica e por sua vez, quanto maior a atividade econômica de um país, mais se consome, vende e investe nele.

c) Segundo as informações contidas no gráfico, qual estado apresentou a maior variação percentual do PIB em 2019? Qual foi essa variação?
Exemplo de resposta esperada: maior variação ocorreu em Tocantins e foi de 5,2%

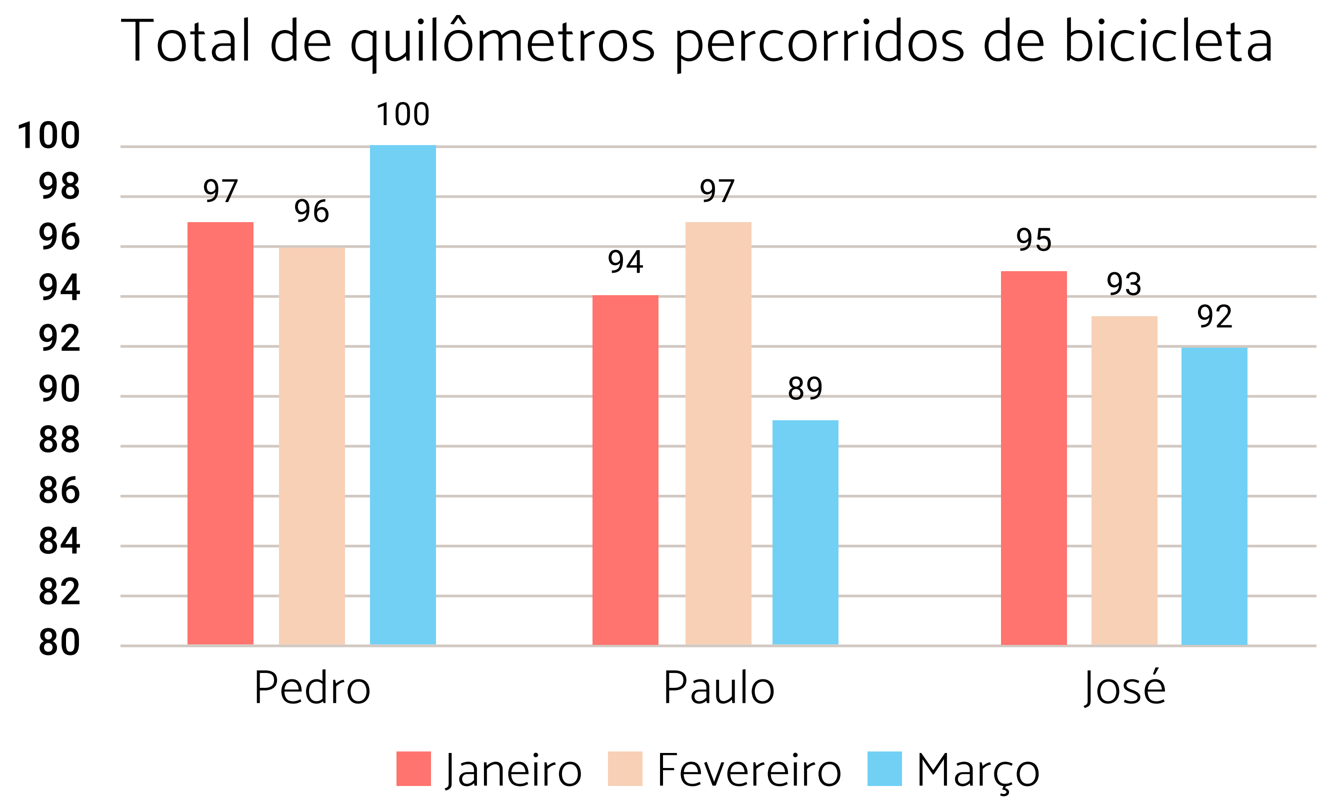
d) Qual estado apresentou a menor variação percentual do PIB em 2019? Qual foi essa variação?
Exemplo de resposta esperada: menor variação ocorreu no Espírito Santo e foi de -3.8%

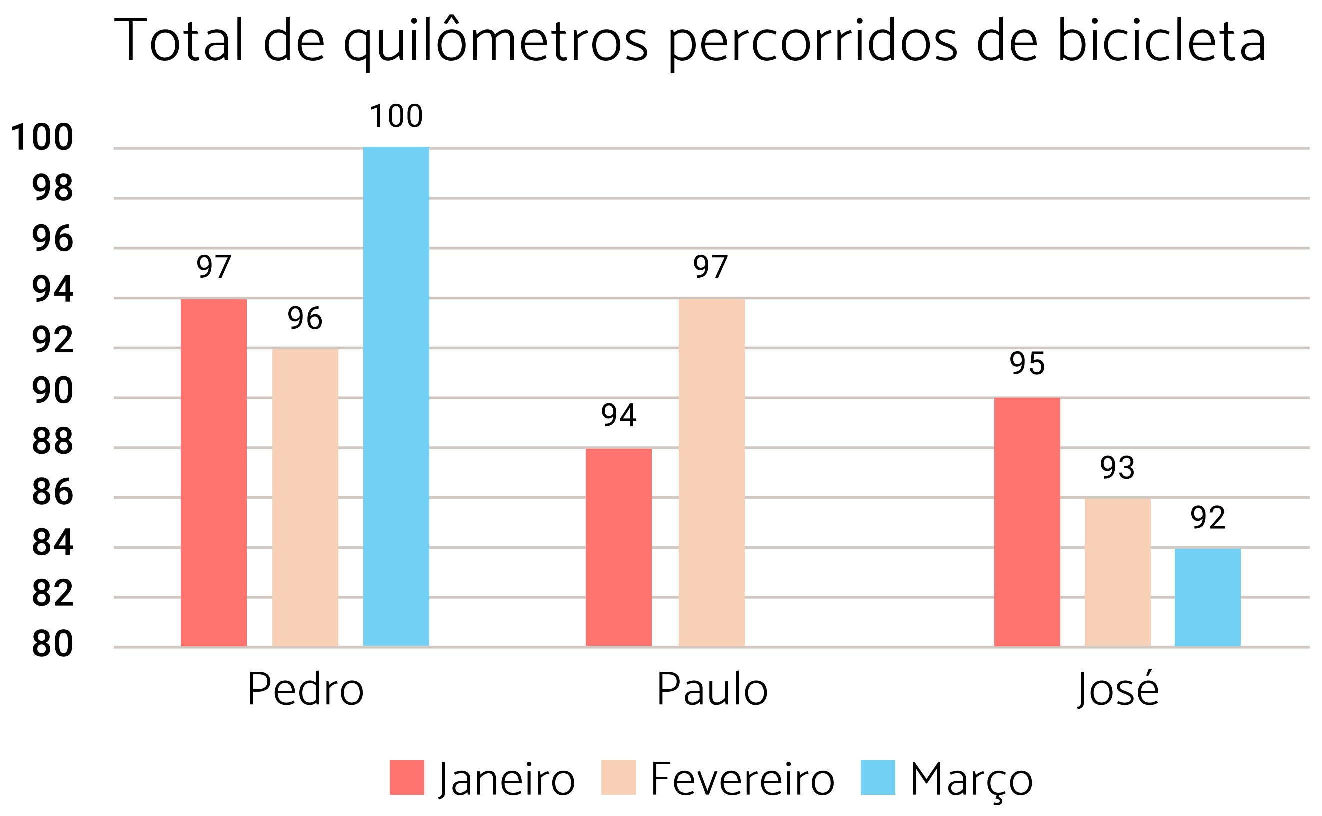
e) Qual a diferença entre a maior e a menor variação do PIB? Escreva uma expressão matemática para representar essa situação.
Resposta: diferença 5,2 - (-3,8) = 9,0

f) Quais os estados que apresentaram variação negativa do PIB (contração da economia)? Qual a diferença entre o índice de MS e do ES? Escreva uma expressão matemática para representar essa situação.
Resposta: Os estados que apresentaram variação negativa do PIB foram: Mato Grosso do Sul, Piauí, Pará e Espírito Santo.

ANEXO 8 ▶ ETAPA 5

Analise os gráficos a seguir.

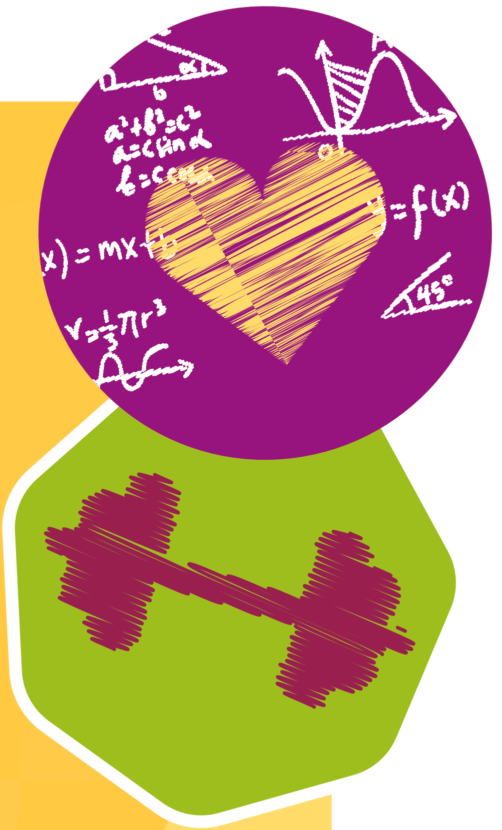




a) Quais as informações que eles apresentam no eixo horizontal? E no eixo vertical?
Exemplo de resposta esperada: eixo horizontal: nome dos atletas e no eixo vertical a quantidade de quilômetros percorridos de bicicleta.

b) Quais as semelhanças e diferenças entre eles?
Exemplo de resposta esperada: semelhanças: mesmos atletas, mesma quantidade de quilômetros percorrida por eles em janeiro e março. Diferença: quilometragem de Paulo no mês de março.

c) Qual o erro e a interpretação que o gráfico no 2 pode induzir? Por que isso acontece?
Exemplo de resposta esperada: como no gráfico 2 a escala está inadequada, pois começa no 90, pode dar a falsa impressão que Paulo não pedalou no mês de março.

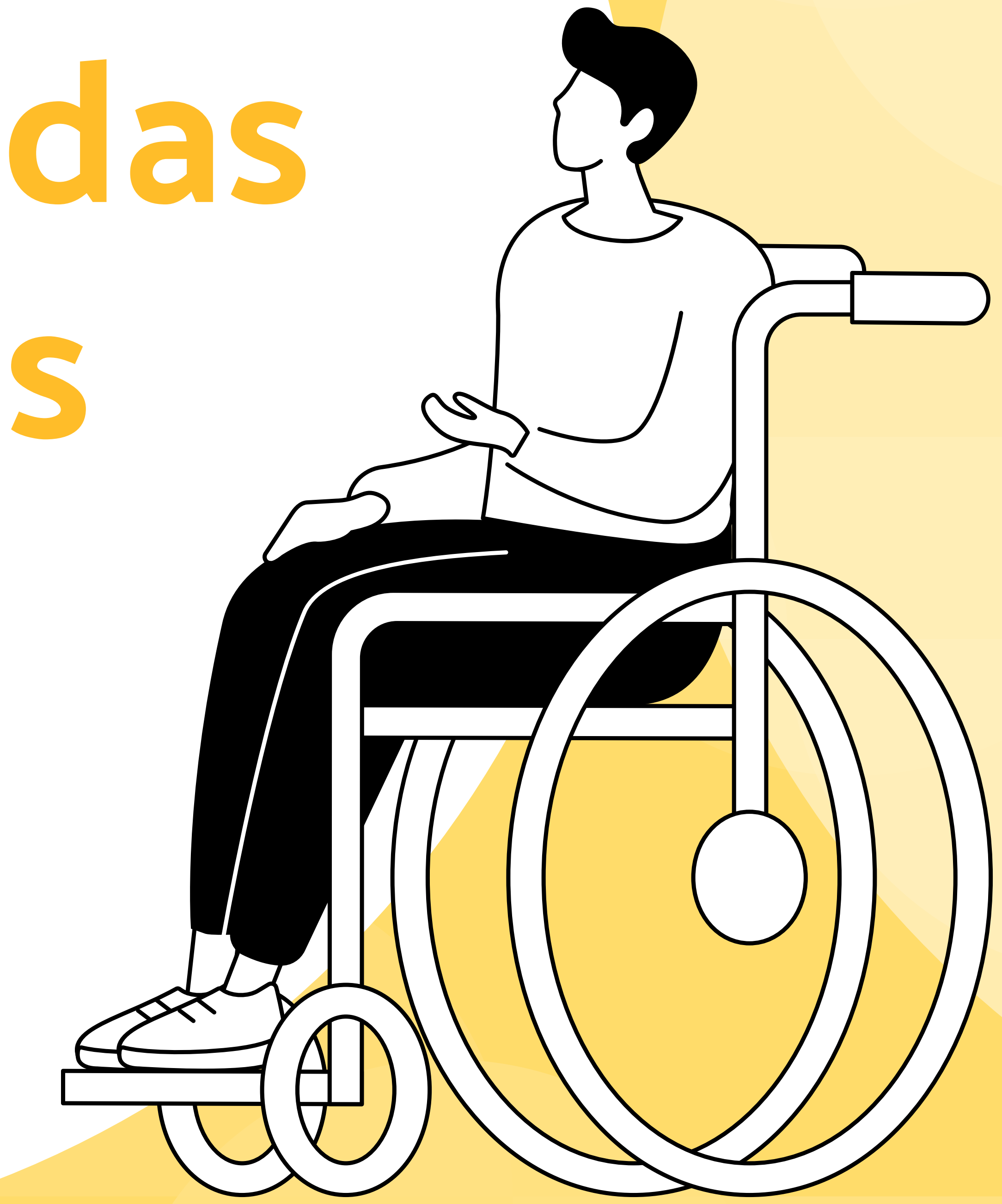


SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2:

PENSAMENTO ALGÉBRICO, EQUAÇÃO E FUNÇÃO DO 1º GRAU E ÁREAS

Atividades

Introdução das atividades



Olá, professor/a!

Seja bem-vindo a segunda sequência didática de Matemática.

Iniciamos esta sequência com um quadro contendo as habilidades priorizadas que serão contempladas neste percurso. Essas informações podem auxiliar no planejamento do professor e no acompanhamento da recomposição da aprendizagem dos estudantes.

Assim como na primeira sequência didática, nesta proposta o estudante também é desafiado constantemente a manter-se reflexivo e crítico. As metodologias utilizadas promovem a investigação e a formulação de hipóteses, e desenvolvem a autonomia e o protagonismo no jovem. Além dos aspectos cognitivos, o desenvolvimento das competências socioemocionais, como comunicação, colaboração, autoconfiança e persistência, também permeia todas as propostas, colaborando com a formação integral do jovem.

As atividades aqui apresentadas podem potencializar a aprendizagem do estudante, porém o professor/a poderá planejar suas aulas, inserir mais atividades ou mesmo não contemplar alguma das propostas apresentadas, de acordo com as necessidades de seus estudantes.

Nessa sequência didática, o foco das atividades 1 e 2 é o pensamento algébrico, enfatizando o desenvolvimento da linguagem específica da álgebra, a identificação de padrões e generalizações, a análise da interdependência entre grandezas e a resolução de problemas por meio de equações. Associado ao pensamento algébrico, essa sequência também contempla o início do pensamento computacional, salientando a importância dos algoritmos. Na proposta 2, ampliamos o trabalho do campo numérico, trazendo os números irracionais e reais, e iniciamos as discussões acerca das funções.

Na atividade 3, além da compreensão do conceito de perímetro e área e a aprendizagem significativa das expressões matemáticas relacionadas ao cálculo dessas medidas, será explorado o conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais.

Ao final das atividades, encontram-se indicações para que você organize a ampliação de estudos do estudante em seus momentos de autogestão.

Nesta proposta, a ideia é que o estudante seja avaliado durante todo o processo (avaliação processual e formativa), além de realizar autoavaliação ao longo das atividades, tomando consciência do seu processo de aprendizagem. **Bom trabalho!**

No quadro a seguir, você encontra a relação das **Competências Específicas e Habilidades de Matemática** na etapa da **BNCC do Ensino Médio** selecionadas para essa Sequência Didática, bem como sua relação com as **Habilidades do EF Anos Finais, e descritores do SAEB.**

Tempo sugerido: 24 horas/aula

TEMA - NÚMEROS REAIS, PENSAMENTO ALGÉBRICO, EQUAÇÃO E FUNÇÃO DO 1º GRAU			
PARTE 2 - PENSAMENTO ALGÉBRICO E EQUAÇÃO DO 1º GRAU			
Competências específicas da área: propostas para o Ensino Médio	**Habilidades focais do EF: anos finais que são conhecimentos prévios**	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.	(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.		• Reconhecer um número irracional. • Identificar a localização de números irracionais na reta numérica.

TEMA - NÚMEROS REAIS, PENSAMENTO ALGÉBRICO, EQUAÇÃO E FUNÇÃO DO 1º GRAU			
PARTE 2 - PENSAMENTO ALGÉBRICO E EQUAÇÃO DO 1º GRAU			
Competências específicas da área: propostas para o Ensino Médio	**Habilidades focais do EF: anos finais que são conhecimentos prévios**	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.	(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.	Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas. D32 Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões). D30 Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.

TEMA - NÚMEROS REAIS, PENSAMENTO ALGÉBRICO, EQUAÇÃO E FUNÇÃO DO 1º GRAU			
PARTE 2 - PENSAMENTO ALGÉBRICO E EQUAÇÃO DO 1º GRAU			
Competências específicas da área: propostas para o Ensino Médio	**Habilidades focais do EF: anos finais que são conhecimentos prévios**	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade. (EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.	(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema (equação do 1º grau). (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.	D33 Identificar uma equação ou inequação do 1º grau que expressa um problema. Descrever, por meio de um texto, as etapas necessárias para efetuar um procedimento matemático (resolver uma equação do 1º grau). Representar pontos no plano cartesiano associados a uma equação de 1º grau com duas variáveis.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano. (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	D34 Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema. D35 Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau.

TEMA - NÚMEROS REAIS, PENSAMENTO ALGÉBRICO, EQUAÇÃO E FUNÇÃO DO 1º GRAU			
PARTE 3 - FUNÇÃO DO 1º GRAU			
Competências específicas da área: propostas para o Ensino Médio	**Habilidades focais do EF: anos finais que são conhecimentos prévios**	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas e comunicação de resultados de problemas.	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. (EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	Reconhecer uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes. D24 Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico. Reconhecer uma função polinomial de 1º grau por meio de sua escrita algébrica. Reconhecer a representação gráfica de uma função do 1º grau. Interpretar o gráfico e a representação algébrica de funções definidas por mais de uma sentença.

TEMA - NÚMEROS REAIS, PENSAMENTO ALGÉBRICO, EQUAÇÃO E FUNÇÃO DO 1º GRAU			
PARTE 4 - ÁREAS DE QUADRILÁTEROS, TRIÂNGULOS E CÍRCULOS E GRANDEZAS PROPORCIONAIS			
Competências específicas da área: propostas para o Ensino Médio	Habilidades focais do EF: anos finais que são conhecimentos prévios	Descrição das habilidades focais de matemática do EM	Descritores SAEB
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas. (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.	(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	D13 Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas. D5 Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.

TEMA - NÚMEROS REAIS, PENSAMENTO ALGÉBRICO, EQUAÇÃO E FUNÇÃO DO 1º GRAU			
PARTE 4 - ÁREAS DE QUADRILÁTEROS, TRIÂNGULOS E CÍRCULOS E GRANDEZAS PROPORCIONAIS			
Competências específicas da área: propostas para o Ensino Médio	**Habilidades focais do EF: anos finais que são conhecimentos prévios**	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas. (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.	(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras –velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc. (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.	D29 Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

Neste quadro você encontra o **resumo das atividades** desta Sequência Didática, bem como os **objetivos específicos** e o **tempo sugerido** para cada uma delas.

	ATIVIDADE	TEMPO SUGERIDO	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	RESUMO
1	Sequências: padrão e generalização, linguagem algébrica e equações do 1º grau	12 horas/aula	Retomar os conceitos de variável e de incógnita, a escrita algébrica e o cálculo do valor numérico de expressões algébricas. A resolução de equações do 1º grau e de sistemas de equações do 1º grau também é contemplada nesta atividade.	A proposta está dividida em: **Momento 1** Acolhimento: para conhecer as experiências dos estudantes relacionadas ao tema álgebra e para retomar regularidades e generalizações (1 aula). **Momento 2** Rotação por estações - Sequências: padrão e generalização em linguagem algébrica (2 aulas). **Momento 3** Organizando as aprendizagens (1 aula). **Momento 4** Resolvendo equações do 1º grau (1 aula). **Momento 5** O passo a passo para resolver uma equação do 1º grau (1 aula). **Momento 6** Resolvendo problemas que podem ser modelados por equação do 1º grau (2 aulas). **Atividade Extra** Cálculo Mental envolvendo resolução de equação do 1º grau. **Momento 7** Sistemas de equações do 2º grau: Resolução gráfica e algébrica (método da adição e da substituição) (3 aulas). **Bora se preparar?** (1 aula).
2	Funções do 1º grau	6 horas/aula	Construção do conceito de função e o reconhecimento dos elementos e das características das funções do 1º grau.	A proposta está dividida em: **Momento 1** Construindo o conceito de função e definindo função do 1º grau (2 aulas). **Momento 2** Ampliando o universo numérico: conhecendo os números irracionais e os números reais (2 aulas). **Momento 3** Estudando o domínio de uma função (1 aula). **Bora se preparar?** (1 aula).
3	Áreas de triângulos e quadriláteros e grandezas direta e inversamente proporcionais	5 horas/aula	Além da compreensão do conceito de perímetro e área e a aprendizagem significativa das expressões matemáticas relacionadas ao cálculo dessas medidas, nesta proposta será abordado o conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais.	**Momento 1** Perímetro, área e grandezas proporcionais (2 aulas). **Momento 2** Área de quadriláteros e de triângulos (2 aulas). **Bora se preparar?** (1 aula).
4	Resolução de problemas	1 aula extra		**Aula extra** Nesta aula de resolução de problemas, traremos um problema de travessia, sem números (1 aula).

ORIENTAÇÕES GERAIS

UMA CONVERSA INICIAL

Sabemos dos grandes desafios de ensinar matemática nos tempos atuais: muitos estudantes com habilidades ainda não consolidadas, alguns com experiências não muito agradáveis em relação a essa área do conhecimento e outros ainda muito desmotivados. Por isso, é necessário buscar atividades que motivem/engajem os estudantes e que possibilitem retomar habilidades propostas para os anos finais do Ensino Fundamental e integrá-las com as propostas para o Ensino Médio para que o estudante avance, isto significa que podemos priorizar atividades que simultaneamente ensinem o que não aprenderam nos anos anteriores e que permitam avançar para as aprendizagens essenciais esperadas para a 1ª série do Ensino Médio.

Esse cenário enfatiza a necessidade de um bom planejamento e uma boa gestão da sala de aula que favoreçam consolidar, ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos dos estudantes no Ensino Médio, conforme previsto na BNCC. Além disso, o desenvolvimento intencional de competências gerais da BNCC, como aquelas ligadas a resiliência, abertura ao novo, autoconfiança e autogestão, é essencial para que os estudantes permaneçam motivados para aprender, confiem em sua capacidade para isso e continuem suas trajetórias escolares.

Gostaríamos de dividir com você alguns pontos importantes relacionados à gestão das aulas:

- No início da aula, coloque no quadro o que será feito e, ao final, avalie se o proposto foi realmente realizado por todos.
- Destaque as aprendizagens feitas e avalie com os estudantes o que pode ser melhorado.
- Reserve momentos das aulas para dialogar com os estudantes sobre o desenvolvimento de competências ligadas a resiliência emocional, abertura ao novo e autogestão, apoiando-os a observarem como estão se desenvolvendo do ponto de vista socioemocional. Reforce a importância da persistência, determinação, autoconfiança e curiosidade para aprender.
- Para o trabalho em duplas ou grupos, você pode estabelecer combinados: algumas vezes eles escolherão com quem trabalhar, outras vezes você fará isso para apoiar que todos possam se ajudar e avançar; pode estabelecer dias fixos para o trabalho em grupo e já pedir que organizem a sala antes da sua chegada; explique a importância de as mesas estarem próximas para que todos se ouçam; proponha sempre que uma pessoa cuide para que todos falem, que outra apoie no controle do tempo e que haja ainda uma pessoa para ser o porta-voz do grupo. Você pode ver uma experiência interessante sobre isso em "Alunos trabalhando em grupos", disponível em: bityli.com/tr-grupo (acesso em 06/2022).
- Depois do trabalho em duplas ou grupos, organize a sala em um grande círculo e proponha que alguns estudantes registrem no quadro suas soluções, por escrito, de modo que todos possam analisar semelhanças, diferenças e eventuais erros nas soluções encontradas. Você pode ver uma experiência interessante sobre isso em "Alunos refletem sobre seu trabalho em grupos", disponível em: bityli.com/alunos-trabalho-gp (acesso em 06/2022).
- Para cada atividade, incentive os estudantes que apresentaram diferentes resoluções a explicar como

pensaram. Você pode escolher quem vai socializar suas estratégias durante a realização da proposta enquanto circula pela sala.

- Organize sistematizações da aprendizagem como fechamento das atividades. Incentive os estudantes a tomar nota das conclusões de cada proposta.
- Com base nos dados de avaliação/dúvidas/diferenças de aprendizagem, planeje uma aula a cada semana ou a cada 15 dias para apoiar estudantes em necessidades específicas. Você pode, por exemplo:
  - Propor atividades diferentes para estudantes com dúvidas nas mesmas habilidades.
  - Propor diferentes atividades na sala para contemplar estudantes com dúvidas em diferentes habilidades.
  - Organizar grupos de modo que estudantes que sabem mais possam apoiar os colegas que ainda estão com dificuldades em algum determinado tema.
- Nas atividades que considerar mais pertinentes, destaque a importância da Matemática para a vida dos estudantes para além da escola e promova a reflexão sobre a relação das aprendizagens deste componente curricular com seus projetos de vida.

LEITURAS INDICADAS

- Para saber mais sobre as ideias envolvidas no ensino de álgebra, sugerimos a leitura do texto “Uma reflexão sobre o ensino de álgebra”, de Maria Ignez Diniz, disponível em: bityli.com/reflex-algebra (acesso em 18/04/2022).
- Para refletir a respeito do momento atual da educação, dos grandes desafios do professor para mitigar as fragilidades nas aprendizagens dos estudantes, e para saber mais sobre a recomposição de aprendizagem, sugerimos o texto “Recomposição das aprendizagens em contextos de crise”, disponível em: bityli.com/recomp-em-crise (acesso em 25/04/2022).
- Para a recomposição da aprendizagem em matemática, é preciso desenvolver a fluência dos estudantes e, para isto, é preciso exercitá-la. Para saber mais sobre treino e exercitação, sugerimos a leitura do texto “Treino ou exercitação?”, de Kátia Stocco Smole e Cristiane Chica, disponível em: bityli.com/treino-ou-exerc (acesso em 31/05/2022).
- Para saber mais sobre Mentalidade de Crescimento, sugerimos a leitura do texto “Mentalidade de Crescimento”, disponível em bityli.com/ment-de-cresc (acesso em 02/06/2022).
- Filme “Escritores da liberdade”, no qual uma jovem professora, chocada com a violência que seus alunos enfrentam fora da escola, ajuda-os a descobrir todo o potencial que eles possuem, disponível em: bityli.com/net-edl (acesso em 09/06/2022).

Atividade 1

ATIVIDADE 1

SEQUÊNCIAS: PADRÃO, GENERALIZAÇÃO EM LINGUAGEM ALGÉBRICA E EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Foco:

O foco inicial da atividade é retomar os conceitos de variável e de incógnita, a escrita algébrica e o cálculo do valor numérico de expressões algébricas. A resolução de equações do 1º grau e de sistemas de equações do 1º grau também é contemplada nesta atividade.

A proposta aqui apresentada visa desenvolver três habilidades focais previstas para o Ensino Fundamental:

- **(EF07MA13)** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
- **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas
- **(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

Vale observar que as atividades propostas podem servir como revisão para os estudantes que já desenvolveram essas habilidades e que eles podem ser incluídos como tutores para aqueles que ainda precisam desenvolvê-las com os temas apresentados.

Essas habilidades envolvem conhecimentos prévios para o desenvolvimento da habilidade **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada, proposta para o Ensino Médio.

Tempo sugerido: 10 horas/aula.

Possíveis materiais:

Estação 1

- 1 cópia impressa ou virtual do Anexo 1 – Padrão, generalização e linguagem algébrica.
- Caderno do estudante para os registros.

Estação 2

- 1 cópia impressa ou virtual do Anexo 2 – Uma máquina de calcular diferente.
- Caderno do estudante para os registros.

Estação 3

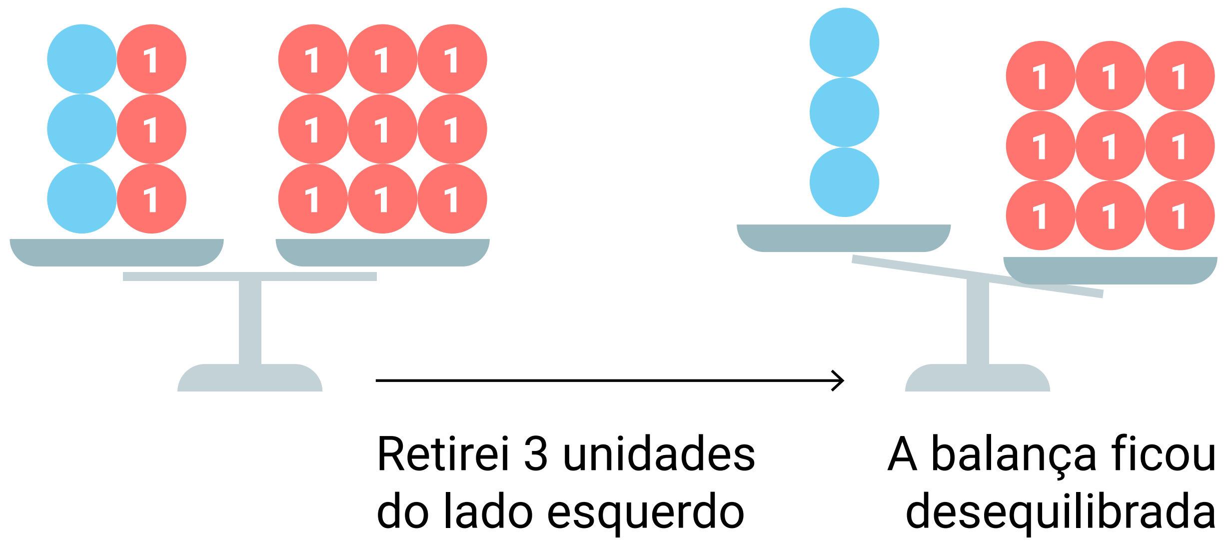
- 1 kit do jogo *Maneiras de escrever*, contendo as cartas azuis e amarelas recortadas, diponível no Anexo 3.
- 1 cópia impressa ou virtual das tabelas da Etapa 2.
- Caderno do estudante para os registros.

Estação 4

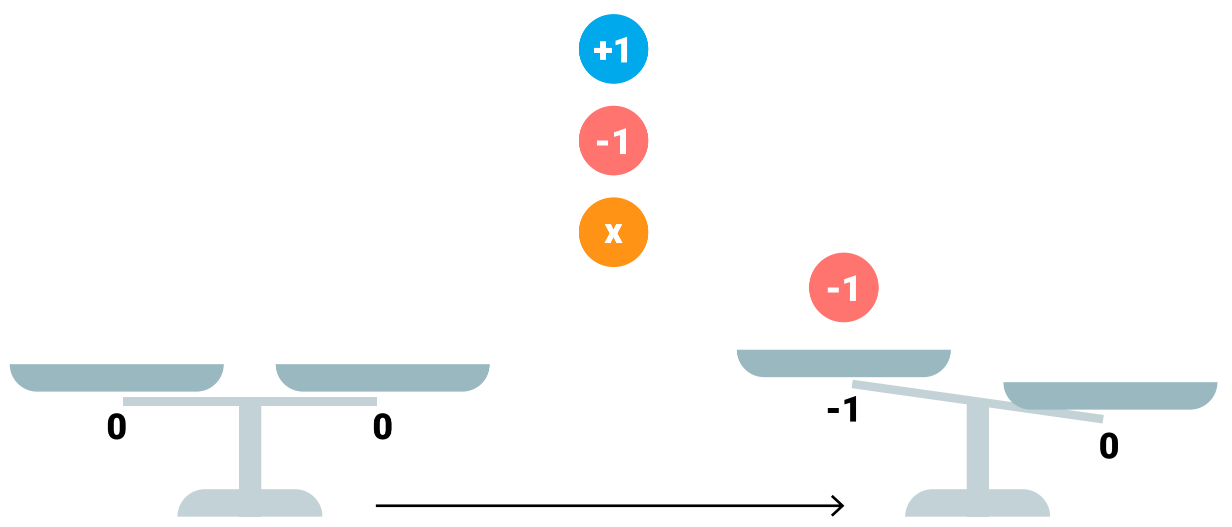
- 1 cópia do Anexo 4.
- Caderno do estudante para os registros.

- Acesso ao aplicativo *Explorador de Igualdade*. Caso o acesso ao aplicativo não seja possível, providencie a imagem da balança (disponível no Anexo 4, pode ser na versão impressa ou projetada para os estudantes) e peça que realizem as alterações solicitadas, utilizando desenhos para representá-las no exemplo A, ilustrado a seguir.
- Figuras com balanças (disponíveis no Anexo 6, que podem ser na versão impressa ou na versão digital para projetar para os estudantes).
- Acesso ao aplicativo *Model Algebra Equations*, disponível em: bityli.com/algebra-eq. Apesar de estar em inglês, ele é muito intuitivo: clique sobre uma das setas para inserir o ícone selecionado (x, +1 ou -1) em um dos pratos da balança. Veja, a seguir, o exemplo B. Caso não seja possível o acesso, o professor/a poderá disponibilizar algumas equações e solicitar que os estudantes realizem desenhos para representar a balança inicial e as alterações realizadas para resolver a equação.
- Um conjunto de símbolos/orientações (disponíveis no Anexo 5) impresso com as orientações recortadas.
- Imagens das balanças, tabelas e sistemas que estão presentes ao longo dessa sequência didática (podem ser na versão impressa ou virtual, que poderá ser projetada para o estudante). Outra possibilidade é disponibilizá-las no próprio quadro da sala de aula.

Exemplo A



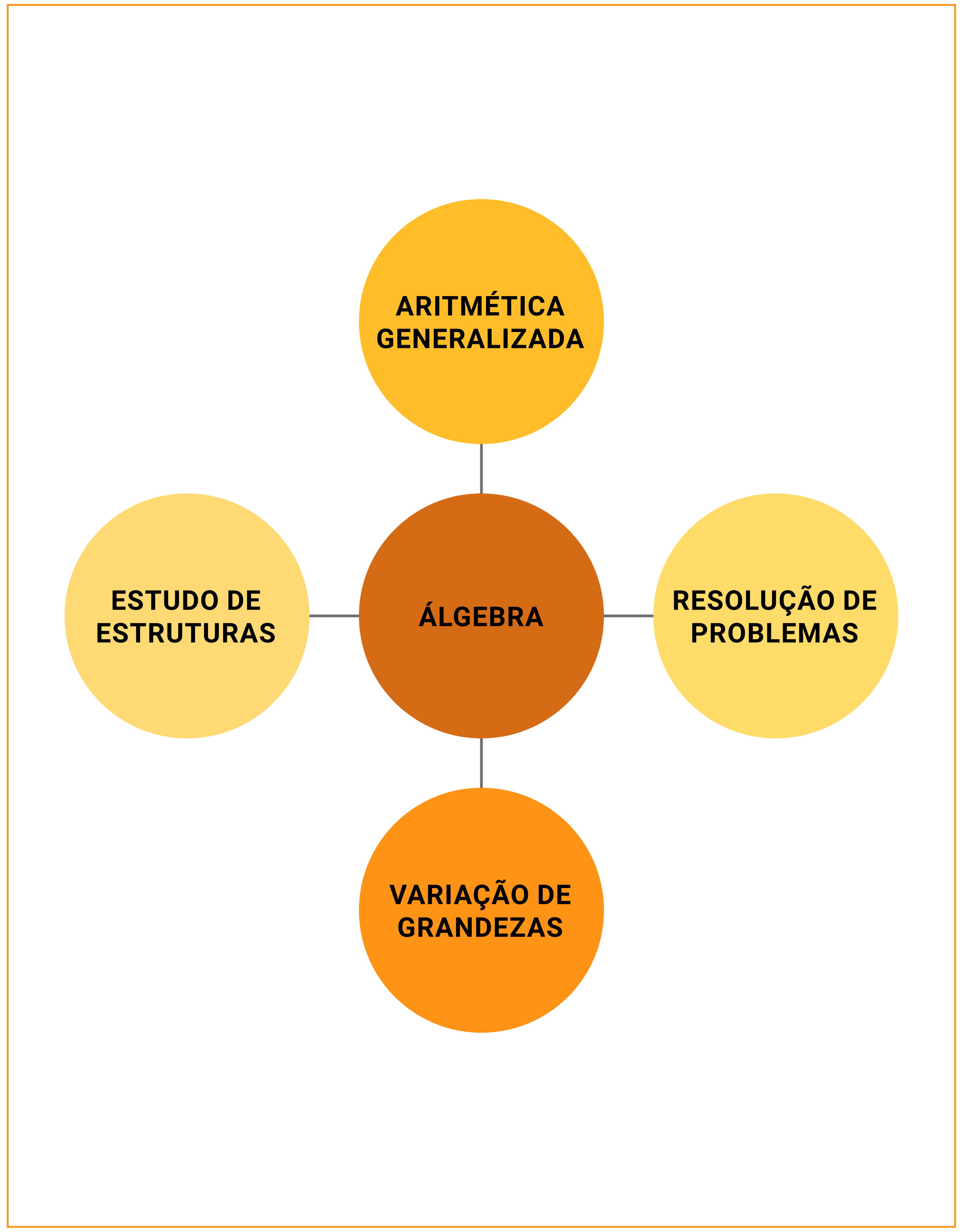
Exemplo B



Orientações gerais

Professor/a, iniciamos essa segunda sequência didática com o tema **Pensamento Algébrico**. Antes de conhecer as atividades sugeridas, vale uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem de álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Embora ela ocupe grande parte do tempo das aulas de Matemática nestes segmentos, é do conhecimento de todos os professores que a maioria dos estudantes encontra muitas dificuldades para aprender álgebra. Essas dificuldades podem estar relacionadas ao fato de que, muitas vezes, os temas desta unidade temática da matemática na BNCC são apresentados aos estudantes como regras prontas, sem significado, sem justificativas, sem que eles entendam o porquê delas. Assim, em um primeiro momento, eles até aplicam essas regras de forma mecânica, mas logo em seguida esquecem os procedimentos utilizados.

Neste cenário, faz-se necessário um novo olhar para o ensino de Álgebra. As atividades apresentadas nesta sequência didática representam algumas alternativas para atribuir novos significados ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes do Ensino Médio. Vale ressaltar que o ensino e a aprendizagem de álgebra devem contemplar as quatro ideias nela envolvidas:



Mesmo que seus estudantes tenham estudado esse tema antes, sugerimos que façam essas atividades para que possam relembrar, entender melhor a relação entre ideias importantes envolvidas no ensino de Álgebra e garantir a alfabetização dos estudantes nessa linguagem com atividades que lhes permitam desenvolver um conjunto de habilidades para pensar e resolver situações no campo algébrico, tais como:

- Expressar generalidades com base na observação de regularidades numéricas ou geométricas.
- Reconhecer a letra como incógnita, isto é, representação de valor indeterminado ou genérico.
- Reconhecer situação na qual duas ou mais variáveis se relacionam e, neste caso, a letra como variável numa relação algébrica.
- Expressar a relação entre as variáveis algebricamente, graficamente, por tabelas, esquemas.
- Traduzir uma situação-problema em uma equação ou inequação.

Vale a pena ler a respeito da importância da Matemática visual, disponível em bityli.com/mat-visual (acesso em 05/06/2022).

ATIVIDADE 1 ▸ MOMENTO 1

2 aulas > Aula 1:

Acolhimento

Professor/a, para iniciar esta segunda SD, sugerimos uma conversa para conhecer as experiências dos estudantes relacionadas ao tema álgebra. Faça algumas perguntas para motivar a discussão, como:

- Você já estudou álgebra?
- O que você lembra desse estudo?

Peça que contem sobre o que lembram a respeito desse conteúdo. Não se assuste nem comente caso digam que não sabem, que não gostam, que é difícil, que não entendem nada. Esse é um momento de acolhida dessas impressões. Você pode também pedir que desenhem em um pequeno cartão ou pedaço de papel um emoji de triste, feliz ou indiferente para mostrar o que sentem. Podem deixar o emoji no caderno e, depois, quando finalizar a sequência de atividades, vocês podem retomar essa percepção inicial para que eles avaliem se mudaram ou não seu sentimento em relação à álgebra.

Lembre-os sempre que são capazes de aprender álgebra, que você confia nisso e que as atividades que virão vão ajudá-los nesse processo, mas que precisarão trabalhar em cada atividade com foco, que devem fazer perguntas quando tiverem dúvidas e que não devem desistir.

ATIVIDADE 1 ▸ **MOMENTO 1** ▸ **EXERCÍCIO 1**

Apresente a eles a sequência de figuras ao lado.

Peça que, em duplas ou grupos, discutam como cada figura foi formada. Sugerimos que você entregue aos estudante papel quadriculado e canetinhas coloridas para que eles montem as sequências apresentadas com desenhos e que mostrem, usando cores, como percebem o padrão de crescimento sendo construído de uma figura para a outra.

É importante incentivar os estudantes a encontrar múltiplas formas de descrever os padrões por meio da codificação por cores e palavras, esse movimento aguça o olhar para a observação e para a percepção dos padrões, e é um ponto de partida importante para representações mais abstratas.

Além disso, é possível trabalhar o desenvolvimento das Competências Gerais 2 e 4 da BNCC, bem como as competências 3 e 4 de matemática para o Ensino Médio. Você pode relembrar essas competências aqui: Matemática e suas tecnologias, disponível em: bityli.com/mat-e-tec (acesso em 05/06/2022).

Eles podem dizer:

- *Vai crescendo um quadradinho a cada figura.*
- *Mais 1.*
- *Vai ficando uma escadinha, um novo degrau.*
- *Vai ficando mais comprido, uma unidade a mais.*

Permita que usem a linguagem que melhor possibilite exprimir suas percepções. Então avance nas discussões e peça que desenhem como seriam a 4ª, a 5ª e 6ª figuras desse padrão. Discuta a importância dos recursos visuais para verificar o padrão de crescimento. A seguir, desafie o grupo:

- *Sem desenhar, vocês saberiam dizer quantos retângulos azuis terá a 8ª figura dessa sequência? Discutam em duplas.*

Esse exercício é importante para que os estudantes verifiquem que contar a quantidade de quadradinhos vai ajudá-los a identificar e prever o crescimento. Não solicite que façam isso, mas verifique se eles escolhem contar e como o fazem. Você pode fazer perguntas sobre como isso vai ajudá-los a identificar padrões e como eles podem registrar as conclusões.

FIGURA 1

FIGURA 2

FIGURA 3

Deixe que socializem como pensaram para descobrir a quantidade de quadradinhos para a 8ª figura e sugira que completem um quadro como o abaixo para encontrar o número de figuras amarelas:

Número da figura	Número de retângulos amarelos
1	3
2	
	5
10	
30	
	102

Questione-os:

- *Existe alguma regularidade, algo que se repete, no quadro?*
- *Qual a relação entre o número de retângulos amarelos de uma figura e a sua posição na sequência?*
- *Expliquem.*

Essa proposta tem como intenção auxiliá-los a apurar a suas percepções sobre os padrões para prever casos posteriores e evoluírem para a generalização dos padrões.

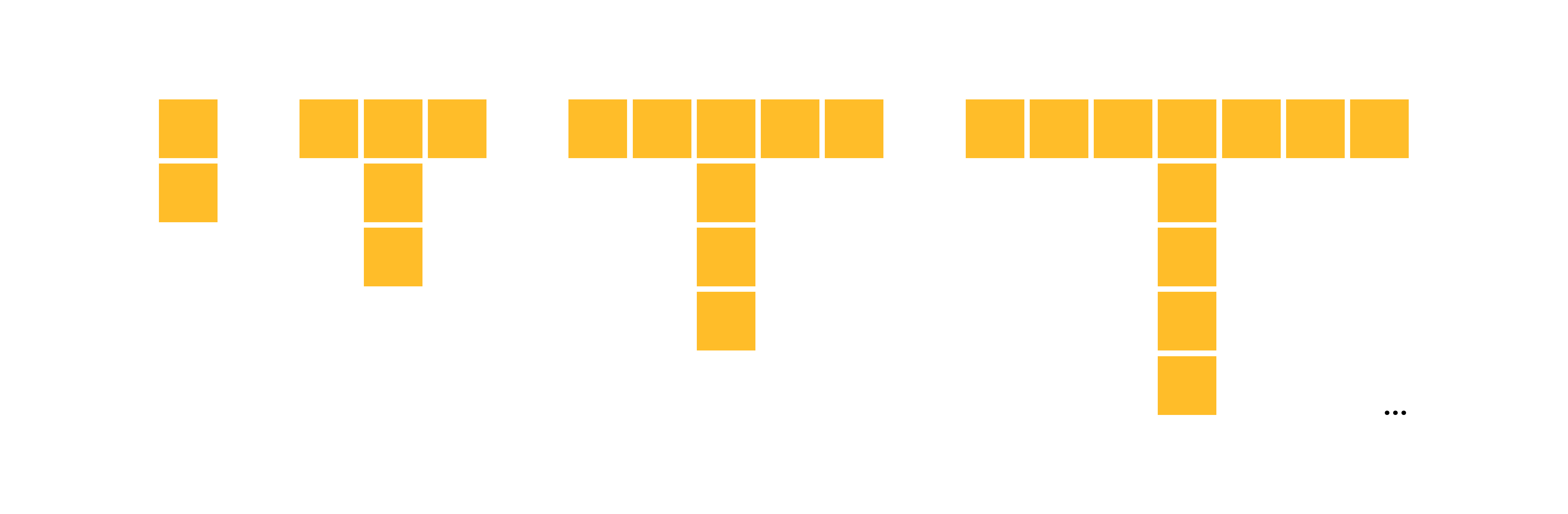
Após a discussão e o preenchimento da tabela, desafie-os a pensar se poderíamos dizer a quantidade de quadradinhos amarelos em uma figura que estivesse numa posição qualquer, por exemplo, e como poderíamos escrever isso matematicamente.

Explore o que seria uma escrita do tipo $p + 2$, em que p é a posição da figura.

Após essa primeira exploração, avance para um padrão um pouco mais complexo, realizando movimento de discussão semelhante ao anterior. Entregue material para que os estudantes reproduzam a sequência (pode ser folha quadriculada e canetinhas, assim como cubinhos de material dourado). Verifique se os estudantes trabalham com mais autonomia na execução desta proposta. Acompanhe as duplas em sua execução.

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 1 ▶ EXERCÍCIO 2

Apresente a sequência de figuras abaixo.

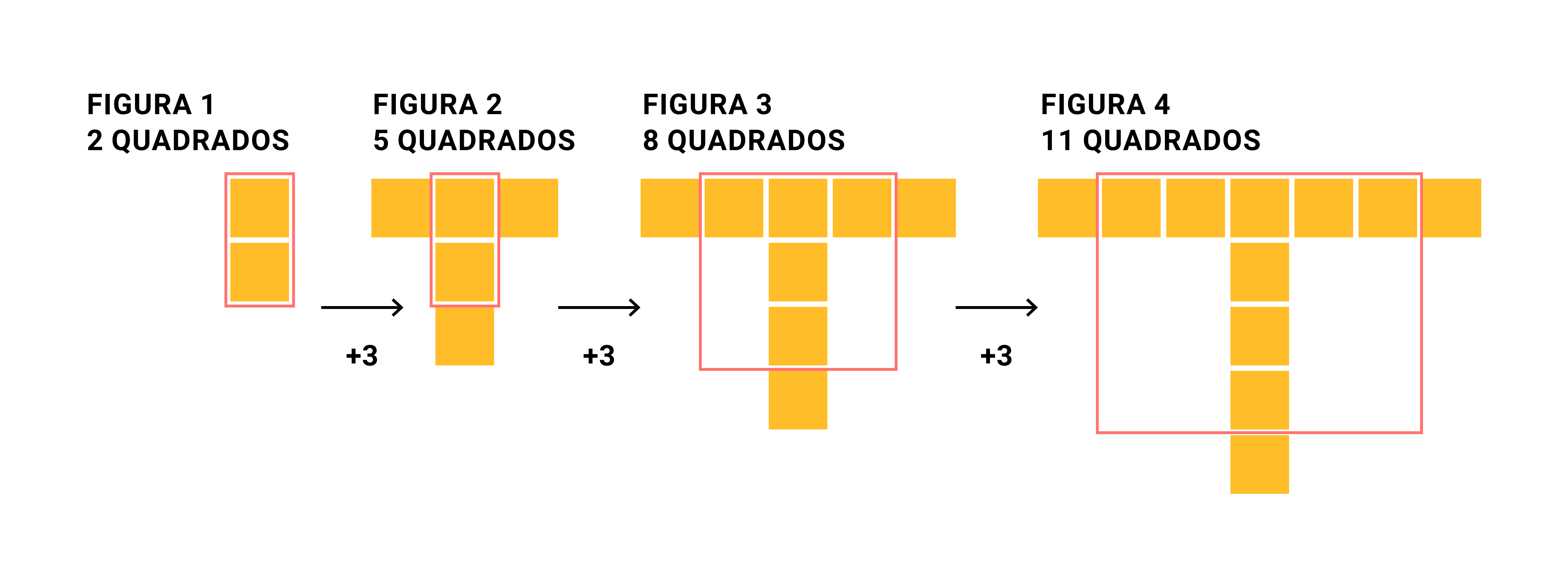


Proponha as seguintes questões:

a) Como é a próxima figura dessa sequência? Desenhe-a.
b) Quantos quadradinhos tem cada figura?
E a próxima figura, quantos quadradinhos ela terá?
c) Quantos quadradinhos tem a 10ª figura?
E a 15ª figura?
d) Quantos quadradinhos tem uma figura em uma posição qualquer?

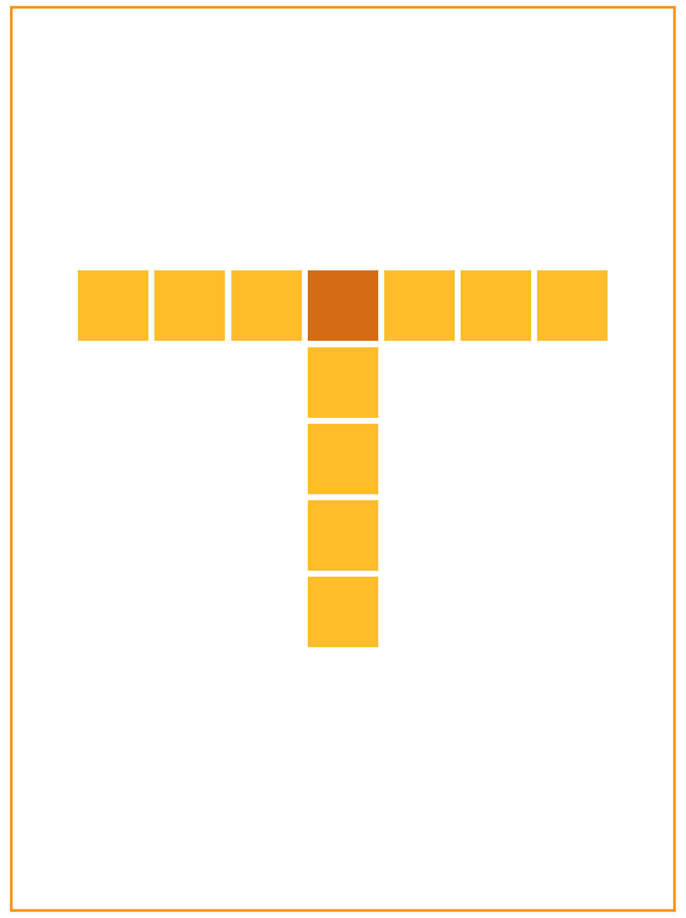
As respostas esperadas são:

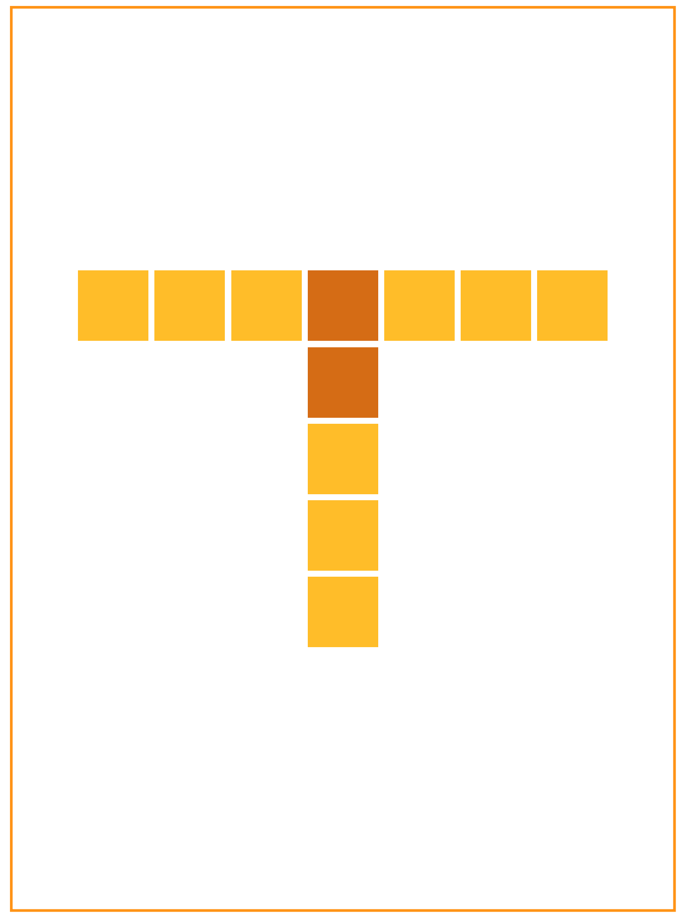
a) O desenho de um T com 9 quadrados no braço horizontal e 6 quadrados no braço vertical.
b) 2, 5, 8, 11 quadradinhos; e a próxima figura terá 14 quadradinhos.
c) 10ª figura com 29 quadrados e a 15ª figura com 44 quadrados.
d) Aqui é que se espera uma variedade de respostas e vamos comentar algumas delas:
- Alguns alunos dizem que para saber quantos quadrados tem uma figura em uma posição qualquer "é só somar 3 quadrados ao número de quadrados da posição anterior".
- Outros dizem "para encontrar uma figura, copie a figura anterior e coloque um quadradinho a mais em cada uma das extremidades. Veja o exemplo a seguir. Nesse caso, seria preciso saber quantos quadrados tem a figura anterior, o que pode ser pouco prático para descobrir o total de quadrados da figura na posição 1.000, por exemplo.
- Outra possibilidade é: "o número de quadrados é 3 vezes a posição menos 1".



Incentive os estudantes a observar o padrão a partir da visualização das figuras e mostrar como pensaram. Por exemplo:

- Na posição 4, contamos 3 vezes 4 e retiramos 1, que é o quadrado cinza que foi contado duas vezes.
- O número de quadrados é 2 mais 3 vezes a posição menos 1.
- Na posição 4, contamos 3 vezes 3, 3 em cada braço da letra T e, depois, somamos 2 quadrados hachurados do centro da figura.





Espera-se assim chegar às escritas simbólicas, de uma das duas expressões algébricas:

3 x p – 1 e 2 + 3 x (p – 1), em que p é a posição da figura na sequência.

Terminada a atividade, escolha algumas duplas para que eles apresentem suas respostas no quadro e incentive o debate e a apresentação de diferentes formas de pensar para se chegar à resposta. Analise com os estudantes semelhanças, diferenças e possíveis equívocos nas soluções encontradas. Explore as expressões matemáticas de modo que os estudantes percebam que, apesar de terem chegado em escritas de forma diferentes, essas expressões são equivalentes.

Apresente algumas questões norteadoras, como:

- É possível partir da expressão 2 + 3 x (p – 1) e obter 3 x p – 1?

Esse é um momento importante para retomar as manipulações algébricas, como o uso da propriedade distributiva e a manipulação de termos semelhantes:

- 2 + 3 x (p -1) = 2 + 3 x p - 3 = 3 x p - 1

Se alguma dupla apresentar resposta diferente, peça que mostrem como chegaram a ela, não para dizer que ela está errada, mas para entender como esses estudantes pensaram e para que eles se conscientizem do que não perceberam, ou do porquê sua resposta não está adequada. Socialize com os estudantes suas observações sobre as falas deles durante a resolução.

Organize um fechamento da atividade e ajude os alunos a tomar nota das conclusões de cada proposta.

A intenção dessa proposta inicial é aquecer o grupo para que você possa entender o que eles já conhecem sobre álgebra: se descrevem uma regularidade presente em uma sequência, se utilizam letras para generalizar padrões, se comparam diferentes escritas para um mesmo fato ou padrão, como resolvem problemas e argumentam logicamente, etc.

Para se aprofundar

Se considerar necessário, para todos os estudantes, ou de modo especial para aqueles que ainda apresentaram muitas dúvidas, neste momento você poderá explorar mais algumas sequências, figurais ou numéricas, propondo situações que estão em livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental ou mesmo as que estão disponíveis nos seguintes materiais:

- Planos de aula Nova Escola, disponíveis em: bityli.com/padroes-seq-num e bityli.com/seq-exp-alg.
- Youcubed: "O problema da borda", disponível em: bityli.com/prob-da-borda (acessos em 01/06/2022)

Com base na sua análise a respeito do conhecimento dos estudantes, você poderá selecionar as propostas apresentadas a seguir na rotação por estações.

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 2

2 aulas > Aula 2:

Sequências – Padrão, generalização em linguagem algébrica: rotação por estações

Professor/a, neste momento, revisitaremos conhecimentos importantes acerca do trabalho com Álgebra. O foco é desenvolver as habilidades EF07MA13, EF07MA15 e EF08MA06, que tratam da escrita algébrica, do valor numérico de uma expressão, da ideia de variável e incógnita e do trabalho com padrões e generalizações, que são conhecimentos prévios da habilidade EM13MAT510. Observe que aqui também fizemos uma escolha que foi dar um passo atrás e retomar habilidades estruturantes para aprendizagem da álgebra para, então, voltar ao que precisa ser ensinado neste ano. Esta é a ideia da recomposição da aprendizagem e do *continuum* curricular: não paramos tudo para ensinar todas as habilidades anteriores, mas vamos fazer as essenciais para o estudante seguir aprendendo, avançar com mais conhecimento neste e nos próximos anos.

Você pode iniciar o momento explicando aos estudantes que mais uma vez eles vão vivenciar a metodologia da rotação por estações. Pergunte se eles lembram como foi vivenciar essa metodologia na SD 1 e, se necessário, retome as orientações para essa rotação. Explique que o foco agora é estudar as ideias iniciais envolvidas no estudo da álgebra. Diga que terão cerca de 20 minutos para realizar a proposta de cada estação (se necessário, você pode rever esse tempo e adaptá-lo às necessidades de sua turma).

Use, preferencialmente, uma aula dupla.

Atenção, professor/a: os estudantes devem estar organizados em 4 grupos, com 4 ou 5 componentes cada, e cada grupo deverá passar pelas 4 estações. Oriente-os a fazer os registros no caderno, pois o material disponível em cada estação será utilizado por todos os grupos. Caso sua turma seja mais numerosa, você pode organizar duas estações 1, duas estações 2, duas estações 3 e duas 4. Ao término de cada etapa, certifique-se que todos os grupos concluíram a proposta e oriente-os a movimentar-se para a próxima estação.

Recomendamos que releia as sugestões de gestão da aula do início desta sequência e que organize a sala com antecedência, o que pode ser feito com a ajuda dos estudantes, disponibilizando o material necessário em cada estação, conforme orientações seguir:

Estação 1

- 1 cópia impressa ou virtual do Anexo 1 – Padrão, generalização e linguagem algébrica.
- Caderno do estudante para os registros.

Estação 2

- 1 cópia impressa ou virtual do Anexo 2 – Uma máquina de calcular diferente.
- Outra opção é explorar a “máquina de calcular diferente” virtual, disponível em bityli.com/function-builder.
- Caderno do estudante para os registros.

Estação 3

- 1 kit do jogo “Maneiras de escrever”, em versão impressa ou virtual, contendo as cartas azuis e amarelas recortadas, uma cópia das tabelas da Etapa 2.
- Caderno do estudante para os registros.

Estação 4

- Acesso ao aplicativo bityli.com/equality-explorer. Caso não seja possível o acesso, o professor/a poderá solicitar que os estudantes realizem desenhos para mostrar as alterações solicitadas.
- 1 cópia do Anexo 4.
- Caderno do estudante para os registros.

Professor/a, enquanto os estudantes realizam as propostas apresentadas nas 4 estações, circule pelos grupos para solucionar possíveis dúvidas e fazer os alinhamentos necessários. Registre as dificuldades encontradas pelos estudantes e os possíveis alinhamentos necessários para retomá-los no momento de discussão coletiva, proposta logo após a rotação na próxima aula.

Evite dar respostas prontas, procure sempre apresentar novas perguntas para levar os estudantes à reflexão, à investigação, à formulação/validação de hipóteses, a fazer descobertas e tirar conclusões. Por exemplo:

Na estação 1

- Quais estratégias vocês encontraram para identificar a formação da sequência? Conte para mim!

Na estação 2

- O que foi mais desafiador: encontrar a saída quando na entrada tinha 'x' ou encontrar a entrada quando na saída tinha 'p+2'? Por quê?

Na estação 3

- Como vocês registraram alguns momentos do jogo?

Nos momentos de mediação entre os grupos, é importante um olhar atento para as meninas, considerando as diferenças nas expectativas em relação ao desempenho de meninos e meninas. Como se sabe, as meninas muitas vezes são pouco estimuladas a desenvolver habilidades como raciocínio lógico, cálculo, entre outras. É preciso incentivar a participação delas nas aulas de matemática, inclusive cuidando para que elas tenham espaço para apresentar suas estratégias, contar as suas dúvidas, ir ao quadro etc. Atente-se a isso!

Aproveite também o momento para verificar se os grupos trabalham em harmonia, se os estudantes colaboram com sua equipe e têm a oportunidade de expor suas ideias para o grupo. Conte aos estudantes que você os observará durante a realização da proposta com este foco. Faça registro e tome nota das suas observações, elas são essenciais para que, numa próxima atividade em grupo, se necessário, você organize os estudantes com outra configuração, de forma a tornar os grupos mais produtivos. Ao final da aula, dê feedback aos estudantes acerca das suas observações sobre os pontos combinados.

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 3

1 aula:

Organizando as aprendizagens

Professor/a, após todos concluírem a rotação nas 4 estações, abra uma roda de conversa e convide um componente de cada grupo para socializar os registros e as conclusões de cada estação.

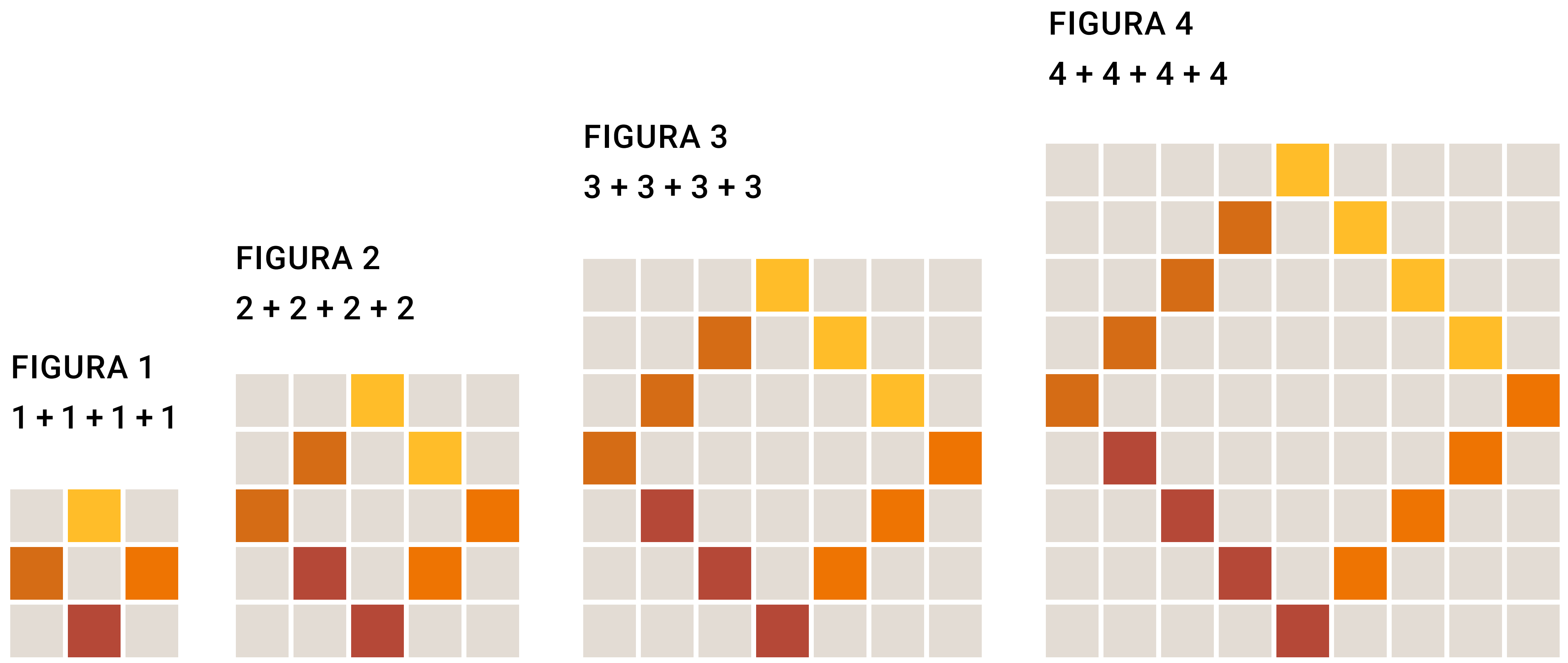
Apresentamos, a seguir, as respostas esperadas em algumas atividades apresentadas:

ATIVIDADE 1 ▸ MOMENTO 3 ▸ ESTAÇÃO 1

Espera-se que os estudantes identifiquem as regularidades exemplificadas ao lado.

Ou então: o número de quadradinhos escuros é 4 vezes a posição da figura na sequência.

Ao final, devem perceber que o número de quadradinhos em uma figura em uma posição qualquer é:
4x p ou p + p + p + p ou ainda: 2xp + 2xp.



ATIVIDADE 1 ▸ MOMENTO 3 ▸ ESTAÇÃO 2

Entrada	100	-210	319	-431	616	x	y-4
Saída	96	-214	315	-435	613	x-4	y-8

Entrada	3	9	-15	21	-36	a	-b/3
Saída	-9	-27	35	-63	108	-3a	b

Entrada	-30	-44	54	-104	p	- P	y-4
Saída	6	-14	-21	28	-51	(p+2):2	(-p+2):2

Entrada	1	2	3	4	m	m+1	-2m
Saída	3	5	7	9	2m+1	2m+3	-4m+1

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 3 ▶ ESTAÇÃO 3

O TRABALHO COM JOGO NA AULA DE MATEMÁTICA

Nesta proposta, o jogo aparece em uma das estações. Gostaríamos de trazer aqui algumas reflexões a respeito do trabalho com jogos nas aulas de matemática e a possibilidade de explorá-lo para além deste momento da estação. Os jogos podem ser vistos como situações-problema, nas quais, a cada movimento, há um novo desafio a ser vencido que exige análise e tomada de decisão. No jogo, essas habilidades são solicitadas diversas vezes, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Sem dúvida, a situação de jogo substitui, com vantagem, as atividades em folhas impressas, nas quais, muitas vezes, o aluno está sozinho. No jogo, na interação com seus parceiros e oponentes, o jovem tem de controlar não apenas as suas jogadas, mas a de seus colegas, e precisa se comunicar com eles, argumentando e expondo suas dúvidas.

Sugerimos que um mesmo jogo seja jogado de 3 a 4 vezes pelos estudantes. Na primeira vez, o esforço cognitivo fica voltado à compreensão das regras e o foco está na busca da vitória. A partir da segunda vez que joga, o esforço cognitivo fica voltado para a aprendizagem da matemática envolvida. Para potencializar essa aprendizagem, no final de cada jogo, o professor/a pode pedir um tipo de registro diferente para o estudante, como: desenhar ou representar com linguagem matemática uma jogada vivenciada; ou escrever um texto para um colega contando suas descobertas e suas aprendizagens ou mesmo dando “pistas” para ele se sair melhor na próxima vez que jogar. Outra possibilidade é apresentar problemas a partir das situações vivenciadas no jogo; por exemplo, após finalizar o jogo, pedir que criem mais algumas cartas para ele. Explorar problemas do tipo: Julia escreveu a expressão 3x-4 em uma carta amarela. Qual a expressão em linguagem materna que ela deve escrever em uma carta azul para representar essa situação?

Quando você propõe várias explorações diferentes após um mesmo jogo com objetivos de aprendizagem definidos, está possibilitando uma gama de oportunidades de aprendizagem para o trabalho com a diversidade de estudantes existentes em uma única sala de aula.

Sabemos que cada estudante aprende em um ritmo diferente e de maneiras diferentes. Há pessoas que aprendem melhor falando ou ouvindo outros falarem, há pessoas que aprendem melhor escrevendo e outras aprendem melhor quando fazem desenhos ou esquemas; assim, a sequência de etapas planejadas para um mesmo jogo procura cuidar dessa diversidade.

O jogo também desenvolve competências socioemocionais, como autocontrole e autogestão, comunicação, empatia, respeito, colaboração, entre outras, contribuindo assim para o desenvolvimento integral do jovem, para a recomposição da aprendizagem, e permitindo avanços em aspectos que vão além de conteúdos.

ETAPA 1

Espera-se que nesta os estudantes realizem as propostas apresentadas no aplicativo Phet e concluam que as equações 3x+1=7 e 6x + 3 = 3x + 9 são equivalentes.

ETAPA 2

Sentença inicial: 2x + 5 = 7

a) 2x + 10 = 12. Sim, é equivalente à equação inicial, pois foram adicionadas 5 unidades em cada membro (ou prato da balança).

b) 4x + 5 = 2x + 7. Sim, é equivalente à equação inicial, pois adicionou-se 2x em cada membro (ou prato da balança).

c) 4x + 5 = 7. Não é equivalente à equação inicial, pois adicionou-se 2x apenas no 1º membro (ou no prato da esquerda da balança).

No item c, existem muitas respostas, como:
2x = 2, 2x + 4 = 6, 4x + 10 = 14, etc.

Professor/a, incentive os estudantes a explicar suas conclusões e aproveite o momento para verificar se eles utilizam o vocabulário correto e fazem uso de argumentos convincentes para justificar suas respostas, esse é um dos focos do trabalho que visam o letramento matemático dos estudantes.

Nesta atividade, optamos pela metodologia ativa rotação por estações e o foco das atividades foi trazer com muita força duas ideias da álgebra que precisam ser compreendidas pelos jovens: a álgebra como linguagem para expressar generalizações e a álgebra como procedimento geral para resolver problemas. O trabalho com metodologias ativas está relacionado ao desenvolvimento das Competências Gerais 7, 9 e 10 da BNCC, que se relacionam com desenvolver diálogo, argumentação, empatia, autoconhecimento e autogestão.

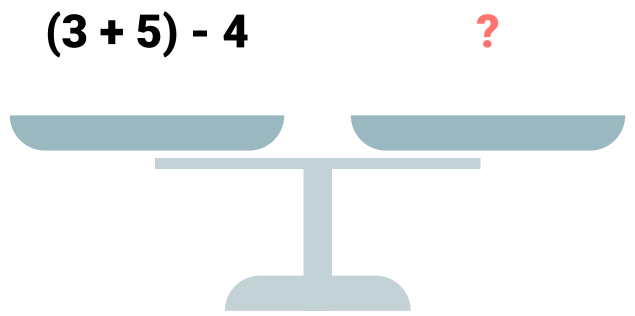
Veja que essa escolha de metodologia e de conteúdos tem, portanto, como objetivo apresentar atividades que, pela sua forma, solicitem os valores do protagonismo dos estudantes, como: motivação, iniciativa, planejamento, execução e avaliação. Valores tão importantes para aprender matemática ou qualquer outro conhecimento e essenciais para a formação integral do jovem. Ao longo da discussão das propostas vividas, cultive esse olhar e inclua os estudantes nas reflexões e na condução das ideias matemáticas, envolvendo-os e oportunizando o desenvolvimento de diferentes caminhos cerebrais na aprendizagem matemática.

Certifique-se que todos tenham compreendido que as “fórmulas com letras” presentes nas expressões numéricas (situações apresentadas nas três primeiras estações) expressam uma regularidade observada e que, nesse caso, a letra é chamada de variável e pode assumir diferentes valores. Aproveite para enfatizar que essa é uma das funções da álgebra: expressar generalizações.

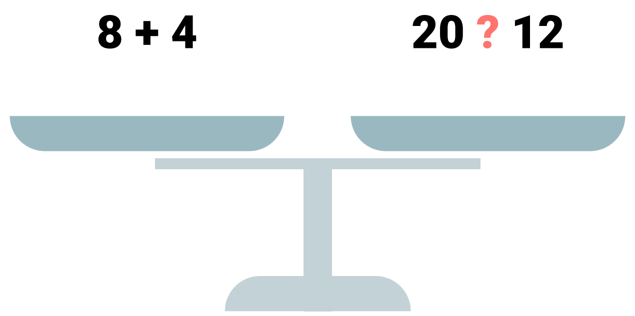
Para ampliar as discussões, compare as expressões das estações 2, 3 e 4. Escreva no quadro algumas delas, por exemplo: 2m+1, 10 + y, 2x + 5 = 7, 2x+10=12. Peça que os estudantes identifiquem semelhanças e diferenças entre elas. Garanta que percebam que as duas primeiras sentenças são abertas e que, nelas, a letra pode assumir diferentes valores numéricos, ou seja, a letra é uma variável. Já as duas últimas são sentenças fechadas e, nelas, a letra pode assumir um único valor numérico, pois só ele torna a sentença verdadeira. Aproveite para sistematizar que, nas expressões 2x + 5 = 7 e 2x+10=12, a letra assume o papel de incógnita e, para determinar o valor da incógnita, é possível utilizar diferentes estratégias: cálculo mental, tentativa e erro, operação inversa ou mesmo um “passo a passo” que será estudado no momento 4 desta SD. Formalize que expressões do tipo ax+b=c, em que a, b e c representam números reais e a≠0, são chamadas equações do 1º grau e que resolver uma equação do 1º grau é encontrar o valor da incógnita que a torna verdadeira.

Ao explorar a estação 4, aproveite para comentar sobre a ideia da igualdade como uma equivalência e não somente como o resultado de uma operação. Se considerar necessário, apresente aos estudantes situações envolvendo igualdades que tenham valores desconhecidos no 2º membro ou mesmo expressões em ambos os membros da sentença, como o exemplo apresentado abaixo. Observe que os itens a e d possuem muitas respostas.

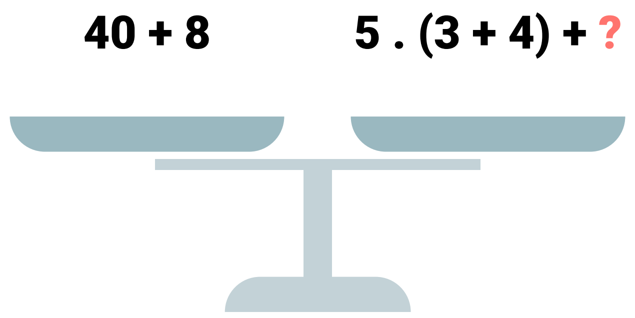
a)



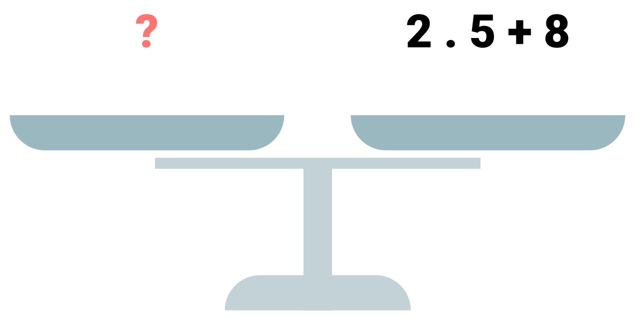
b)



c)



d)



Professor/a, após os estudantes socializarem suas estratégias, suas conclusões e discutirem as possíveis respostas, finalize esse momento convidando-os a contar como se sentiram durante a realização da proposta. Apresente algumas perguntas para conduzir a conversa, como:

- Como foi trabalhar em grupos e ter de resolver questões desafiantes?
- Houve colaboração entre os estudantes?
- Tiveram vontade de desistir em algum momento?

Utilize as rubricas propostas no protocolo de avaliação da Iniciativa Fortalecimento da Aprendizagem para envolver os estudantes nesse método de tomar consciência dos processos que envolvem o conhecimento, a sua motivação e as estratégias que usam para aprender.

É importante que os estudantes tenham clareza que momentos de trabalho em equipe serão uma constante na vida escolar e profissional, e é importante refletir e se sentir à vontade para interagir com os colegas nessas situações. Se desejar, pode explorar com eles as competências gerais da BNCC e analisar quais estão sendo desenvolvidas nas atividades. Pode fazer o mesmo com as específicas de matemática.

Faça uma devolutiva estruturada a todos sobre suas avaliações em relação ao trabalho com Álgebra nesta primeira etapa e, se necessário, reavalie seu planejamento, inclua novas propostas que vão ao encontro das necessidades apresentadas pelos seus estudantes. Você pode procurá-las nos livros didáticos ou em Planos de Aula da Nova escola.

Para se aprofundar

Com base nas atividades disparadoras presentes nas estações, é possível ampliar propostas de trabalho de acordo com as necessidades dos seus estudantes. Selecionamos algumas possibilidades:

- Atividades do Geogebra – *Equação do 1º grau*, disponível em: bityli.com/equa-1grau (acesso em 13/05/2022).

- Nova Escola – *Sequência de planos de aula para o trabalho com as ideias iniciais da Álgebra*, disponível em: bityli.com/alg-iniciais (acesso em 13/05/2022).

Você poderá, dentro da sala de aula, montar um trabalho diferenciado para cada grupo em função dos seus conhecimentos e possibilidades de avanços.

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 4

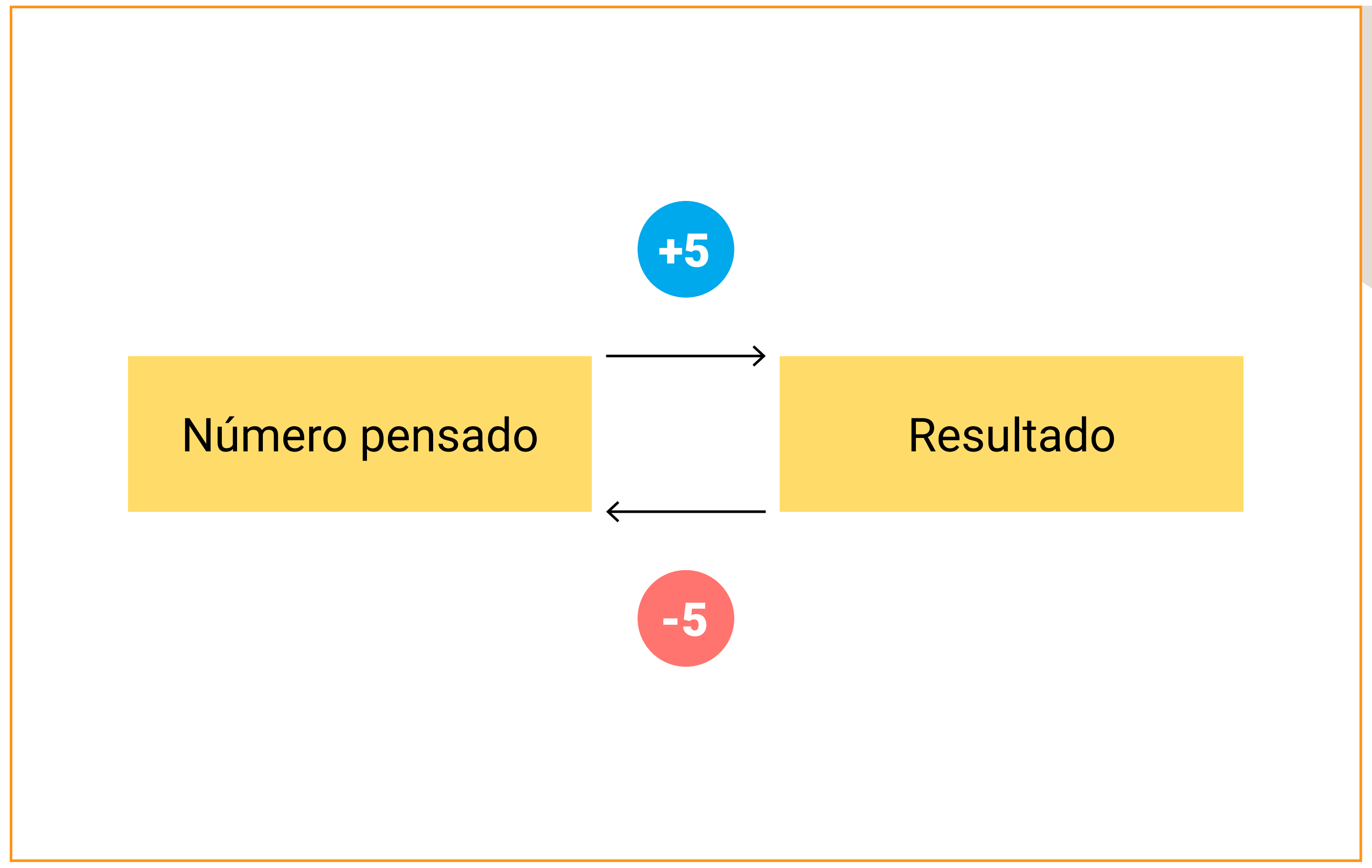
1 aula:

Resolvendo equações do 1º grau

Professor/a, neste momento da sequência, o foco é desenvolver a seguinte habilidade dos anos finais: EF07MA18 - Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Inicie o momento convidando os estudantes a “brincar” de adivinhar o número pensado. Desafie um estudante a pensar em um número e escrevê-lo no papel. Em seguida, peça que some 5 unidades ao número pensado e que diga o resultado obtido. Convide-o a escrever na lousa uma sentença para representar essa situação. Espera-se que o estudante escreva uma equação do tipo $y+5=c$, por exemplo, $y + 5 = 23$.

Convide então outro estudante para adivinhar o número pensado e explicar como o descobriu. Garanta que todos perceberam que, para descobrir o resultado, é preciso subtrair 5 unidades, pois a ideia aqui é trabalhar com a operação inversa para “desfazer” o cálculo realizado.



Relembre também a ideia do equilíbrio dos pratos da balança e enfatize que é preciso efetuar essa operação nos dois membros da equação (como fizeram nos dois pratos da balança para manter o equilíbrio). Aproveite o momento para registrar o processo no quadro:

$y + 5 = 23$
$y + 5 - 5 = 23 - 5$
$y = 18$

Sistematize que a expressão é uma equação do 1º grau e que o número pensado é o valor da incógnita. Retome com os estudantes a diferença entre variável e incógnita explorada nas propostas da rotação por estações realizadas anteriormente. É importante que percebam que resolver uma equação do 1º grau é encontrar o valor da incógnita que torna a sentença verdadeira.

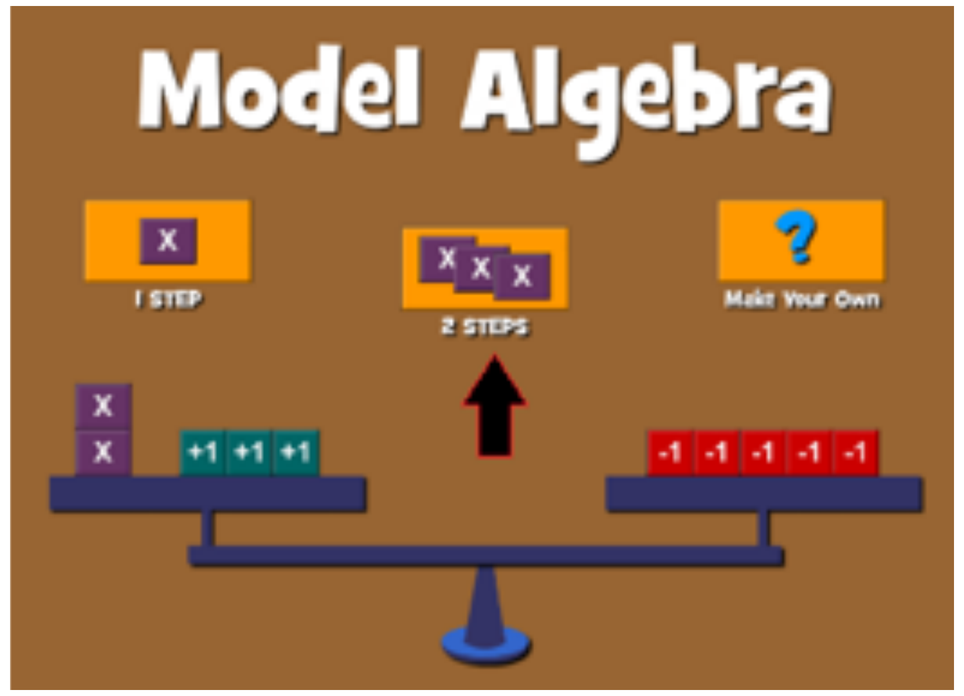
Apresente outras situações de adivinha e convide os estudantes a encontrar os números pensados pelos colegas e a fazer os registros no quadro para explicar como pensaram. Você pode pedir que pense em um número e subtraia 4, ou multiplique por 5, ou divida por 2 etc.

Mostre para os estudantes que as equações mais simples, como $x-3=8$, podem ser resolvidas com a estratégia da operação inversa, porém as mais complexas, como $(3x-8)/3-4=2x-1$, talvez exijam uma estratégia mais elaborada.

Para vivenciar a resolução de outras equações, organize os estudantes em duplas. Peça que acessem bityli.com/algebra-eq. Diga que esse aplicativo é similar ao já utilizado na estação 4 da atividade anterior. Oriente-os a selecionar o 2º nível (2 steps) e representar nos pratos da balança a equação disponibilizada. Caso não seja possível o acesso, você poderá disponibilizar algumas equações e solicitar que os estudantes realizem desenhos para representar a balança inicial e as alterações realizadas para resolver a equação.

Por que sugerimos a exploração pelo aplicativo?

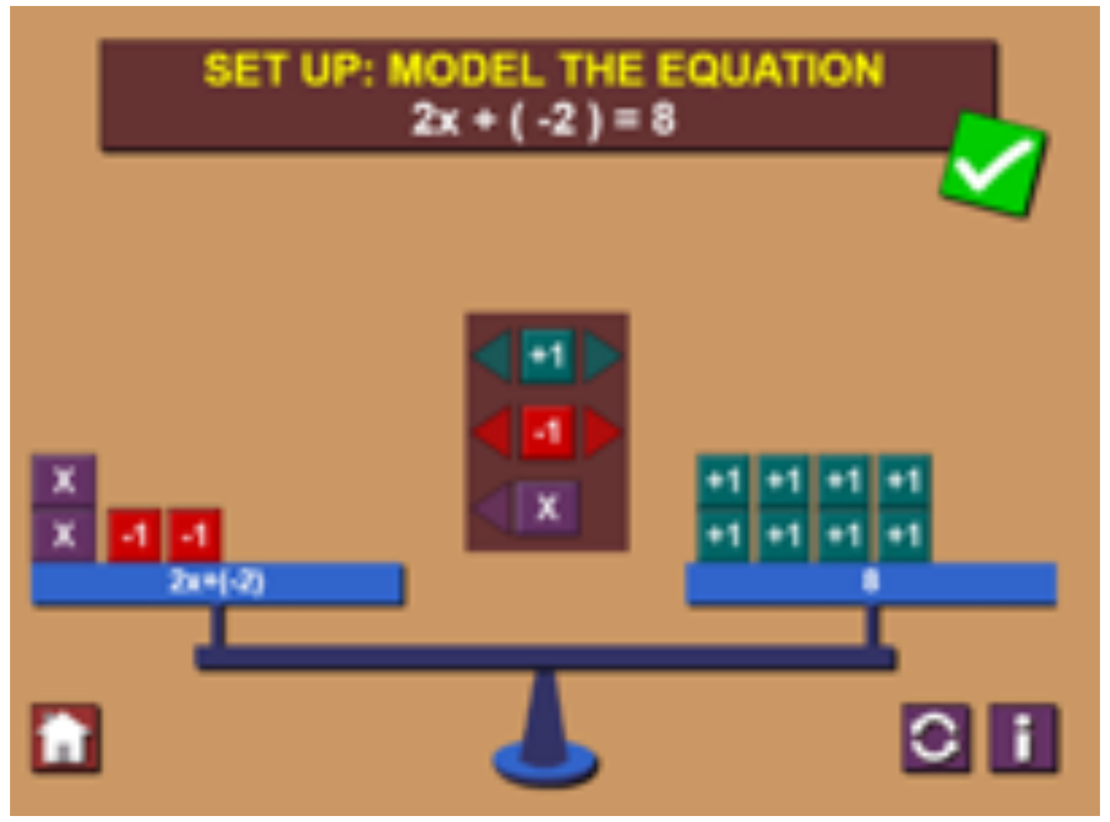
Pelas diversas possibilidades e mobilizações de competências possíveis. A dinâmica proposta pelo aplicativo é muito diferente da dinâmica sem o mesmo. Ao utilizar o aplicativo, cada estudante faz a sua equação, e algumas competências e habilidades não vão ser trabalhadas da mesma forma que seriam caso o professor estabelecesse as mesmas equações para todos. Além disso, o aplicativo permite ao estudante testar, errar, reavaliar o processo, isto é, autorregular o seu processo de aprendizagem, detalhe que a equação no papel só permitirá dependendo da ação do professor durante e após a resolução. Outro ponto de destaque é que, no aplicativo, o estudante precisa movimentar as "peças", de forma autônoma, buscando sempre o equilíbrio da balança e a resolução da equação, já no papel esse protagonismo pode não ficar tão evidente. Dito isso, fica aqui uma reflexão: sem a utilização do aplicativo, alguns detalhes acabam se perdendo, então, professor/a, se houver condições de internet, não desista do uso da tecnologia para potencializar a aprendizagem do seu estudante.

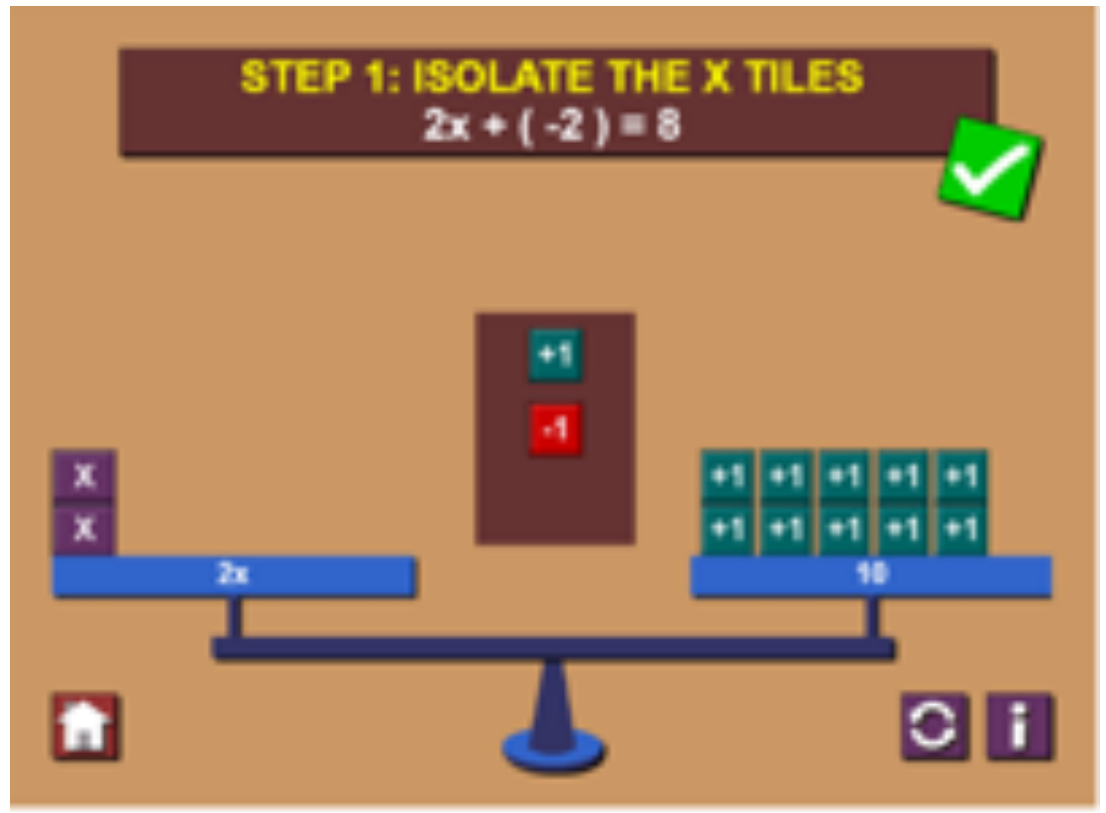


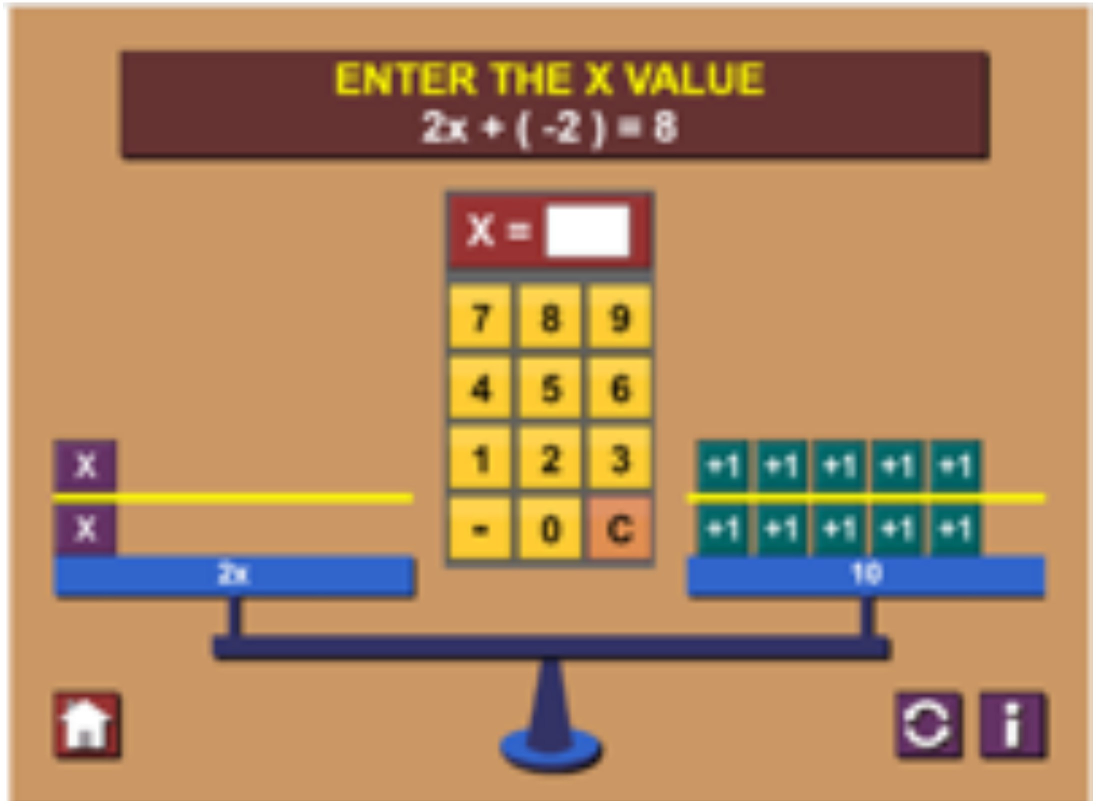
Atenção, professor/a: provavelmente cada dispositivo terá acesso a uma equação diferente, o que evidencia o quanto o trabalho com esse aplicativo desenvolve a autonomia do estudante e possibilita momentos de metacognição e autorregulação da aprendizagem.

Quando a equação estiver correta, aparecerá na tela o símbolo ✅. O estudante clica sobre esse símbolo e, em seguida, começa a resolver a equação. A ideia é utilizar a operação inversa. Incentive-os a registrar todas as passagens realizadas na resolução. Ao terminar a resolução, novamente surge o símbolo ✅. O estudante clica sobre ele e digita na calculadora a resposta da equação.

Incentive os estudantes a registrar todas as etapas da resolução em seu caderno. Veja um exemplo:







Enquanto realizam a proposta, circule pelas duplas e verifique se representam corretamente as equações, se reconhecem a necessidade de trabalhar com operações inversas nos dois membros da equação e se utilizam a simbologia adequada para registrar a resolução.

Proponha que cada dupla resolva 2 ou 3 equações do aplicativo. No final da atividade, sugerimos algumas possíveis dinâmicas para envolver os estudantes na reflexão e apropriação das habilidades desenvolvidas na atividade. É preciso que os estudantes ganhem certa fluência na resolução de equações do 1º grau. Escolha a dinâmica que considerar mais apropriada ao seu grupo:

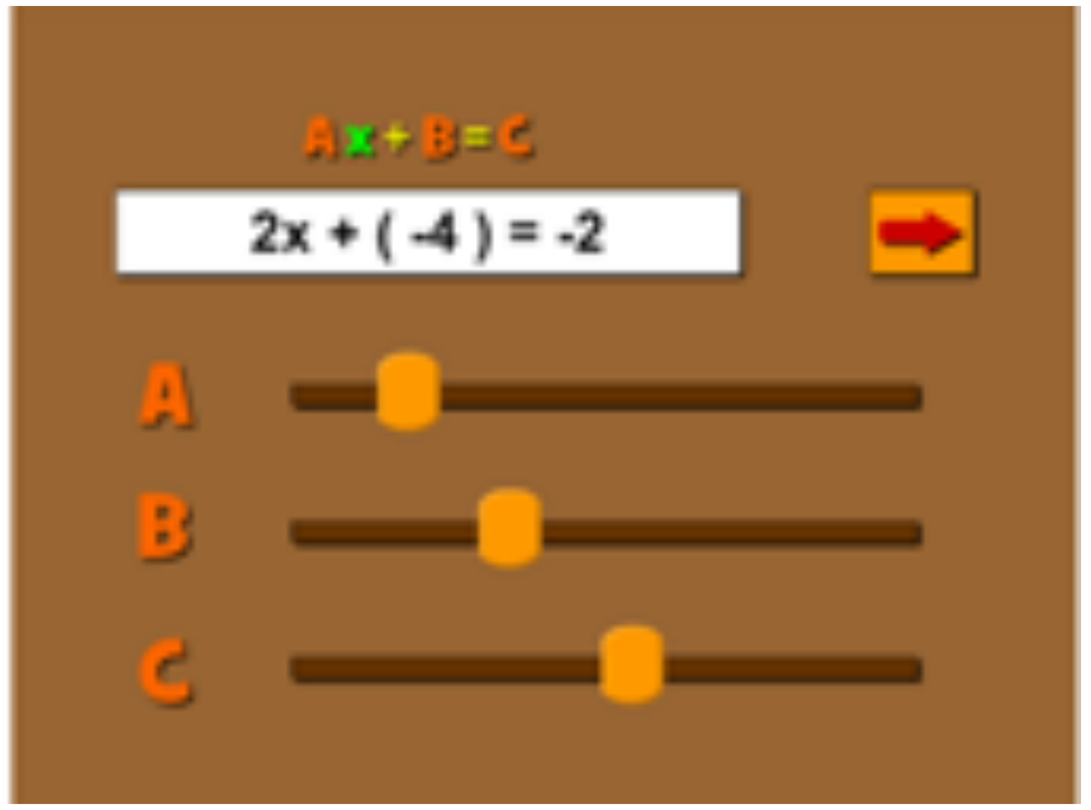
01. Peça que cada dupla escolha uma das equações resolvidas, escreva essa equação em um papel e desafie outra dupla a resolvê-la. Ao final, a dupla que fez a proposta deve ajudar a dupla que a resolveu a corrigi-la, identificando o que está correto e chamando a atenção para os possíveis erros cometidos.

02. Outra possibilidade é pedir que cada dupla selecione 1 ou 2 equações, dentre as resolvidas, e coloque-a no quadro. O professor organiza uma pequena lista com umas 10 equações e todos resolvem, separando aquelas que consideraram mais fácil daquelas que consideraram mais difíceis. Para as equações consideradas mais difíceis, o grupo poderá redigir uma lista de dicas com cuidados para não errar.

03. Outra opção ainda é organizar uma lista com 5 ou 6 equações selecionadas pelo grupo como as mais difíceis e apresentá-las à turma resolvidas, algumas corretamente e outras com erros, para que, em duplas, eles possam corrigi-las e indicar quais estão erradas e o tipo de erro cometido.

A respeito do erro nas aulas de matemática, você pode ver “Os erros fazem o cérebro crescer”, disponível em: bityli.com/cerebro-erros (acesso em 05/05/2022).

Para ampliar as aprendizagens, também é possível que os estudantes, utilizando o aplicativo, elaborem equações e desafiem os colegas a resolvê-las. Peça que acessem novamente o aplicativo Model Algebra, em bityli.com/algebra-eq, e selecionem o ícone “make your own”. Em seguida, movimente os controles deslizantes de modo a obter os valores de a, b e c para elaborar a equação desejada.



Atenção para a avaliação!

Professor/a, após essa sequência de propostas com foco na resolução da equação de 1º grau, sugerimos que você realize uma atividade em que a tarefa dos estudantes é encontrar o erro na resolução de algumas equações e justificá-lo, resolvendo-o corretamente em seguida. Você poderá propô-lo em dupla ou individualmente.

01. Descubra os erros na resolução das equações, justifique-os e resolva-as corretamente.

a) 3 . x + 6 = 33
3 . x = 33 + 6
3 . x = 39
x = 39 / 3
x = 13

b) 4 . (x + 2) = 30
4 . x + 2 = 30
4 . x = 30 - 2
4 . x = 28
x = 28 / 4
x = 7

c) -4 . (x - 3) = 4
-4 . x - 12 = 40
-4 . x = 40 + 12
-4 . x = 52
x = 52 / -4
x = -13

POR QUE TRABALHAR A ANÁLISE DE ERROS COMO INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO?

Olhar para os erros é investigar seus significados, observá-los segundo diferentes pontos de vista e, desse modo, possibilitar uma postura mais crítica sobre o que se sabe e o que falta aprender. A análise dos erros é, a nosso ver, uma das formas mais legítimas de uma avaliação personalizada e interativa.

Para o estudante, a análise de erros confere sentido e importância aos percursos pessoais, permitindo a obtenção de referências, a possibilidade de perceber outros caminhos, deixando de ser um fator de inibição para constituir um elemento inerente ao caminhar da aprendizagem. Trata-se de um momento de parada para rever procedimentos, pensar novamente e reorganizar percursos.

Após a realização da atividade pelos estudantes, você poderá propor uma discussão com o grupo a respeito da resposta ou o resultado da atividade errada. Esta é uma das formas de trabalho que contribui muito para o estudante rever suas estratégias, verificar se comete erros semelhantes e reorganizar os procedimentos em busca de uma solução correta. Ações nesse sentido favorecem o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, contribuindo para que eles também se tornem reflexivos sobre suas produções e para que não desenvolvam crenças sobre suas aprendizagens, tais como:

- Não vale a pena perder tempo refletindo sobre uma questão.
- O importante é dar a resposta certa ao que o professor solicita.
- Não podemos aprender nada com os erros.
- Sair-se bem na avaliação é uma questão de esforço.
- A prática solitária é a forma de vencer dificuldades.

Sugerimos que faça uma parada e verifique, a partir da avaliação dos avanços, as conquistas e as dificuldades dos estudantes frente ao desenvolvimento das habilidades desta sequência.

Caso perceba que grande parte dos estudantes ainda necessita aprofundar ou retomar conhecimentos acerca da resolução de equações do 1º grau, sugerimos que você selecione atividades do material didático da sua escola que aborde esse tema ou realize os seguintes planos de aula da Nova Escola:

- *O que são equações do primeiro grau?*, disponível em: bityli.com/o-que-equac.
- *Explorando as igualdades para determinar valores desconhecidos em situações de adição e subtração*, disponível em: bityli.com/exp-as-igualdades.
- *Resolvendo equações do 1º grau, em situações de adição e subtração*, disponível em: bityli.com/resolvendo-equacoes (acesso em 01/08/2022).

Você poderá ainda explorar um jogo envolvendo equação do 1º grau na perspectiva que apresentamos aqui:

- *Pescaria de equação do 1º grau*, disponível em: bityli.com/jogos-ef (acesso em 01/08/2022).

Para se aprofundar

Professor/a, antes de continuar a sequência didática, sugerimos uma pausa para a exploração de outros temas relacionados à aprendizagem matemática. Nesse momento, propomos uma reflexão a respeito das desigualdades entre as aprendizagens, acesso e oportunidades dos meninos e das meninas na matemática.

Sugerimos a indicação da seguinte leitura de texto com os estudantes a respeito do tema:

- *Por que as meninas não querem fazer Ciências Exatas?*, disponível em bityli.com/meninas-ciencias-ex.
- *Por mais meninas na Ciência*, programa apoiará alunas que desenvolvem projetos STEM, disponível em bityli.com/meninas-stem.

Convide os estudantes a pensar no assunto e a olhar para suas próprias atitudes em relação a eles. Proponha um debate sobre as desigualdades entre meninos e meninas na matemática. Relacione essa discussão aos projetos de vida dos estudantes, a suas capacidades de projetar, se preparar, se desenvolver e traçar planos e metas para alcançar o que desejam. Discuta que todos podem aprender, em especial matemática, independente do sexo, raça ou condição social.

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 5

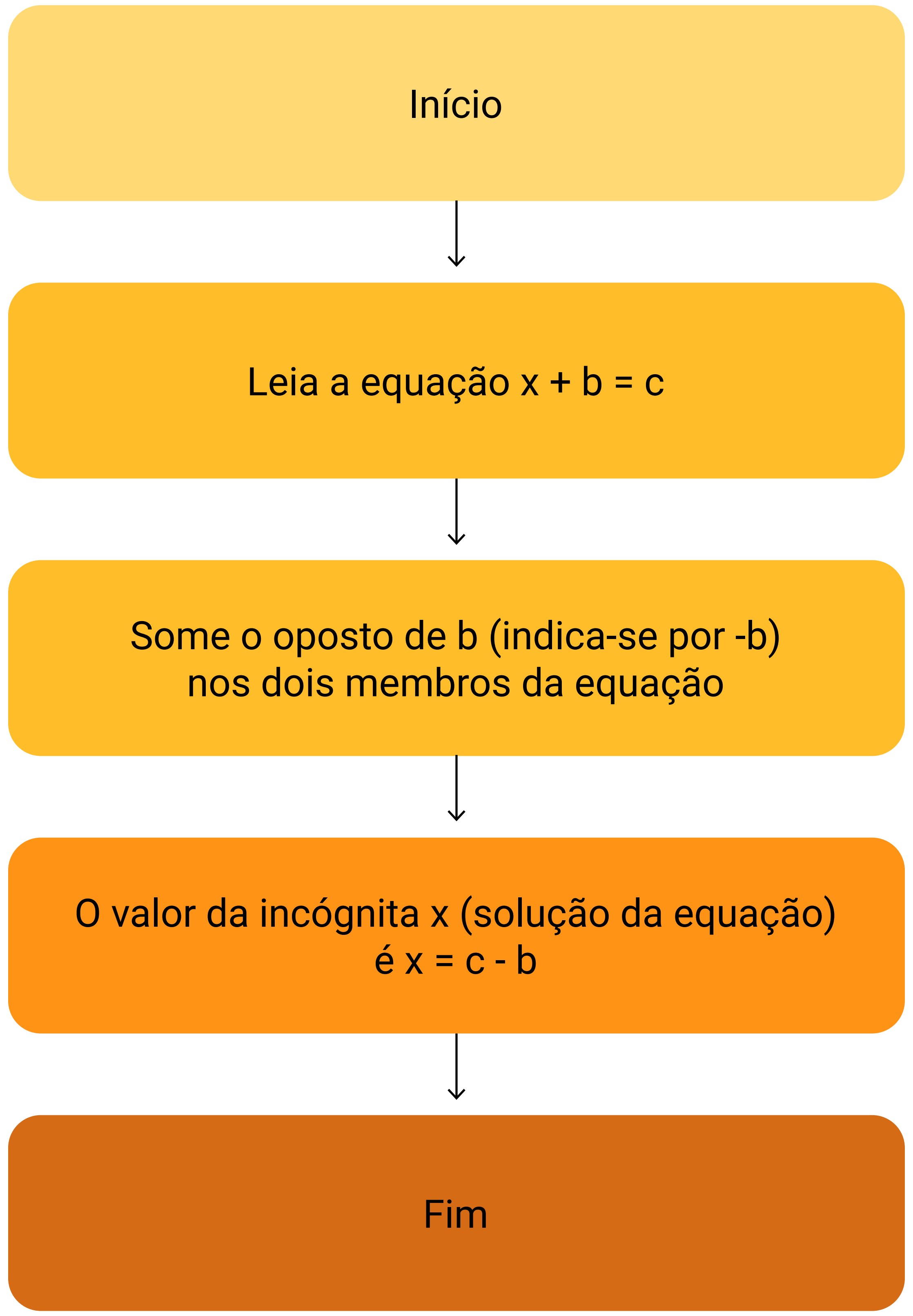
1 aula:

O passo a passo para resolver uma equação do 1º grau

Professor/a, inicie o momento retomando os passos para resolver uma equação do 1º grau. Você pode, por exemplo, escrever no quadro a equação $2x - 3 = 5$ e pedir que expliquem o passo a passo para resolvê-la. Enquanto eles explicam, você registra as passagens. Espera-se que eles identifiquem os seguintes momentos:

- $2x - 3 = 5$
- Somar 3 nos dois membros da equação, obtendo $2x = 8$
- Dividir os dois membros por 2, obtendo $x = 4$

Em seguida convide-os para, coletivamente, elaborar o passo a passo para resolver a equação do 1º grau $x + b = c$, em que b e c são números reais. Enquanto eles explicam o passo a passo, você registra em forma de esquema, utilizando a linguagem materna e, se achar adequado, já pode inserir uma simbologia com retângulos, como uma forma de organizar esse algoritmo. Veja um exemplo:



Aproveite o momento para sistematizar que esse é um algoritmo (que funciona como uma "receita") para resolver qualquer equação do 1º grau do $x + b = c$, em que b e c são números reais.

> "Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma."
> BNCC, 2018, p. 271.

A próxima etapa é desafiar a turma a pensar em um passo a passo para resolver a equação $5x - 4 = 2x + 2$. Repita o procedimento da proposta anterior. Conforme eles falam as etapas da resolução, você pode convidar um dos estudantes para fazer os registros no quadro:

- $5x - 4 = 2x + 2$
- Somar o oposto de 2x nos dois membros da equação, obtendo $3x - 4 = 2$
- Somar o oposto de -4, obtendo $3x = 6$
- Dividir os dois membros da equação por 3, obtendo $x = 2$

Em seguida, organize os estudantes em dupla e entregue um conjunto de símbolos/orientações (disponíveis no Anexo 5 do documento Anexos). Explique que essas orientações são o passo a passo para resolver equações do 1º grau do tipo $ax+b=cx+d$, em que a, b, c e d são números reais, $a \neq 0$, $c \neq 0$ e $a > c$. O desafio da dupla é recortar e organizar os/as símbolos/orientações de modo a obter o algoritmo para a resolução dessas equações. Após organizá-las, eles deverão conectá-las com setas e colar em uma folha.

Exemplo de resposta esperada:

Início

↓

Leia a equação ax + b = cx + d

↓

Some o composto de cx (indica-se por -cx)
nos dois membros da equação

↓

O valor da incógnita x (solução da equação)
é x = (d - b) / (a - c)

↓

Fim

Para finalizar a atividade, convide algumas duplas para explicar seus algoritmos e organize um quadro na sala com todos os algoritmos elaborados. É importante que os estudantes percebam que existe mais do que uma resposta correta, pois inverter no fluxograma a ordem das orientações abaixo não altera a resolução da equação.

Some o composto de cx (indica-se por -cx)
nos dois membros da equação

Some o oposto de b (indica-se por -b)
nos dois membros da equação

Aproveite o momento para sistematizar que a linguagem de programação de computadores trabalha com diagramas parecidos com aqueles que eles acabaram de elaborar, conhecidos como fluxogramas. Eles são utilizados para descrever um processo para o computador e empregam símbolos gráficos como retângulos, losangos, ovais, para definir os tipos de passos e setas conectoras para definir "caminho" sequência.

Essa proposta colabora para o desenvolvimento das habilidades do Ensino Médio:

- **(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema (equação do 1º grau).
- **(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Essas habilidades contribuem com o desenvolvimento das Competências Gerais 4 e 5 da BNCC, uma vez que ampliam o repertório das linguagens para a inserção do estudante no mundo digital.

- **CG4:** Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

- **CG5:** Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Professor/a, é importante observar que, nestas SDs, as habilidades que são propostas para o ensino fundamental e envolvem conhecimentos prévios são exploradas de forma integrada com as habilidades previstas para o Ensino Médio, desta forma, o estudante retoma/constrói conhecimentos anteriores e avança para novos conhecimentos. Esse movimento retoma, consolida, avança e caracteriza a recomposição da aprendizagem.

Para ampliar o olhar para o tema cultura digital, sugerimos a leitura do tópico *As tecnologias digitais e a computação*, apresentado nas páginas 473 a 475 da BNCC, disponível em: bityli.com/intro-bncc.

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 6

2 aulas:

Resolvendo problemas que podem ser modelados por equação do 1º grau

Professor/a, esta atividade tem como objetivo auxiliar os estudantes a:

- Resolver problemas algébricos.
- Adquirir confiança em sua capacidade para enfrentar os desafios.
- Perceber que a resolução de problemas envolve diversas tomadas de decisões: escolher uma estratégia adequada, colocar em prática essa estratégia, analisar se o resultado obtido é coerente e se responde a pergunta do problema, e, quando necessário, buscar uma nova estratégia de resolução.

Desenvolver a Competência Geral 2 da BNCC, as Competências Específicas de matemática 6, do Ensino Fundamental, e 3, do Ensino Médio.

É importante que os estudantes percebam que quanto mais iniciativa tiverem e mais problemas resolverem, mais clareza eles terão de sua capacidade de resolver problemas e aprender Matemática.

Nesta proposta, vamos explorar problemas convencionais de álgebra, pois sabemos das dificuldades que os estudantes enfrentam ao se deparar com esse tipo de problema e que muitos têm uma grande frustração em relação ao seu desempenho na resolução.

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 6

ETAPA 1

Professor/a, organize os estudantes em grupos. É importante que se sintam à vontade para emitir suas opiniões, por isso incentive-os a analisar e debater diferentes pontos de vista, mostrando que nem sempre há somente uma resposta correta.

Relembre a importância da leitura: é com ela que se aprende qualquer coisa nova e que, em especial na matemática, a autonomia na leitura permitirá que o estudante desenvolva a competência de resolver problemas.

Para aquecer, peça que os times destaquem uma dificuldade que costumam ter no momento da resolução de problemas e socializem a resposta. Cada estudante pode anotar no caderno as suas maiores dificuldades. Seria bom o professor também anotar a lista obtida para acompanhar a evolução dos estudantes durante o percurso.

Os estudantes frequentemente apresentam como maior dificuldade a passagem da linguagem materna do texto do problema para a linguagem simbólica da álgebra. Por isso, é importante retomar o processo de resolução desse tipo de problema. Apresente para o estudante o seguinte problema:

Pensei em dois números. A diferença entre elas é de apenas 1 unidade. Somei esses números e obtive 45. Em que números pensei?

A resolução algébrica consiste em traduzir exatamente a situação apresentada a partir da escolha de uma letra para representar o número desconhecido.

Se chamarmos de x um dos números pensados, o outro pode ser representado por x + 1 e a expressão que modela o problema é $x + x + 1 = 45$ (equação que leva à resolução do problema).

Resolvendo a equação, temos:

$x + x + 1 = 45$
$2x + 1 = 45$ *(adicionando-se –1 a ambos os membros da equação)*
$2x = 45 - 1$
$2x = 44$ *(dividindo-se por 2 os dois membros da equação)*
$x = 22$, isto é, pensei nos números 22 (x) e 23 (x + 1)

Talvez alguns estudantes possam achar um desperdício de energia utilizar todo esse recurso algébrico para solucionar um problema tão simples que poderia ser resolvido por tentativa e erro. Se a resolução aritmética aparecer, não há problema, coloque no painel de discussão. No entanto, cabe a você, professor/a, mostrar a ele que a equação é um método geral para a resolução de muitos problemas.

Por exemplo: se a soma dos dois números pensados fosse 59/5, talvez utilizar a tentativa e erro não seria adequado para resolver esse problema, pois não é tão simples encontrar os dois números que obedecem às condições apresentadas, porém, com o recurso algébrico, praticamente a mesma equação resolve esse e qualquer outro problema deste tipo, independentemente dos valores:

$x + x + 1 = 59/5$
$2x + 1 = 59/5$ *(adicionando-se –1 a ambos os membros da equação)*
$2x = 59/5 - 1$
$2x = 54/5$ *(dividindo-se por 2 os dois membros da equação)*
$x = 27/5$, isto é, pensei nos números 27/5 (x) e 32/5 (x + 1)

É importante destacar com os estudantes que esse é o diferencial da solução algébrica com equações, ou seja, a possibilidade de resolver muitos problemas com a mesma estrutura, independente dos dados numéricos.

ATIVIDADE 1 ▸ **MOMENTO 6**

ETAPA 2

Para ampliar a discussão, disponibilize os três problemas abaixo (pode ser a versão impressa, a versão projetada ou você pode escrever os problemas no quadro). Anuncie que o foco agora não é a resolução do problema, mas sim a reflexão sobre as possíveis representações da situação apresentada. O objetivo é levar os estudantes a perceber que a escolha do que será representado por x no problema pode facilitar ou não a resolução da equação.

Problema 1: Com 218 reais, comprei um livro, um jogo e um fone de ouvido. O livro custou um terço do preço do jogo e o fone custou 50 reais a mais do que o jogo. Quanto custou cada item da compra que fiz?

Problema 2: A soma de três números consecutivos é 138. Qual o menor desses números?

Problema 3: Meu tio tem o quádruplo da minha idade e a soma das nossas idades é 85 anos. Quantos anos tem meu tio?

Diga que o objetivo não é resolver o problema, mas sim:

- Fazer a leitura atenta do texto do problema.
- Buscar o significado de alguma palavra desconhecida com os colegas do grupo ou no dicionário.
- Analisar cada problema e escolher qual informação deve ser o valor desconhecido representado pela incógnita x.
- Registrar as escolhas do grupo em um papel.

Depois que terminarem a atividade, os grupos trocam as folhas para que um avalie se concorda ou discorda das decisões do outro.

Durante a realização da proposta, circule entre os grupos e registre em seu caderno dúvidas e as boas ideias que aparecerem para compartilhar.

Professor/a, oriente os estudantes a, durante a troca, escrever os pontos que concordam e aqueles que discordam e peça que escrevam uma pequena mensagem incentivando os colegas em relação ao trabalho feito. Essa troca de saberes faz com que os estudantes reflitam sobre os procedimentos utilizados e organizem seus próprios pensamentos, ampliando o repertório de estratégias de resolução.

Atenção para a avaliação!

Professor/a, nem toda avaliação pode estar centrada em você.

A troca entre os estudantes é um importante momento de autoavaliação e de avaliação entre pares, pois permite a reflexão sobre por que se resolve um problema dessa ou daquela forma e se há ou não outra forma para se buscar a solução. Favorece também que eles participem da avaliação entre eles, e que aprendam a analisar as produções uns dos outros, fazendo proposições de intervenção nas mesmas.

Embora a atividade não valha nota, merece ser feita com cuidado porque o processo é importante (avaliação, análise, intervenção).

Conhecer o que se sabe e o que não se sabe é um componente importante para aprender e permite controle sobre as forças que se tem, dimensionando melhor o esforço a ser empreendido em cada situação, seja ela escolar ou não.

Depois da troca entre os times e da socialização das respostas, incentive-os a falar das aprendizagens obtidas com o trabalho. Durante a discussão, observe se precisa ajudá-los a compreender qual as vantagens e as desvantagens das escolhas para a incógnita, de modo que eles percebam que o problema pode ser resolvido com qualquer uma das escolhas, mas que os cálculos serão mais simples ou complicados em função da escolha.

Compartilhe também suas anotações, mostrando que você ficou atento a tudo o que falaram e fizeram.

Após a realização da proposta, abra uma roda de discussões. Garanta que os estudantes percebam que:

No problema 1, o preço do livro e do fone foram comparados com o preço do jogo, logo, uma das opções é representar o valor desconhecido do jogo pela incógnita x, o valor do livro por $x/3$ e o do fone $x+50$. Neste caso, talvez tenham dificuldade em resolver a equação $x/3 + x + x + 50 = 218$ por conta da fração $x/3$. Optando por esta resolução, o valor da incógnita x é 72 reais, que é o preço do jogo. Logo, o valor do livro seria 24 reais e o do fone 122 reais. Outra opção é representar o preço do livro por x, neste caso, o preço do jogo seria 3x e o do fone $3x+50$. A equação obtida é $3x+x+3x+50=218$, que teoricamente tem uma resolução mais simples do que a anterior. A resposta desta equação é $x=24$, que é o preço do livro, logo 72 é o preço do jogo e 122 o do fone. É importante que o estudante perceba que qualquer uma das resoluções está correta.

No problema 2, como a pergunta está relacionada ao menor desses números, uma boa opção é representá-lo pela incógnita x, e representar os números consecutivos por $x+1$ e $x+2$. Neste caso, a equação obtida é $x + x + 1 + x + 2 = 138$, cuja solução é $x = 45$ e os 3 números consecutivos são: 45, 46 e 47. Outra opção é representar por x o número "do meio", logo o seu antecessor pode ser representado por $x - 1$ e o seu sucessor por $x + 1$. Desta forma, a equação obtida é $x-1+x+x+1=138$. Essa é uma equação de fácil resolução, e a solução é $x = 46$, logo, os números consecutivos são 45 $(x-1)$, 46 (x) e 47$(x=1)$.

No problema 3, espera-se que os estudantes percebam que a idade do tio é o quádruplo da minha idade, logo, uma boa opção é representar a minha idade pela incógnita x e a idade do meu tio por 4x, obtendo a equação $x + 4x = 85$. Outra opção é representar a idade do tio pela incógnita x e, consequentemente, a minha idade seria representada por $x/4$. A equação que representa a situação é $x/4+x=85$. Talvez os estudantes apresentem maior dificuldade em resolver essa equação em função do termo $x/4$.

Para desenvolver a competência de resolução de problemas, finalize o momento propondo alguns problemas que possam ser modelados por equação do 1º grau. Você pode selecionar o material didático. Esses problemas podem ser utilizados como instrumento avaliativo.

Para se aprofundar

Ao final desta etapa, você pode organizar a sala em pequenos grupos e propor diferentes atividades, de acordo com as suas necessidades. Por exemplo:

- Para os estudantes que ainda apresentam dificuldades para resolver problemas que possam ser modelados por equações do 1º grau, proponha que assistam ao vídeo "Equacionando problemas - Telecurso - Ensino Fundamental", disponível em bityli.com/equacionando-prob (acesso em 31/05/2022).

Esse vídeo apresenta uma revisão a respeito de como equacionar problemas. Após assistirem ao vídeo, os estudantes anotam os pontos importantes, suas aprendizagens e, se necessário, de posse dessas anotações, retomam os problemas resolvidos anteriormente ou resolvem novos desafios propostos pelo professor/a.

- Para aqueles que já avançaram, você pode propor problemas diferentes, como um problema não convencional de lógica, ou de estratégia, como os disponíveis em: bityli.com/desafios-log (acesso em 31/05/2022).

ATIVIDADE 1 ▶ ATIVIDADE EXTRA

1 aula extra:

Cálculo Mental

Professor/a, anuncie para os estudantes que eles serão desafiados a resolver mais uma sequência de atividades de cálculo mental! A tarefa desta vez é resolver equações do 1º grau.

Lembre-se que o conhecimento de procedimentos variados e o desenvolvimento de fluência na sua realização contribuem para que os estudantes sejam capazes de controlar erros de cálculo, fazer estimativa e compreender como decidir se é melhor calcular mentalmente, usando lápis e papel ou fórmulas. Indicamos que o cálculo mental seja feito em seções frequentes e organizadas, no início ou ao final de uma aula.

Os objetivos deste trabalho são:

- Tornar o cálculo mental um recurso útil para conseguir que os estudantes ampliem seu potencial de cálculo mental e de resolução de problemas, já que melhora o conhecimento dos estudantes a respeito de números, operações, álgebra e medidas.
- Contribuir com uma aprendizagem mais qualitativa e enriquecer a experiência dos estudantes na tomada de decisões na hora de realizar um cálculo.
- Favorecer a autoavaliação do aluno em relação a suas capacidades de calcular.

Além dos objetivos citados acima, existem os objetivos relacionados aos aspectos cognitivos com o foco no desenvolvimento da habilidade (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade:

- Utilizar propriedades da igualdade para resolver equações de 1º grau.
- Modelar problemas por meio de equações de 1º grau.
- Resolver problemas que possam ser modelados por equações do 1º grau.

Antes de propor que resolvam o exercício 2, resolva coletivamente uma das propostas, como o item (2x + 5) / 3 = 3, visto que provavelmente eles ainda não tiveram contato com equações de 1º grau com essa complexidade.

No final da atividade, garanta espaço para que os estudantes socializem suas estratégias de cálculo.

EXERCÍCIO 1

Resolva mentalmente as seguintes equações:

x + 5 = 8 x =	a – 4 = 3 a =	y + 6 = 5 y =	p – 7 = –7 p =
a + 9 = –1 a =	b – 39 = –79 b =	10 = m + 8 m =	15 = x + 20 x =
4 = x – 10 x =	7 = x + 8 x =	w – 1 = 5 w =	2t + 4 = 1 t =
3t = 15 t =	2s = 10 s =	3x = –9 x =	2y = 14 y =
7b = –21 b =	4x = –12 x =	35n = –105 n =	-4x =-16 x =

EXERCÍCIO 2

Resolva mentalmente as seguintes equações:

x / 2 = 18 x =	x / 3 = 15 x =	x / 4 = 10 x =
x / 5 = 8 x =	x / 6 = 11 x =	x / 7 = 9 x =
x / 8 = 8 x =	x / 9 = 12 x =	(2x + 5) /3 = 3 x =
(3x + 4) /5 = 2 x =	(3x + 8) /5 = 4 x =	(4x - 5) /3 = 5 x =
(4x - 5) /3 = 5 x =	(5x - 4) /6 = 6 x =	(x + 18) /5 = 5 x =
(x + 8) /4 = 6 x =	(x - 5) /7 = 1 x =	

EXERCÍCIO 3

Resolva mentalmente as seguintes equações:

9x – 2 = 4x + 18 x =	7y – 10 = y + 50 y =	5r – 91 = 4r – 77 r =
4b + 5 = b + 20 b =	2m – 10 = 7m + 10 m =	4x – 18 = - 3x +10 x =
7a + 1 = 5a – 7 a =	2p + 5 + p + 7 = 18 p =	-x + 32 = -3x - 24 x =

EXERCÍCIO 4

Resolva os seguintes problemas:

a) O dobro de um número somado com 5 é igual a 91. Qual é esse número?

b) O triplo de um número diminuído de 4 é igual a 23. Qual é esse número?

c) O número somado com o seu dobro é igual a 150. Qual é esse número?

d) Qual é o número que adicionado a 28 é o mesmo que 3 vezes esse número?

Ao término dessa sequência de atividades, solicite que os estudantes reflitam sobre:

- Quais as dificuldades que você teve para resolver as atividades de cálculo mental?
- Quais ações podem contribuir para diminuir essas dificuldades?

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 7

3 aulas:

Sistemas de equações do 1º grau

Professor/a, inicie este momento anunciando aos estudantes que o objetivo agora é ampliar o estudo das equações, explorando equações do 1º grau com 2 incógnitas.

Aqui o nosso objetivo é desenvolver as habilidades:

- **(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
- **(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Que são conhecimentos prévios da habilidade do Ensino Médio:

- **(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Ao trabalhar as habilidades acima citadas, o estudante também está desenvolvendo as competências específicas:

- **3.** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (Proposta para o Ensino Médio).

- **5.** Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. (Proposta para o Ensino Fundamental).

ETAPA 1 – Compreendendo os sistemas de equações do 1º grau com 2 incógnitas

Organize os estudantes em duplas ou trios e proponha que resolvam, inicialmente, apenas o Problema 1, disponível no Anexo 7. Você pode passar o problema no quadro ou disponibilizar a versão impressa. Enquanto eles resolvem, circule pelos grupos, incentive-os a formular hipóteses, a fazer desenhos, tabelas ou esquemas para encontrar a solução da situação.

EXERCÍCIO 1

Pedro é um menino que adora animais e gosta também de desafios matemáticos. Um dia, seu amigo Lucas perguntou: Pedro, quantos cachorros e quantos pássaros você tem? Pedro deu a resposta em forma de charada: Tenho um total de 6 animais. Contando os pés e patas deles, o total é 22. Adivinhe quantos cachorros e pássaros Pedro tem.

Deixe que os estudantes resolvam o problema da forma como acharem melhor. Passe entre eles e registre as diferentes formas encontradas pelos estudantes para resolver a situação: aritmética, tabela, tentativa e erro, álgebra.

É possível que surjam resoluções do tipo:

PATAS DE CACHORRO	PATAS DE PÁSSARO	TOTAL
2 cachorros x 4 patas = 8	4 passaros x 2 patas = 8	16
3 cachorros x 4 patas = 12	3 pássaros x 2 patas = 6	18
4 cachorros x 4 patas = 16	2 pássaros x 2 patas = 4	20
5 cachorros x 4 patas = 10	1 pássaro x 2 patas = 2	22

Ou: 22/4 = 5 e sobram 2, então temos 5 cachorros com 4 patas e um pássaro com 2 patas.

Ou ainda:

$2 . p + 4 . c = 22$

$2 . 1 + 4 . 5 = 22$

Pode ser que surja a formulação algébrica na forma de sistema de equações:

$$\begin{cases} p + c = 6 \\ 2p + 4c = 22 \end{cases}$$

Convide alguns estudantes, já pré-selecionados por você, a socializar no quadro os registros com as suas soluções. Discuta as estratégias utilizadas por eles e peça que identifiquem semelhanças e diferenças entre elas.

Caso não surjam diferentes soluções, coloque no quadro alguns dos registros acima e diga que em outra turma apareceram essas outras formas. Se achar oportuno, coloque também alguma com algum tipo de erro, como por exemplo, não ter atentado que a quantidade total de animais era 6.

4 cachorros = 4 . 4 = 16

3 pássaros = 3 . 2 = 6

16 + 6 = 22

Verifique se eles compreenderam que o problema pode ser resolvido de diversas maneiras, mas que você gostaria de explorar com eles uma em especial.

Explore a escrita algébrica das equações que representam a situação:

$$\begin{cases} p + c = 6 \\ 2p + 4c = 22 \end{cases}$$

O que significa p e c nessa equação? Por que estão separadas em duas igualdades? Quais informações do problema elas representam?

Pergunte se alguém já resolveu algo assim em matemática.

Então conte que se trata de uma equação do 1º grau com duas incógnitas que pode apresentar muitas soluções. Ao combinar duas ou mais equações, obtém-se um sistema de equações e que, para resolver esse sistema, é necessário encontrar qual(ais) o(s) valor(es) que deve(m) ser atribuído(s) a cada uma das incógnitas, de modo a tornar todas as equações verdadeiras. No caso da situação apresentada, o número de pássaros (p) é 1 e o número de cachorros (c) é 5.

Registre no quadro e sistematize algumas ideias, solicitando que registrem em seus cadernos:

Um sistema de equações do 1º grau com duas equações de duas incógnitas ou um sistema linear 2 x 2, nas incógnitas x e y, é todo par de equações da forma:

$ax + by = c$
onde: a, b e c são constantes,
e a e b não são simultaneamente nulos

$dx + ey = f$
onde d, e e f são constantes,
e d e e não são simultaneamente nulos

Os números a, b, d e e são os coeficientes das equações, e os números c e f são os termos independentes.

Comente que provavelmente eles resolveram esse sistema por cálculo mental ou tentativa e erro, por um procedimento aritmético por envolver números pequenos. Alerte que situações mais complexas podem exigir uma resolução algébrica ou gráfica, que serão estudadas a seguir.

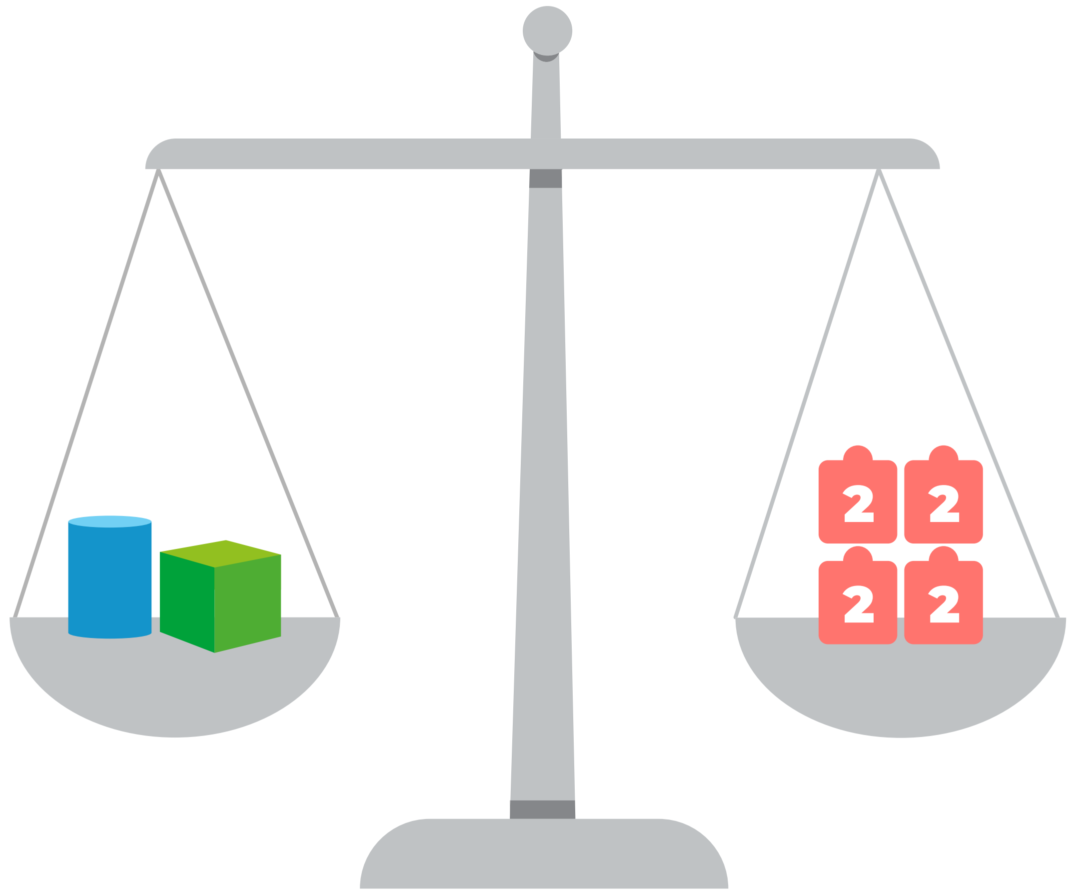
Apresente o problema 2 disponível no Anexo 7. Convide os estudantes para explorar, inicialmente, apenas uma das situações apresentadas. Eles podem continuar trabalhando em duplas ou trios e você pode sugerir, por exemplo, que metade da turma resolva a situação 1 e a outra metade da turma a situação 2.

EXERCÍCIO 2

Observe as balanças representadas a seguir e, considerando que todos os cilindros são idênticos entre si e que todos os cubos são idênticos entre si, faça o que se pede:

a) Escreva uma equação que represente a situação 1.

Exemplo de resposta esperada: a + v = 8
onde a representa a massa do cilindro azul
e v a massa do cubo verde.



b) Escreva uma equação que represente a situação 2.

Exemplo de resposta esperada: 2 a + v = 13
onde a representa a massa do cilindro azul
e v a massa do cubo verde.

c) Complete a tabela com pares ordenados que tornam a equação verdadeira.

		(,)

Exemplos de respostas esperadas:

		(,)
1	7	(1.7)
2	6	(2.6)
3	5	(3.5)

		(,)
1	11	(1.11)
2	9	(2.9)
3	7	(3.7)

d) Responda: Qual a massa do cubo e a do cilindro para que as duas balanças se mantenham em equilíbrio?

Professor/a, disponibilize um tempo adequado para que as duplas explorem uma das situações apresentadas. Circule pelos grupos e verifique se utilizam expressões algébricas corretas para representar a situação e se têm a iniciativa de atribuir diferentes valores para uma das massas e encontrar o valor numérico da outra massa envolvida. Caso os estudantes apresentem dificuldades em explorar a situação, faça algumas perguntas norteadoras, como por exemplo:

- Na primeira balança, qual a soma da massa de um cubo com a massa de um cilindro?
- Considere que a massa do cubo seja igual a 2 kg (na primeira balança), neste caso qual seria a massa do cilindro? Explique!
- E se a massa do cilindro fosse 4 kg, qual seria a massa do cubo? Por quê?
- Incentive-os a registrar corretamente os pares ordenados obtidos e observe se eles têm clareza que cada um desses pares ordenados é uma solução da equação.

Após a resolução da proposta, discuta com os estudantes questões do tipo:

- Que soluções interessantes vocês encontraram na primeira balança?
- Encontraram mais do que uma solução?
- Como vocês descobriram a massa de cada forma geométrica?
- Quais estratégias desenvolveram?
- Vocês perceberam algum padrão na tabela da primeira balança? E na da segunda balança?
- Qual balança permitiu a maior quantidade de soluções? Por que vocês acham que isso aconteceu?

Aproveite para sistematizar que uma equação do 1º grau com duas incógnitas pode apresentar infinitas soluções e garanta que eles compreendam que na 1ª situação, por exemplo, o par ordenado (1,7) representa que se o cilindro tiver massa 1 e o cubo massa 7, a balança ficará equilibrada; e que existem outras situações que deixam a balança equilibrada, como cilindro com massa 2 e cubo com massa 6. Retome a ideia de igualdade que está relacionada ao equilíbrio da balança.

Anuncie que o próximo desafio é verificar se existe alguma solução comum para as duas equações. Caso não exista nenhum par ordenado comum nas duas tabelas, incentive-os a encontrar mais alguns pares ordenados na busca desse valor comum.

Formalize que resolver o sistema

$$\begin{cases} a + v = 8 \\ 2a + v = 13 \end{cases}$$

é determinar a solução comum as duas equações. No caso apresentado, a solução é (5,3), ou seja, quando a massa do cilindro é 5 e a do cubo é 3, as duas balanças ficam em equilíbrio simultaneamente.

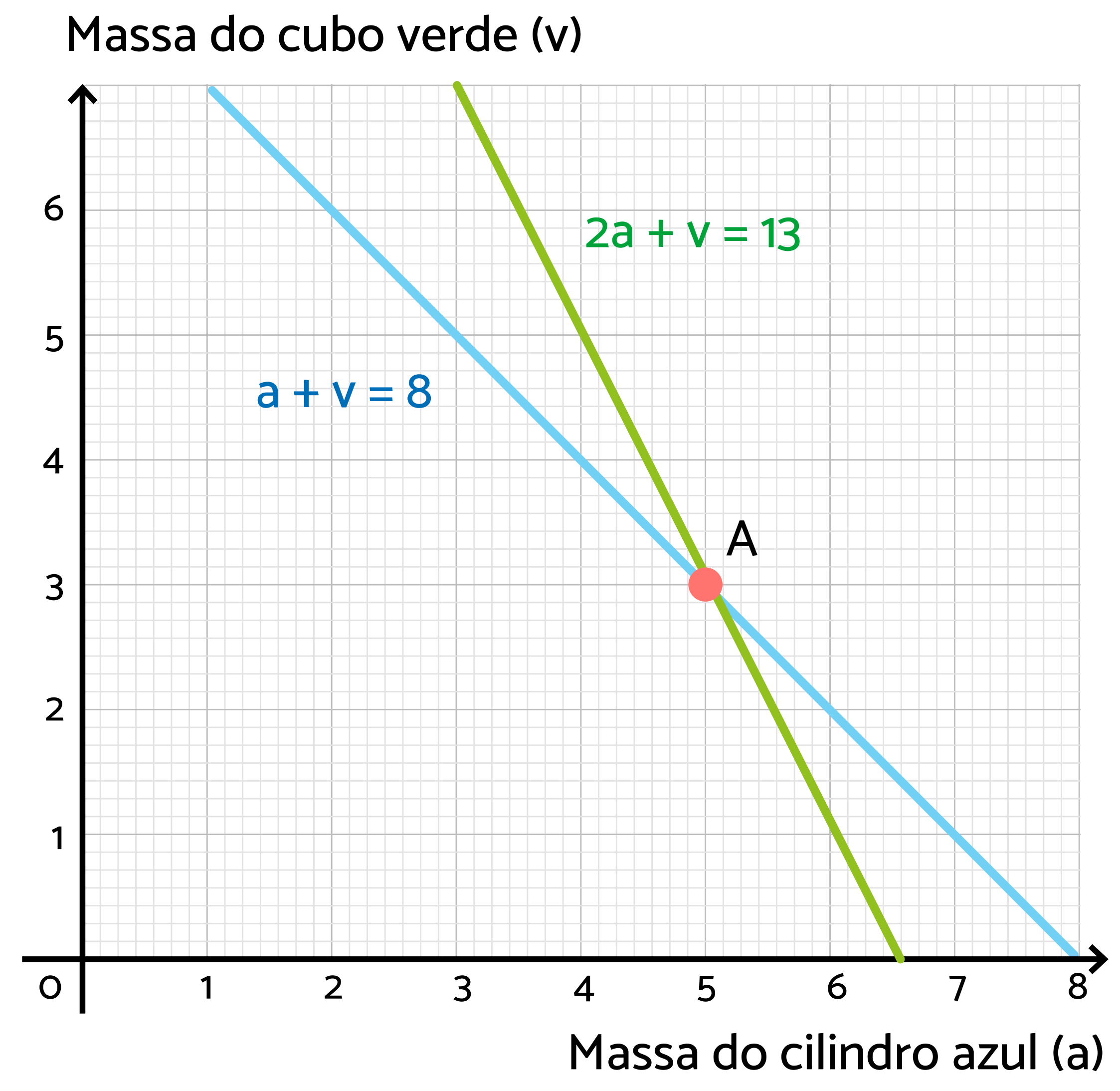
ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 7

ETAPA 2 – Resolução gráfica de um sistema do 1º grau

Convide os estudantes a representar graficamente as duas equações do sistema apresentado na etapa anterior. Sugira que comecem representando os pares ordenados da tabela que representa a primeira balança. Questione se identificam regularidades. Espera-se que percebam que os pontos estão alinhados.

Converse com eles sobre a possibilidade de ligar esses pontos e enfatize que a e v podem assumir valores reais não negativos, pois representam a massa dos sólidos. Em seguida, convide-os a representar os pares ordenados que verificam a segunda situação/balança, utilizando o mesmo papel quadriculado. Converse sobre a importância de utilizar a escala adequada no momento da construção do gráfico.

Se você achar adequado, eles podem utilizar um plotador de gráficos (como o Geogebra, disponível em https://bityli.com/geogebra3) . Peça que localizem as coordenadas do ponto de encontro das duas equações. Espera-se que percebam que o ponto de encontro das retas é exatamente a solução do sistema.



ATIVIDADE 1 ▸ MOMENTO 7

ETAPA 3 – Resolução algébrica de um sistema do 1º grau: método da adição

Para iniciar a proposta, retome que, na etapa anterior, estudaram a resolução de um sistema pelo método gráfico. Pergunte se algum estudante conhece alguma outra maneira de resolver um sistema do 1º grau com duas equações e duas incógnitas. Caso algum deles conheça a resolução algébrica (ou o método da adição ou o da substituição), você pode propor que ele resolva um sistema no quadro e que os demais colegas tentem explicar qual a estratégia utilizada. Caso contrário, organize os estudantes em pequenos grupos e os desafie com a seguinte proposta:

EXERCÍCIO 1

Qual dos problemas a seguir pode ser representado pelo sistema abaixo?

$$\begin{cases} x = y = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

a) A soma de dois números é 15 e a diferença é 6. Quais são esses números?

b) A soma de dois números é 15 e um deles é o triplo do outro. Quais são esses números?

c) A soma de dois números é 15 e a diferença entre eles é 3. Quais são esses números?

Gabarito: c.

EXERCÍCIO 2

Observe a resolução da situação apresentada por dois estudantes da 1ª série do Ensino Médio. Analise e registre no seu caderno quais foram as estratégias utilizadas e quais as semelhanças e diferenças entre elas.

Em seguida, proponha uma discussão com o grupo todo. Explique que um sistema pode ser resolvido graficamente (como estudado anteriormente); que muitas vezes um sistema pode ser resolvido por cálculo mental, como na solução apresentada por Jaime; ou até mesmo utilizando um procedimento algébrico, como a resolução apresentada por Paula. Formalize o processo de resolução pelo método da adição e, se necessário, retome a propriedade que embasa esse processo de resolução dos sistemas: somando-se duas igualdades, membro a membro, obtém-se uma nova igualdade, isto é: se a = b e c = d, então a + c = b + d.

JAIME

Primeiro, eu pensei em dois números cuja soma é 15:

- 1 e 14
- 2 e 13
- 5 e 10
- 9 e 6; e sei que há outras possibilidades também.

Depois pensei em dois números cuja diferença é 3:

- 4 e 1
- 5 e 2
- 6 e 3
- 7 e 4
- 9 e 6
- 10 e 7; e sei que há outras possibilidades também.

Mas já parei de encontrar pares de números, pois percebi que 6 e 9 tornam verdadeiras as duas sentenças:

- Soma 15 (x + y = 9)
- E diferença 3 (x – y = 3).

Então a solução do problema é (9, 6).

PAULA

Eu percebi que se eu somasse as duas equações, o y iria ser cancelado, e isso é interessante pois obtenho uma equação somente com x.

$$\begin{cases} x + \cancel{y} = 15 \quad + \\ x - \cancel{y} = 3 \end{cases}$$

$$2x = 18$$

$$x = 18 / 2$$

$$x = 9$$

Então eu descobri que o valor de x é 9.

Como sei que x + y = 15, pensei assim:

9 + y = 15

y = 15 – 9

y = 6

Então eu descobri que os números pensados são 9 e 6, isto é, a solução do sistema é (9,6).

Para ampliar as aprendizagens dos estudantes, e para que ganhem fluência na resolução de sistemas, selecione, de livros didáticos do 8° ano do Ensino Fundamental, mais alguns exercícios e alguns problemas que possam ser modelados por um sistema de equações do 1º grau e resolvidos por cálculo mental ou pelo registro gráfico ou mesmo pelo método da adição. Vale lembrar que para ter fluência, é preciso exercitar.

Ao fazer essa seleção, você poderá:

01. Escolher um ou dois problemas, apresentar aos estudantes e pedir que, antes de resolvê-los, eles analisem quais dos sistemas resolvem aquele problema. Por exemplo:

A população de uma cidade a é quatro vezes maior que a população da cidade b. Somando a população das duas cidades, temos o total de 300.000 habitantes. Qual a população da cidade a?

a) $4a + 4b = 300.000$
$a + b = 300.000$

b) $a = 4b$
$4b + a = 300.000$

c) $a = 4b$
$a + b = 300.000$

02. Escolher um problema e pedir que resolvam de dois modos diferentes.

03. Propor a resolução de alguns sistemas de equação pelo método da adição, mas antes devem dizer o que podem fazer com cada equação do sistema para facilitar a resolução, por exemplo:

Multiplicar a 1a equação pelo número -2

$$\begin{cases} x - 34 = 1 \\ 2x + 4 = 16 \end{cases}$$

Multiplicar a 2a equação pelo número -5

$$\begin{cases} 5f - x = -6 \\ f + 3x = 10 \end{cases}$$

Para se aprofundar

Professor/a, caso considere necessário explorar mais esse tema, você pode propor que os estudantes assistam ao vídeo "Resolução de um sistema de equações pelo método da adição" na plataforma do Khan Academy, disponível em: bityli.com/resolucao-sis-equa, e que leiam o 1º exemplo apresentado no texto disponível em bityli.com/metodo-eliminacao (acessos em 28/04/2022).

Outra opção é explorar as atividades propostas no plano de aula da Nova escola: "Sistema de Equações Lineares (Ampliação)", disponível em bityli.com/sistema-de-equa (acesso em 01/08/2022).

ATIVIDADE 1 ▸ MOMENTO 7

ETAPA 4 – Resolução algébrica de um sistema do 1º grau: método da substituição

Em outro momento, apresente para os estudantes a seguinte situação: A soma de dois números é 2. Somando-se o quíntuplo do primeiro ao dobro do segundo número, obtém-se 1. Quais são esses números?

Convide-os a modelar a situação por meio de um sistema e a resolvê-lo utilizando ou a estratégia de Jaime ou a da Paula. É bem provável que encontrem alguma dificuldade. Converse com os estudantes sobre ela. Inicie as discussões com a pergunta: Quais as dificuldades que encontraram para utilizar as estratégias de Jaime?

Provavelmente eles digam que a 1ª equação do sistema não é muito simples e que por isso tiveram dificuldade em encontrar os pares ordenados. Questione também o que dificultou a aplicação da estratégia de Paula. É provável que afirmem que, ao somar as duas equações, nenhuma "letra" foi cancelada. Anuncie então que existe outro método para resolver sistemas, que é indicado para situações como essa. Diga que, utilizando a metodologia da aula invertida, eles vão conhecer esse novo processo de resolução de sistemas.

Retome com os estudantes esta metodologia, que já foi vivenciada anteriormente. Lembre-os que, nessa metodologia, o tema é estudado antes da aula pelo estudante, além de realizar as propostas encaminhadas pelo professor (vídeo, texto, exercícios) e, se necessário, ampliar o seu estudo pesquisando na internet, em materiais didáticos, entre outros.

Posteriormente, o tópico estudado é retomado e aprofundado na aula, com a ajuda dos colegas e do professor/a. Neste momento, todos poderão solucionar dúvidas, debater o que aprenderam e realizar tarefas complementares. Deixe claro para o estudante a importância do 1º momento de pesquisa/estudo, pois se ele não se prepararem para a aula com antecedência, provavelmente não conseguirão participar das discussões nem realizarão as atividades de aprofundamento. Apresente o roteiro de estudos para ser realizado antes da aula, pode ser em casa ou mesmo na escola, e, neste caso, eles podem trabalhar em duplas.

01. Assista ao vídeo disponível em bityli.com/sistema-equacoes (acesso em 29/04/2022).

02. Após assistir ao vídeo, registre os pontos que achou interessante, as aprendizagens e os pontos importantes desse método de resolução de sistemas.

03. Realize a leitura do texto disponível em: bityli.com/revisao-met-sub (acesso em 29/04/2022).

04. Após a leitura, retome as suas anotações sobre o vídeo e complete-as com as suas percepções e suas aprendizagens a partir do texto.

No início da aula seguinte, abra uma roda de conversa sobre o método da substituição. Em seguida, retome o sistema da aula anterior e convide-os a interpretar a sua resolução apresentada ao lado.

Em seguida, proponha uma discussão coletiva sobre a estratégia apresentada para resolver o sistema. Aproveite o momento para sistematizar o método da substituição.

Convide os estudantes a resolver a novamente o mesmo sistema, com a mesma estratégia, mas agora isolando y na 2ª equação, completando as lacunas deixadas.

Agora é sua vez! Resolva novamente o sistema pelo método da substituição, mas desta vez isole a incógnita na 2ª equação.

Isolando o x na 2ª equação, obtém-se:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ x + y + 2 \longrightarrow x = 2 - y \end{cases}$$

Se $x + y = 2$, então $x = 2 - y$.
Depois, troque a incógnita x na primeira equação ($5x + 2y = 1$) pela expressão $x = 2 - y$.

$$5x + 2y = 1 \qquad \begin{aligned} &5 \,.\, (2 - y) + 2y = 1 \\ &10 - 5y + 2y = 1 \\ &-3y = 1 - 10 \\ &-3y = -9 \ (/-3) \\ &y = 3 \end{aligned}$$

Descobrimos o valor de y. Para descobrir o valor de x, substituir y pelo número 3 em uma das equações. Substituindo y = 3 na 2ª equação, obtém-se:

$x + y = 2$
$x + 3 = 2$
$x = -1$

Os números pensados são -1 e 3, isto é, a solução do sistema é o par ordenado (-1, 3).

Complete os espaços:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ x + y + 2 \longrightarrow y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Se $x + y = 2$, então $y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Substituindo a expressão obtida na 1ª equação:

$$5x + 2y = 1 \qquad \begin{aligned} &5x + 2 \,.\, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 1 \\ &\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ \\ &x = \_\_\_\_\_\_ \end{aligned}$$

Substituindo x = -1 na 2ª equação, obtém-se:

$x + y = 2$
$\_\_\_\_\_ + y = 2$
$y = 2 \ \_\_\_\_\_$
$y = \_\_\_\_\_$

A solução é o par ordenado (_____, _____).

Após a realização da proposta, peça que os estudantes troquem entre si os registros para que cada um corrija o registro de outro colega.

Para se aprofundar

Professor/a, caso considere necessário explorar mais esse tema, sugerimos explorar as atividades disponíveis no plano de aula da Nova Escola Sistema de equações, que contempla resolução de sistemas pelo método da substituição, disponível em bityli.com/sistema-de-equacoes (acesso em 01/06/2022).

Para sistematizar as aprendizagens, converse com os estudantes que, em cada situação, eles podem aplicar um dos métodos apresentados, aquele que ele se sentir mais confiante ou que seja mais conveniente em função das equações dadas. É possível apresentar alguns sistemas e perguntar quais as características e qual seria o método mais adequado para sua resolução. Enfatize que o objetivo aqui não é resolver, mas sim refletir sobre as características do sistema e as possibilidades de resolução a partir delas. Por exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ x - y = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 4x + 2y = 38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

É possível que os estudantes optem por resolver o 1º sistema pelo método da adição, visto que ao somar as duas equações, o y se cancela. Caso não apareça, explore que o mesmo processo pode também ser utilizado no 3º sistema, porém não de forma tão imediata, visto que, neste caso, se faz necessário multiplicar uma das equações por -1 para que o 2x seja simplificado com o -2x. Provavelmente o estudante opte pelo método da substituição para resolver o segundo sistema, em que é possível isolar o x ou o y na 1ª equação.

Professor/a, para encerrar o estudo de sistemas e sistematizar as aprendizagens, você pode solicitar que os estudantes organizem um texto contando as suas aprendizagens sobre o tema, dizendo o que achou mais fácil, qual o método de resolução que ele mais gostou e quais os pontos que ele ainda precisa se dedicar mais. Convide os estudantes a contar como se sentiram durante o estudo de resolução de sistemas: Ficaram animados com as novas aprendizagens ou se desanimaram em alguns momentos frente às dificuldades encontradas?

Se considerar adequado, disponibilize mais uma ou duas aulas do seu planejamento para que os estudantes resolvam problemas envolvendo sistemas. Selecione-os do material didático do 8º ano.

Atenção para a avaliação!

Professor/a, nesse momento, o objetivo é verificar se os estudantes mobilizam os conhecimentos adquiridos e avaliar as aprendizagens de cada um sobre a linguagem algébrica, o conceito de igualdade e a resolução de problemas envolvendo equações de 1º grau.

Peça que, individualmente, leiam e resolvam o problema a seguir, utilizando a estratégia que achar mais adequada. Enquanto eles realizam a proposta, circule para verificar como os estudantes estão resolvendo, utilize a rubrica abaixo para coletar dados e informações sobre as aprendizagens dos estudantes. Esse é um momento para você avaliar em que nível de aprendizagem cada um se encontra.

Critérios	Nível 4	Nível 3	Nível 2	Nível 1
Efetividade e eficiência do raciocínio empregado	Modela corretamente o problema por meio de um sistema de equações.	Modela corretamente o problema por meio de um procedimento pessoal, aritmético ou gráfico.	Modela o problema de modo errôneo ou não definindo claramente o raciocínio utilizado.	Não há registros coerentes com os dados do problema ou não há registros.
Uso preciso dos conceitos e procedimentos	Resolve o problema usando a melhor estratégia em função dos dados (no caso substituição) e obtém o resultado correto e preciso.	Resolve o problema usando a sua estratégia e obtém o resultado correto, embora possa conter pequenas incorreções na execução, o que não compromete o trabalho.	Comete erros que revelam incompreensão do procedimento utilizado, comprometendo o resultado obtido.	Não tem um procedimento claro de resolução.

(OBMEP) Um estacionamento tem 250 vagas. Ao meio-dia da última segunda-feira, um funcionário observou que o número de vagas ocupadas correspondia ao dobro do número de vagas livres, mais 10 vagas. Quantos carros estavam no estacionamento naquele momento?

Gabarito: Naquele momento, o estacionamento tinha 80 vagas livres e 170 ocupadas, logo, no estacionamento havia 170 carros.

Após a realização da atividade, solicite que os estudantes, em duplas ou pequenos grupos, contem aos colegas como realizaram o problema. Nesse momento, os colegas têm como tarefa fazer perguntas e compreender todo o processo utilizado por quem está explicando sua estratégia.

Aproveite esse momento para avaliar questões referentes à comunicação dos estudantes sobre os conceitos trabalhados. Utilize a rubrica a seguir.

Observe os resultados da sua avaliação. Caso seja necessário, você pode criar grupos de trabalho para retomar as aprendizagens que não ocorreram, separando uma ou duas aulas para isso.

É possível preparar atividades semelhantes a essas que apresentamos, incluindo problemas, equações e sistemas, e organizar grupos com estudantes localizados nos quatro níveis de rubrica, orientando que estudantes dos níveis 3 e 4 apoiem os demais.

Você não precisa destacar o nível, mas sim dizer que na classe podemos aprender uns com os outros e que você organizou os grupos para que isso ocorra.

Critérios	Nível 4	Nível 3	Nível 2	Nível 1
Capacidade de comunicar ideias e entendimentos matemáticos.	A comunicação das ideias matemáticas apresentadas por escrito e oralmente é precisa e clara.	A comunicação das ideias matemáticas apresentadas por escrito e oralmente é clara.	A comunicação das ideias matemáticas apresentadas por escrito e oralmente é confusa e/ou imprecisa.	A comunicação das ideias matemáticas apresentadas por escrito é fragmentada, incompleta e confusa.

Conectando sequências

Conexões com o Material do Volume I e outra explorações

As propostas apresentadas na atividade 2 desta sequência têm como foco o desenvolvimento do pensamento algébrico e exploram os conceitos de regularidade, generalização, escrita algébrica e equações e sistema de equações do 1º grau, contemplando algumas habilidades dos anos finais do Ensino Fundamental, como:

- **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
- **(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

E outras propostas para o ensino médio, como:

- **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada, quando tratamos da resolução algébrica de um sistema de equações nessa sequência.

A ampliação dessas habilidades acontece na 3ª SD desse material, em que o foco estará nas equações do 2º grau, relacionadas às habilidades (EF09MA09):

- **(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau e no estudo das funções de 2º grau.

Bora se preparar?!

Professor/a, nesta etapa da SD, contemplamos habilidades muito relevantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. Para ampliar as aprendizagens deles e permitir que pensem mais a respeito dos conceitos envolvidos na álgebra, peça que resolvam as questões a seguir e, caso surja alguma dúvida, eles poderão discuti-las com seus colegas e professor/a na próxima aula. (Professor/a, você pode disponibilizar esses itens na versão impressa ou virtual, por e-mail, ou por WhatsApp).

Enquanto eles realizam a proposta, circule pela sala para fazer os alinhamentos necessários e solucionar possíveis dúvidas. Faça boas perguntas para conduzir a investigação e a reflexão dos estudantes, de modo que formulem/validem hipóteses, façam descobertas e tirem suas conclusões:

- Por que essa não é a alternativa correta?
- Qual estratégia utilizou para chegar a essa conclusão?

Se necessário, escolha o exercício que eles apresentaram mais dificuldades para resolver/discutir coletivamente.

Enquanto observa os estudantes, registre aqueles que já avançaram, aqueles que logo desistem, os que ainda estão com dificuldades. **Com base nessas anotações, você pode planejar uma próxima aula propondo atividades especiais** para aqueles que ainda não avançaram nos temas trabalhados e convidar aqueles que já sabem para serem os tutores na sala. Talvez seja necessário apoiar os estudantes com mais dificuldade, encorajá-los a não desistir, a serem perseverantes, a continuarem tentando.

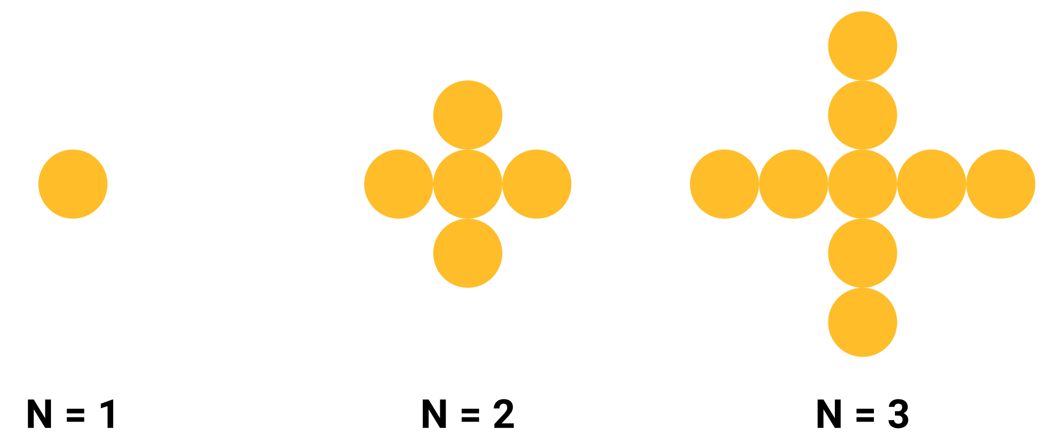
Invista na premissa que todos podem aprender matemática e que você acredita no potencial de cada um. Uma forma de apoio específico é organizar o grupo com mais dificuldade e dar um apoio seu especial a eles. Nesse caso, você pode fazer isso em uma aula na qual distribua atividades específicas para os estudantes com habilidades diferentes.

EXERCÍCIO 1

A figura abaixo mostra um padrão que se repete.
A expressão que representa o número de bolinhas y, em função da posição da figura na sequência (n), é:

a) y = 3n - 2
b) y = 2n - 1
c) y = 4n
d) y = n
e) y = 4n - 3

Gabarito: e

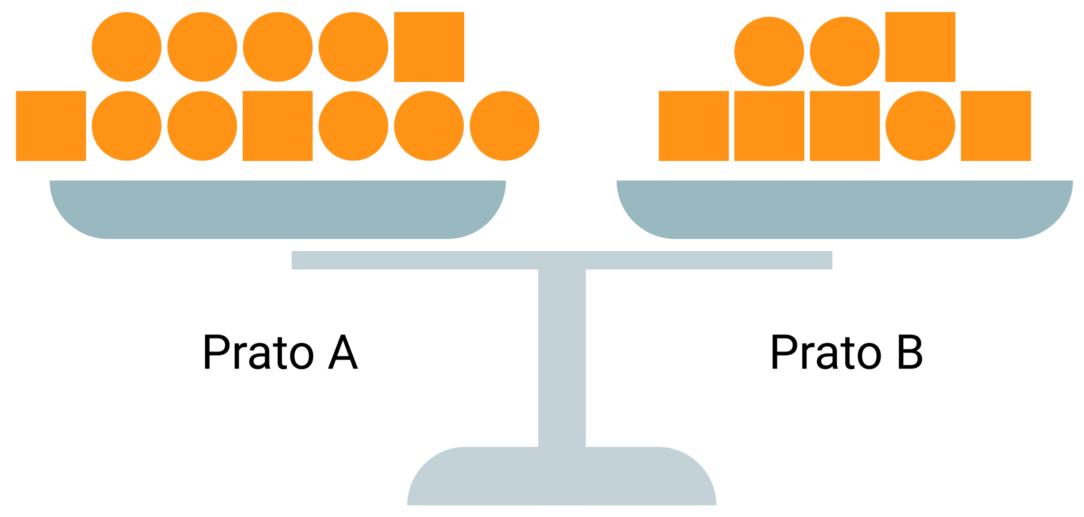


EXERCÍCIO 2

(FATEC – adaptado) A Figura abaixo representa uma balança cujos pratos estão equilibrados. Nos pratos dessa balança estão cubos congruentes entre si (representados por quadrados) e esferas congruentes entre si (representadas por círculos). Representando a massa da esfera por e e a massa do cubo por c, é correto afirmar que:

a) 6e = 2c
b) 2e = 6c
c) e = 2c
d) 2e = c
e) e = c

Gabarito: a



EXERCÍCIO 3

A solução da equação x + (-5) = -10 é:

a) x = 5
b) x = -5
c) x = -15
d) x = 15
e) x = 2

Gabarito: b

EXERCÍCIO 4

Observe o gráfico ao lado em que estão representadas as retas r e s. Esse gráfico representa o sistema:

a) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$

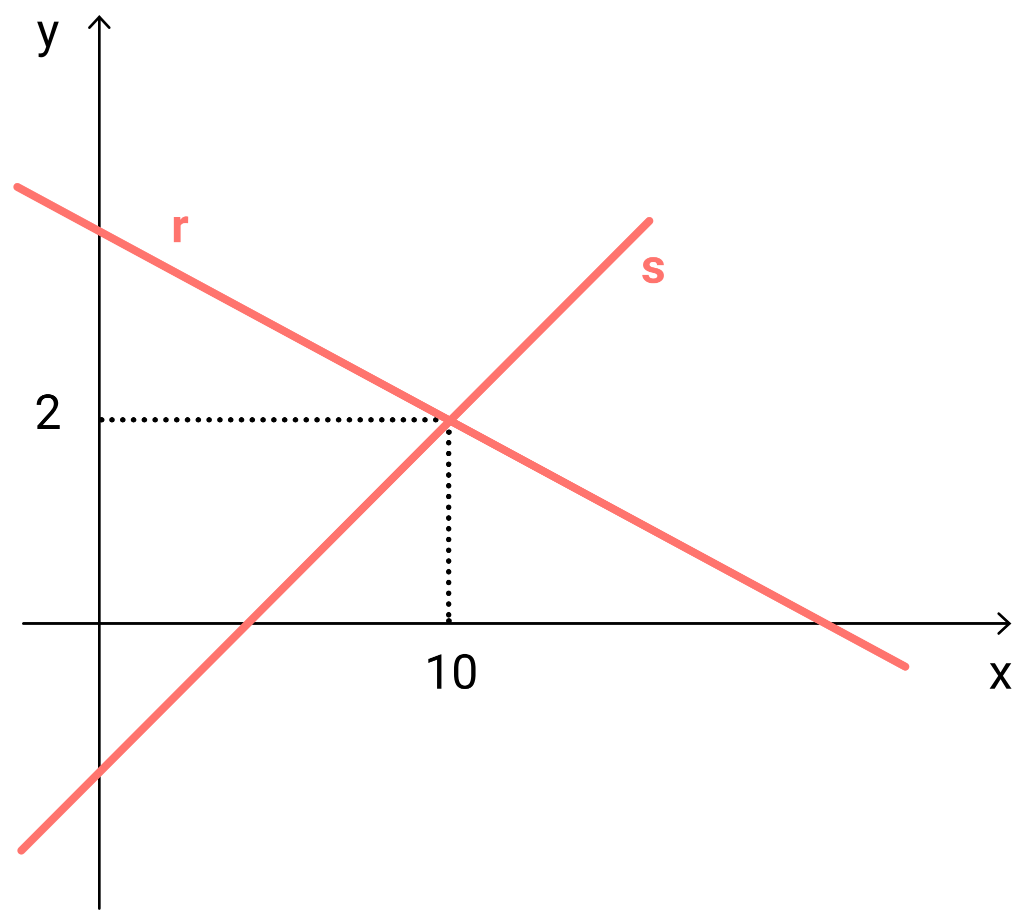
b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 10x + 2y = 12 \\ x - y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 10x + y = 2 \\ x - y = 8 \end{cases}$

Gabarito: d



EXERCÍCIO 5

A diferença entre dois números é 360. Se juntarmos 120 ao dobro do número maior, obtemos o triplo do menor número. Quais são esses números?

Observe ao lado como Isis, Mário e Geraldo equacionaram esse problema. Analise o que cada um fez e utilize um dos procedimentos que você conhece para resolver o problema.

Depois, escolha outro procedimento para verificar se a sua resposta está correta.

ISIS:

$$\begin{cases} a - b = 360 \\ 2a + 120 = 3b \end{cases}$$

MÁRIO:

$$2 - (360 + b) + 120 = 3b$$

GERALDO:

$$2a + 120 = 3 \cdot (a + 360)$$

EXERCÍCIO 6

Um estacionamento cobra R$ 12,00 por moto e R$ 23,00 por carro estacionado. Em um determinado dia, ao fazer o fechamento do caixa, a funcionária registrou no caderno de controle:

Veículos: 107
Valor: R$ 2.186,00

Quantos carros estacionaram nesse dia?

Para se aprofundar

Professor/a, antes de seguir com a exploração desta SD, que tal convidar os estudantes para explorarem a Matemática a partir de outras perspectivas?

Pergunte se eles saberiam dizer o nome de algum homem que contribuiu para o desenvolvimento da Matemática. É bem provável que tenham vários nomes para citar: Pitágoras, Tales, Gauss, Bháskara, entre outros.

Em seguida, pergunte se saberiam citar alguma mulher que contribuiu para o desenvolvimento da Matemática. Provavelmente não tenham muitos nomes para citar.

Proponha a reflexão: por que será que os nomes das mulheres que fizeram a história da Matemática não são divulgados?

Convide-os então a conhecer algumas dessas mulheres. Sugira a leitura de alguns textos sobre o tema, como:

- Conheça 5 mulheres que fizeram história na matemática, disponível em: bityli.com/5-mulheres-na-mat (acesso em 02/06/2022).
- As Mulheres na Matemática, disponível em: bityli.com/as-mulheres-na-mat (acesso em 02/06/2022).
- Mulheres na Matemática, disponível em: bityli.com/mulheres-na-mat (acesso em 03/06/2022).
- Quatro mulheres de destaque na matemática que você precisa conhecer, disponível em bityli.com/mulheres-matematicas-destaque (acesso em 02/06/2022).

Peça que, organizados em grupos, escolham uma ou duas mulheres e produzam um material para divulgar as suas contribuições para a Matemática. Eles podem produzir um podcast, um vídeo caseiro ou mesmo um cartaz, e divulgar para seus colegas da escola. Vale sugerir também com o professor/a de português, se necessário, para pedir ajuda com essa tarefa.

Atividade 2

ATIVIDADE 1

FUNÇÕES DO 1º GRAU OU FUNÇÃO AFIM

Foco: o foco da atividade é a construção do conceito de função e o reconhecimento dos elementos e das características das funções do 1º grau.

Tempo sugerido: 4 horas/aula.

Materiais necessários:

- Acesso ao aplicativo bityli.com/function-builder. Caso o acesso ao aplicativo não seja possível, você pode retomar a brincadeira de adivinhar o número pensado, já vivenciada, e ampliar para trabalhar o conceito de função.
- Acesso ao aplicativo bityli.com/Geogebra ou malha quadriculada: 1 folha para cada estudante.
- Cópias impressas ou digitais dos Problemas 1 e 2 > Momento 7.

Dividimos essa atividade em dois momentos, um para explorar, estudar e definir função a fim e outro para discutir o domínio de função. Os objetivos são:

- Desenvolver as habilidades do Ensino Fundamental dos anos finais:
  - **(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
- E iniciar o desenvolvimento de habilidades específicas do Ensino Médio, como:
  - **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica
  - (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Observe mais uma vez como podemos ir articulando as aprendizagens de 7º, 8º, 9º anos com as aprendizagens focais do Ensino Médio. Novamente se trata da essência da recomposição da aprendizagem: escolher uma boa proposta de atividade que permita desenvolver simultaneamente conhecimentos de anos escolares diversos. Esse processo diferencia a recomposição da recuperação, que deve acontecer após os estudantes terem tido chance de aprender, e permite que, de certa forma, possamos avançar nas aprendizagens e garantir que, nas séries do Ensino Médio, eles aprendam o máximo possível daquilo que é direito de aprendizagem apresentado nas habilidades e nas competências pela BNCC.

ATIVIDADE 2 ▶ **MOMENTO 1**

2 aulas

Construindo o conceito de função e definindo função do 1º grau

Professor/a, inicie o momento retomando a “máquina de calcular diferente” que eles realizaram na rotação por estações dessa sequência didática (estação 2) e diga que eles vivenciarão situações parecidas, mas agora com apoio de um aplicativo.

Caso o acesso ao aplicativo não seja possível, a exploração apresentada a seguir poderá ser realizada, pois o professor/a pode providenciar algumas figuras impressas contendo os números de entrada e os de saída, e o estudante deverá “descobrir” a lei de formação, por exemplo:

No primeiro momento, a ideia é que os estudantes trabalhem coletivamente num momento de aprendizagem compartilhada.

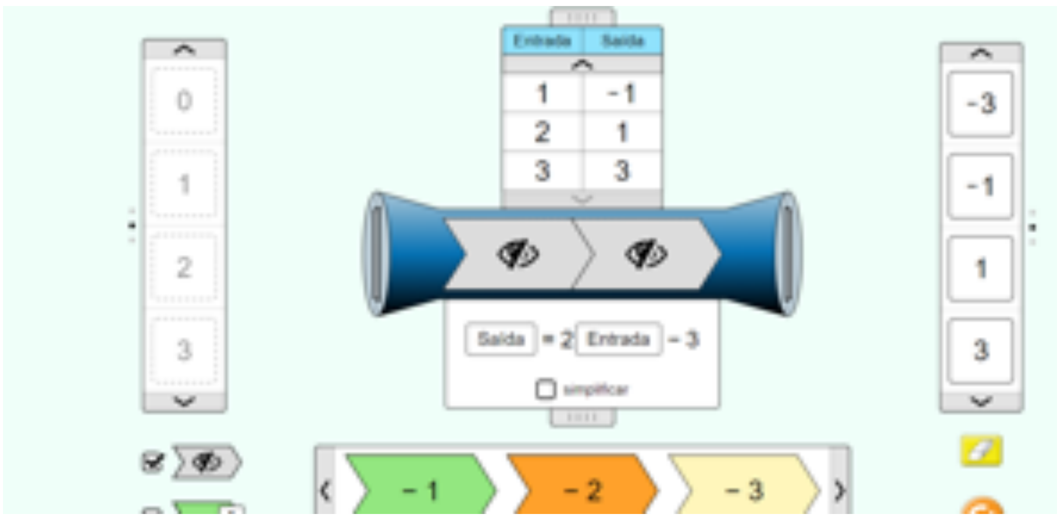
Número na entrada (x)	Número na saída (y)
-4	-8
-3	-6
-2	-4

Em seu dispositivo, acesse o aplicativo bityli.com/function-builder e selecione a opção Números. Em seguida, elabore um comando para que eles "descubram" a lei de formação/ lei da função. Comece com situações simples como: some 1 ou multiplique por -2. Após selecionar a lei, ative o comando Olho Fechado para ocultar a lei e compartilhe com os estudantes a sua tela. Enquanto você seleciona números para a entrada na máquina, os estudantes observam a saída e registram os números em uma tabela. Repita o processo algumas vezes. Veja um exemplo:

Número na entrada (x)	Número na saída (y)
-4	-8
-3	-6
-2	-4

Oriente os estudantes a preencher uma tabela relacionando o número da entrada com o número da saída (ou número pensado e número falado). Diga que o desafio é descobrir a regularidade, a lei que relaciona o número da saída com o valor da entrada, e escrever uma sentença matemática para representar a situação apresentada. No exemplo mostrado, é possível que digam: O número mais ele mesmo, ou O número vezes dois, explore essa linguagem expressa pelos estudantes em escrita matemática, por exemplo, registre y = 2x ou y = x + x.

Para validar a tabela construída pelos estudantes, utilize a aba disponível sobre a máquina (ela exibe a tabela completa); e para validar a lei de formação, selecione a aba disponível na parte inferior da máquina. Por exemplo, imagine que a função selecionada fosse: saída = 2 x entrada - 3, observe a tabela e a lei da função exibida quando se clica nas abas superior e inferior da máquina.



Repita o processo algumas vezes, inclusive com leis mais complexas como $y = x + 3$, $y = -3x + 1$, entre outras. Inclua também números racionais na forma de fração e decimal. Opte por números mais simples para que o foco seja na diversidade numérica e não em contas complexas agora.

Caso algum estudante apresente dificuldades para identificar as múltiplas transformações que estão ocorrendo, ative o comando "Parada" (abaixo do olho fechado) para que possa visualizar o que acontece após cada uma das transformações.

Aproveite o momento para sistematizar o conceito de função: o valor obtido na saída da máquina (variável y) depende do valor da entrada da máquina (incógnita x), ou seja, existe uma relação de dependência entre as grandezas envolvidas. Enfatize também que, em cada lei, cada valor de x está relacionado a um único valor de y.

Proponha uma "batalha de máquina de calcular". Organize os estudantes em grupos e cada grupo prepara uma lei no aplicativo, ativa o comando "olho fechado" e desafia outro grupo a preencher a tabela, a descobrir a lei da função e a escrever a sua lei de formação. Para ampliar as aprendizagens, peça que os estudantes escrevam todas as equações que foram elaboradas na batalha. Solicite que identifiquem semelhanças e diferenças entre as leis dessas funções. Garanta que todos identifiquem que todas possuem 1 como expoente da variável x.

Aproveite para sistematizar o conceito de função do 1º grau: é toda função do tipo $y = ax+b$, onde a e b são números reais e $a \neq 0$. Convide os estudantes a construir os gráficos dessas funções do 1º grau. Eles podem utilizar um plotador de gráficos, como o Geogebra (disponível em: bityli.com/Geogebra) ou mesmo uma malha quadriculada.

Proponha algumas explorações para a análise dos gráficos construídos:

- Você identifica alguma regularidade presente em todos os gráficos?
- Identifique quais são as funções crescentes e observe a lei de formação dessas funções. Você identifica alguma regularidade?
- Identifique quais são as funções decrescentes e observe a lei de formação dessas funções. Você identifica alguma regularidade?
- Identifique as coordenadas do ponto onde a função intercepta o eixo das abscissas (eixo x).

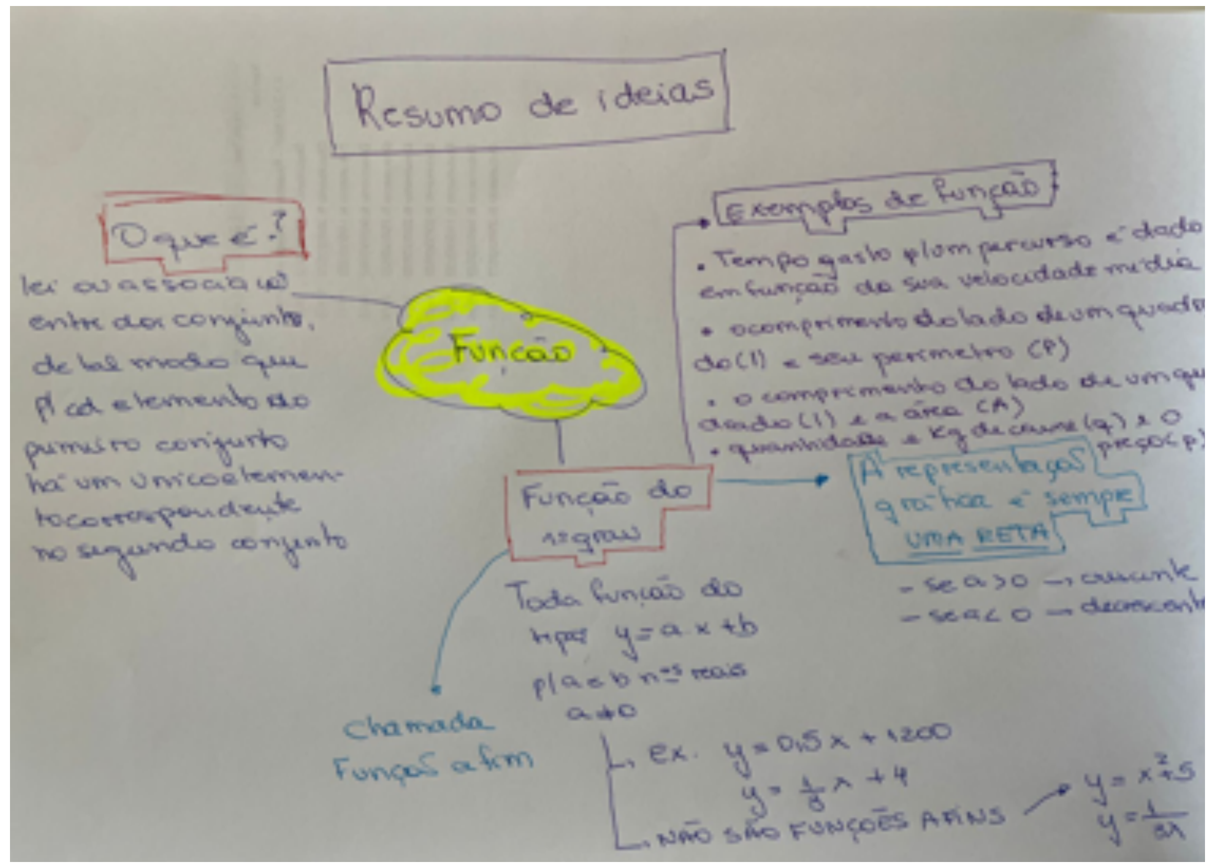
Após essa exploração, convide os estudantes a socializar suas conclusões. Aproveite para sistematizar que em uma função do 1º grau $y = ax + b$:

- A representação gráfica é sempre uma reta.
- Se $a > 0$, a função é crescente.
- Se $a < 0$, a função é decrescente.
- O gráfico intercepta o eixo x no ponto $((-b)/a, 0)$ e a abscissa desse ponto, $(-b)/a$, é denominada raiz ou zero da função.

Para ampliar as aprendizagens, selecione, no material didático adotado, exercícios e problemas que envolvam o conceito de função do 1º grau. Esses exercícios podem ser utilizados como forma de ampliar e exercitar o conhecimento sobre funções. Dê preferência para propostas que foquem na ideia mais intuitiva de funções, na relação entre duas variáveis (por exemplo, lado e perímetro; quantidade vendida e valor; tempo e distância; lado e área), em que exploram tabelas e as leis de formação de uma função.

Finalize pedindo para os estudantes registrarem suas aprendizagens sobre funções. Eles podem escrever um pequeno texto, fazer um esquema ou mesmo um mapa de ideias. Convide alguns estudantes a socializar seus registros. Você pode também organizar um quadro na sala com esses registros e pedir para os estudantes identificarem semelhanças e diferenças entre eles.

Outra possibilidade é você organizar coletivamente com a ajuda do grupo no quadro um esquema contendo as principais descobertas do grupo sobre o tema, veja um exemplo:



Importante lembrar que esse é um exercício de metacognição, de pensar sobre o que se fez tornando um processo consciente, uma vez que escrever pode ajudar os estudantes a aprimorar percepções, conhecimentos e reflexões pessoais. Além disso, ao produzir textos em matemática, tal como ocorre em outras áreas do conhecimento, o estudante tem a oportunidade de usar habilidades de ler, ouvir, observar, questionar, interpretar e avaliar seus próprios caminhos e as ações que realizou, e verificar no que poderia ser melhor. É como se pudesse refletir sobre o próprio pensamento e ter, nesse momento, uma consciência maior sobre aquilo que realizou e aprendeu.

Professor/a, observe os seus estudantes na resolução das propostas a respeito de função vividas até aqui, caso seja necessário, amplie as vivências, com foco nas discussões feitas até o momento, selecionando propostas do seu material didático ou realizando as propostas sugeridas a seguir:

- Isso é função?, disponível em: bityli.com/isso-e-funcao (acesso em 01/08/2022).
- O que é uma função?, disponível em: bityli.com/o-que-e-funcao (acesso em 01/08/2022).

Antes de avançar nos estudos de funções, achamos importante realizar uma parada para realizar um estudo a respeito dos números reais, portanto, temos uma proposta com essa finalidade: o Momento 2.

ATIVIDADE 2 ▶ MOMENTO 2

2 aulas

Construindo o conceito de função e definindo função do 1º grau

Professor/a, esta atividade tem como foco a ampliação dos conjuntos numéricos. A ideia é o estudante construir o conceito de número irracional a partir do cálculo do lado de um quadrado conhecendo sua área. Esse é um tema muito relevante para esse momento, visto que nesta SD serão explorados a resolução de equações do 2º grau, o Teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas, temas para os quais os números irracionais são conhecimentos prévios essenciais.

Mas antes de iniciar a proposta: sugerimos a leitura do texto *Usar ou não a calculadora em sala de aula?*, de Kátia Stocco Smole, Cristiane Chica e Cristiane Akemi Ishihara, que apresenta uma excelente reflexão a respeito de um novo olhar para o uso da calculadora em sala de aula, disponível em bityli.com/usar-ou-nao-a-calcula (acesso em 09/06/2022).

Organize os estudantes em duplas e inicie a atividade solicitando que desenhem no papel quadriculado alguns quadrados com diferentes medidas de áreas: área conhecida (4 u², 9 u², 16 u² etc.). Peça que os grupos socializem as áreas dos quadrados construídos e organize com eles uma sequência numérica com as áreas obtidas: (1, 4, 9, 16, 25, 36 ...). Aproveite o momento para dizer que essa é a sequência dos números quadrados perfeitos.

Em seguida, questione como obter a medida do lado do quadrado conhecendo sua área. É provável que os estudantes afirmem que basta calcular a raiz quadrada da área do quadrado e que identifiquem que: quando a área é 1, o lado também mede 1, pois $\sqrt{1} = 1$; quando a área é 4, o lado mede 2, pois $\sqrt{4} = 2$; quando a área é 9, o lado mede 3, pois $\sqrt{9} = 3$ etc.

Amplie a discussão e apresente situações que envolvam números racionais, que provavelmente não foram contemplados nos desenhos dos estudantes, como:

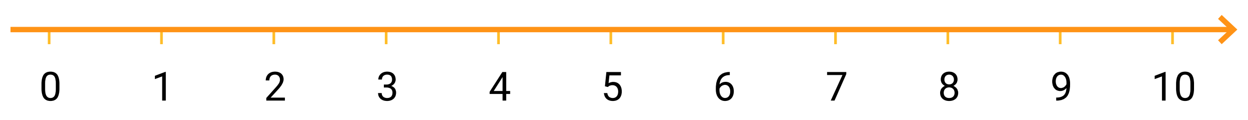
- Qual a medida do lado do quadrado cuja área mede 0,81?
- E quando ela mede 16/25?
- E quando ela mede 144/25?
- E quando a área mede 4,41?

Respostas esperadas:

- $\sqrt{0{,}81} = \sqrt{(81 / 100)} = 9 / 10 = 0{,}9$
- $\sqrt{(16 / 25)} = 4 / 5 = 0{,}8$
- $\sqrt{(144 / 25)} = 12 / 5 = 2{,}4$
- $\sqrt{4{,}41} = \sqrt{(441 / 100)} = 21 / 10 = 2{,}1$

Aproveite o momento para avaliar se os estudantes reconhecem os números naturais, se identificam as características dos números racionais, se relacionam a escrita decenal com a escrita fracionária e se identificam a radiciação como a operação inversa da potenciação. Caso isso não ocorra, você pode realizar com eles as seguintes atividades apresentadas a seguir. Peça aos estudantes que desenhem uma reta numerada no caderno e localizem na mesma os radicais apresentados abaixo.

√49	√1	√4	√0,81
√(16/25)	√64	√4,41	√(144/25)



Para ampliar as discussões, apresente um novo desafio: *Qual deve ser a medida do lado de um quadrado cuja área é 5u2 (ou outro valor que não seja um quadrado perfeito)?*. Dê um tempo para que conversem em grupos, formulem hipóteses e façam descobertas. Incentive-os a fazer desenhos, pergunte se o número procurado poderia ser um número natural ou racional e peça que justifiquem suas respostas. É possível que, estabelecendo relação com as explorações realizadas anteriormente com área e lado de quadrados, eles afirmem que se área é 5, então a medida do lado é √5.

Questione entre quais valores inteiros eles acreditam que se situa o valor da medida do lado deste quadrado.

É possível que alguns estudantes afirmem que a medida do lado do quadrado se situa entre 2 e 3, pois já sabem que:

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{4} & < & \sqrt{5} & < & \sqrt{9} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & & 2,\_\_ & & 3 \end{array}$$

Solicite, então, que, em grupos, façam algumas estimativas e confiram o valor, multiplicando-o por si mesmo. Sugira a utilização da calculadora para agilizar os cálculos.

Incentive os estudantes a refinar os resultados obtidos, aumentando o número de ordens decimais.

- $2{,}1^2 = 2{,}1 \cdot 2.1 = 4{,}41$ (falta)
- $2{,}2^2 = 2{,}2 \cdot 2.2 = 4{,}84$ (falta)
- $2{,}3^2 = 2{,}3 \cdot 2.3 = 5{,}29$ (excesso)

Então, o número procurado está entre 2,2 e 2,3.

- $2{,}22^2 = 2{,}22 \cdot 2.22 = 4{,}9284$ (falta)
- $2{,}23^2 = 2{,}23 \cdot 2.23 = 4{,}9729$ (falta)
- $2{,}24^2 = 2{,}24 \cdot 2.24 = 5{,}0176$ (excesso)

Então, o número procurado está entre 2,23 e 2,24.

Peça que validem suas hipóteses efetuando, na calculadora, o cálculo de $\sqrt{5}$.

Sistematize que, se a área do quadrado mede 5, então a medida do lado mede $\sqrt{5} = 2{,}2360679774997 9.....$

Em seguida, pergunte se identificam alguma regularidade nas ordens decimais do número obtido. A ideia é mostrar que a parte decimal de um número irracional é infinita e não periódica.

Se necessário, retome as dízimas periódicas como números racionais que possuem infinitas casas decimais, periódicas, e podem ser escritos na forma de fração: 0,2222...=2/9, 1,2525...=124/99, 0,455555...=41/90.

Se após essas propostas, você considerar que os estudantes ainda apresentam fragilidades e precisam avançar, planeje mais 2 ou 3 aulas para explorar os números irracionais e os reais.

Mais uma vez, estamos trazendo aqui a ideia de recomposição das aprendizagens, **propondo o desenvolvimento da habilidade EF09MA02, proposta para o 9º ano do Ensino Fundamental** – *Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica* –, mas que envolve conhecimento prévio essencial para o estudo de temas muito importantes do Ensino Médio, como as funções, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos retângulos, entre outros.

Para se aprofundar

Professor/a, se necessário, separe 2 ou 3 aulas do seu planejamento para ampliar a exploração dos irracionais e dos reais.

Retome o conceito de radiciação como operação inversa da potenciação e explore as propostas apresentadas no plano de aula da Nova Escola, disponível em novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/8ano/matematica/radiciacao-como-operacao-inversa-da-potenciacao/433 (acesso em 16/05/2022). Essa proposta tem como objetivo desenvolver a habilidade **(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário -, que pode ser classificada como habilidade complementar/de aprofundamento.

Para ampliar a exploração dos números irracionais, o jogo pode ser uma ótima estratégia. Uma possibilidade é o Jogo da Reta Numerada e Números Irracionais, apresentado no plano de aula da Nova Escola, disponível em bityli.com/jogo-da-reta (acesso em 16/05/2022). Essa proposta tem como objetivo desenvolver as habilidades **(EF09MA01)** Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade) -, que envolve aprendizagens complementares/de aprofundamento e **(EF09MA02)** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica - para representar uma raiz como potência de expoente fracionário, que pode ser classificada como habilidade essencial.

Para ampliar o estudo dos números reais, você pode propor algumas atividades disponíveis nos planos de aula da Nova Escola: Números reais na reta numerada, disponível em bityli.com/numeros-reais e Jogando com números reais, disponível em bityli.com/jogando-num-reais (acesso em 02/06/2022). Essa proposta também promove o desenvolvimento das habilidades **(EF09MA01)** e **(EF09MA02)**.

Sistematize as características dos números irracionais e aproveite o momento para retomar os demais conjuntos numéricos estudados a fim de expandir o universo numérico dos estudantes. É importante mostrar que os números racionais e os irracionais compõem o conjunto dos números reais.

Para finalizar a proposta, apresente mais alguns números irracionais (na forma de raízes quadradas não exatas), como: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{11}, \sqrt{13}, -\sqrt{15}, \sqrt{21}$, entre outros e convide os grupos a localizá-los na reta numérica. Explique que é possível utilizar a calculadora, mas que será necessário registrar no caderno os cálculos envolvidos.

Enquanto os grupos realizam a proposta, observe se os estudantes realizam estimativas corretas, localizam corretamente um número irracional entre dois números inteiros, qual estratégia utilizam para obter a escrita decimal de um número irracional e como explicam os procedimentos realizados.

Esse momento é oportuno para trazer imagem/desenho e linguagem relacionadas aos conjuntos numéricos N, Z, Q, I e R, contemplando a ideia de inclusão entre os conjuntos, de maneira que os estudantes percebam que todo número natural é também inteiro, que todo inteiro é também racional, e que os números racionais e os irracionais, juntos, formam os números reais. Mas tome cuidado para não perder o foco da proposta, a ideia não é valorizar a linguagem descontextualizada. De que adianta saber uma porção de símbolos e nomes se não se chega a usá-los para trabalho com o raciocínio dedutivo.

Para saber mais sobre esse tema, você pode fazer a leitura do texto *Teoria dos conjuntos: sim ou não?*, de Maria Ignez Diniz, disponível em bityli.com/teoria-dos-conjuntos (acesso em 09/06/2022).

Bora se preparar?!

Professor/a, convide os estudantes a realizar as propostas a seguir, que se relacionam com a habilidade **(EF09MA02)** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

Eles podem trabalhar em duplas ou pequenos grupos, pois, dessa forma, discutem as propostas, compartilham as aprendizagens e escolhem boas estratégias para resolver os desafios.

EXERCÍCIO 1

(Prova Brasil) O número irracional raiz quadrada de 7 está compreendido entre os números:

a) 2 e 3
b) 13 e 15
c) 3 e 6
d) 6 e 8

Gabarito: A

EXERCÍCIO 2

O valor aproximado do perímetro do quadrado abaixo é:

a) 32
b) 24
c) 28
d) 20
e) 36

Gabarito: C

ATIVIDADE 2 ▸ MOMENTO 3

1 aula

Estudando o domínio de uma função

Professor/a, anuncie que nessa etapa vão ampliar e aprofundar o estudo de funções. Proponha que, em duplas ou trios, os estudantes resolvam os problemas a seguir. Diga que o foco não é apenas buscar a resposta correta, mas também:

- Construir uma tabela para representar cada situação apresentada.
- Escrever a lei da função que representa cada situação.
- Identificar semelhanças e diferenças entre os dois problemas.

EXERCÍCIO 1

Em um certo período de sua vida, uma planta cresce 2 cm a cada mês de vida. Sabendo que ao final do 1º mês sua altura é 2 cm, qual é a altura esperada ao final do 4º mês?

Respostas esperadas:

Idade da planta, em meses: x	Altura da planta, em cm: y
1	2
1,5	3
2	4
3	6
3,5	7
4	8

Lei de formação da função: $y = 2 . x$

EXERCÍCIO 2

Observe a sequência de figuras e descubra por quantos quadrados a quarta figura será composta.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Respostas esperadas:

Posição da figura na sequência	Número de quadrados da figura
1	2
2	4
3	6
4	8

Lei de formação da função: $y = 2 . x$

Dê um tempo adequado para que os grupos resolvam as propostas. Enquanto os estudantes as resolvem, circule pela sala para verificar quais as dificuldades encontradas, se eles identificam as semelhanças e diferenças, se organizam corretamente as tabelas e se identificam que as duas situações apresentadas são exemplos de funções do 1º grau. Faça anotações de pontos que precisam ser retomados no momento de discussão coletiva.

Após todos os grupos realizarem as propostas, convide-os a compartilhar suas tabelas, suas estratégias, a lei de cada função e a resposta encontrada. Questione as diferenças e semelhanças identificadas. Caso não surja a questão do domínio, apresente algumas perguntas norteadoras, como:

- É possível descobrir a altura da planta com um mês e meio de vida? Como?
- E com três meses e meio de vida? Qual seria essa altura?
- Como obter esse valor?

Questione se os números 1,5 e 3,5 poderiam ser inseridos na tabela do problema 1 e quais outros números também poderiam ser inseridos.

Em seguida, repita as perguntas agora para o problema 2:

- É possível descobrir quantos quadradinhos tem a figura que ocupa a posição 1 e meio?
- E a posição 3 e meio?

Questione se os números 1,5 e 3,5 poderiam ser inseridos na tabela do problema 2.

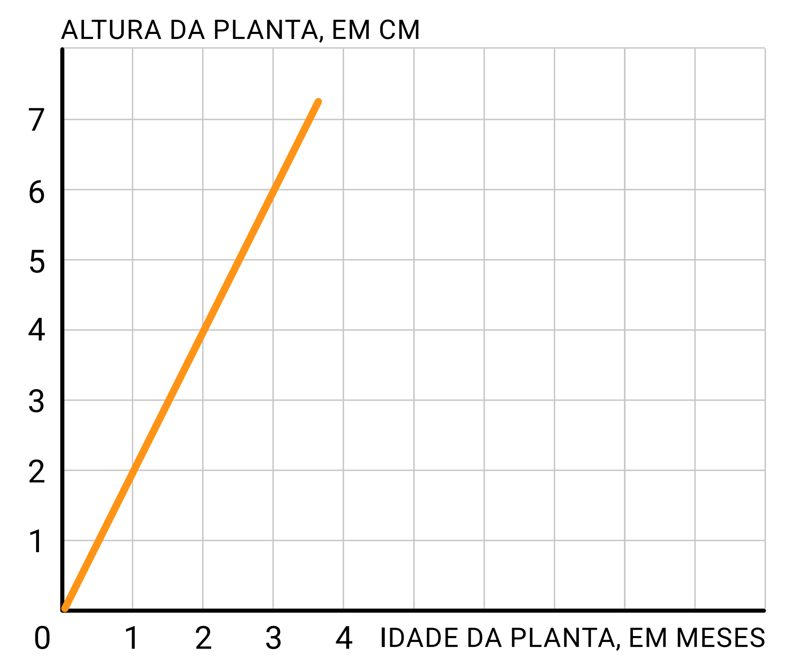
Convide os estudantes a construir o gráfico das duas funções utilizando uma malha quadriculada. Essa construção pode acontecer de forma coletiva. Apresente boas perguntas para que os estudantes percebam que:

- No gráfico do 1º problema, é possível ligar os pontos, mas não é possível atribuir valores negativos para o tempo, logo, a representação gráfica dessa função será uma semirreta e o seu domínio é o conjunto dos números reais não negativos.
- No gráfico do 2º problema é formado por pontos alinhados, mas que não é possível ligar esses pontos e que também não é possível atribuir valores negativos para a posição da figura. Assim, o domínio da função é o conjunto dos números naturais.

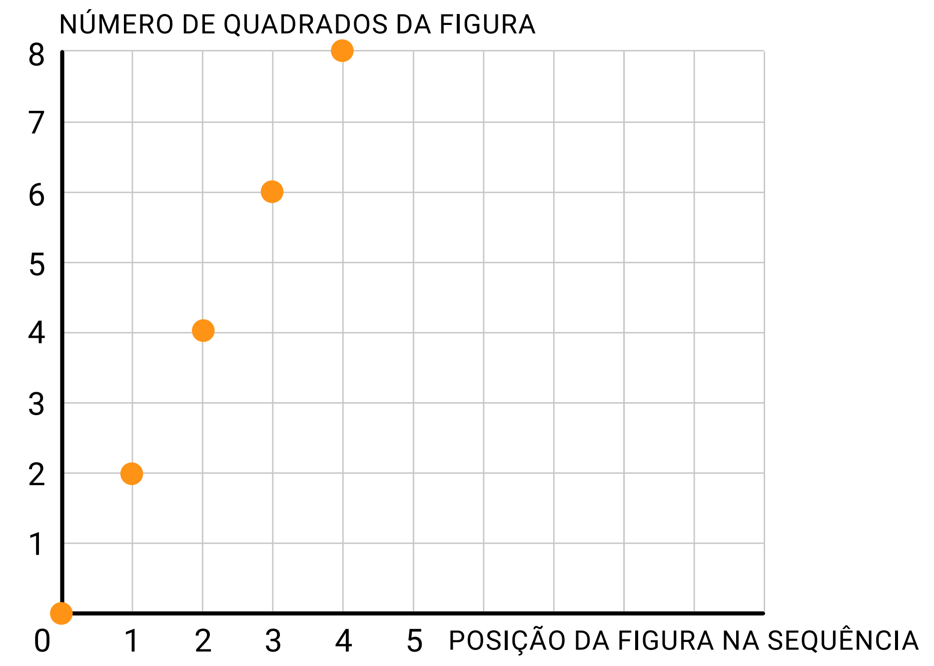
Aproveite o momento para sistematizar o conceito de domínio de uma função e selecionar algumas propostas no material didático para propor para os estudantes.

Respostas esperadas:

Exercício 1



Exercício 2

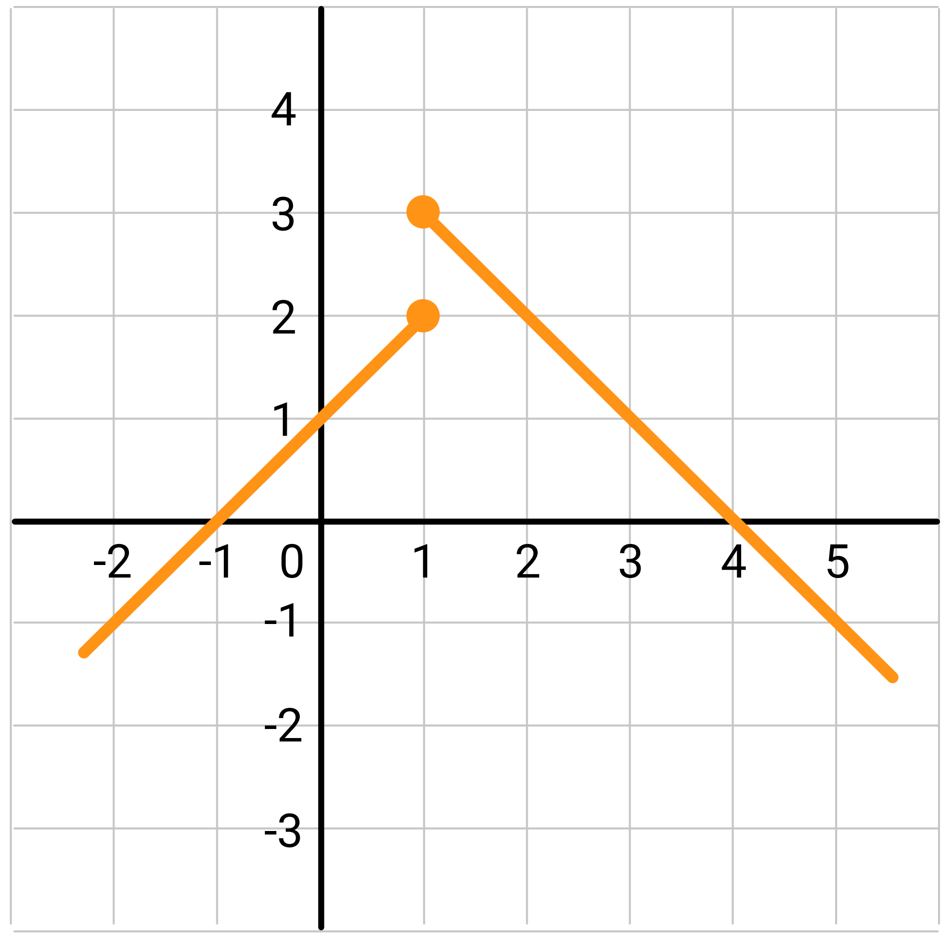


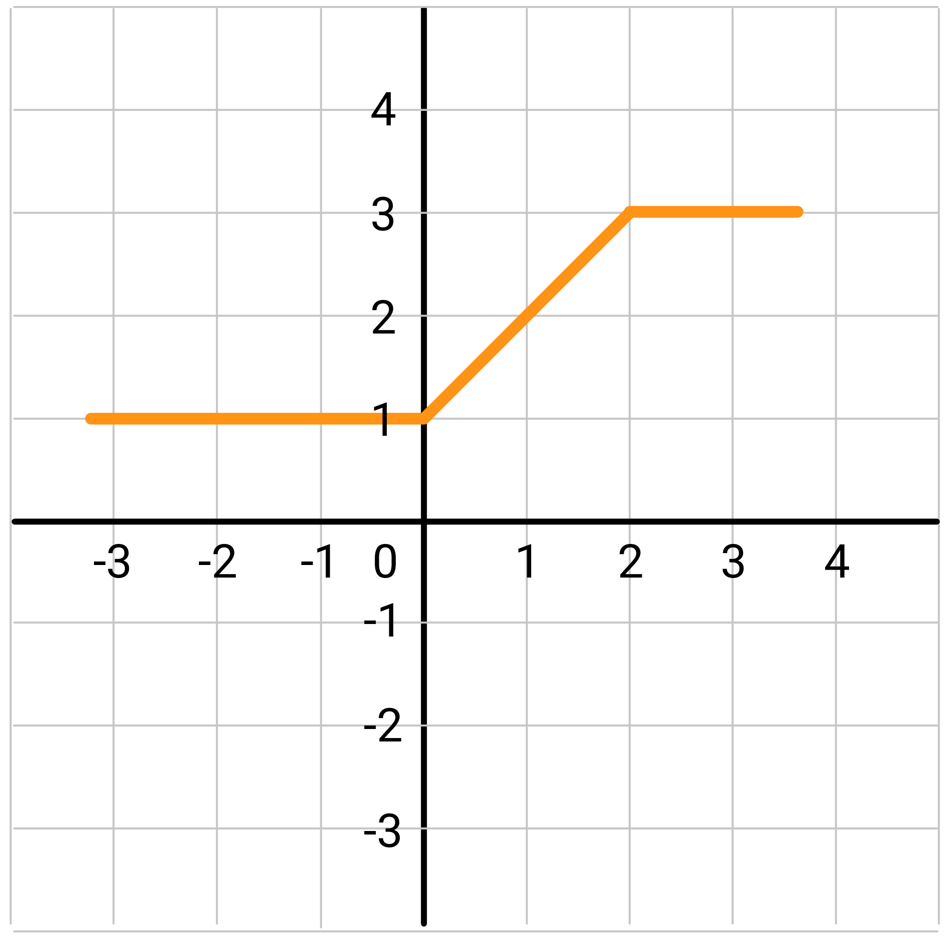
Para se aprofundar

Professor/a, para ampliar a aprendizagem do estudante, solicite que ele construa, em uma malha quadriculada, o gráfico das funções definidas abaixo. Converse a respeito da importância de analisar os intervalos do domínio da função e relacioná-los com a lei, para a construção e análise da sua representação gráfica.

$$y = \begin{cases} x + 1 \text{ para } x \leq 1 \\ -x + 4 \text{ para } x > 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ x + 1, \text{ se } 0 \leq x < 2 \\ 3, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$





Para finalizar a proposta, solicite que os estudantes, organizados em pequenos grupos, elaborem um problema que possa ser representado por um dos gráficos apresentados anteriormente.

Exemplo de resposta – Problema que pode ser representado pelo gráfico do item B:

Uma máquina de calcular foi programada para efetuar 3 diferentes cálculos:

- *Se o valor da entrada for qualquer número real menor do que zero, o valor de saída é 1.*
- *Se o valor da entrada for qualquer número real maior ou igual a zero e menor que dois, soma-se uma unidade e exibe o número de saída.*
- *Se o valor da entrada for qualquer número real maior ou igual a dois, o valor de saída é 3.*

Qual o valor de saída se o valor da entrada for 1,25?

Propostas dessa natureza são muito importantes para a aprendizagem e o desenvolvimento de competências nos estudantes.

Mas você deve estar se perguntando: por que os alunos devem formular problemas? Algumas justificativas são:

- A formulação de problemas auxilia os estudantes a identificar situações matemáticas.
- A formulação de problemas ajuda os estudantes a escrever sobre o que lhe é significativo.
- A formulação de problemas permite ao estudante perceber o que é importante, matematicamente, na formulação e resolução de problema:
  - qual o papel;
  - que relação há entre os dados apresentados;
  - a pergunta a ser respondida e a resposta.
- A formulação de problemas estabelece um vínculo entre a linguagem matemática e a língua materna.
- A formulação de problemas auxilia o estudante a se comunicar em matemática.
- Os estudantes sempre têm mais dificuldades em decidir qual o procedimento necessário que vão utilizar para resolver um problema do que em conduzir os procedimentos em si. Escrever um problema auxilia na superação desta dificuldade, pois permite que cada um escolha o procedimento que vai utilizar e de que forma ela aparecerá no problema.

Atenção para a avaliação!

Professor/a, nesse momento, o objetivo é avaliar as aprendizagens de cada um sobre o conceito de função. Em especial, as habilidades:

- **(EF07MA13)** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
- **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
- **(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

Na situação 1 proposta a seguir, tenha como foco da sua avaliação saber se os estudantes: identificam a relação de dependência entre o número de mesas e o número de cadeiras; calculam o número de cadeiras conhecendo o número de mesas; identificam o número de mesas a partir do número de cadeiras; modelam a situação utilizando uma expressão matemática (lei da função). Na situação 2, observe se os estudantes relacionam as duas grandezas da tabela, expressando-as por uma função, e constroem o gráfico da função.

Peça que, em duplas, resolvam o problema apresentado a seguir, utilizando a estratégia que achar mais adequada. Enquanto eles realizam a proposta, circule para verificar como os alunos estão realizando a proposta. Esse é um momento para você avaliar se todos os estudantes conseguiram avançar com suas aprendizagens nos temas trabalhados, então procure identificar e anotar comentários individuais de cada um.

No final, você pode disponibilizar um gabarito comentado e orientar os estudantes que comparem a sua resolução com o gabarito, que verifiquem semelhanças e diferenças entre a forma de resolver, a forma de organizar o pensamento e a resposta dada, e façam suas anotações. Caso tenham dúvidas, eles poderão procurá-lo. Essa ação de compreender um exercício resolvido, analisar o passo a passo, entender os procedimentos utilizados é essencial para a compreensão e ampliação do conhecimento da linguagem matemática.

EXERCÍCIO 1

Na figura abaixo, encontra-se um esquema de um restaurante, em que a mesa 1 tem 4 cadeiras; a mesa 2 tem 6 cadeiras; e a mesa 3 tem 8 cadeiras. As mesas seguintes possuem a mesma sequência das figuras.

a) Quantas cadeiras terá a mesa 5? 12 cadeiras.
b) Quantas cadeiras terá a mesa 10? 22 cadeiras.
c) Quantas mesas seriam necessárias para organizar 30 pessoas, seguindo a mesma sequência? 14 mesas.
d) Escreva uma sentença que relaciona o número de mesas (M) com o número de cadeiras (C).
$C = m \,.\, 2 + 2$ ou $C = 2\,(m + 1)$

Gabarito: A

EXERCÍCIO 2

Entregue papel quadriculado e régua aos estudantes, em seguida peça que terminem de completar a tabela e que respondam o que se pede:

n	-6	-4,5	-2	0	1,5	3	5	10	20
m	73		9	1		19	51	201	

a) Qual é a fórmula matemática que relaciona as variáveis m e n?

b) Qual é o valor de m para n = 0? Quais são os valores de n para m = 0?

c) Para quais valores de n, os valores correspondentes m são negativos? E positivos?

d) Construa o gráfico correspondente à função acima em um plano cartesiano e utilize-o para verificar as respostas dadas.

Gabarito:

n	-6	-4,5	-2	0	1,5	3	5	10	20
m	73	41,5	9	1	5,5	19	51	201	801

a) m = 2n2 + 1

b) para n = 0, m = 1. Não há valor de n para m = 0.

c) m nunca será negativo.

Bora se preparar?!

1 aula

Convide os estudantes a realizar as propostas a seguir, que se relacionam com as habilidades:

- **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
- **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Se você quiser ampliar seus conhecimentos dessas habilidades, veja a Base Comentada do Ensino Médio, disponível em: o.institutoreuna.org.br/categoria-bncc/matematica-e-suas-tecnologias (acesso em 01/08/2022). Para ter acesso ao documento, vá até o final da página e escolha a forma em que deseja ler os comentários para cada competência e habilidade da matemática na BNCC do Ensino Médio.

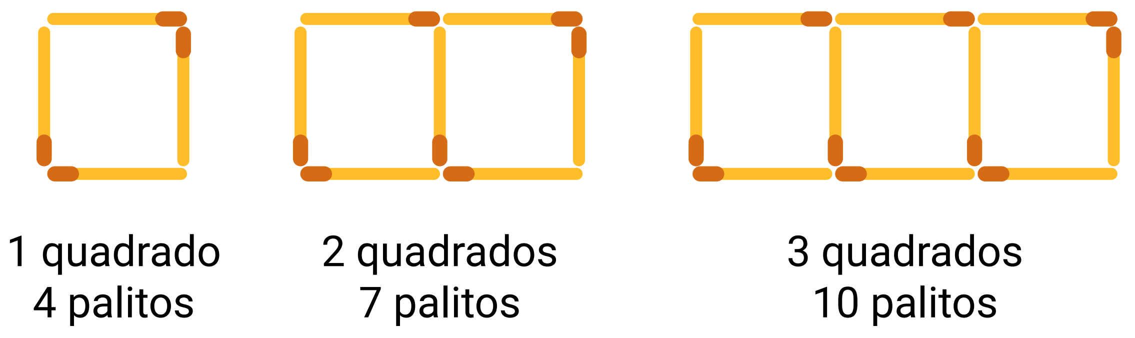
Eles podem trabalhar em duplas ou pequenos grupos, pois, dessa forma, discutem as propostas, compartilham as aprendizagens e escolhem boas estratégias para resolver os desafios.

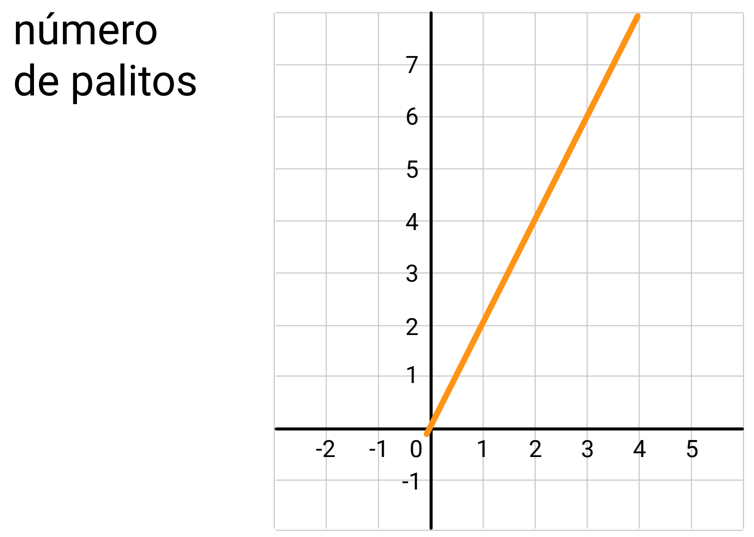
Enquanto realizam os exercícios propostos, circule pela sala para solucionar possíveis dúvidas e fazer os alinhamentos necessários. Se achar adequado, você pode utilizar essa proposta como um instrumento avaliativo se identificam corretamente, nas propostas 1 e 4, o padrão e a regularidade que formam as sequências; e, no caso do item 1, se têm clareza que o gráfico é representado por pontos, visto que envolve números naturais: a quantidade de palitos e a posição da figura na sequência. Nos exercícios 2 e 3, observe se os estudantes identificam a escrita algébrica e o gráfico que representa a situação apresentada.

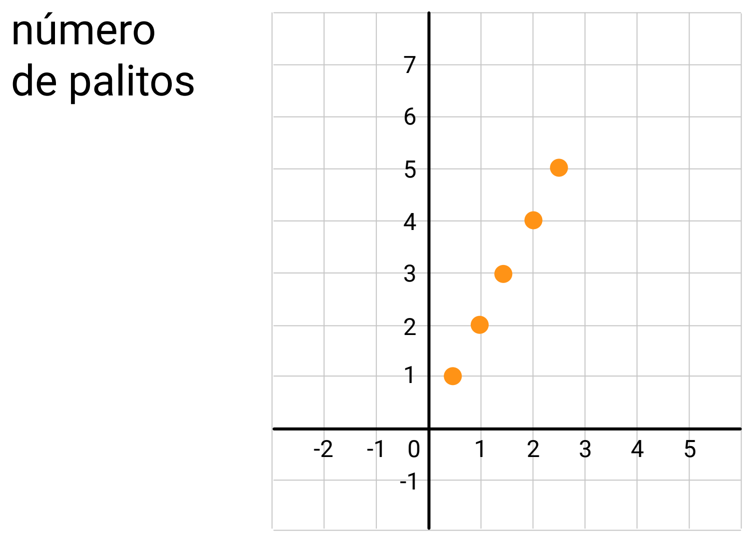
Caso identifique algumas fragilidades, na aula seguinte, você pode organizar duplas produtivas na sala de aula, selecionar novas propostas no material didático e convidar os estudantes que já sabem o tópico para serem tutores daqueles que ainda precisam avançar.

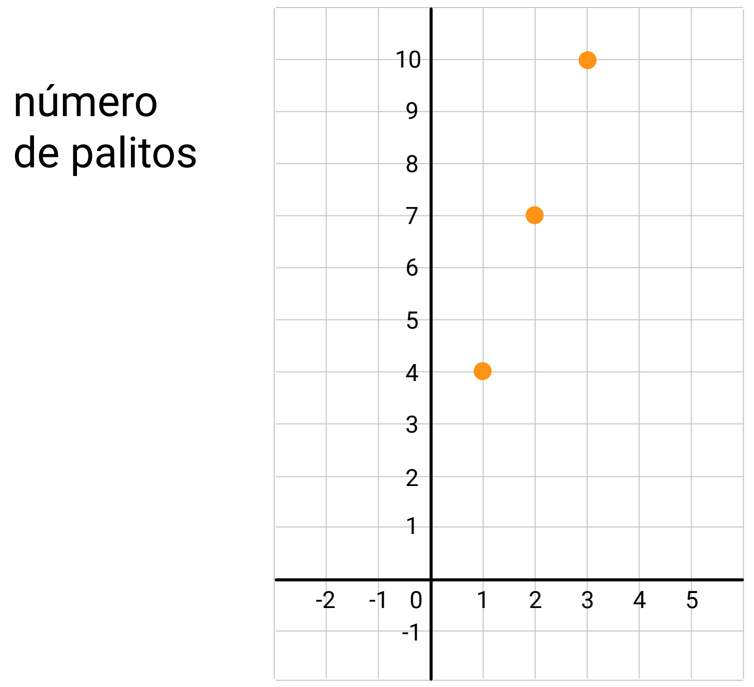
EXERCÍCIO 1

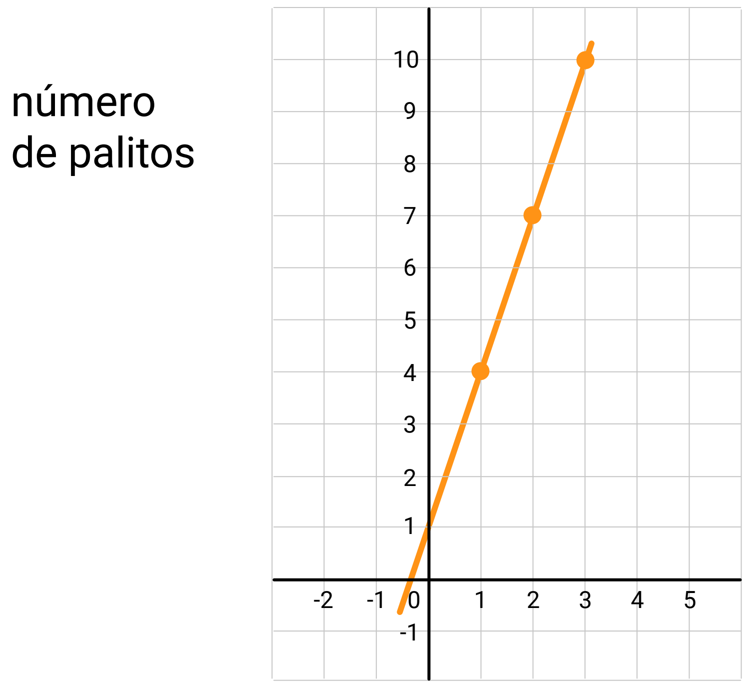
Observe a sequência abaixo. Qual dos gráficos representa a relação do número de quadrados com o número de palitos das primeiras figuras da sequência abaixo? **Gabarito:** C











Conectando sequências

Conexões com o Material do Volume I e outras explorações

O desenvolvimento da habilidade **(EM13MAT302)**, iniciado nesta segunda SD, com o estudo das funções do 1º grau, se complementa na 3ª parte desta sequência, em que é abordada a função do 2º grau.

Caso seja necessário, realizar outras propostas relacionadas ao estudo de funções, indicamos que você utilize os seguintes planos de Aula da Nova Escola:

- A noção de função como uma relação entre conjuntos, disponível em bityli.com/a-nocao-de-funcao (acesso em 16/05/2022).
- Analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis, disponível em bityli.com/analisar-situacoes (acesso em 16/05/2022).
- Análise do Comportamento de uma função, disponível em bityli.com/analise-do-comportamento (acesso em 16/05/2022).
- Aprendendo função com o geogebra!, disponível em bityli.com/aprendendo-funcao (acesso em 16/05/2022).
- Construção de gráficos de funções, disponível em bityli.com/construcao-de-graficos (acesso em 16/05/2022).

Para a progressão e a ampliação do estudo das funções, nas séries mais avançadas (2ª ou 3ª), acesse a SD 2 do Volume I deste material, em que são apresentadas situações para desenvolver as habilidades:

- **(EM13MAT304)**, relacionada a funções exponenciais
- **(EM13MAT303)**, que tem como objetivo interpretar e comparar situações que envolvam juros simples e juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

Atividade 3

ATIVIDADE 3

ÁREAS DE TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS E GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Foco:

Além da compreensão do conceito de perímetro e área e da aprendizagem significativa das expressões matemáticas relacionadas ao cálculo dessas medidas, nesta proposta será abordado o conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais.

Tempo sugerido: 6 horas/aula

Materiais necessários:

- 3 ou 4 folhas de papel quadriculado para cada estudante. Outra opção é trabalhar com 1 geoplano físico para cada dupla ou mesmo com a sua versão virtual, disponível em bityli.com/geoboard (acesso em 02/05/2022).
- Régua, tesoura e cola para todos os grupos.
- Orientações para exploração da área do trapézio: 2 cópias impressas ou disponibilizadas no quadro da sala de aula.
- Orientações para exploração da área do triângulo: 2 cópias impressas ou disponibilizadas no quadro da sala de aula.

Nesta atividade, realizaremos simultaneamente um trabalho envolvendo a retomada do cálculo de perímetro e área de figuras planas e noções referentes à proporcionalidade. Assim, focamos o trabalho para desenvolver as habilidades do Ensino Fundamental dos anos finais **(EF07MA32)** e **(EF08MA19)**, que tratam sobre a resolução de problemas envolvendo o cálculo de medida de área de figuras planas e uso de expressões de cálculo dessas áreas, e também as habilidades **(EF08MA13)** e **(EF09MA08)**, que tratam da resolução de problemas envolvendo grandezas diretamente ou inversamente proporcionais entre duas ou mais grandezas.

Todas elas são conhecimentos prévios importantes para o desenvolvimento de habilidades focais do Ensino Médio, como:

- **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT314)** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
- **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- **(EM13MAT506)** Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

ATIVIDADE 3 ▸ MOMENTO 1

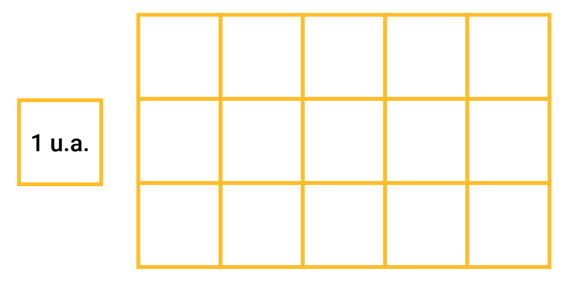
2 aulas

Perímetro, área e grandezas proporcionais

ETAPA 1 – Aquecimento para o tema: o que é medir?

Inicie este momento explicando para os estudantes que a ideia é retomar as noções fundamentais dos anos anteriores e, ao mesmo tempo, desenvolver habilidades essenciais propostas para o Ensino Médio.

Abra uma roda de conversa com o seguinte desafio: considerando cada quadradinho da figura abaixo como 1 unidade de área, qual a área de cada um dos retângulos abaixo? Explique!



É bem provável que os estudantes não tenham dificuldade em responder que a área do retângulo é 15 u.a. e talvez justifiquem que efetuaram *base vezes altura*. É muito importante que os estudantes compreendam e saibam justificar o porquê dessa expressão. Apresente perguntas norteadoras para ampliar essa discussão:

- Quem saberia explicar por que a área do retângulo pode ser calculada pela expressão *base vezes altura*?
- Alguém identifica outra maneira de calcular a área de retângulos?
- Será que existe alguma expressão envolvendo a adição que representa a área dessa figura?

Caso não surja na fala dos estudantes, explore que é possível calcular essa área utilizando diferentes estratégias: contando os quadradinhos 1 a 1, que seria representado pela expressão: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +....+1, ou mesmo somando os quadradinhos das linhas, ou seja, 5 + 5 + 5 (3 linhas com 5 quadradinhos cada, ou 3 x 5 ou altura vezes a base) ou os quadradinhos de cada coluna, isto é, 3 + 3 + 3 + 3 + 3 (5 colunas com 3 quadradinhos cada, ou 5 x 3 ou base vezes altura). Sistematize que:

- Medir é comparar grandezas de mesma natureza e o processo de medição envolve saber quantas vezes uma unidade de medida está contida em outra.
- Calcular a área de uma superfície é determinar a "quantidade" de unidades de área que recobre essa superfície.
- Para se obter a área de um quadrado, o processo é o mesmo que o do retângulo, porém no quadrado o número de quadradinhos da base é sempre igual ao da altura, logo $A = b \cdot b = b^2$.

Aproveite o momento para explorar também a ideia de perímetro. Questione o que é o perímetro e qual o perímetro do retângulo apresentado anteriormente. Formalize que o perímetro da figura é 16 u . c sistematize que:

- Calcular o perímetro é determinar a *quantidade* de unidade de comprimento que é utilizada para medir o contorno da figura.

ATIVIDADE 3 ▶ MOMENTO 1

ETAPA 2 – Refletindo sobre área e perímetro

Organize os estudantes em duplas, disponibilize para os estudantes o papel quadriculado ou geoplano físico ou geoplano virtual, disponível em bityli.com/geoboard (acesso em 02/05/2022). Anuncie que a proposta que será apresentada tem como foco a ampliação do estudo da área e do perímetro de figuras planas.

Sinalize que nesse momento é muito importante que eles construam figuras, observem suas características, formulem hipóteses e validem se as figuras construídas verificam as condições apresentadas. Solicite também que colem no caderno as figuras construídas ou a desenhem em uma malha pontilhada entregue. Caso estejam trabalhando com o geoplano, peça que desenhem as figuras construídas.

EXERCÍCIO 1

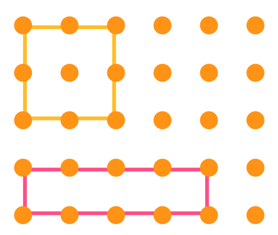
Construa e registre:

a) Duas figuras que possuem a mesma área, porém formatos diferentes.
b) Duas figuras que possuem a mesma área, porém perímetros diferentes.
c) Duas figuras que tenham o mesmo perímetro, mas diferentes áreas.
d) Duas figuras com a mesma área, o mesmo perímetro e diferentes formatos.

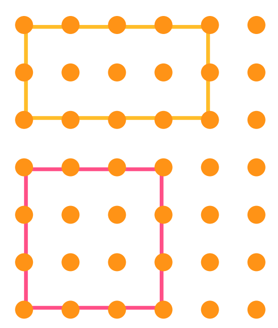
Após cada construção, convide duas ou três duplas para socializarem suas construções. Solicite que todos os estudantes validem as construções apresentadas, questionando se elas obedecem às condições apresentadas pelo professor/a.

Veja algumas possibilidades de respostas:

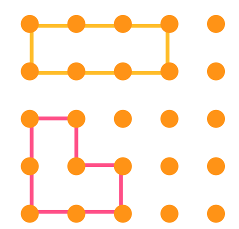
A e B



C



D



a) As figuras possuem área igual a 4 u.a., porém os formatos são diferentes.
b) Ambas as figuras possuem área igual a 4 u.a., porém o perímetro do quadrado é 8 u.c. e o do retângulo é 10 u.c.
c) Duas figuras possuem perímetro igual a 12 u.c., porém a área do retângulo é 8 u.a. e a do quadrado é 9 u.a.
d) As figuras possuem área igual a 3 u.a., perímetro igual a 8 u.c., porém os formatos são diferentes.

Formalize com os estudantes as conclusões que podem ser obtidas a partir da atividade. Questione-os:

- O que podemos afirmar em relação à área e ao perímetro de figuras planas?

É esperado que digam que figuras com a mesma área podem ter diferentes perímetros e que o contrário também vale. Registre no quadro essa conclusão e peça que façam o mesmo em seus cadernos após a ilustração das imagens obtidas.

ATIVIDADE 3 ▸ MOMENTO 1

ETAPA 3 – Grandezas proporcionais (diretas ou inversas) e não proporcionais

EXERCÍCIO 2

Desafie os estudantes a ampliar a exploração e apresente os novos desafios. Utilize o seu geoplano ou a malha pontilhada para:

a) Construir um quadrado cujo lado mede 2u.c. Anote seu perímetro. **Resposta:** perímetro 8 u.c.

b) O que aconteceria com o perímetro desse quadrado se duplicarmos a medida dos lados? Converse com seu colega e anote suas hipóteses.

c) Para verificar se a sua hipótese estava correta, construa um novo quadrado duplicando a medida do lado. Calcule o perímetro desse novo quadrado e valide (ou não) suas hipóteses. **Resposta:** espera-se que o estudante construa um novo quadrado cujos lados medem 4 u.c. unidades e que perceba que o novo perímetro é 16 u.c., ou seja, se dobrar a medida do lado, dobra também a medida do perímetro.

d) Volte ao quadrado inicial cujos lados medem 2 u.c. O que aconteceria com o perímetro desse quadrado se dividisse pela metade a medida dos lados? Valide sua resposta e registre suas conclusões. **Resposta:** espera-se que o estudante construa um novo quadrado cujos lados medem 1 unidade e que perceba que o novo perímetro é 4 u.c., ou seja, se dividir pela metade a medida do lado, a medida do perímetro também é reduzida à metade.

Enquanto os estudantes realizam a proposta 2 circule pela sala para observar quais procedimentos eles utilizam para fazer a investigação:

- Desenham a nova figura?
- Apenas representam e escrevem o valor das medidas dos lados?
- Fazem apenas cálculos rápidos?
- Estabelecem a relação de proporcionalidade entre a medida do lado e a medida do perímetro de um quadrado utilizando o termo adequado?

Caso tenham dificuldade em compreender a solicitação feita na atividade, procure realizar perguntas que os auxiliem a estabelecer uma estratégia própria e segui-la:

- O que precisamos saber?
- O que já sabemos?
- As informações da atividade anterior podem ser úteis para identificar o que precisamos? Como?
- De que formas podemos pensar para responder isso?
- Realizar um desenho lhe ajuda a visualizar melhor?
- Tem alguma palavra neste problema que você não compreendeu bem?

Ao final, é importante que os estudantes contem sobre a investigação feita, o que descobriram, que dúvidas ficaram, que deem contraexemplos para justificar suas percepções a respeito da proposta. Se necessário proponha mais algumas situações: o que acontece com o perímetro se triplicar ou dividir a medida do lado do quadrado?

Sistematize, com o grupo, algumas ideias importantes:

- Quando a situação envolve funções lineares do tipo $y = a.x$, em que a é um número diferente de zero (como no caso do perímetro do quadrado), existe uma proporcionalidade (direta) que associa x a y, ou seja, se x dobra, y dobra; se x é reduzido à 4ª parte, o mesmo acontece com y.

Vale lembrar que, como no exemplo apresentado nesta sequência, x e y estão representando medidas de lado e de perímetro, temos que $x > 0$, $y > 0$ e $a > 0$.

EXERCÍCIO 3

Em seguida, apresente um novo desafio:

Considere um retângulo cuja medida da base é b, a medida da altura é h e cuja área mede 20.

a) Escreva a expressão matemática que representa a medida da área em função de b e h.
Resposta: $20 = b . h$.

b) Qual é a relação entre as medidas da base (b) e da altura (h)? Escreva uma ou duas expressões matemáticas que representam essa situação.
Resposta: espera-se que analisando a relação $20 = b . h$, eles identifiquem que $b = 20/h$ ou $h = 20/b$.

c) Se $b = 2$, qual deve ser o valor de h para a área permanecer igual a 20?
Resposta: se $b = 2$, então $h = 10$.

d) Para manter esse valor de área, se a base dobra de valor da base ($b = 4$), qual será o valor da altura? Ele também deve dobrar? Resposta: se $b = 4$, então $h = 5$, ou seja, para manter a área 20, se dobrar a medida da base, a medida da altura é reduzida à metade.

e) Para manter esse valor de área, se a medida da base é multiplicada por 5, o que deve acontecer com a medida da altura?
Resposta: a medida da altura deve se reduzir à quinta parte do valor inicial.

Após discutir a respeito das descobertas feitas com o grupo, sistematize ideias importantes: funções do tipo $y = a / x$, sendo a uma constante não nula, correspondem a grandezas inversamente proporcionais, ou seja, quando uma altera, a outra altera na proporção inversa, ou seja, se uma duplica, a outra é reduzida à metade; se uma triplica, a outra é reduzida à terça parte, e assim por diante. Vale lembrar que na situação apresentada acima, x e y estão representando medidas de base e de altura e a representa a medida da área, dessa forma, temos que $x > 0$, $y > 0$ e $a > 0$.

Registre as conclusões no quadro e peça que exemplifiquem com outros exemplos, se possível.

EXERCÍCIO 4

Convide os estudantes a fazer a exploração a seguir, que envolve a área do quadrado. Siga as orientações para construção de quadrados e investigue:

a) Construa um quadrado cujo lado mede 2 u.c. Anote a medida da sua área. **Resposta:** área 4 u.a.

b) O que aconteceria com a área desse quadrado se duplicarmos a medida dos lados? Converse com seu colega e anote suas hipóteses. Resposta pessoal, visto que esse é o momento de formulação de hipóteses. **Exemplo de resposta esperada:** se duplicar o lado pode ser que a área duplique.

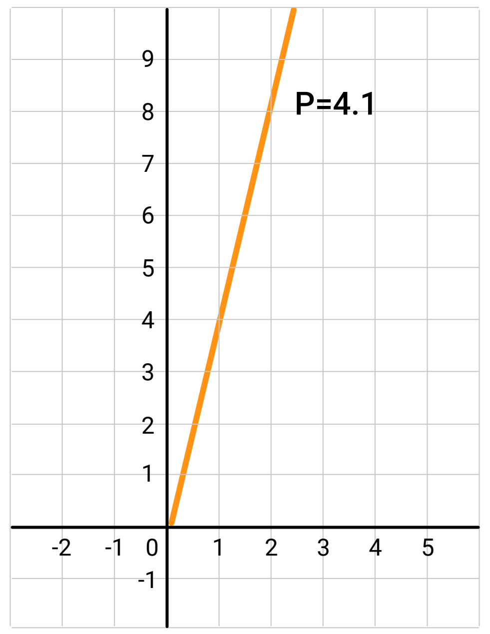
c) Para verificar se a sua hipótese estava correta, construa um novo quadrado duplicando a medida do lado. Calcule a área desse novo quadrado e valide (ou não) suas hipóteses. **Resposta:** espera-se que o estudante construa um novo quadrado cujos lados medem 4 unidades e que perceba que a nova área é 16 u.a., ou seja, se dobrar a medida do lado, a medida da área não é o dobro.

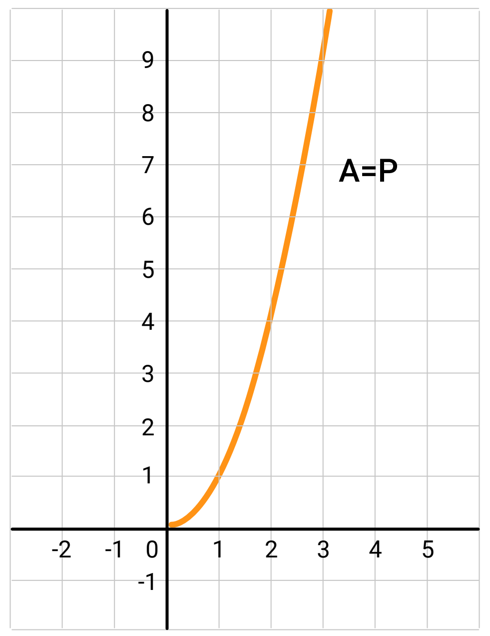
d) Volte ao quadrado inicial cujos lados medem 2 unidades. O que aconteceria com a área desse quadrado se triplicasse a medida do lado? E se quadruplicasse? O que aconteceria com a área se dividisse pela metade a medida dos lados? Valide sua resposta e registre suas conclusões. **Resposta:** espera-se que o estudante construa outros quadrados e que perceba que se triplicar, quadruplicar ou mesmo se dividir pela metade a medida do lado do quadrado, a medida da área não altera na mesma proporção.

Após essa discussão, para estabelecer conexões com temas já estudados, convide os estudantes a escrever uma expressão que relacione o perímetro do quadrado (P) com a medida do lado (l) e peça para construir um gráfico que represente essa situação. Pergunte se a expressão escrita é ou não uma função do 1º grau.

Havendo tempo, peça que repitam a exploração considerando a relação entre a medida da área do quadrado (A) com a medida do lado (l).

Resposta: Espera-se que os estudantes percebam que P = 4l e que existe uma relação de dependência, pois o valor do perímetro depende da medida do lado. Que esse é um exemplo de função do 1º grau e cuja representação gráfica é uma reta crescente e cujo domínio é o conjunto dos números reais não negativos.





Espera-se também que os estudantes percebam que $A = l^2$ e que existe uma relação de dependência, pois o valor da área depende da medida do lado. Porém essa relação não é nem direta nem inversamente proporcional. E que esse não é um exemplo de função do 1º grau. Diga que na sequência didática 3 eles estudarão esse tipo de função que recebe o nome de função do 2º grau.

Sistematize as aprendizagens convidando os estudantes a contar como foi a atividade, quais as aprendizagens realizadas, quais as descobertas. Garanta que todos percebam que o perímetro é diretamente proporcional à medida do lado, isto é, se dobrar, triplicar ou dividir pela metade a medida do lado, o perímetro se altera na mesma proporção. Ao considerar um valor fixo para a área de um retângulo, a base e a altura são inversamente proporcionais, ou seja, se uma dobra a outra é reduzida à metade.

Já a medida da área do quadrado não é nem diretamente nem inversamente proporcional à medida do lado, ou seja, se dobrar, triplicar ou dividir por 3 a medida do lado, o mesmo não ocorrerá com a área.

Para concluir o estudo das relações proporcionais e não proporcionais, apresente aos estudantes várias situações que podem ser escritas no quadro, para que eles, em pequenos grupos, decidam se são relações de proporcionalidade direta ou inversa e escrevam a expressão correspondente:

- O valor a ser pago ao abastecer um automóvel em função da quantidade de gasolina colocada no veículo se o custo de um litro desse combustível é de R$ 3,50. (direta e Preço = 3,50 x quantidade de litros)
- Quantidade de açúcar necessário de acordo com o número de receitas se para uma receita é necessário ½ kg de açúcar. (direta e Quantidade de açúcar = ½ x número de receitas).
- Valor de cada mercadoria de uma loja depois que o gerente resolveu dar um desconto de 5% em todos os artigos. (direta e Preço final = 0,95 x preço antes do desconto).
- A relação entre a velocidade e o tempo de um automóvel para percorrer uma distância de 200 km. (inversa e velocidade = 200/tempo).

Para finalizar, disponibilize um gabarito comentado com as situações apresentadas para que identifiquem semelhanças e diferenças com suas resoluções. Depois abra uma roda de conversa e peça para os estudantes comentarem suas conclusões, as diferenças e semelhanças entre as respostas.

Aproveite o momento para fazer os alinhamentos necessários. Havendo tempo disponível, convide os estudantes a criar uma situação que envolva grandezas que podem ser direta ou inversamente proporcionais ou mesmo uma situação cujas grandezas não são proporcionais. Em seguida, eles desafiam algum colega a escrever a expressão matemática correspondente e a classificar a situação elaborada.

Para se aprofundar

Se considerar necessário, trabalhe os seguintes itens com os estudantes:

- Exercícios envolvendo grandezas proporcionais e não proporcionais, disponíveis em: bityli.com/identifique-relações-proporcionais (acesso em 02/05/2022).
- Vídeos e exercícios envolvendo grandezas direta ou inversamente proporcionais, disponíveis em: bityli.com/reconhe-de-variação (acesso em 02/05/2022).
- Planos de aula da Nova Escola envolvendo grandezas diretas e inversas, disponíveis em: bityli.com/EF08MA13 (acesso em 02/05/2022).

ATIVIDADE 3 ▶ MOMENTO 2

2 aulas

Área de quadriláteros e de triângulos

Professor/a, para iniciar o momento, converse com os estudantes e esclareça que mais uma vez a proposta apresentada vai exigir uma participação ativa de todos, pois vai envolver investigação e formulação de hipóteses, e que a colaboração de cada um deles é muito importante para que o grupo todo desenvolva as habilidades previstas e alcance os objetivos desejados.

Para se aprofundar

A intenção desta SD é levar os estudantes a compreender, de forma significativa, as expressões que calculam a área de triângulos e de alguns quadriláteros. Porém, antes de iniciar essa exploração, é preciso cuidar de dois pontos importantes:

EXERCÍCIO 1

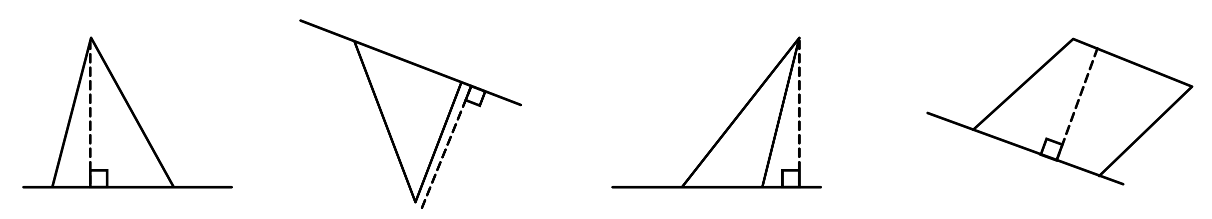
Talvez alguns estudantes não conheçam as características das figuras geométricas que serão estudadas no percurso, como o paralelogramo ou o trapézio. Caso isso ocorra, sugerimos explorar as atividades propostas nos seguintes planos de aula da Nova Escola (acesso em 31/05/2022):

- Quadriláteros, disponível em: bityli.com/quadrilateros.
- Classificando os quadriláteros, disponível em: bityli.com/classificando-quadrilateros.
- Desenvolvendo os conceitos sobre as propriedades dos paralelogramos, disponível em: bityli.com/desenvolvendo-conceitos-propriedades.
- Desenvolvendo os conceitos sobre trapézios, disponível em: bityli.com/desenvolvendo-conceitos-trapezios.

EXERCÍCIO 2

O significado do termo “altura” pode não ser tão simples para o estudante, pois, em Matemática, no senso comum, a altura de um objeto ou pessoa refere-se ao comprimento da linha perpendicular que vai do solo até o ponto mais distante do objeto em relação ao chão. Essa definição pode dar origem a uma falsa ideia de altura como o comprimento de uma linha vertical, perpendicular ao solo, algo que nem sempre é verdadeiro quando se trata de altura em figuras geométricas.

Por isso, sugerimos propor que os estudantes desenhem alguns triângulos e quadriláteros e, em cada um deles, escolham uma base e tracem a altura relativa a esta base. Para esse traçado, é necessário o uso de esquadros, régua e transferidor ou o ângulo reto de papel. Veja alguns exemplos:



Professor/a, se necessário, dedique uma ou duas aulas do seu planejamento para fazer as explorações aqui apresentadas antes de iniciar o trabalho com a área de figuras planas.

Anuncie que vão retomar o estudo de áreas. Pergunte se já estudaram nesta área de figuras planas anteriormente, e se lembram, as expressões para calcular a área de paralelogramos, trapézios e triângulos. Caso se lembrem, peça que falem essas expressões e as escreva no quadro. Pergunte se algum deles saberia explicar o porquê dessas expressões. É bem provável que, mesmo que lembrem das fórmulas, não saibam como explicá-las. Enfatize então que nesse momento eles vão ampliar o estudo de área, compreendendo de forma significativa cada uma dessas expressões.

Explique também que todas as fórmulas que serão estudadas nesta SD estão relacionadas com a fórmula da área do retângulo e que, por isso, para iniciar a proposta, você gostaria que alguém explicasse para os colegas qual a expressão relacionada ao cálculo da área de um retângulo e como explicar o porquê dessa fórmula. Aproveite o momento para fazer os alinhamentos necessários.

ATIVIDADE 3 ▶ **MOMENTO 2**

ETAPA 1 – Área do paralelogramo

Antes de iniciar a exploração das expressões de cálculo de área, se considerar necessário, você pode explorar a classificação dos quadriláteros e a inclusão de classes com maior profundidade, sugerimos as atividades apresentadas no plano de aula da Nova Escola (acesso em 31/05/2022):

- *Classificando quadriláteros: inclusão de classes*, disponível em: bityli.com/classificando-quadrilateros2.

Nesse momento, se também sentir necessidade, separe 1 ou 2 aulas do seu planejamento para explorar ângulos com os estudantes. Você pode, por exemplo, apresentar as propostas disponíveis nos planos de aula da Nova Escola (acesso em 02/06/2022):

- *Os ângulos têm medida?*, disponível em: bityli.com/angulos-tem-medida.
- Classificando ângulos, disponível em: bityli.com/classificando-angulos.
- Ângulos em polígonos - definindo trajetórias, disponível em: bityli.com/angulos-em-poligonos.

Organize os estudantes em pequenos grupos, distribua papel quadriculado, tesoura e cola para cada equipe. Convide-os a desenhar, na malha quadriculada, dois paralelogramos idênticos e que não sejam retângulos.

Aproveite o momento para retomar as características do paralelogramo, do retângulo e a inclusão de classes:

- Um paralelogramo é um quadrilátero que possui 2 pares de lados paralelos.
- Um retângulo é um quadrilátero que possui 4 ângulos retos.
- Logo: um retângulo é um paralelogramo. Mas ele é um paralelogramo especial, pois, além de ter os lados opostos paralelos e congruentes, ele possui 4 ângulos retos.

Peça aos estudantes que comparem o paralelogramo dos grupos. É importante que percebam semelhanças e também as diferenças, tais como: as medidas dos lados e as aberturas dos ângulos.

Peça que marquem, em um dos paralelogramos, a base de azul e a altura de vermelho.

Em seguida, o desafio é transformar um destes paralelogramos em um retângulo. Diga que eles podem dobrar, recortar, girar etc. Cole em uma folha a figura obtida.

O próximo passo é analisar o paralelogramo e o retângulo:

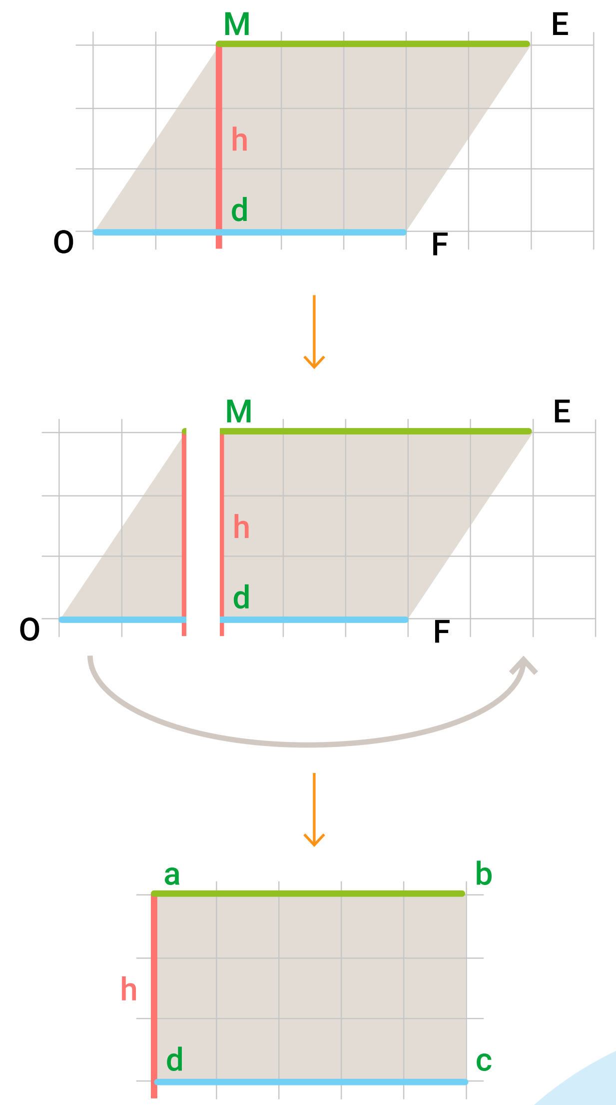
- Eles possuem a mesma medida de base?
- Eles possuem a mesma altura?
- Qual deles tem a maior área: o retângulo; o paralelogramo; ou eles possuem a mesma área? Explique.
- Como escrever uma expressão para calcular a área do paralelogramo?
- Registre as conclusões do grupo.

Respostas: espera-se que o estudante identifique a altura e a base do paralelogramo, que recorte um dos paralelogramos na altura e encaixe a parte recortada, de modo a obter um retângulo, e que perceba que o retângulo tem a mesma área que o paralelogramo.

Logo $A_{\text{paralelogramo}} = A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$.

Dê um tempo adequado para a resolução da proposta. Enquanto os estudantes trabalham, circule pelos grupos incentivando-os a manusear um dos paralelogramos: dobrar, recortar, encaixar, na busca de obter um retângulo. Incentive-os também a contar os quadradinhos caso tenham dúvidas de relação de equivalência entre as áreas das figuras envolvidas.

No final da proposta, peça aos estudantes que exibam suas construções e expliquem suas conclusões. Garanta que todos percebam que os grupos construíram diferentes paralelogramos, mas todos conseguiram transformar o seu paralelogramo em um retângulo e que ambos têm a mesma área. Por isso, é possível concluir que $A_{\text{paralelogramo}} = A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$.



ATIVIDADE 3 ▶ **MOMENTO 2**

ETAPA 2 – Área do paralelogramo e área do triângulo

Inicie a proposta contando para os estudantes que vão continuar a ampliar o estudo de área de quadriláteros e de triângulos, mas que a proposta agora é ainda mais desafiadora. A classe será dividida em 4 grupos, e cada grupo terá de cumprir algumas tarefas (conforme tabela apresentada a seguir). Nesta proposta, dois grupos vão apresentar o tema estudado em forma de seminário e os outros dois grupos vão gravar uma videoaula e deverão disponibilizá-la (pode ser no grupo de Whatsapp da sala ou mesmo por e-mail) para todos os colegas para que possam consultar sempre que desejarem. O objetivo de todos os grupos é explicar o cálculo da área da figura estudada.

Organize os estudantes em 4 grupos e apresente a tabela abaixo. Permita que cada grupo escolha qual a proposta que pretende desenvolver. Outra possibilidade é você fazer um sorteio para distribuir as tarefas.

Organize um cronograma reservando 2 aulas para a realização da proposta de maneira que:

- Todos os grupos explorem o tema (grupos 1 e 2 - área do trapézio; e grupos 3 e 4 - área do triângulo) - aproximadamente 20 minutos.
- Enquanto os grupos 1 e 3 organizam o seminário (PPT), os grupos 2 e 4 organizam e gravam a videoaula - aproximadamente 50 minutos.
- Grupos 1 e 3 apresentam o seminário (10 minutos para cada grupo) e grupos 2 e 4 comentam e complementam se for necessário.

Oriente os estudantes que, em caso de dúvidas, eles devem pesquisar quais as características das figuras geométricas que serão estudadas.

GRUPO 1

- Tema: área do trapézio.
- Realizar exploração sobre: a área do trapézio.
- Após a exploração, a responsabilidade do grupo é: elaborar uma apresentação em PPT de 10 minutos explicando o cálculo da área do trapézio.

GRUPO 2

- Tema: área do trapézio.
- Realizar exploração sobre: a área do trapézio.
- Após a exploração, a responsabilidade do grupo é: utilizando o aparelho celular, gravar uma vídeo-aula explicando o cálculo da área do trapézio.

GRUPO 3

- Tema: área do triângulo.
- Realizar exploração sobre: a área do triângulo.
- Após a exploração, a responsabilidade do grupo é: elaborar uma apresentação em PPT de 10 minutos explicando o cálculo da área do triângulo.

GRUPO 4

- Tema: área do triângulo.
- Realizar exploração sobre: a área do triângulo.
- Após a exploração, a responsabilidade do grupo é: utilizando o aparelho celular, gravar uma vídeo-aula explicando o cálculo da área do trapézio.

EXPLORAÇÃO: ÁREA DO TRAPÉZIO

Grupos: 1 e 2

Objetivo: obter de forma significativa a expressão matemática que permite calcular a área de um trapézio.

Orientações:

1. Desenhe, em uma malha quadriculada, um trapézio qualquer.
2. Desenhe outro trapézio, idêntico ao trapézio desenhado inicialmente.
3. Marque a base maior (B) em azul, a base menor (b) em verde e a altura (h) em vermelho em uma dessas figuras.
4. Recorte as duas figuras.
5. Em seguida, encaixe esses dois trapézios de modo a encontrar um paralelogramo (lembre-se que você já sabe como calcular a área de um paralelogramo).
6. Cole a figura obtida e explore o paralelogramo:
   - Qual a medida de sua base?
   - Qual a medida da sua altura?
7. Qual a expressão matemática que permite a área desse paralelogramo?
8. Você se lembra do seu objetivo inicial:
   - Como calcular a área de um trapézio?
   - Qual a relação entre a área do trapézio e a área do paralelogramo?
9. Escreva a expressão matemática que permite calcular a área de um trapézio.

EXPLORAÇÃO: ÁREA DO TRIÂNGULO

Grupos: 3 e 4

Objetivo: obter de forma significativa a expressão matemática que permite calcular a área de um triângulo.

Orientações:

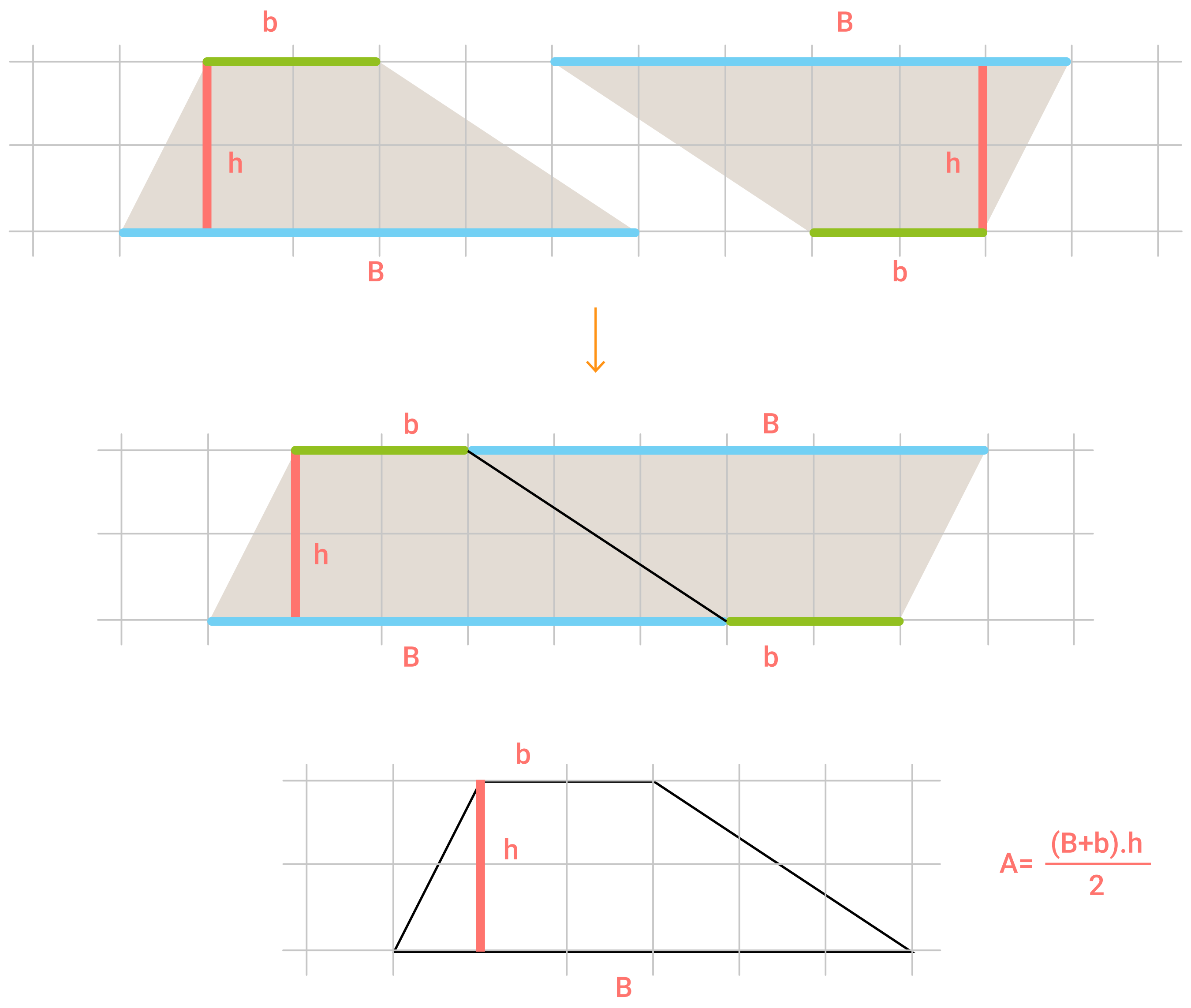
1. Desenhe, em uma malha quadriculada, dois triângulos idênticos.
2. Marque a base (b) em azul e a altura (h) em vermelho em uma dessas figuras.
3. Recorte as duas figuras.
4. Em seguida, encaixe esses dois triângulos de modo a encontrar um paralelogramo (lembre-se que você já sabe como calcular a área de um paralelogramo).
5. Cole a figura obtida e explore o paralelogramo:
   - Qual a medida de sua base?
   - Qual a medida da sua altura?
6. Qual a expressão matemática que permite a área desse paralelogramo?
7. Você se lembra do seu objetivo inicial:
   - Como calcular a área de um triângulo?
   - Qual a relação entre a área do triângulo e a área do paralelogramo?

18\. Escreva a expressão matemática que permite calcular a área de um triângulo.

EXPLORAÇÃO: ÁREA DO TRAPÉZIO

Grupos: 1 e 2

Resposta: espera-se que os estudantes percebam que a nova figura encontrada é um paralelogramo, cujas medidas das bases são iguais a (B + b) e sua altura é h, logo sua área é A = (B + b). h. Mas a área do trapézio é exatamente igual a metade da área do paralelogramo (pois eram dois trapézios de mesma área), logo, a área do trapézio é:

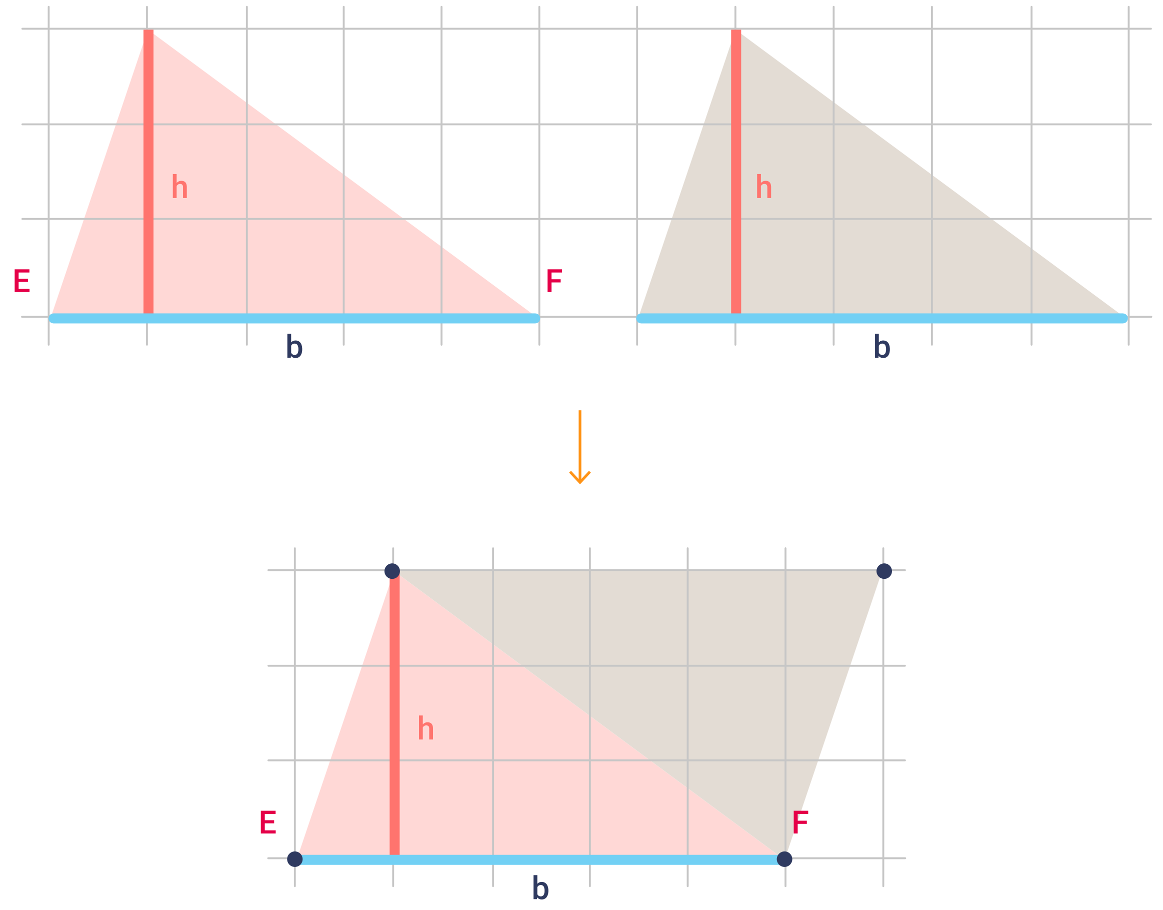


$A = \frac{(B+b).h}{2}$

EXPLORAÇÃO: ÁREA DO TRIÂNGULO

Grupos: 3 e 4

Resposta: espera-se que os estudantes percebam que a nova figura encontrada é um paralelogramo, cujas medidas das bases são iguais a b e sua altura é h, logo sua área é A = b. h. Mas a área do triângulo é exatamente igual a metade da área do paralelogramo (pois eram dois triângulos de mesma área), logo, a área do triângulo é: $A_{\text{triângulo}} = A_{\text{paralelogramo}} / s = (b . h) / 2$

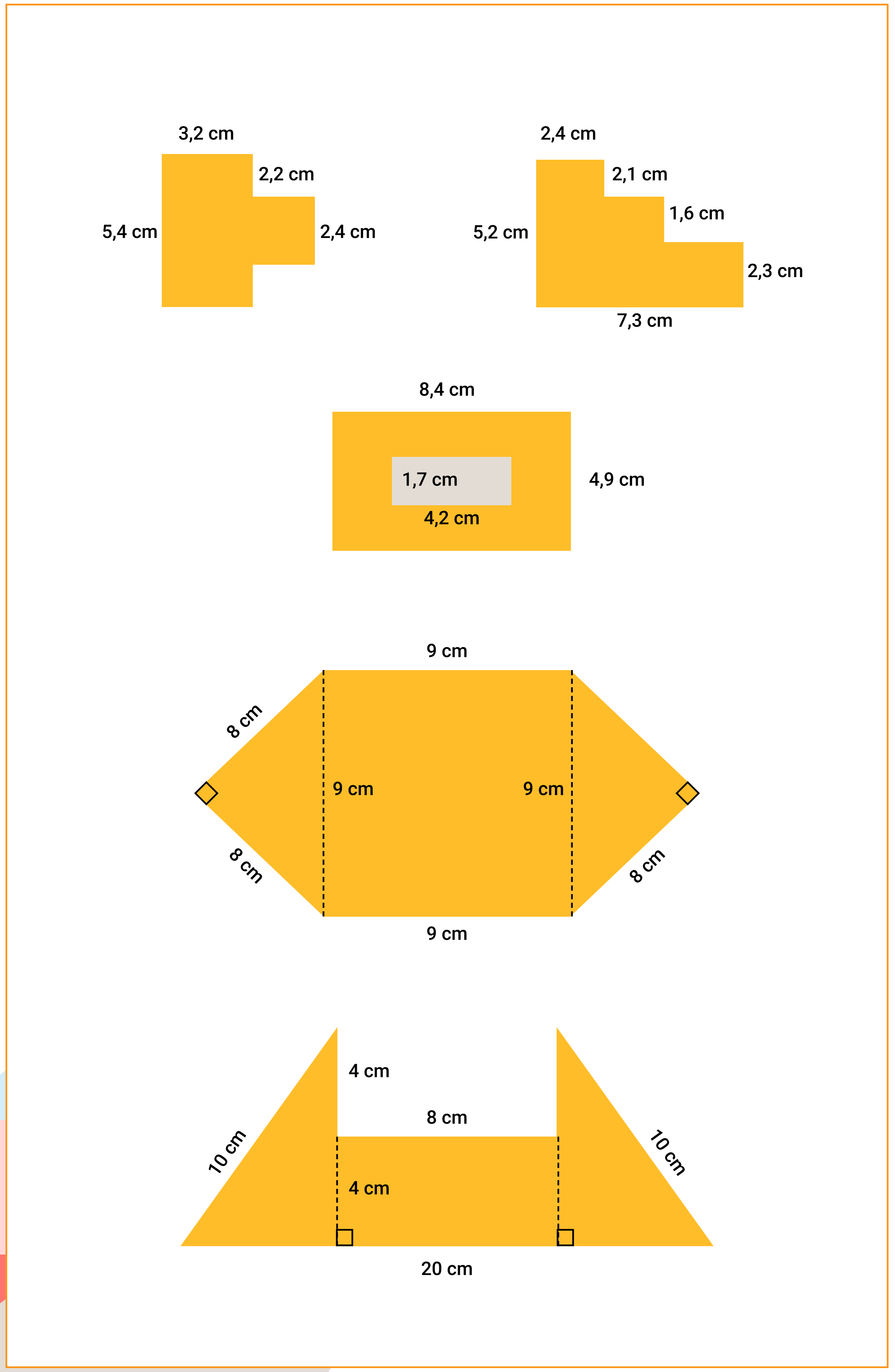


Professor/a, enquanto os estudantes realizam a proposta, circule pela sala. Garanta que todos os conceitos esperados foram desenvolvidos e que os estudantes estão preparados para apresentar o seminário e gravar a vídeo-aula. No final da proposta, elabore um quadro coletivamente, contendo todas as fórmulas estudadas que envolvem cálculo de área, e disponibilize esse cartaz em um lugar visível para que todos possam consultar sempre que precisar.

Para finalizar a proposta, apresente alguns exercícios envolvendo cálculo de área, incluindo figuras compostas por mais de uma figura geométrica. Você pode selecionar do material didático ou utilizar as propostas ao lado.

Ao longo desta atividade, você tem muitas oportunidades para acompanhar os conhecimentos de seus estudantes sobre as figuras geométricas, suas características e o uso do vocabulário geométrico adequado. O foco de suas observações pode estar também na capacidade de formular hipóteses e resolver situações-problema.

Outro item a ser analisado é a capacidade para a preparação das apresentações de modo autônomo. É importante observar que os desafios apresentados contribuem com o desenvolvimento das Competências Gerais 2 e 9 da BNCC (2018), relativas a exercitar a curiosidade e a empatia, quando investigam, analisam criticamente e dialogam de modo colaborativo.

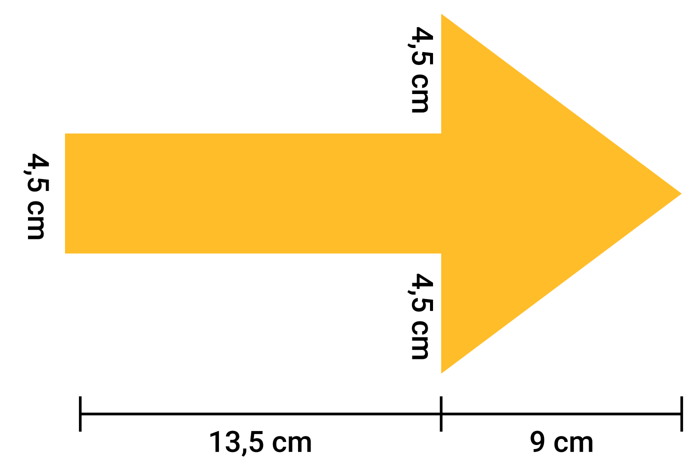


Atenção para a avaliação!

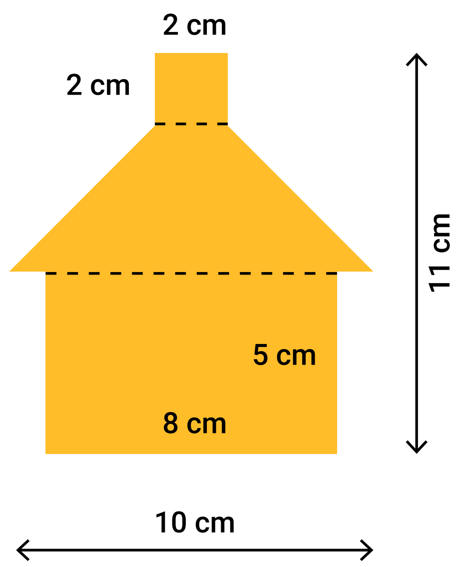
Objetivo: verificar se os alunos conseguem "desmembrar" as figuras em "partes" conhecidas (retângulo, triângulo e trapézios) e se conseguem utilizar corretamente as expressões para o cálculo da área dessas "partes". Observe as dificuldades apresentadas e estimule os alunos a buscar figuras conhecidas "dentro" da imagem apresentada. Você pode recolher os registros dos estudantes e utilizá-los como um instrumento avaliativo.

EXERCÍCIO 1

Calcule a área das figuras:



Resposta: 121,5 cm^2



Resposta: 68 cm^2

Bora se preparar?!

1 aula

Para ampliar as aprendizagens dos estudantes, e permitir que resolvam problemas envolvendo grandezas direta ou inversamente proporcionais, bem como o cálculo de áreas de figuras planas, proponha que resolvam o problema a seguir para a próxima aula. Na aula seguinte, reserve um momento para fazer comentários, alinhamentos, e solucionar possíveis dúvidas. Se achar pertinente, discuta coletivamente um ou dois dos exercícios propostos.

EXERCÍCIO 1

Um automóvel está a uma velocidade de 60 km/h em uma rodovia, que é a metade da velocidade máxima permitida nela. Assinale a alternativa:

a) Como velocidade e tempo gasto no percurso são grandezas diretamente proporcionais, se a velocidade do automóvel for 120 km/h, ele gastará o dobro do tempo no percurso.

b) Como velocidade e tempo gasto no percurso são grandezas inversamente proporcionais, se a velocidade do automóvel for 120 km/h, ele gastará a metade do tempo no mesmo percurso.

c) Quando a velocidade do automóvel for igual a 30 km/h, sua velocidade será igual à velocidade máxima da rodovia.

d) As grandezas velocidade e distância percorrida são inversamente proporcionais.

e) As grandezas velocidade e tempo gasto no percurso são diretamente proporcionais.

Gabarito: B

EXERCÍCIO 2

(SARESP- adaptado) Observe a tabela que Laís fez com as quantidades de ganhadores de um sorteio de loteria e o valor do prêmio destinado a cada um dos possíveis ganhadores. Se o número de ganhadores for 200, o valor que cada um ganhará, em reais, será:

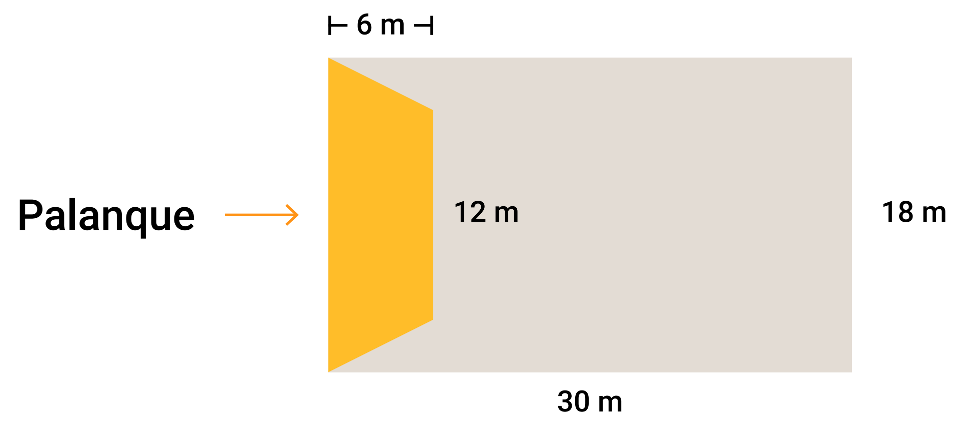
a) 36.000,00
b) 18.000,00
c) 9.000,00
d) 4.500,00
e) 4.000,00

Quantidade de ganhadores	2	3	4
Prêmio para cada ganhador	1 800 000	1 200 000	900 000

EXERCÍCIO 3

(UNIFESP - adaptado) Um comício deverá ocorrer num ginásio de esportes, cuja área é delimitada por um retângulo. O palanque do comício terá a forma de um trapézio, conforme figura a seguir. A área reservada para o palanque, em m², é

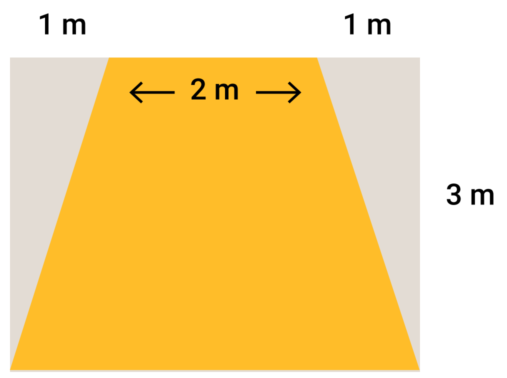
a) 90
b) 108
c) 42
d) 180
e) 72



EXERCÍCIO 4

(SAEB – adaptado) O piso de entrada de um prédio está sendo reformado. Serão feitas duas jardineiras nas laterais, conforme indicado na figura, e o piso restante será revestido de cerâmica. Qual é a área do piso que será ocupada pelas duas jardineiras?

a) 1,5 m²
b) 3 m²
c) 6 m²
d) 9 m²
e) 12 m²



Conectando sequências

Conexões com o Material do Volume I e outras explorações

A habilidade **(EM13MAT307)**, trabalhada nesta SD e que está relacionada à dedução de expressões de cálculo de área e sua aplicação, pode ser retomada e ampliada no volume I deste material, no qual são propostas situações em que os estudantes devem mobilizar e aplicar o conceito de área para resolver problemas complexos, incluindo aqueles que envolvem área da superfície de sólidos, bem como o seu volume, contemplando a habilidade **(EM13MAT309)**: Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais.

Atividade 4

ATIVIDADE 4

RESOLVENDO UM PROBLEMA NÃO CONVENCIONAL

Foco: resolução de um problema não convencional.

Tempo sugerido: 1 hora/aula

Materiais necessários: 1 cópia do problema para cada grupo ou a sua versão digital para ser projetada para os estudantes.

Professor/a, apresente a situação a seguir para o estudante.

Olá! Chegou a hora de resolver mais um problema desafiador. Não tenha medo de errar nem desista se a primeira tentativa falhar. Você sabia que as tentativas fazem seu raciocínio matemático se desenvolver mais do que se você acertar rapidamente?

O seu desafio é resolver um problema de travessia. Os problemas desse tipo têm sua origem em escritos bem antigos e formulações diversas. Os primeiros deles de que se tem registro aparecem em pergaminhos que datam do século 9.

O que caracteriza esse tipo de problema é o fato de que, em sua resolução, é preciso organizar a travessia, isto é, as idas e vindas de pessoas, objetos, animais etc., sempre com algumas limitações ou condições. Para resolver este tipo de problema, o mais importante é buscar uma sequência lógica de decisões, que obedeça às restrições impostas. Você pode resolver o problema como quiser: fazendo um desenho, um esquema, uma tabela. O importante é sempre registrar no papel a forma como resolveu. Após resolver, valide a resposta. Preparado? Então vamos lá!

Três mães e seus três respectivos filhos devem atravessar um rio numa barca que só transporta, no máximo, duas pessoas. Os filhos, por serem pequenos, devem ir cada um com sua própria mãe e nenhum filho deve ficar sozinho com outra mulher que não seja sua mãe. Ajude-os a chegar à outra margem do rio.

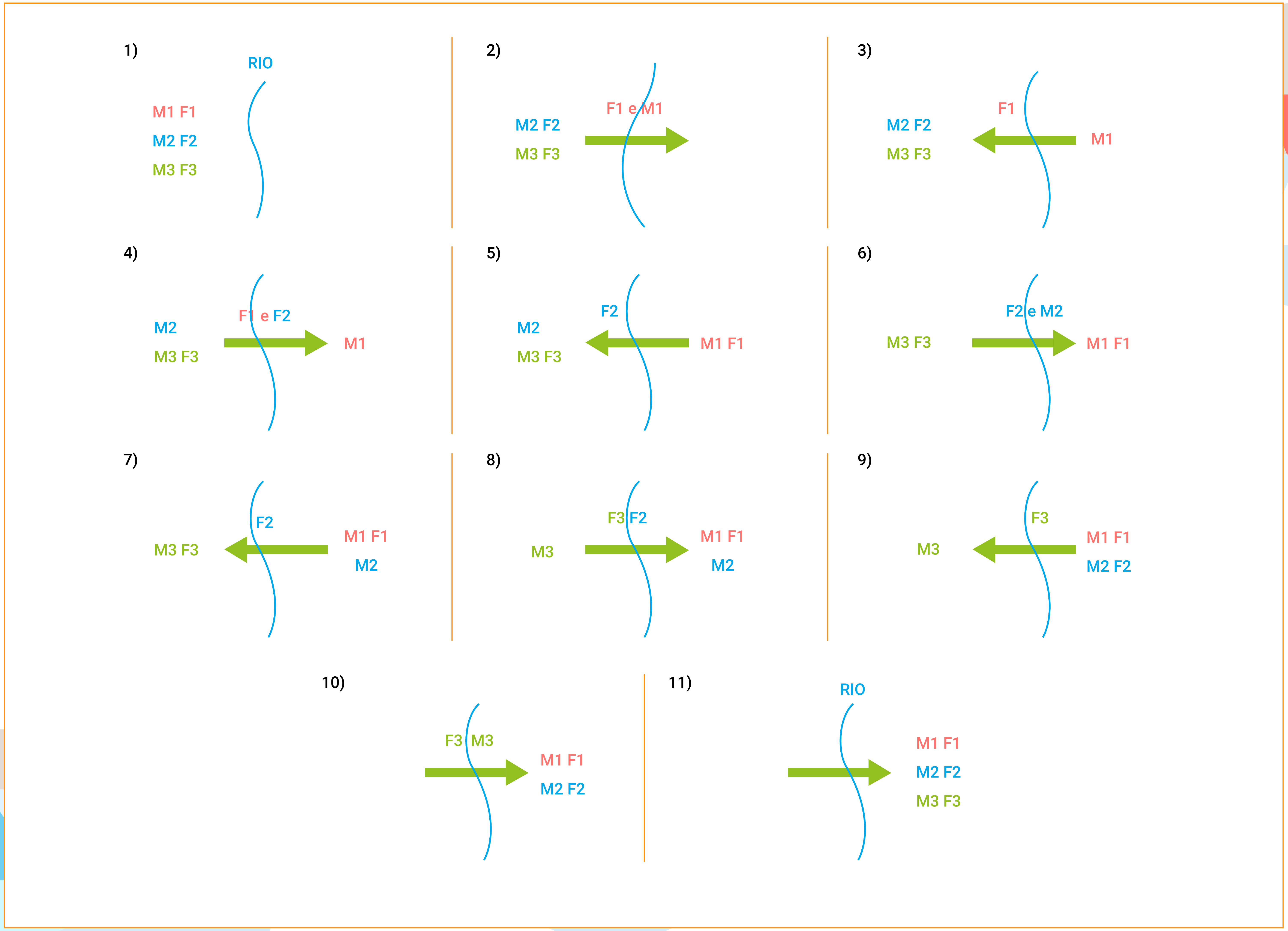
Antes de começar a resolução, leia calmamente o enunciado e responda às seguintes questões:

1. Quais são as pessoas envolvidas na história?
2. Qual o objetivo do problema?
3. Quais as restrições impostas?

Depois de refletir sobre as questões anteriores, elabore uma estratégia para resolver o problema! Seja perseverante! Se a sua primeira estratégia não der certo, tente outra, você consegue!

Exemplo de resposta esperada – Veja uma solução para esse problema a seguir. Para facilitar a interpretação, nomeamos as mães e o filhos.

Havendo tempo disponível, convide alguns estudantes a apresentar suas estratégias e questione: existe uma única solução para a situação apresentada?



Atenção para a auto-avaliação!

Professor/a, os estudantes chegaram ao final da segunda SD. Proponha que façam uma autoavaliação do seu percurso até o momento.

Apresente algumas questões norteadoras, por exemplo:

- Como foi chegar até aqui?
- Quais as dificuldades encontradas
- Você participou ativamente das atividades?
- Apresentou suas dúvidas e suas descobertas nos momentos de roda de conversa?
- Colaborou com os colegas do seu grupo para que juntos atingissem os objetivos propostos?
- O que você poderia mudar ou fazer diferente para melhorar ainda mais o seu desempenho em matemática?
- Como você percebe que a matemática pode ser importante na sua trajetória escolar e em outros âmbitos da sua vida?

Peça que registrem suas reflexões e guardem essas anotações, que poderão ser retomadas em diferentes momentos e poderão contribuir para uma postura mais ativa na busca de novas aprendizagens durante todo o percurso.

Materiais de apoio

Plano de estudos

Orientações para o estudante em momentos de autogestão

Caro/a, professor/a,

Para os estudantes ampliarem os seus estudos, encontram-se a seguir atividades sobre os temas que foram desenvolvidos em sala de aula durante a sequência didática 2. As questões apresentadas podem ser propostas ao final de cada atividade vivenciada em sala, uma vez que elas estão diretamente relacionadas aos temas desenvolvidos em cada parte desta SD.

Reforce com o estudante a importância do momento de estudo individual, incentive-o a consultar as anotações e os materiais produzidos nas aulas e oriente-o a registrar uma justificativa para as questões de múltipla-escolha, lembrando-o de que o importante não é a resposta certa, mas sim saber como chegar a ela. Em caso de dúvidas, ele pode conversar com seus colegas ou mesmo procurar o/a professor/a no momento oportuno.

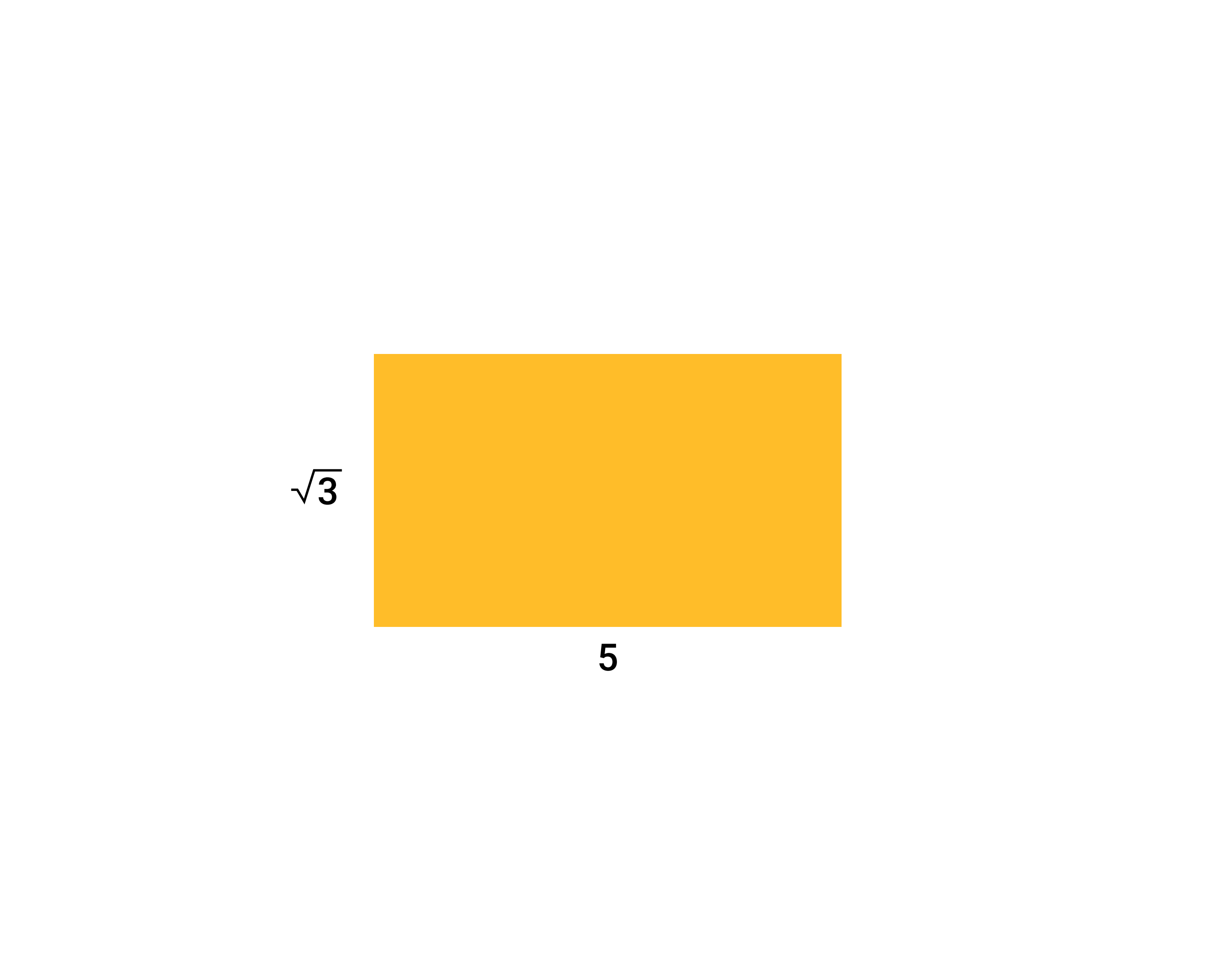
Bloco de questões referentes à Atividade 1

EXERCÍCIO 1

A área do retângulo abaixo é, aproximadamente, igual a:

a) 5,5
b) 9,5
c) 8,5
d) 7,5
e) 6,5

Gabarito: C



EXERCÍCIO 2

Em uma reta numerada, o ponto que corresponde ao número $\sqrt{112}$ estará:

a) Entre 8 e 9
b) Entre 9 e 10
c) Entre 10 e 11
d) Entre 12 e 13
e) Entre 11 e 12

Gabarito: C

EXERCÍCIO 3

Em uma reta numerada, o ponto que corresponde ao número real $\sqrt{30}$ estará:

a) Entre 4 e 5
b) Entre 3 e 4
c) Entre 6 e 7
d) Entre 2 e 3
e) Entre 5 e 6

Gabarito: E

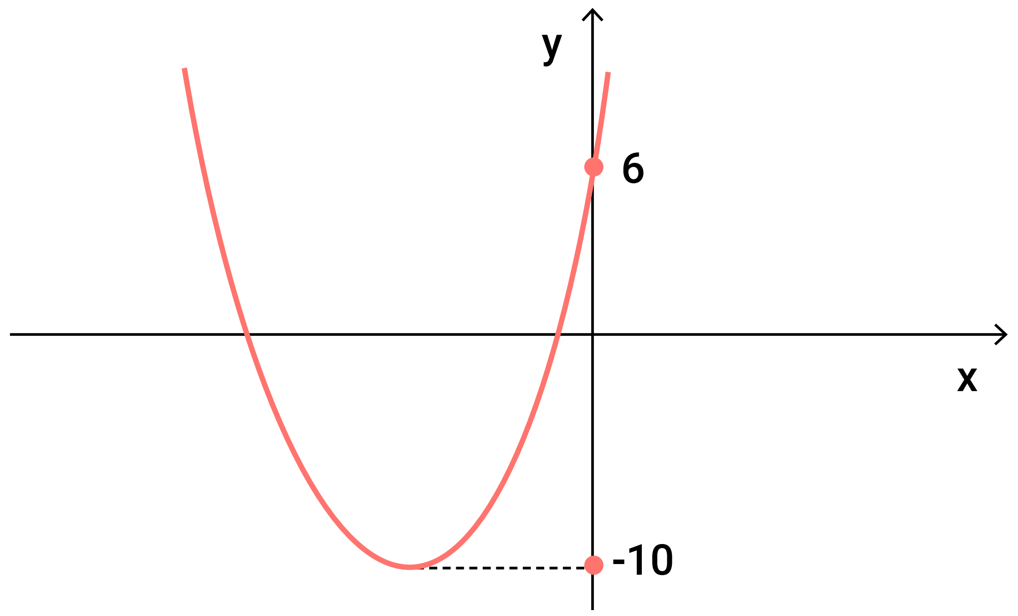
Bloco de questões referentes à Atividade 2

EXERCÍCIO 4

O gráfico a seguir é uma representação de uma função do 2º grau.
A função representada tem duas raízes:

a) Reais, sendo uma positiva e outra negativa.
b) Reais e iguais.
c) Reais negativas e distintas.
d) 4 reais positivas e distintas.
e) 5 reais e nulas.

Gabarito: C

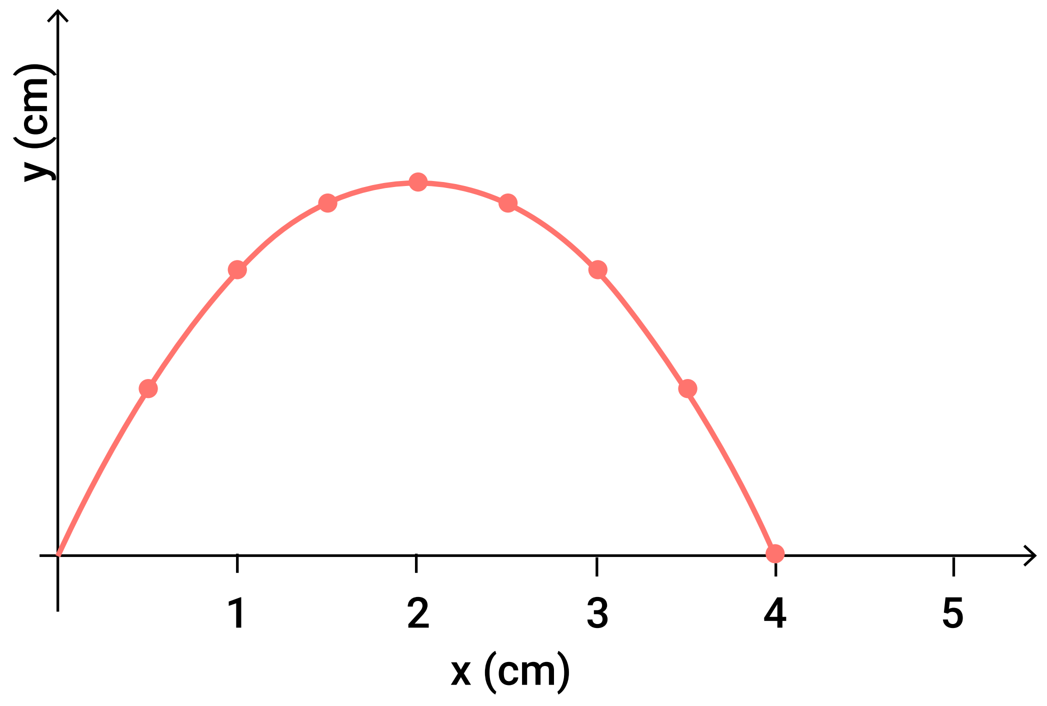


EXERCÍCIO 5

Após ser lançada por um garoto, a trajetória de uma pedra descreve uma parábola de equação $y = -x^2 + 4x$, em que as variáveis x e y são medidas em metros.
Nessas condições, a altura máxima atingida pela pedra, em metros, é:

a) 0,5
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Gabarito: E



Bloco de questões referentes à Atividade 3

EXERCÍCIO 6

Valnir alugou um carro para fazer uma viagem. O valor final a ser pago será calculado pela função $P(x) = 250 + 0{,}6x$, em que P é o preço a ser pago pelo aluguel, em reais, e x é a quantidade de quilômetros rodados. Se Valnir rodar 300 km, quanto sairá o valor do aluguel em reais?

a) 180
b) 250
c) 280
d) 300
e) 430

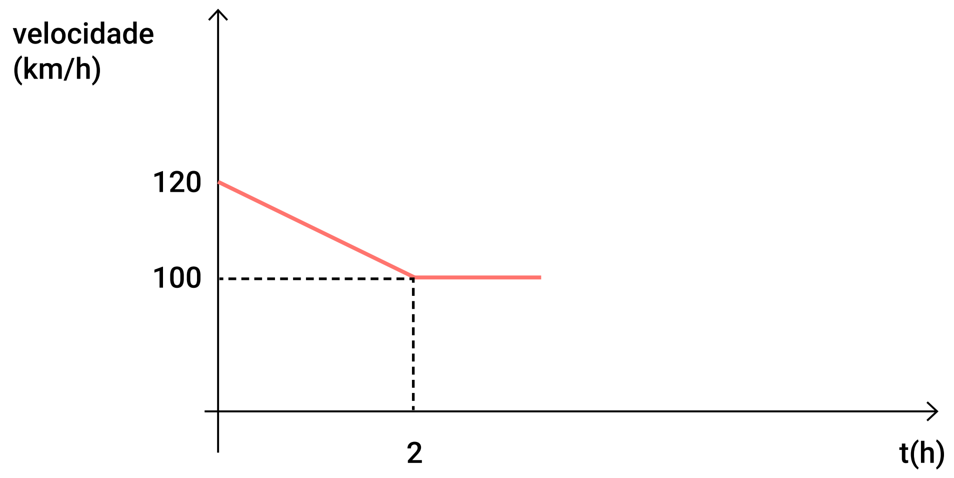
Gabarito: E

EXERCÍCIO 7

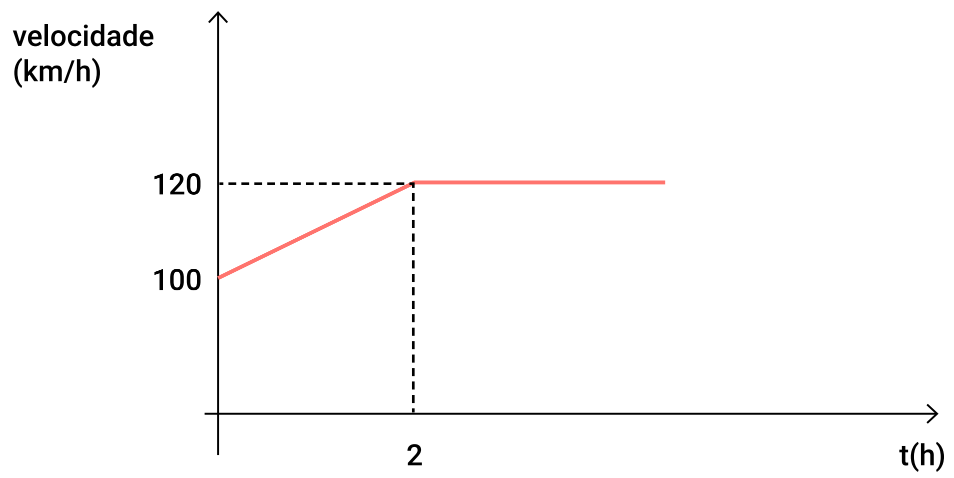
Uma família inicia uma viagem de carro. Durante as duas primeiras horas de viagem, o motorista manteve uma velocidade de 100 km/h. Daí em diante, ele aumenta a sua velocidade até atingir 120 km/h e, depois, mantém essa velocidade constante. O gráfico que ilustra a velocidade do automóvel em função do tempo é:

Gabarito: E

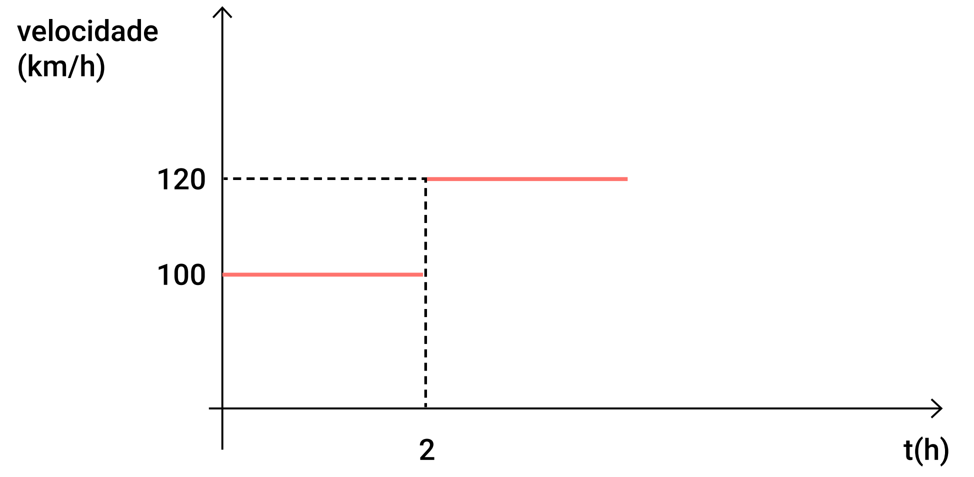
a)



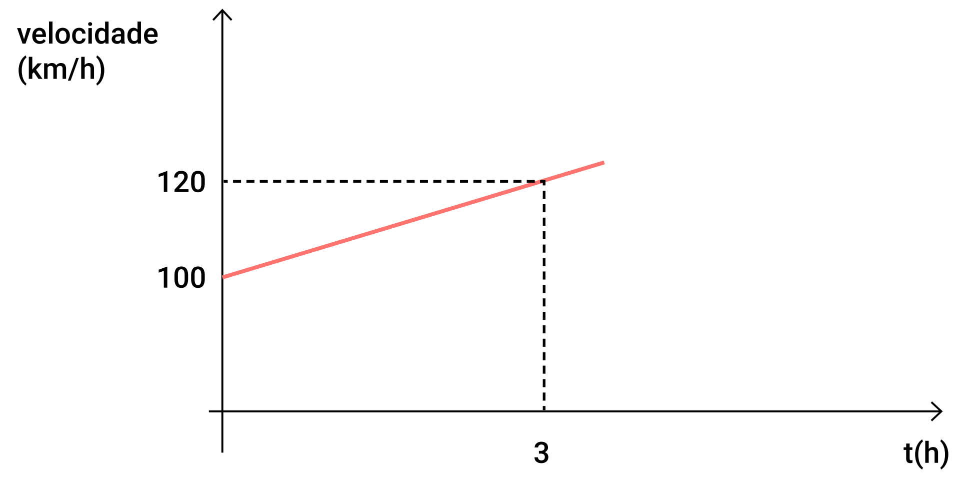
b)



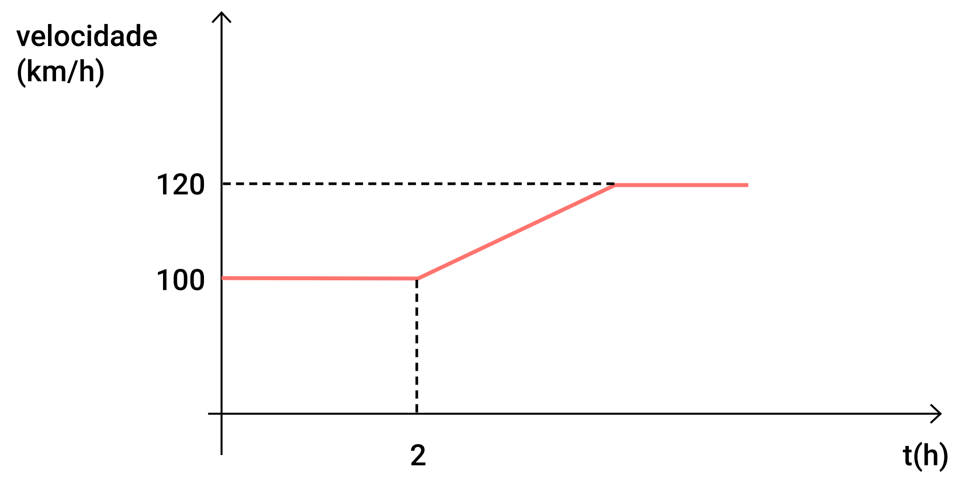
c)



d)



e)



EXERCÍCIO 8

(ENEM) Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra. (Revista Exame. 21/04/2010). A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é

a) f(x)=3x
b) f(x)=24
c) f(x)=27
d) f(x)=3x + 24
e) f(x)=24x + 3

Gabarito: D

EXERCÍCIO 9

(SARESP - adaptado) A tabela abaixo apresenta o consumo médio (x) de um combustível de certo veículo, em função da distância percorrida (y).

Consumo em litros (x)	**0,25**	**1,50**	**3,25**	**5,75**
Distância percorrida em km (y)	**2**	**12**	**26**	**46**

É verdade que:

a) x e y são diretamente proporcionais.
b) x e y são inversamente proporcionais.
c) para percorrer 4 Km serão consumidos 2 litros de combustível.
d) x e y não são proporcionais.
e) para percorrer 1 Km serão consumidos 0,5 litros de combustível.

Gabarito: A

EXERCÍCIO 10

(SARESP) Uma loja vende botijões térmicos para bebidas em dois tamanhos. O botijão com capacidade para 8 litros é vendido por R$ 56,00. Se o preço dos botijões for proporcional à capacidade, o preço do botijão de 2 litros é:

a) R$ 50,00
b) R$ 28,00
c) R$ 20,00
d) R$ 14,00
e) R$ 10,00

Gabarito: D

EXERCÍCIO 11

Determine a medida da altura, em cm, de um paralelogramo cuja área é igual a 50 cm^2 e cuja base mede 10 cm. Então a altura desse paralelogramo, em cm, é:

a) 500
b) 250
c) 5
d) 10
e) 20

Gabarito: C

Anexo 1

ANEXO 1

PADRÃO, GENERALIZAÇÃO E LINGUAGEM ALGÉBRICA

Apresente a sequência de figuras e proponha as seguintes questões:

a) Quantos quadradinhos escuros tem cada figura desta sequência?

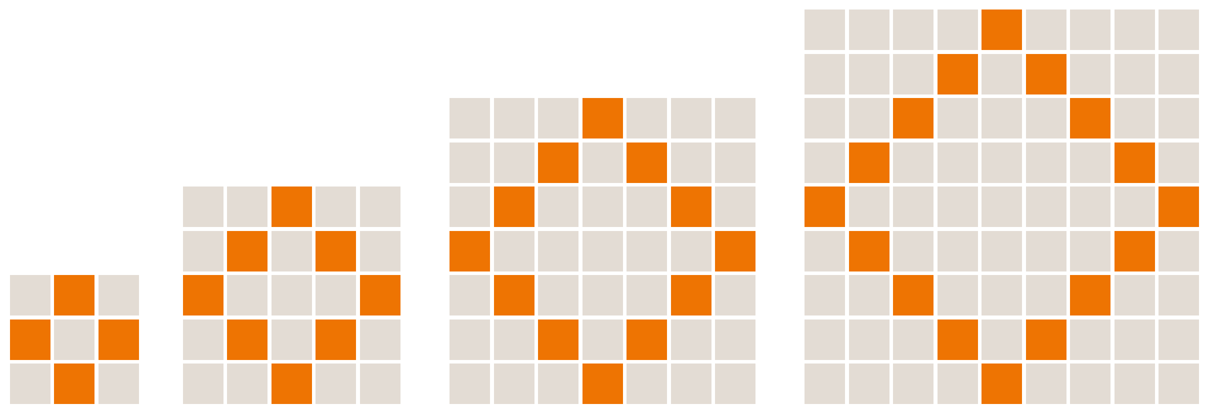
b) Como seria a 5ª figura? Desenhe e descubra quantos quadradinhos escuros ela tem. E a próxima figura, quantos quadradinhos ela tem?

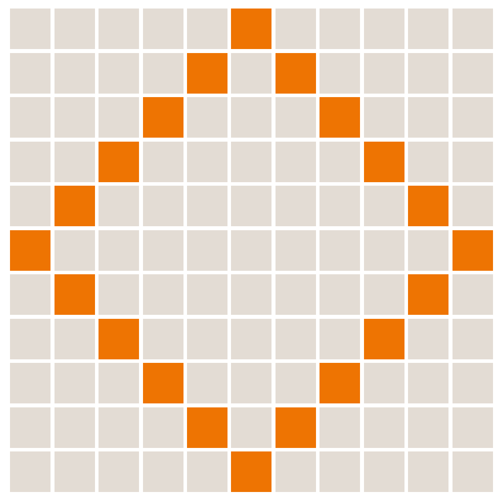
c) Quantos quadradinhos tem a 6ª figura? E a 10ª figura? Explique.

d) Você observa algum padrão, alguma regularidade nas figuras da sequência ao lado? Qual?

e) Considerando as figuras dessa sequência, complete a tabela ao lado.

f) Quantos quadradinhos tem uma figura em uma posição qualquer?





Posição da figura na sequência	Número de quadrados escuros na figura
1	4
2	8
3	
	16
	20
10	
	80

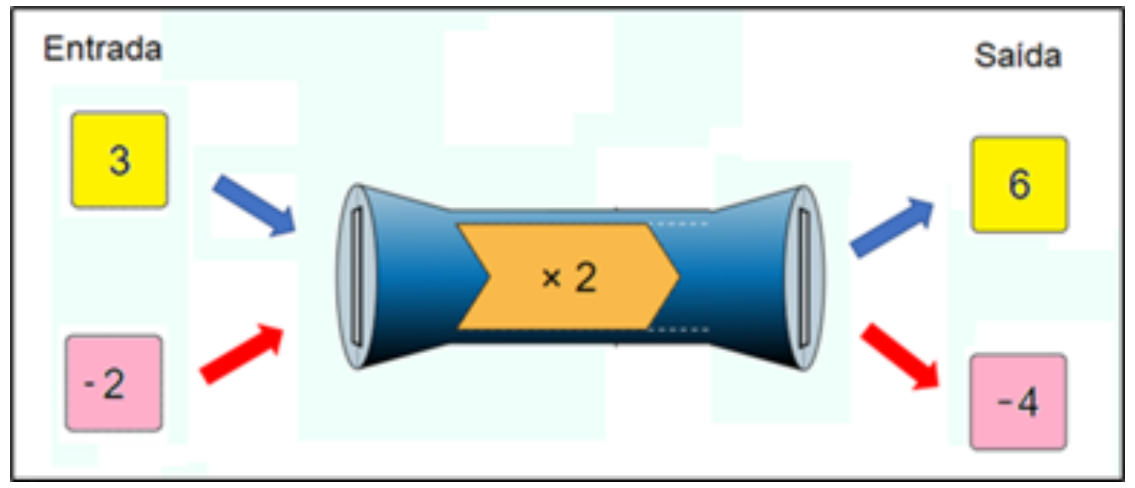
Anexo 2

ANEXO 2 ▶ MOMENTO 1

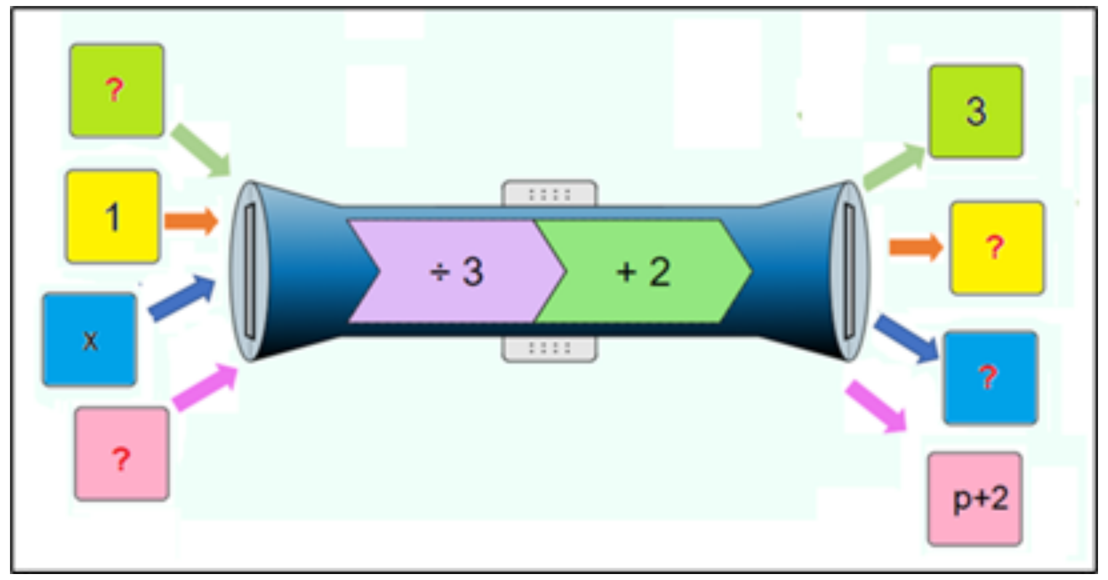
UMA MÁQUINA DE CALCULAR DIFERENTE

Na figura a seguir, você encontra uma máquina de calcular diferente.

a) Converse com seus colegas e procure entender como ela funciona. Escreva um pequeno texto explicando esse funcionamento.



b) Agora, observe a máquina a seguir e complete os dados que estão faltando. Registre em seu caderno suas conclusões.



c) Para refletir: o que significa a letra x que aparece na entrada da máquina? E a letra p? Em matemática, quando utilizamos uma letra, o que ela representa? Quais os números que poderiam ser escritos no lugar de x? Registre suas conclusões.

ANEXO 2 ▶ **MOMENTO 2**

Os números disponíveis em cada tabela ao lado foram submetidos a uma máquina de calcular. O seu objetivo é observar as regularidades existentes em cada tabela para "descobrir" qual o cálculo realizado por cada máquina e, em seguida, completar a tabela com os termos desconhecidos. Registre em seu caderno suas conclusões.

Entrada	100	-210	319	-431	616	x	?
Saída	96	-214	315	-435	613	?	y-8

Entrada	3	9	-15	21	-36	a	?
Saída	-9	-27	35	-63	108	?	b

Entrada	10	-30	-44	54	-104	p	- P
Saída	6	-14	-21	28	-51	?	?

Entrada	1	2	3	4	m	?	-2m
Saída	3	5	7	9	?	2m+3	?

Anexo 3

ANEXO 3 ▶ MOMENTO 1

MANEIRA DE ESCREVER

Nesta estação, o grupo vai jogar o *Maneira de escrever.*

Os componentes do grupo deverão se subdividir em dois grupos menores (caso o grupo inicial tenha 4 participantes, poderão formar duas duplas, ou caso tenha 5, poderão formar uma dupla e um trio), que jogarão um contra o outro.

Em seguida, todos leem as regras do jogo e, em caso de dúvida, poderão pedir ajuda para o/a professor/a.

Após a leitura das regras, os estudantes podem iniciar o jogo. Durante o jogo, cada vez que uma dupla virar dois cartões que formam o par, deverão anotar, em seu caderno, a frase sorteada e a sua respectiva sentença matemática.

Regras do Jogo

O jogo será entre duas equipes. As equipes devem escolher uma maneira de decidir quem inicia o jogo (par ou ímpar, por exemplo). Embaralhe os cartões com a parte escrita virada para baixo. Em uma mesa/carteira, organize dois montes, sendo um de cartas azuis e outro de amarelas. Cada grupo, na sua vez, vira dois cartões, um azul e um amarelo. Se o cartão azul traduzir o que está escrito no cartão amarelo, o jogador fica com os dois cartões. Se o cartão amarelo não traduzir o que está escrito no cartão azul, ambos devem ser devolvidos aos montes. Ao retornar as cartas aos devidos montes, embaralhe os cartões novamente. É a vez da outra equipe, que fará o mesmo procedimento realizado pela primeira.
O jogo termina em duas situações:

- Ao finalizar os cartões dos montes;
- Ao realizar 12 jogadas.

Ao término do jogo, as equipes devem contar o número de cartões acumulados. Vence o jogo a equipe que tiver o maior número de cartões.

Um número subtraído de 50	Um número diminuído de 50
O quádriplo de um número	Um número adicionado a 10
O quociente de 10 por um número	O quociente de um número por 10
A quarta parte do número	A diferença entre um número e 10
Um número somado a duas vezes o número	Cinco multiplicado pela soma de um número e 2

50 - x	x - 50
4z	10 + y
10/x	x/10
1/4 z	y - 10
x + 2x	5 (y + 2)

ANEXO 3 ▸ **MOMENTO 2**

Após participar do jogo *Maneira de escrever*, Alessandra decidiu calcular o valor numérico das expressões algébricas contidas nos cartões azuis que ela virou. Ajude a menina com esses cálculos, completando a tabela a seguir:

Expressão	x = 10	x = -3	x = -1/2
50 - x			
x - 50			
x + 2x			
10/x			

Anexo 4

ANEXO 4 ▶ MOMENTO 1

EQUILÍBRIO E SENTENÇAS EQUIVALENTES

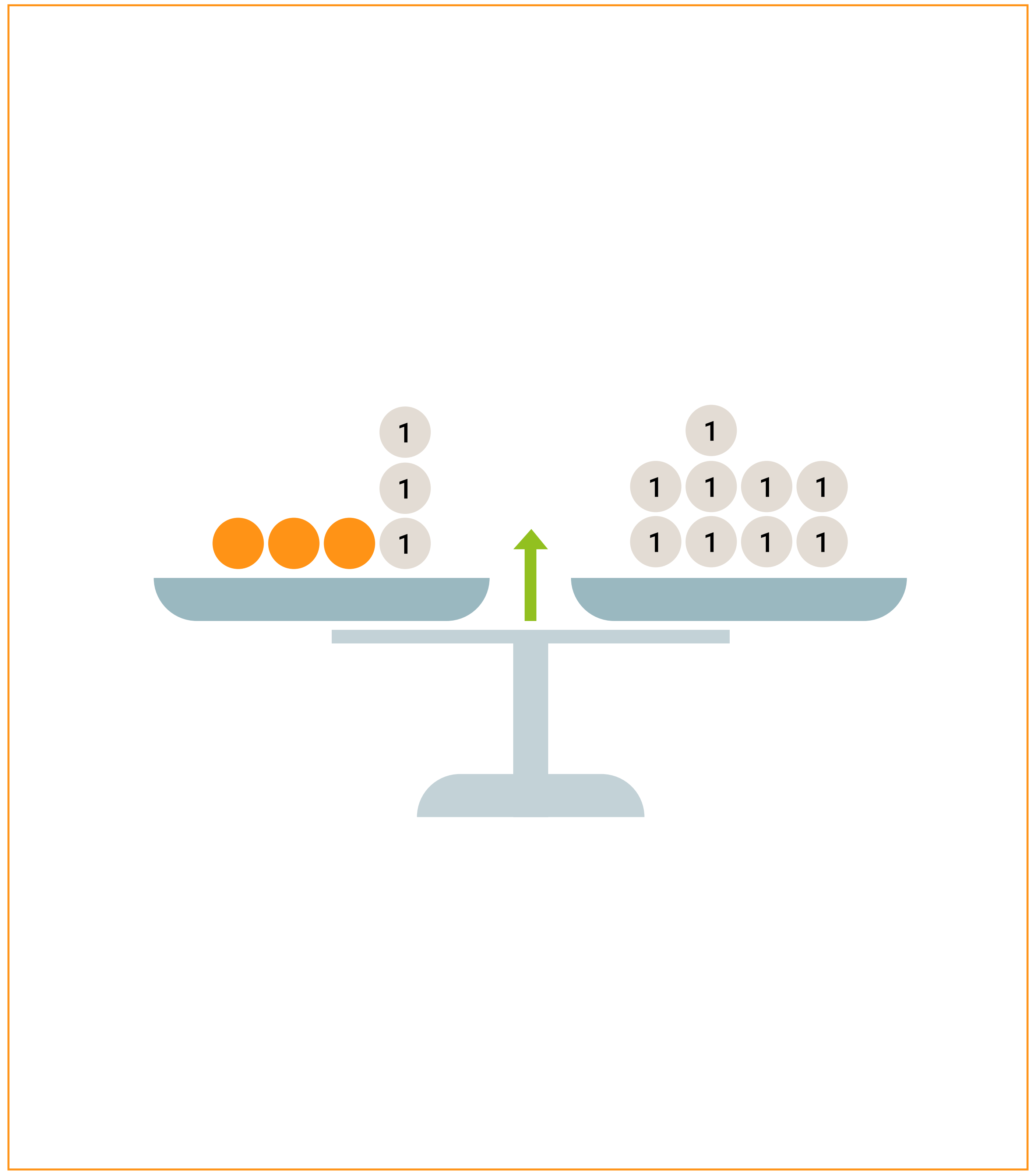
Acesse o link: bityli.com/equality-explorer. Selecione a opção "Básico" e explore livremente o aplicativo para conhecer suas funcionalidades. Em seguida, utilizando o aplicativo, represente a seguinte situação em que a balança está em equilíbrio:

a) Sendo x a massa de cada esfera, escreva uma sentença para representar essa situação.

b) Realize as alterações solicitadas. Em seguida, faça as análises pertinentes e responda em seu caderno:

- Retire 2 unidades do prato do lado esquerdo. O que observou?
- Sem colocar de volta as 2 unidades retiradas, o que você deve fazer para retomar o equilíbrio da balança? Explique sua resposta e escreva a nova sentença obtida.
- Agora, coloque 3 esferas no prato do lado direito da balança. O que observou?
- Sem retirar as 3 esferas, o que você deve fazer para retomar o equilíbrio da balança? Explique sua resposta e escreva a nova sentença obtida.

Você percebeu que, partindo do equilíbrio inicial representado por $3x + 3 = 9$, você conseguiu encontrar novas situações de equilíbrio representadas por $3x + 1 = 7$ e $6x + 3 = 3x + 9$? Essas sentenças são equivalentes.



ANEXO 4 ▶ **MOMENTO 2**

Observe a balança apresentada na figura.

a) Escreva uma sentença matemática para representar essa situação.

b) Agora, analise as sentenças abaixo e verifique qual ou quais delas são equivalentes à expressão escrita no item a. Explique sua resposta.

- $2x+10=12$
- $4x+5=2x+7$
- $4x+5=7$

c) Agora é sua vez: escreva uma expressão equivalente à expressão obtida no item a. Justifique sua resposta.

Anexo 5

ANEXO 5

O PASSO A PASSO PARA RESOLVER UMA EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Conjunto de símbolos/orientações utilizado para a construção do fluxograma, que resolve equações 1º grau do tipo $ax + b = cx + d$, onde a, b, c e d são números reais, $a \neq 0$, $c \neq 0$ e $a > c$

Some o oposto de cx (indica-se por -cx) nos dois membros da equação

Início

Some o oposto de b (indica-se por -b) nos dois membros da equação

O valor da incógnita x (solução da equação) é

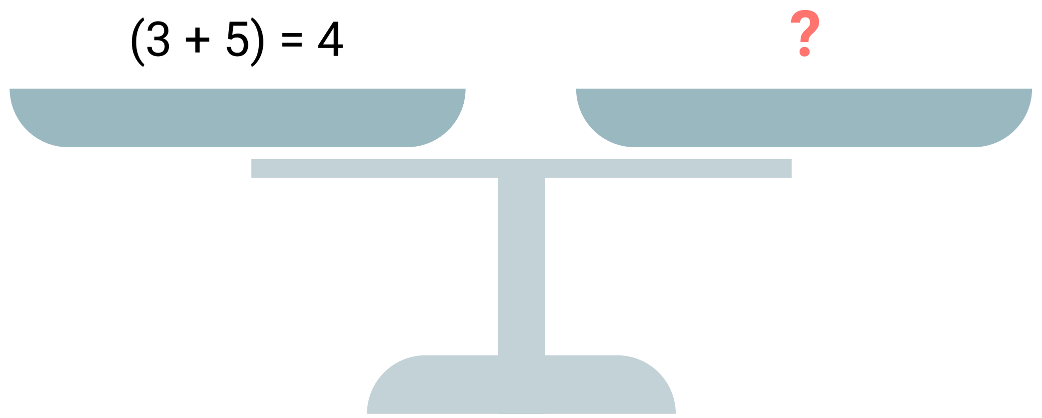
$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Fim

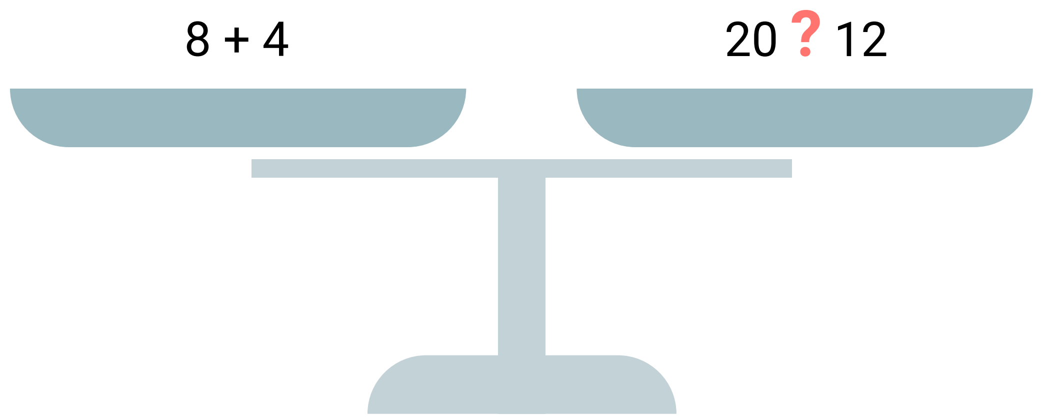
Leia a equação $ax + b = cx + d$

Anexo 6

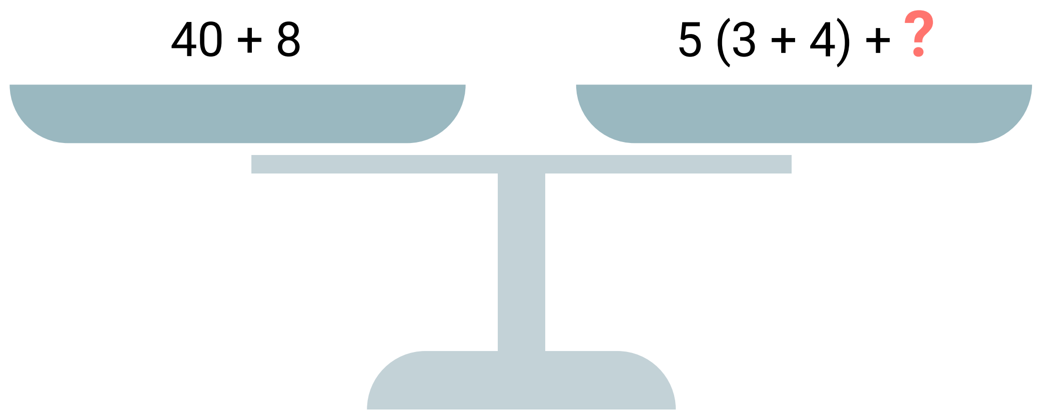
a)



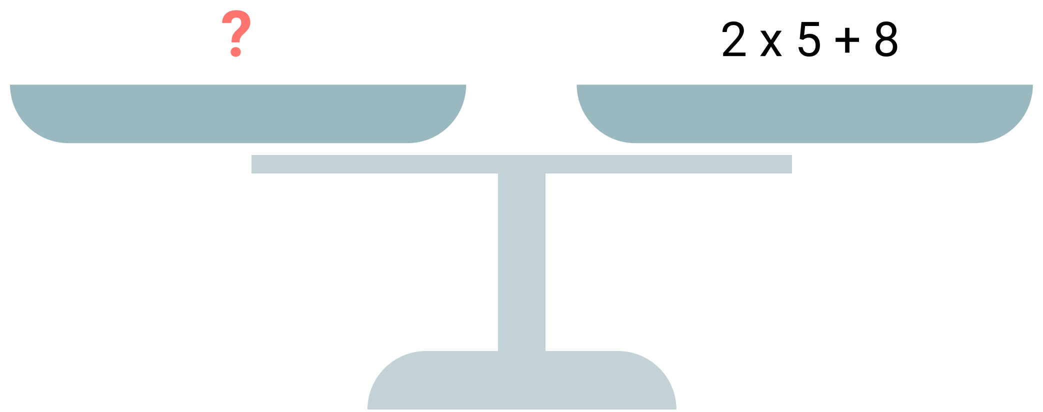
b)



c)



d)



Anexo 7

ANEXO 7 ▸ **MOMENTO 1**

Pedro é um menino que adora animais e gosta também de desafios matemáticos. Um dia, seu amigo Lucas perguntou: Pedro, quantos cachorros e quantos pássaros você tem? Pedro deu a resposta em forma de charada: Tenho um total de 6 animais. Contando os pés e patas deles, o total é 22. Adivinhe quantos cachorros e pássaros Pedro tem.

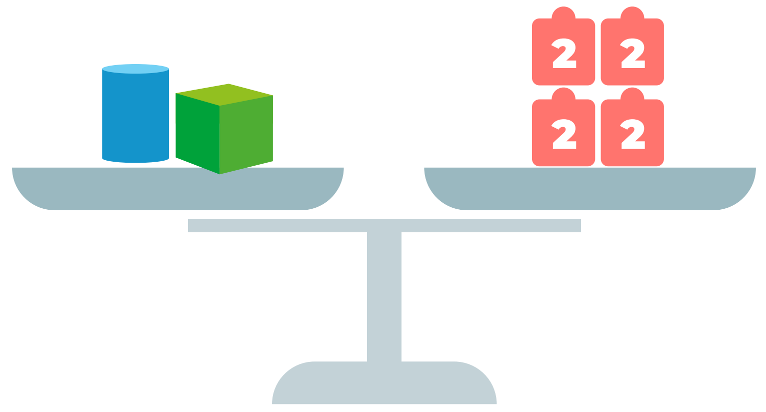
ANEXO 7 ▸ **MOMENTO 2**

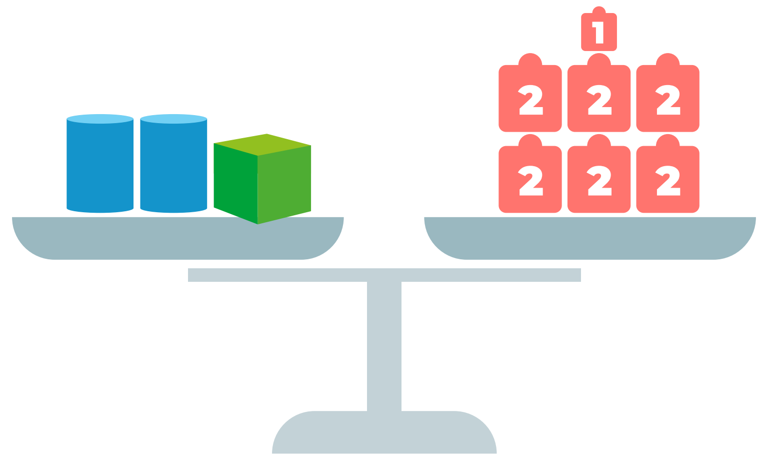
Observe as balanças representadas a seguir.

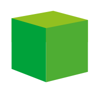
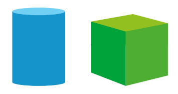
a) Escreva uma equação que represente a Situação 1 e a Situação 2, considerando que odos os cilindros que aparecem nas figuras são idênticos entre si e todos os cubos também são idênticos entre si.

b) Complete a tabela com pares ordenados que tornam a equação verdadeira.

c) Responda: qual a massa do cubo e a do cilindro para que as duas balanças se mantenham em equilíbrio?





SEQUÊNCIA DIDÁTICA 3:

FATORAÇÃO, EQUAÇÃO DO 2º GRAU, FUNÇÃO DO 2º GRAU, TEOREMA DE PITÁGORAS E RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Atividades

Introdução das atividades

Olá, professor/a!

Seja bem-vindo/a a 3ª sequência didática de Matemática do Ensino Médio.

Assim como nas duas sequências anteriores, no início desta encontra-se um quadro com as habilidades priorizadas e os descritores do SAEB relacionados às atividades sugeridas. Essas informações podem auxiliar no acompanhamento das aprendizagens dos estudantes ao longo do desenvolvimento de cada atividade.

Os objetivos aqui continuam sendo a retomada/desenvolvimento de habilidades propostas para os anos finais do Ensino Fundamental ainda não consolidadas, e o desenvolvimento das habilidades prioritárias selecionadas dentre aquelas propostas na BNCC para o Ensino Médio.

Mantendo a concepção de matemática como uma forma de pensar, para além de um conjunto de conceitos e procedimentos, e o compromisso com a formação integral do jovem protagonista, a ideia é manter o estudante cognitivamente ativo durante todo o percurso, além de promover a oportunidade de desenvolver competências cognitivas e socioemocionais.

Cabe ao/à professor/a conduzir todo o processo, acompanhar os estudantes em sua trajetória, auxiliá-los na organização dos estudos, garantir as sistematizações das aprendizagens e ajudá-los a continuar motivados em suas trajetórias escolares.

O percurso inicia-se com atividades que ampliam o conhecimento numérico dos estudantes e retomam a fatoração de números como conhecimento essencial para o estudo da fatoração de expressões algébricas, que é apoiado no conceito de área. Em seguida, realiza-se o estudo de diferentes formas para resolver equações do 2º grau, que são conhecimentos prévios necessários para os temas que serão contemplados nas atividades seguintes desta sequência. Retomando e ampliando o trabalho com o pensamento algébrico, a terceira atividade da sequência desenvolve o estudo das funções do 2º grau com base na identificação de padrões e na análise de regularidades. O teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas no triângulo retângulo são contempladas na terceira atividade da sequência. Durante todo o percurso, a história da matemática também é explorada como forma de despertar a curiosidade e o interesse do estudante.

A partir desses temas, as propostas têm como foco promover a motivação, a iniciativa, a persistência, a autoconfiança, o planejamento, a autonomia e o protagonismo, habilidades importantes para a aprendizagem de matemática e para a formação integral do jovem.

Bom trabalho!

No quadro a seguir, além dos descritores do SAEB, apresentamos também as habilidades priorizadas e as competências específicas da área propostas pela BNCC e que serão contempladas nas atividades. É importante observar que, dentre elas, existem aquelas indicadas para o Ensino Fundamental e outras para o Ensino Médio. A ideia é retomar habilidades estruturantes propostas para anos anteriores, mas que talvez ainda não tenham sido desenvolvidas, para depois avançar para o que precisa ser ensinado na série atual. Esta é a ideia da recomposição da aprendizagem e do continuum curricular: não paramos tudo para ensinar todas as habilidades anteriores, mas vamos desenvolvendo o que é essencial para o estudante seguir aprendendo, avançando com mais conhecimento neste e nos próximos anos.

Tempo sugerido: 42 horas/aula

TEMA 1: AMPLIANDO O UNIVERSO NUMÉRICO E FATORANDO EXPRESSÕES ALGÉBRICAS			
Competências específicas da área - propostas para o Ensino Médio	Habilidades focais do EF anos finais que são conhecimentos prévios	Descrição das habilidades focais de matemática do EM	Descritores SAEB
	EF09MA02 Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica. EF09MA09 Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.		• Conhecer e aplicar as propriedades das operações com radicais. • Fatorar expressões de 2º grau com uma variável.

TEMA 2: RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU			
Competências específicas da área - propostas para o Ensino Médio	**Habilidades focais do EF anos finais que são conhecimentos prévios**	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.	EF09MA09 Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.	EM13MAT315 Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema (resolução de equação do 2º grau). EM13MAT405 Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.	Conhecer diferentes estratégias, selecionar a mais adequada e aplicá-la para resolver equações do 2º grau. D31 (EF) e D17 (EM) Resolver problema que envolva equação do 2º grau.

TEMA 3: FUNÇÃO DO 2º GRAU		
Competências específicas da área: propostas para o Ensino Médio	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	EM13MAT302 Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. EM13MAT402 Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. EM13MAT502 Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$ EM13MAT503 Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. Essa vai dar para contemplar? Ela está no 3º ano).	Reconhecer a representação algébrica de uma função do 2º grau (quadrática). Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 2º grau. Resolver problemas envolvendo uma função do 2º grau.

TEMA 4: TEOREMA DE PITÁGORAS E RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO			
Competências específicas da área: propostas para o Ensino Médio	**Habilidades focais do EF: anos finais que são conhecimentos prévios**	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	EF06MA25 Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas. EF07MA24 Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. EF09MA14 Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.	EM13MAT306 Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. EM13MAT308 Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (apenas o Teorema de Pitágoras).	D10 (EF) Utilizar relações métricas do triângulo retângulo (Teorema de Pitágoras) para resolver problemas significativos. Identificar as relações trigonométricas (seno, cosseno, tangente) no triângulo retângulo. Resolver problemas envolvendo as relações trigonométricas (seno, cosseno, tangente) no triângulo retângulo. Resolver problemas envolvendo as relações trigonométricas de ângulos notáveis (30o, 45o e 60o).

Neste quadro você encontra o resumo das atividades desta Sequência Didática, bem como os objetivos específicos e o tempo sugerido para cada uma delas.

	ATIVIDADE	TEMPO	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	RESUMO
1	Ampliando o universo numérico e fatorando expressões algébricas	9 horas/aula	Explorar operações com radicais e fatorar expressões algébricas.	A proposta está dividida em 5 momentos: **Momento 1:** Explorando a história da Matemática; **Momento 2:** Explorando as operações com números irracionais; **Momento 3:** Problema da Borda; **Momento 4:** Fatorando números naturais e expressões algébricas; **Momento 5:** Ampliando a fluência na fatoração de expressões algébricas.
2	Resolvendo equações do 2º grau	10 horas/aula	Explorar diferentes estratégias para resolver equações do 2º grau.	A proposta está dividida em 4 momentos: **Momento 1:** Reconhecer equação do 2º grau e resolver equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$ ($b = 0$); **Momento 2:** Resolvendo equações do 2º grau incompletas, do tipo $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$); **Momento 3:** Resolvendo equações do 2º grau completas (fatoração, soma e produto e fórmula de Bháskara); **Atividade Extra:** cálculo mental: resolução de equações do 2º grau.
3	Estudando as funções do 2º grau	5 horas/aula	Além da compreensão do conceito de perímetro e área e a aprendizagem significativa das expressões matemáticas relacionadas ao cálculo dessas medidas, nesta proposta será abordado o conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais.	A proposta está dividida em 3 momentos: **Momento 1:** Identificando funções do 2º grau; **Momento 2:** Ampliando a exploração da representação gráfica das funções do 2º grau; **Momento 3:** Jogo Família das funções.
4	Ângulos, triângulos, teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas no triângulo retângulo	15 horas/aula	Retomar o estudo de ângulos e de triângulos, explorar o teorema de Pitágoras, as relações trigonométricas no triângulo retângulo e o cálculo dessas relações para os ângulos notáveis.	A proposta está dividida em 5 momentos: **Momento 1:** Revendo ângulos e triângulos; **Momento 2:** Explorando o Teorema de Pitágoras; **Momento 3:** As relações trigonométricas no triângulo retângulo: Seno, Cosseno e Tangente; **Momento 4:** Construindo um teodolito para medir altura; **Momento 5:** As relações trigonométricas dos ângulos notáveis: 30º, 45º e 60º.
5	Resolução de problemas	1 hora/aula	Resolver um problema de lógica.	

ORIENTAÇÕES GERAIS

UMA CONVERSA INICIAL

A matemática deve ser compreendida como um conhecimento essencial à formação de todos os jovens, pois contribui para a construção de uma visão de mundo, para a leitura e interpretação de dados da realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

Desta forma, é preciso ampliar o estudo da matemática para além da simples memorização e aplicação de fórmulas. Faz-se necessário possibilitar que o estudante perceba que esta é uma ciência com características próprias de investigação e linguagem.

Nesse sentido, as situações e desafios apresentados devem instrumentalizar a forma de pensar do estudante, capacitando-o a compreender e interpretar situações, apropriar-se de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões e generalizar, ou seja, habilidades essenciais à sua formação.

Professor/a, como esta SD apresenta muitas informações, termos, nomenclaturas e representações da linguagem matemática, que podem ser desconhecidas pelos estudantes, sugerimos que você proponha aos estudantes que elaborem um lapbook, uma espécie de dicionário/glossário ilustrado. Em toda aula, vocês poderão selecionar os conceitos, os termos, a nomenclatura e as representações matemáticas que farão parte do lapbook em uma lista.

A ideia é que, no final de cada etapa, para sistematizar as aprendizagens, você oriente o estudante a completar o seu material, inserindo registros que evidenciem o que ele aprendeu. Incentive-o a fazer anotações completas com desenhos, esquemas, breves descrições, lembretes relacionados a cada tema estudado.

Atividades como essas colocam o estudante no centro do processo de ensino/aprendizagem, pois, enquanto produz o material, ele aprende fazendo, registrando, sistematizando e dialogando com seus pares.

Esse material poderá ser consultado tanto em momentos de exercitação quanto em atividades avaliativas.

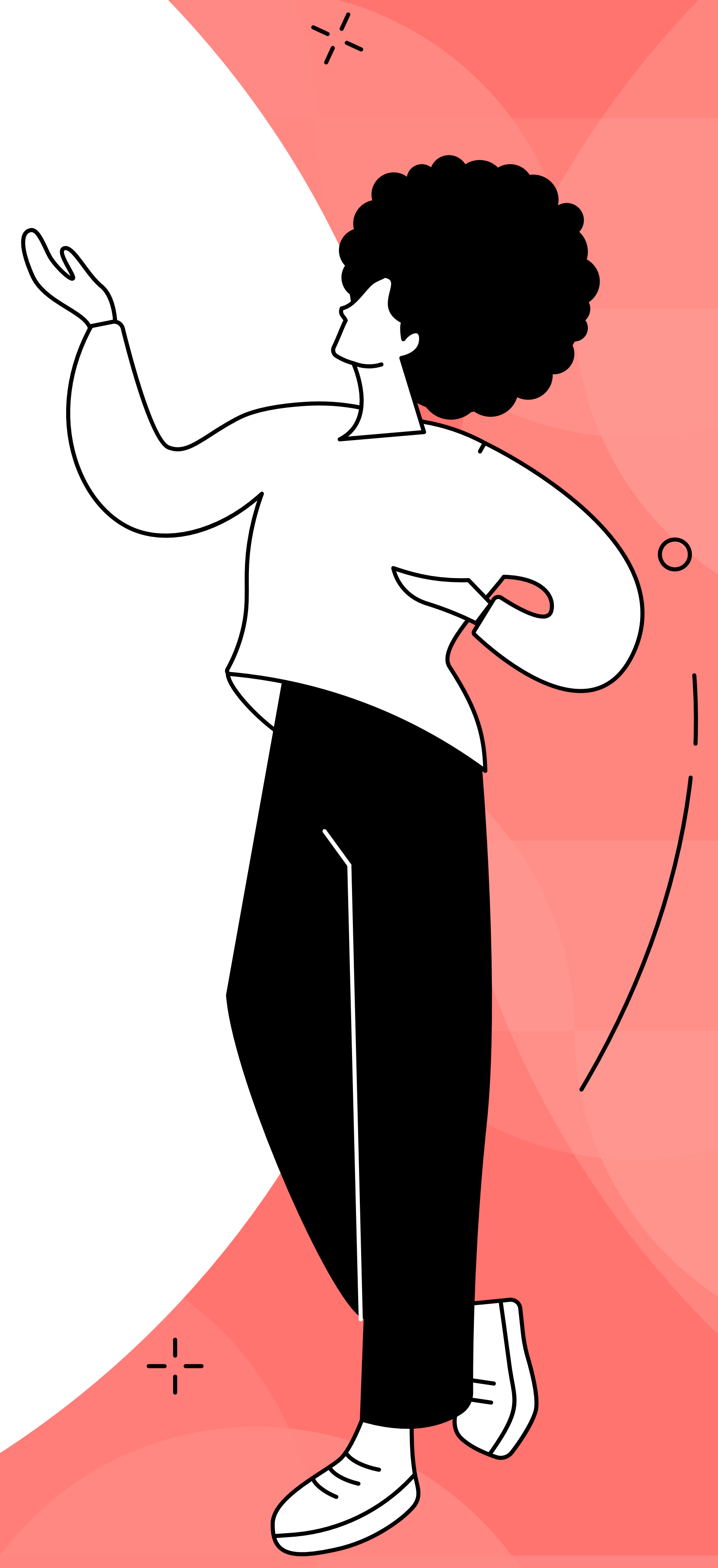
Para saber mais sobre lapbook, acesse:

- bityli.com/glossario (acesso em: 29 jun. 2022).
- bityli.com/dicionario-mat (acesso em: 29 jun. 2022).
- bityli.com/yt-lapbook (acesso em: 29 jun. 2022).
- bityli.com/construcao-lapbook (acesso em: 29 jun. 2022).

LEITURAS E VÍDEO INDICADOS

- “A resolução de problemas e o pensamento matemático”, de Kátia Stocco Smole, disponível em: bityli.com/resolucao-prob (acesso em: 26 maio 2022).
- “Geometria é mais que prova”, de Alan Hofer, disponível em: bityli.com/geo-hofer (acesso em: 7 jun. 2022).
- Os jogos nas Aulas de Matemática - extraído do livro “Cadernos do Mathema - Jogos de Matemática - vol 3”, de Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz, Neide Pessoa e Cristiane Ishihara, disponível em: bityli.com/jogos-aulas (acesso em: 7 jun. 2022).
- “Bháskara é só uma alternativa”, de Wellington Soares e Jacqueline Hamine, texto da Nova Escola, disponível em: bityli.com/bhaskara-alternativa (acesso em: 8 jun. 2022).
- Para uma reflexão sobre equidade, sugerimos o texto “Abrindo Nossas Ideias: Como uma abordagem matemática voltada para todos os alunos promoveu respeito, responsabilidade e alto rendimento”, de Jo Boaler, disponível em: bityli.com/yc-nossas-ideias (acesso em: 28 jun. 2022).
- Vídeo “Nunca me sonharam”, documentário que convida ao diálogo sobre a realidade do Ensino Médio nas escolas públicas do Brasil, pequeno recorte disponível em: bityli.com/yt-nms (acesso em: 8 jun. 2022).

Atividade 1



ATIVIDADE 1

AMPLIANDO O CONHECIMENTO A RESPEITO DOS NÚMEROS REAIS E DA FATORAÇÃO DE NÚMEROS E DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Foco: Explorar operações com radicais e fatorar expressões algébricas.

Tempo sugerido: 9 horas/aula.

Possíveis materiais:

- Acesso ao vídeo bityli.com/mat-primeiros-sinais (acesso em: 8 ago. 2022).
- 1 cópia do **Anexo 8**, na versão impressa, para cada dupla ou disponibilize a proposta no quadro e solicite que os estudantes a copiem no caderno.
- 1 cópia do **Anexo 11** para projetar. Caso não seja possível projetar, providencie um cartaz com a figura ampliada para exibir para os estudantes.
- 1 cópia do **Anexo 1**, que pode ser projetada ou mesmo entregue na versão impressa, para cada estudante.
- 1 cópia do **Anexo 2**: um conjunto de fichas brancas e um conjunto de fichas vermelhas para cada estudante.

Iniciamos essa proposta com a exploração do vídeo "Primeiros sinais da matemática na história/Os Mistérios da Matemática", que explora um pouco da história da Matemática. Em seguida, o foco passa a ser a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito das propriedades das operações com números reais. Propomos aqui o desenvolvimento da habilidade EF09MA02, que está relacionada ao reconhecimento de um número irracional, conhecimento prévio necessário para os temas que serão estudados no decorrer deste percurso.

Outro foco dessa etapa é o estudo da fatoração de números e de expressões algébricas, visando o desenvolvimento parcial da habilidade EF09MA09, que tratará da compreensão do processo de fatoração (fator comum em evidência) de expressões algébricas.

ATIVIDADE 1 ▶ **MOMENTO 1**

1 aula:

Explorando a história da Matemática

Conhecer um pouco da história da Matemática permite que o estudante tenha uma visão mais ampla e contextualizada desta área do conhecimento. É importante compreender que a matemática é uma construção humana, que foi sendo desenvolvida ao longo do tempo, e conhecer a origem das ideias que deram forma à cultura e identificar os aspectos humanos de seu desenvolvimento, enxergando os homens e as mulheres que criaram essas ideias e as circunstâncias em que elas se desenvolveram.

Além disso, a história da Matemática traz um importante contexto para o desenvolvimento da curiosidade e o interesse do estudante, além de permitir o estabelecimento de relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

A proposta aqui apresentada contribui com o desenvolvimento das Competências Gerais 1 e 2, propostas pela BNCC, pois valoriza e utiliza os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade e continuar aprendendo (CG1), e exercita a curiosidade intelectual ao recorrer à abordagem própria desta ciência (CG2).

Para relembrar as Competências Gerais propostas pela BNCC, acesse: bityli.com/intro-bncc (acesso em: 1 jul. 2022).

Inicie este momento com uma roda de conversa para conhecer o que os estudantes já sabem sobre a história da Matemática. Apresente algumas perguntas mobilizadoras, como:

- *Vocês conhecem a história da Matemática?*
- *Sabem como ela foi se desenvolvendo ao longo dos séculos?*
- *Sabem como ela contribui para o desenvolvimento da humanidade?*
- *Teriam exemplos dessas contribuições?*

É possível que os estudantes respondam que não conhecem ou que sabem pouco sobre esse tema. Anuncie que eles vão assistir a um vídeo que explora esse tema e que deixa evidente que a história da Matemática se confunde com a história da humanidade. Peça que, enquanto assistem ao vídeo, anotem suas aprendizagens, registrem os pontos importantes que indicam contribuições da matemática para a humanidade etc.

Disponibilize o vídeo “Primeiros sinais da matemática na história/Os Mistérios da Matemática” no link: bityli.com/mat-primeiros-sinais (acesso em: 29 jun. 2022).

Caso esse acesso não seja possível na sala de aula, você pode sugerir que o estudante assista ao vídeo em casa, com antecedência, ou então você pode disponibilizar, para pesquisa, alguns livros didáticos ou paradidáticos que exploram aspectos da história da Matemática.

Após assistirem ao vídeo, retome a roda de conversa. Peça que socializem seus registros, comentem os pontos que chamaram sua atenção. Você pode sugerir também que, organizados em pequenos grupos, façam cartazes ou gravem podcasts contando um pouco sobre a história da Matemática e divulguem para todos os estudantes da escola, desta forma, todos compreenderão um pouco mais da importância da matemática para o desenvolvimento da humanidade.

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 2

2 aulas:

Explorando as operações com números irracionais

Esta proposta visa ampliar o conhecimento dos estudantes sobre operações com irracionais, calcular com números irracionais e fazer estimativa de raiz quadrada.

Com os estudantes em duplas, realize a proposta disponível no Anexo 8, na qual serão investigadas algumas propriedades das operações relacionadas a raízes quadradas com o uso da calculadora. Autorize os estudantes a utilizar a calculadora de seus celulares ou solicite com antecedência para que eles tragam uma calculadora para a aula. O objetivo não é provar as propriedades, mas levar os estudantes a inferir, pela observação de regularidades, que algumas relações valem e outras não.

Professor/a, muitas vezes resistimos em usar a calculadora nas aulas de matemática. Para fomentar a reflexão sobre o uso da calculadora em sala de aula, sugerimos que você leia o texto:

- “Usar ou não a calculadora em sala de aula?”, de Kátia Stocco Smole, Cristiane Chica e Cristiane Akemi Ishihara, disponível em: bityli.com/usar-ou-nao-a-calcula (acesso em: 30 jun. 2022).

A proposta também contribui com o desenvolvimento da Competência Geral 2, visando exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria da matemática, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, descobrir regularidades e propriedades para formular conclusões.

Orientações para gestão da aula:

- Organize os estudantes em duplas, apresente a proposta e dê um tempo adequado para realizarem as atividades.
- Incentive-os a utilizar a calculadora para agilizar os cálculos, visto que o objetivo aqui não é o desenvolvimento da habilidade de cálculo, mas sim a observação de regularidades e a exploração de algumas propriedades.

- Enquanto realizam a proposta, circule pela sala, observe as conclusões tiradas e anote as dúvidas mais comuns para discuti-las no momento coletivo.

Ao final da realização da atividade, convide alguns estudantes a socializar seus registros, os resultados obtidos e suas conclusões. Incentive-os a explicar como pensaram para preencher cada lacuna do item d) com = ou ≠.

Professor/a, observe que, em vários momentos desta SD, sugerimos que você convide os estudantes a socializar seus registros e suas estratégias. É importante você diversificar os estudantes, evitar chamar sempre os mesmos, estimular inclusive os mais tímidos a participar, dar voz a todos, para que se sintam acolhidos e respeitados.

Se necessário, aproveite o momento para explorar as dúvidas dos estudantes que você anotou enquanto observava os grupos em ação. É importante conduzir a reflexão final, sistematizando as conclusões obtidas, e convidar o estudante a registrar no seu lapbook as descobertas/aprendizagens. Incentive-o a fazer desenhos, esquemas, breves descrições, lembretes e exemplos relacionados ao tema estudado, e relembre que essas anotações poderão ser retomadas sempre que necessário.

Espera-se que os estudantes concluam que, quando a ≠ 0 e b ≠0, temos:

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ___ ≠ ___ $\sqrt{(a+b)}$ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ___ ≠ ____ $\sqrt{(a-b}$

$\sqrt{a}.\sqrt{b}$ ____ = ___ $\sqrt{(a.b)}$ $\sqrt{a}/\sqrt{a}$ ___ = ___ $\sqrt{(a/b)}$

Mas quando os valores de b = 0, temos $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{(a+b)}$ e $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \sqrt{(a-b)}$ porém quando a = 0, temos $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{(a+b)}$ e $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq \sqrt{(a-b)}$.

Para finalizar essa etapa, apresente uma pequena lista com atividades envolvendo as operações e propriedades estudadas. Você pode selecionar propostas de livros didáticos do 9° ano do Ensino Fundamental disponíveis na escola. Esse fechamento é necessário para ajudar os estudantes a exercitar os conhecimentos obtidos na investigação, bem como para que eles percebam que suas aprendizagens podem ser aplicadas em outras situações.

Em seguida, explore algumas das situações contempladas nesta pequena lista, evidenciando que essas propriedades podem ser muito úteis para o cálculo mental de raízes exatas e não exatas.
Por exemplo:

$\sqrt{36} = \sqrt{(4.9)} = \sqrt{4}.\sqrt{9} = 2 . 3 = 6$

$\sqrt{1600} = \sqrt{16}.\sqrt{100} = 4 . 10 = 40$

$\sqrt{12} = \sqrt{(4.3)} = \sqrt{4}.\sqrt{3} = 2.\sqrt{3}$

ATIVIDADE 1 ▸ **MOMENTO 3**

2 aulas:

Problema da Borda

Esta atividade foi adaptada da proposta disponível em: https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/05/O-problema-da-borda-Semana-1-Dias-1-2-plano-de-aula.docx.pdf (acesso em: 1 jul. 2022).

Para retomar noções de aritmética e medidas e avançar com o estudo da álgebra, optamos por apresentar um problema que fomenta inicialmente a reflexão sobre a borda de uma grade de 10 x 10; depois, para a borda de uma grade de qualquer tamanho; para, em seguida, passar para a escrita de expressão algébrica e, então, para a reescrita de expressões algébricas equivalentes. Essa ordem na organização didática desta proposta é feita de modo intencional, chamamos de “piso baixo e teto alto”, de acordo com Jo Boaler. Trata-se de atividades em que todos os estudantes, trabalhando juntos e em grupos, podem se envolver, independentemente do seu entendimento ou conhecimento prévio. Elas são suficientemente amplas para que possam se expandir até níveis mais altos, de forma que os estudantes possam ser, profundamente, desafiados.

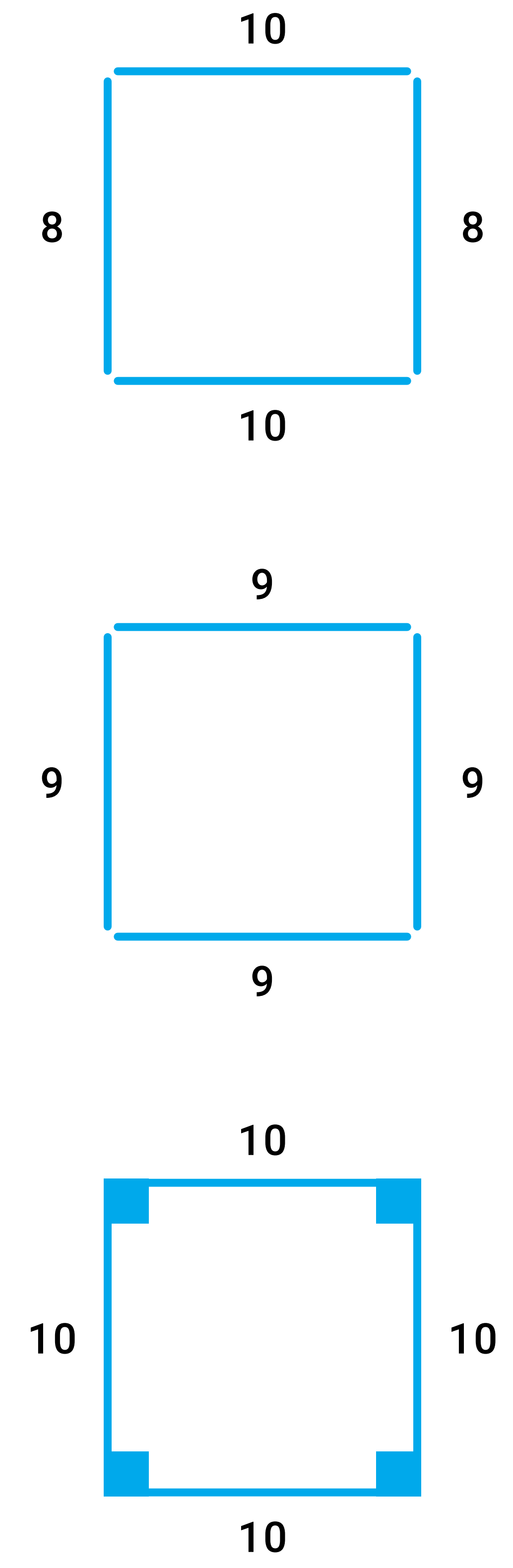
Além de desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes, essa atividade pode dar pistas a você de quanto seus estudantes já avançaram no estudo da álgebra e quais os pontos que ainda merecem atenção, podendo nortear o planejamento das aulas que envolvem essa unidade temática.

Comece organizando os estudantes em pequenos grupos e orientando-os que nessa proposta não vale contar os quadradinhos, pois o objetivo aqui é desenvolver estratégias para resolver os desafios, sem utilizar a contagem. Em seguida, projete uma grade de 10 x 10 (disponível no Anexo 11) por alguns segundos apenas e desafie-os a dizer quantos quadradinhos tem a borda dessa grade quadrada.

Deixe um tempo para pensarem e depois inicie a exploração. Inicialmente, peça a algum estudante que mostre suas respostas, apresente sua forma de ver a borda e explique como pensou. Registre no quadro sem dar qualquer indicação de erro ou acerto.

Convide mais alguns grupos para socializarem as respostas e registre as estratégias diferentes no quadro. Cada estratégia registrada no quadro é acompanhada pelo nome dos estudantes para mostrar que, a partir de então, um determinado método lhe pertence.

Algumas respostas esperadas:



OS QUADRADOS AZUIS REPRESENTAM A RETIRADA DOS QUADRADOS DAS ARESTAS

Caso alguma dessas estratégias não seja mencionada, você pode apresentá-la na classe dizendo que um colega de outra turma fez dessa forma e convidar os estudantes a explicar como ele pensou. Isso oferece aos estudantes a aquisição de novas estratégias e permite a reflexão e compreensão de processos e representações matemáticas.

O próximo passo é convidar os estudantes a escolher uma das estratégias apresentadas e aplicá-la em uma grade de 6 x 6, mas, desta vez, eles devem fazer uma representação visual (se possível peça que utilizem canetas coloridas) e uma expressão numérica. Para concluir essa etapa, solicite que coloquem seus registros sobre a carteira e convide a todos a circular pela sala, conferindo todos os trabalhos. Dê um tempo para que todos visualizem as produções de cada grupo. Em seguida, promova uma conversa sobre os diferentes métodos que os grupos usaram e as diferentes representações visuais que foram apresentadas.

Em seguida, diga que, em outra turma, você pediu para os estudantes apresentarem como descobriram quantos quadradinhos existem na borda de uma grade 3x3. Apresente as respostas dos estudantes (disponíveis na 2ª parte do Anexo 11) e questione os grupos:

- *Essas respostas estão corretas? Explique.*

Dê um tempo adequado para pensarem e, depois, abra uma roda de conversa. Garanta que todos percebam que o primeiro registro não considerou somente os quadradinhos da borda; no segundo registro, foram esquecidas algumas arestas quando foi registrado "3 + 3 + 2 + 2"; e o último registro estava correto.

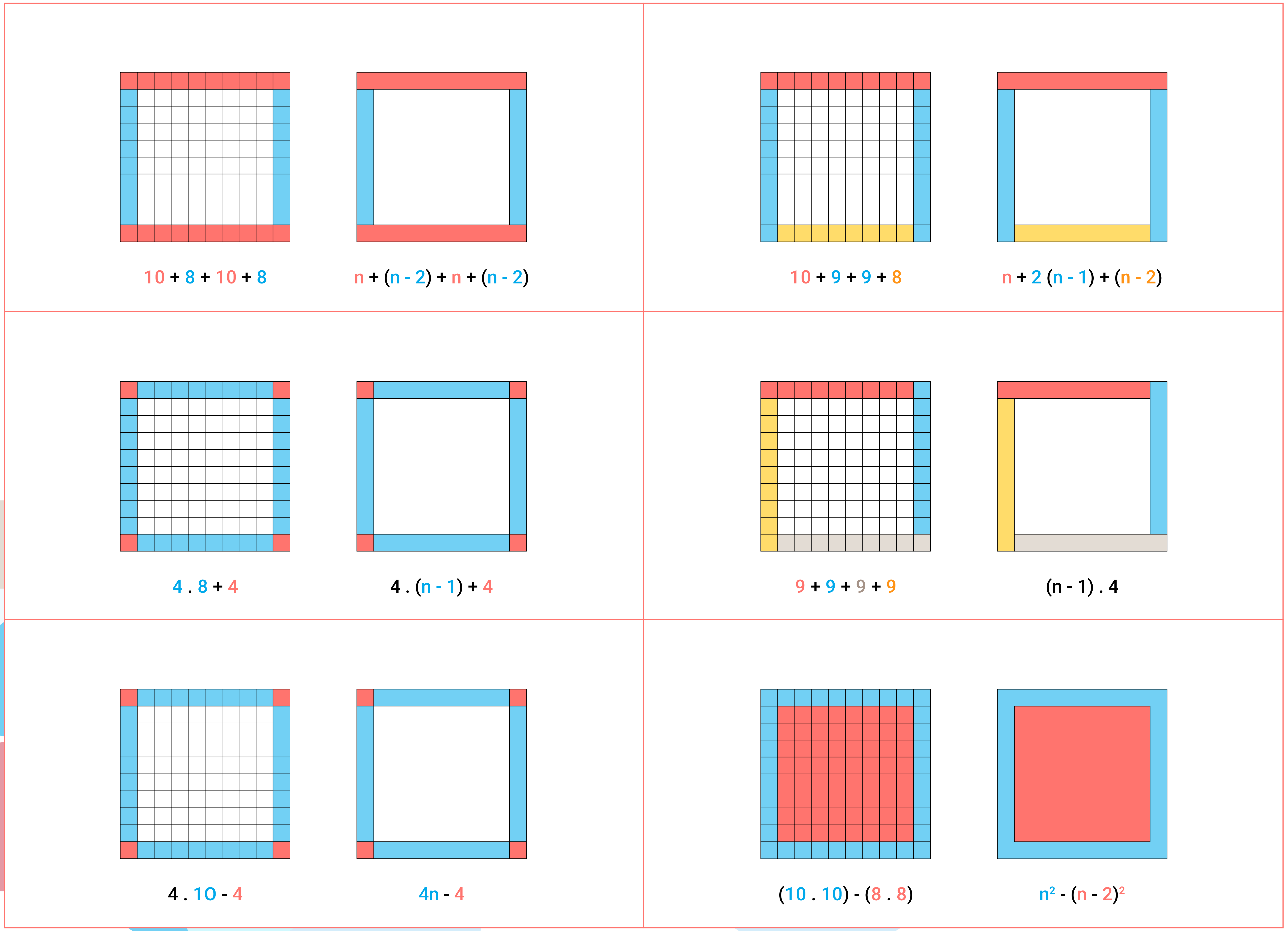
O próximo passo é pedir que cada equipe escreva, utilizando a linguagem materna, uma descrição de como usar uma das estratégias apresentadas anteriormente para descobrir o número de quadradinhos da borda de uma grade de qualquer tamanho.

Peça que socializem suas descrições e aproveite o momento para fazer os ajustes necessários, mas não apresente a resposta final pronta, conduza a conversa com boas perguntas para que os próprios estudantes identifiquem o que precisa ser ajustado. Por exemplo, se o estudante disser: *Multiplique por quatro o número de quadradinhos da base (n).* Questione:

- *Observe o quadradinho do canto inferior esquerdo: ele está sendo contado na base?*
- *Ele está sendo contado na borda esquerda?*
- *Acontece o mesmo com todos os quadradinhos que estão nos cantos?*
- *O que você poderia fazer para resolver essa situação?*

Após esse momento, convide os estudantes a escrever uma expressão matemática para representar o número de quadradinhos da borda de qualquer grade (n x n).

Apresentamos a seguir uma representação visual de diferentes soluções, sempre comparadas com a grade 10 x 10. **Mas atenção:** não recomendamos que você mostre isso aos estudantes. Deixe-os formarem suas soluções.



No final, convide os estudantes a socializar a expressão obtida, escreva todas elas no quadro e questione: “Será que elas são expressões equivalentes?”. Desafie-os a, por exemplo, partir da expressão 4(n-2) + 4 e obter a expressão 4n - 4, ou então partir de (n-1) . 4 e obter 4n - 4. No final, sistematize que todas as expressões obtidas são equivalentes a 4n - 4. Por meio de problematizações, relembre a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, relembre a associação de termos semelhantes.

Questione como foi a realização da proposta: “Como vocês se sentiram ao vencer os desafios?”. Deixe uma mensagem de Mentalidade de Crescimento: “Adorei mostrar a vocês uma ideia de difícil resolução e perceber o quanto vocês se dedicaram na busca das soluções. Lembrem-se de que quanto mais dificuldade sentem com uma ideia, mais seu cérebro ‘se fortalece’. Eu poderia passar coisas nesta aula que todos vocês acertariam, mas isso não os ajudaria de verdade. Pode até dar uma sensação agradável, mas não ajudaria. O que vocês realmente devem fazer é enfrentar os desafios.”

ATIVIDADE 1 ▶ **MOMENTO 4**

2 aulas:

Fatorando números naturais e expressões algébricas

Professor/a, nesta proposta, o foco é estudar a fatoração de expressões algébricas, apoiando-se no conceito de perímetro e área já estudados anteriormente, visando o desenvolvimento parcial da habilidade EF09MA09 no sentido da compreensão do processo de fatoração (fator comum em evidência) de expressões algébricas.

Exercitar e ampliar a experiência com esse assunto é importante para a resolução de problemas, para o estudo de funções e também para a resolução de equações do 2º grau completas, assuntos contemplados nesta SD.

Inicie a proposta retomando a fatoração de números naturais. Desafie os estudantes a escrever o número 42 de diferentes formas, utilizando produto(s). Em seguida, convide-os a registrar na lousa os produtos obtidos.

Enfatize que existem diferentes possibilidades para escrever o número 42 utilizando produtos 2 x 21; 2 x 3 x 7; 6 x 7; 1 x 42, entre outras. É importante neste momento não se limitar a produtos que envolvem os números primos.

Aproveite o momento para sistematizar que fatorar um número natural é escrevê-lo na forma de produto de fatores.

Se considerar adequado, para ampliar os conhecimentos dos estudantes, solicite que procurem no dicionário o significado da palavra fatorar e/ou fatoração e, se necessário, explore mais algumas propostas, como fatorar os números 75, 216, 300, entre outros.

Anuncie então que vão ampliar o estudo da fatoração e questione:

- *Será que é possível fatorar uma expressão algébrica?*
- *Vocês já ouviram falar sobre esse tema?*
- *Como fatorar a expressão x^2+2xy?*

Convide-os a fazer algumas explorações para depois responder a essa pergunta. Explique que as explorações que serão realizadas vão envolver os conceitos de área e perímetro. Se necessário, retome o conceito de área e de perímetro: ideia de medir, de saber quantas unidades de medida são necessárias para medir o contorno ou para cobrir uma determinada figura plana.

Apresente a atividade disponível no Anexo 1 e explore coletivamente uma das expressões algébricas presentes na proposta, apresentando algumas questões norteadoras, como:

- *Qual a medida dos lados do primeiro retângulo?*
- *O que significa dizer que a medida do lado do retângulo é igual a x?*
- *Como calcular o perímetro do retângulo?*

Garanta que todos compreendam que, no retângulo apresentado, os valores de x e y são variáveis e podem assumir qualquer valor real positivo, visto que indicam as medidas dos lados da figura.

Aproveite também para explorar que a expressão utilizada para obter o perímetro do retângulo pode ser: $x + y + x + y$ ou $2x + 2y$. Incentive-os a explicar como é possível obter a expressão $2x + 2y$ a partir de $x + y + x + y$.

Se necessário, retome alguns conceitos da álgebra como termos semelhantes e as propriedades comutativa e associativa da adição. É provável que os estudantes já tenham trabalhado com estas propriedades algébricas, então, neste momento, eles poderão exercitar e ampliar a experiência com esses assuntos, que são importantes para a resolução de problemas e para o estudo das funções. No entanto, se eles ainda não aprenderam, terão uma nova chance agora.

Após a exploração inicial, solicite que, individualmente, os estudantes resolvam as atividades 1 e 2 do Anexo 1 (figura a seguir).

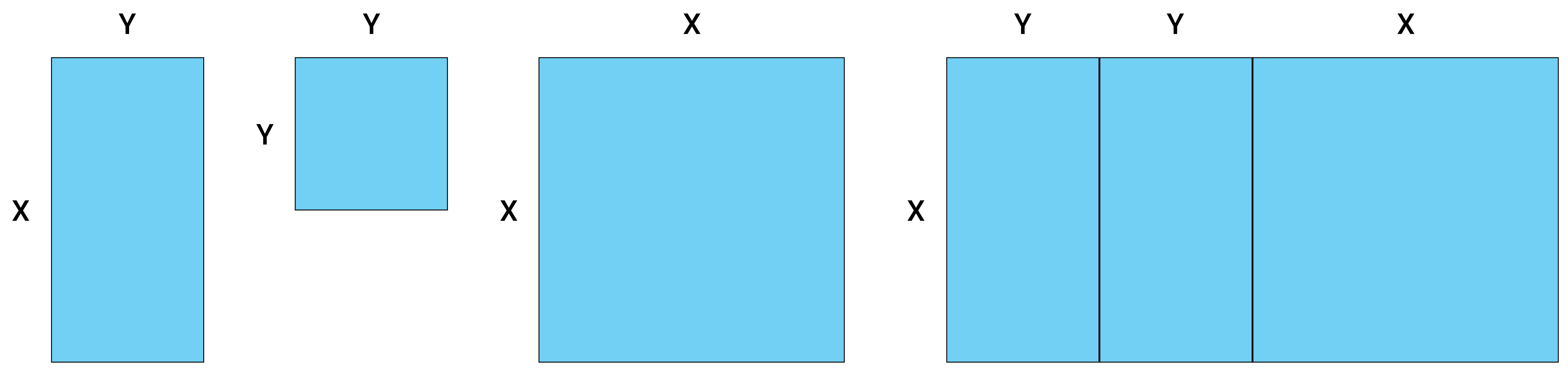


FIGURA A

Incentive-os a insistir, e não desistir de buscar uma estratégia para resolver a situação. Comente com eles que nosso cérebro também aprende quando erramos e tentamos novamente. Aproveite o momento para verificar o que os estudantes já sabem sobre expressões algébricas: coeficiente, grau, termos semelhantes, adição e subtração de polinômios. Termos, conceitos e ideias que poderão fazer parte do lapbook deles.

Em seguida, solicite que se juntem a um colega para comparar suas resoluções, identificar semelhanças e diferenças, e fazer ajustes quando necessário.

Respostas esperadas:

1. Qual a expressão que indica a área do quadrado maior? x^2
2. Qual a área do quadrado quando x = 5 u.a.? 25 u.a
3. E quando x = 8 u.a.? 64 u.a.
4. Qual a expressão que indica a área do quadrado menor? y^2
5. Qual a área do quadrado quando y = 2? 4 u.a.
6. Quem está correta: Júlia ou Simoni? Espera-se que os estudantes identifiquem que tanto Júlia quanto Simoni estão corretas.

Aproveite o momento para explorar que essas expressões são equivalentes e que é possível transformar uma em outra utilizando propriedades matemáticas. Apresente algumas perguntas norteadoras, como:

- É possível partir da expressão $x(x + 2y)$ e, utilizando algumas propriedades matemáticas, encontrar a equação $x^2 + 2xy$? Explique.
- Como obter a expressão $x^2 + 2xy$ partindo de $x^2 + xy + xy$?

Espera-se que os estudantes concluam que se adicionarem os termos semelhantes da expressão $x^2 + xy + xy$, obtém-se $x^2 + 2xy$ ou, então, se aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em $x(x + 2y)$, obtém-se $x^2 + 2xy$.

Discuta também que $x(x + 2y)$ é a forma fatorada de $x^2 + 2xy$. Retome o conceito de fatoração de números naturais: fatorar um número natural é escrevê-lo na forma de produto; da mesma forma, fatorar uma expressão algébrica é escrevê-la na forma de produto, assim:

$x^2 + 2xy = x(x + 2y)$

soma = produto (forma fatorada)

Retome o desafio que você fez no início da proposta:

- *Como fatorar a expressão $x^2 + 2xy$? Conseguimos respondê-la agora?*

Proponha que resolvam as atividades 3 e 4 do Anexo 1 e depois conversem sobre as conclusões obtidas.

No item 3, espera-se que os estudantes concluam que a área x.t + y.t + 3t também pode ser expressa na forma fatorada t(x + y + 3). Amplie as discussões apresentando algumas perguntas que levem os estudantes a refletir sobre o fato de existir uma letra comum em todas as parcelas, por exemplo:

- *Qual a letra que aparece em todos os termos da 1ª escrita?*
- *O que acontece com essa letra quando escrevemos essa expressão na forma fatorada?*

Com base nessas observações, questione a proposta 4:

- *O mesmo acontece na proposta 4?*
- *Qual a letra comum em todas as parcelas?*
- *Como ficaria a forma fatorada dessa expressão?*

Resposta esperada: $y^2 - 3xy + 2y = y\,(y - 3x + 2)$.

Sistematize as discussões com o grupo do vocabulário matemático pertinente a atividade: o y é um fator comum em todas as parcelas da expressão $y^2 - 3xy + 2y$ e, por isso, para fatorá-la, ele foi colocado em "evidência". Explore também que se aplicar a propriedade distributiva na forma fatorada, obtém-se a expressão inicial:

$$y\,(y - 3x + 2) = y^2 - 3xy + 2y$$

Aproveite e retome os casos anteriores. Na expressão $x^2 + 2xy$, o fator comum é o x e, para fatorá-la, basta colocá-lo em evidência, obtendo-se x(x + 2y); e, na expressão x.t + y.t + 3t, o fator comum é o t e, para fatorá-la, basta colocá-lo em evidência, obtendo-se t(x + y + 3).

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 5

2 aulas:

Ampliando a fluência na fatoração de expressões algébricas

Para aumentar a fluência dos estudantes na fatoração de expressões algébricas, disponibilize uma cópia do Anexo 2.

O foco desta proposta é aumentar a fluência dos estudantes na fatoração de expressões algébrica. A opção por trabalhar com um material manipulativo tem como objetivos: engajar os estudantes pelo lúdico da atividade; trazer uma aprendizagem mais significativa; e contemplar aqueles que ainda têm dificuldades com a álgebra, mas que possuem boa visualização das formas geométricas. É importante que os estudantes tenham clareza que todos podem aprender matemática, que, às vezes, uma representação pode ser mais fácil para uns enquanto outra representação pode facilitar a aprendizagem de outros. No caso das atividades propostas, talvez para alguns estudantes fique mais clara a representação algébrica e, para outros, a geométrica. É nesse momento que estamos "virando a chave" da mentalidade dos estudantes: aqueles que tinham uma mentalidade fixa e acreditavam que não aprendem matemática (os mais propensos a desistir frente a um desafio) podem passar a ter uma mentalidade de crescimento, vislumbrando que podem alcançar melhores desempenhos em matemática, assim, provavelmente, passarão a persistir, a não desistir, mesmo quando o trabalho parece difícil. Professor/a, é preciso acreditar que é possível mudar a mentalidade dos estudantes, tirando-os da posição estática em direção à mentalidade de crescimento. É preciso acreditar que é possível que todos os estudantes possam aprender matemática. E você é peça essencial para isso.

Essa proposta contribui com o desenvolvimento da Competência Específica 3, proposta na BNCC: Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

Gestão da aula:

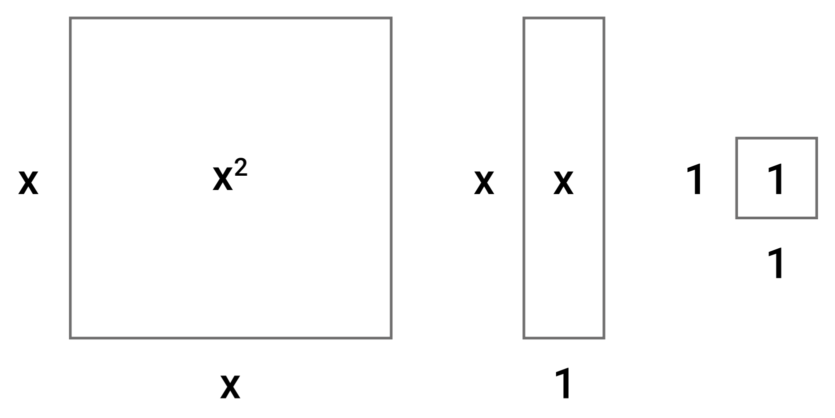
É importante que os estudantes recebam, com antecedência, as fichas do Anexo 2 e recortem os quadrados e retângulos brancos e vermelhos. Isso evita desperdício de tempo na aula e, ao mesmo tempo, trabalha o senso de responsabilidade dos estudantes para que a aula se desenvolva adequadamente.

Por ser muito lúdica, a montagem de quebra cabeças exige que os alunos possam se comunicar, mas todos devem ter em mãos o material manipulativo para que possam pensar sobre cada desafio. Prepare-se estudando a atividade antes de propô-la aos estudantes, de modo a perceber as dificuldades que eles mesmos terão em algumas das fatorações propostas.

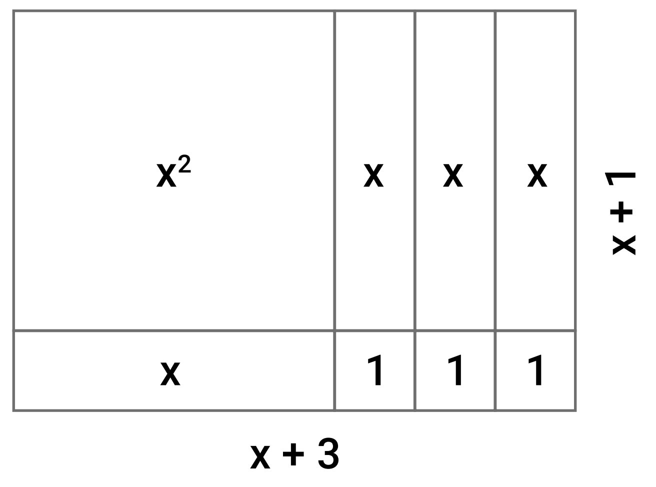
Organize a classe em grupos, assegure que todos tenham o material para a atividade e faça alguns combinados:

- Cada grupo deve ter um líder, eleito pelo próprio grupo, que coordena as atividades e evita dispersão, mas que não faz o trabalho sozinho nem pelo outro.
- O grupo deve escolher também um componente para controlar o tempo estipulado para que a atividade aconteça e outro para ser responsável pela apresentação das conclusões do grupo a todos da classe.
- É tarefa de todos os componentes não deixar ninguém para trás.

Inicie explorando a medida do lado de cada peça branca e de sua área (figura ao lado). Em seguida, convide-os a representar, com as peças brancas, um retângulo cuja área é $x^2 + 4x + 3$ e peça que escrevam essa expressão na forma fatorada. Depois de algum tempo, verifique se conseguiram construir um retângulo cujos lados medem $(x + 1)$ e $(x + 3)$.



RESPOSTA ESPERADA:

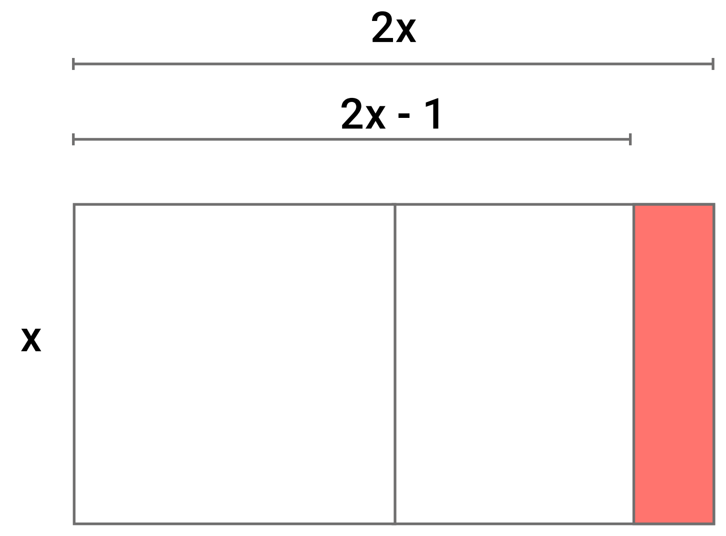


FORMA FATORADA: $(x + 1)(x + 3)$

Coletivamente, sistematize que $(x + 1)(x + 3)$ é a forma fatorada da expressão $x^2 + 4x + 3$, logo $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$

Em seguida, explore coletivamente uma situação envolvendo peças brancas e vermelhas. Explique para os estudantes que as fichas vermelhas devem ser colocadas sobre as brancas com a ideia de subtrair, da área da peça branca, a área da peça vermelha, quando sobreposta a ela. Desafie os estudantes: "Construa um retângulo cuja área pode ser representada pela expressão $2 . 2 - x$ e escreva essa expressão na forma fatorada." Depois de algum tempo, verifique se conseguiram construir um retângulo cujos lados medem (x) e $(2x - 1)$.

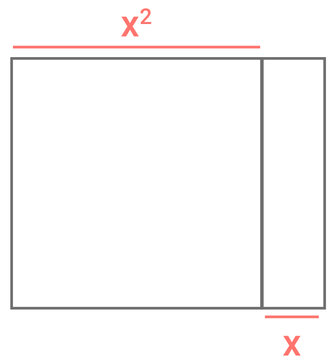
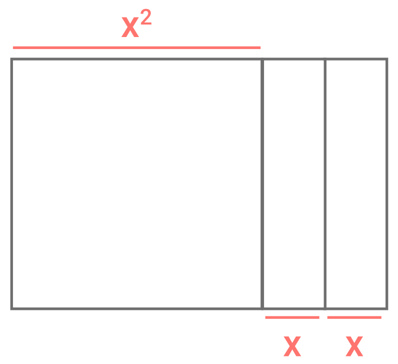
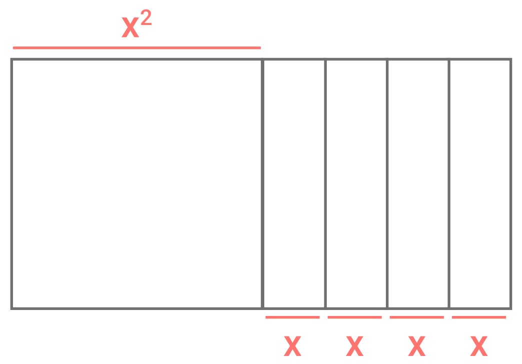
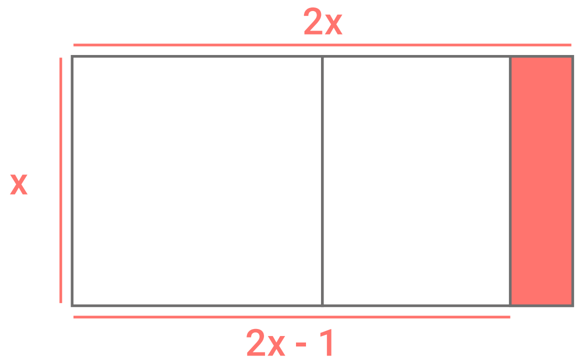
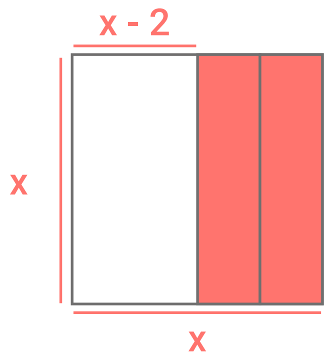
RESPOSTA ESPERADA:

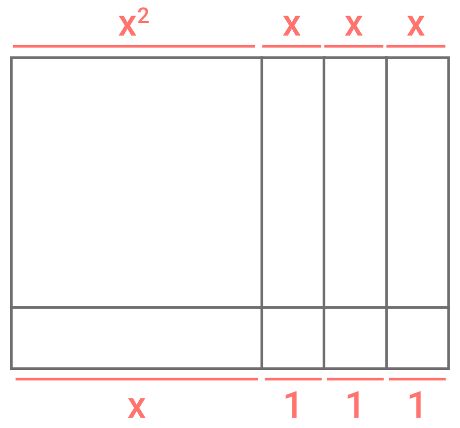
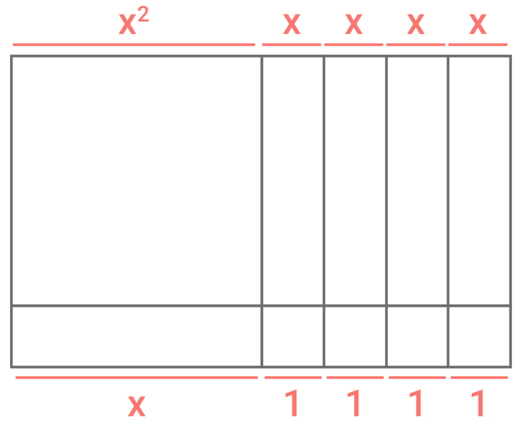
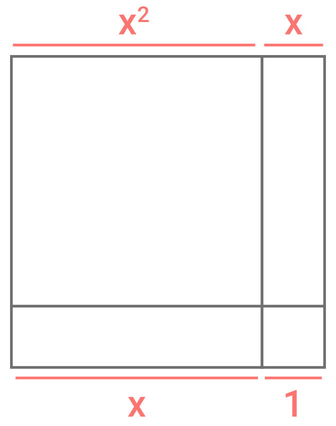
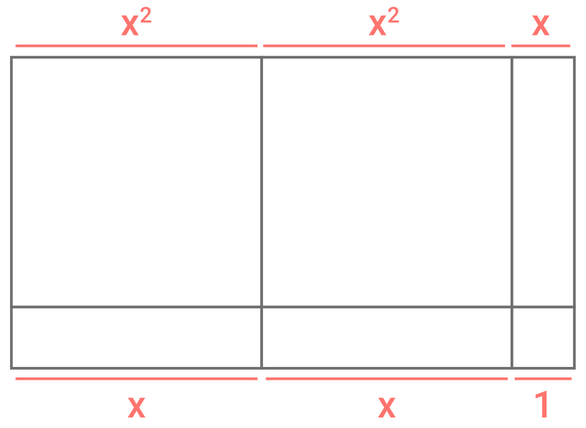


FORMA FATORADA: $(x)(2x - 1)$

Após essa exploração, organize os estudantes em grupos. Disponibilize no quadro a tabela abaixo e peça que a copiem no caderno. Convide-os a construir retângulos, utilizando as fichas brancas e vermelhas, e a completar a tabela.

Expressão algébrica	Figura	Medida dos lados do retângulo obtido	Expressão na forma fatorada
$x^2 + x$			
$x^2 + 2x$			
$x^2 + 4x$			
$2x^2 - x$			
		(x) e $(x - 2)$	$x \cdot (x - 2)$

Expressão algébrica	Figura	Medida dos lados do retângulo obtido	Expressão na forma fatorada
$x^2 + x$		(x) e (x + 1)	x.(x + 1)
$x^2 + 2x$		(x) e (x + 2)	x.(x + 2)
$x^2 + 4x$		(x) e (x + 4)	x.(x + 4)
$2x^2 - x$		x e (2x - 1)	(x) . (2x - 1)
$x^2 - 2x$		(x) e (x - 2)	x . (x - 2)

Expressão algébrica	Figura	Medida dos lados do retângulo obtido	Expressão na forma fatorada
$x^2 + 4x + 3$		$(x + 1)$ e $(x + 3)$	$(x + 1).(x + 3)$
$x^2 + 5x + 4$		$(x + 1)$ e $(x + 4)$	$(x + 1).(x + 4)$
$x^2 + 2x + 1$		$(x + 1)$ e $(x + 1)$	$(x + 1).(x + 1)$ ou $(x + 1)^2$
$2x^2 + 3x + 1$		$(x + 1)$ e $(2x + 1)$	$(x + 1).(2x + 1)$

Para finalizar a etapa, convide os estudantes a registrar no lapbook as suas aprendizagens e todos os termos utilizados na atividade. Incentive-os a fazer desenhos, esquemas, breves descrições e/ou lembretes e dar exemplos de situações relacionadas ao tema estudado. Explique que a fatoração será muito útil na resolução das equações do 2º grau, que é o próximo tema a ser estudado nesta SD.

Para se aprofundar

Para aprofundar a exploração da fatoração de expressões algébricas quadráticas, você pode propor as atividades disponíveis nos planos de aula da Nova Escola:

- "Usando o fator comum para fatorar expressões quadráticas", disponível em: bityli.com/usando-o-fator-comum (acesso em: 7 jun. 2022).
- "Resolver situações-problemas associados a mais de um caso de fatoração", disponível em: bityli.com/resolver-situacoes-problemas (acesso em: 7 jun. 2022).

Você pode também utilizar propostas do material didático disponível em sua escola.

Atenção para a avaliação!

No final da proposta, incentive os estudantes a registrar o significado de área e perímetro, aplicar a propriedade distributiva, fatorar uma expressão algébrica e colocar em evidência. Eles podem fazer o registro escrito no caderno e, depois, você propõe uma correção coletiva para que cada um aprimore o que escreveu.

É muito importante que os estudantes tenham clareza que:

- Assim como aprenderam a multiplicar e dividir números e exploraram as propriedades dessas duas operações, agora fazem o mesmo com as expressões algébricas.
- O cálculo algébrico envolvendo a fatoração e a propriedade distributiva estuda como efetuar o produto de expressões com letras, ampliando assim o seu conhecimento sobre essas operações.
- A fatoração permite resolver algumas equações com maior rapidez e eficiência.

Professor/a, sugerimos que você elabore uma prova com os principais conceitos trabalhados até o momento. Mas atenção: antes de organizar esse instrumento, sugerimos uma parada para reflexão a respeito da "prova convencional", que ainda é o instrumento mais utilizado para avaliar a aprendizagem dos estudantes.

Inicialmente, gostaríamos de destacar alguns pontos para que você reflita e anote se concorda ou não com cada um deles em relação à sua prática docente:

Geralmente a prova:

- É uma situação na qual o aluno se depara com uma atividade individual.
- Dispõe de um tempo limitado.
- Não permite a consulta dos materiais didáticos para solucionar dúvidas.
- Não permite pedir ajuda ao colega ou ao professor.

Funções da prova

- Evidenciar algumas aprendizagens (e não outras).
- Valor externo em relação a outros possíveis indicadores do rendimento escolar.
- Meio de aprendizagem para o aluno.
- Meio de comunicação entre o professor e o aluno.

Tipos de provas mais comuns::

- Escritas - ensaio ou resposta livre; de respostas breves.
- Objetivas com perguntas de verdadeiro-falso; de múltipla escolha; de relação de pares; de preenchimento de lacunas.

Com base nessa reflexão inicial apresentada acima, gostaríamos de trazer alguns pontos importantes relacionados ao instrumento prova e que merecem muita atenção. Quais os cuidados que você tem no momento de:

- Elaborar a prova?
- Preparar os estudantes para a sua realização?
- Propor a prova aos estudantes?
- Devolver a prova aos estudantes?
- Planejar/propor intervenções com base nas evidências obtidas com a correção da prova?

Após essas reflexões, deixamos aqui algumas ideias iniciais que podem contribuir com um novo olhar para a avaliação formativa, que visa não apenas constatar os conhecimentos ou não conhecimentos dos estudantes, mas contribuir com a sua aprendizagem e evolução:

Como preparar o estudante para a prova?

- Elaboração conjunta do roteiro de estudos para a prova.
- Atividades com o roteiro de estudos.

Propor diferentes tipos de provas

- Prova oral;
- Prova escrita:
    - Com consulta a uma cola autorizada (pode ser algum texto produzido por eles);
    - Em dois tempos: o professor recolhe a avaliação e faz marcações dos erros cometidos e dá dicas. No dia seguinte, entrega a avaliação e solicita aos estudantes que se dediquem a rever a avaliação com base nas dicas, finalizando a correção após esse "segundo tempo";
    - Falsa prova: uma prova toda preenchida com questões realizadas de modo correto e incorreto. A tarefa é ser o professor e corrigir as questões dadas. Para as que estiverem erradas, deverão fazê-las corretamente;
    - Em duplas ou grupos.

Pequenas modificações na prova

Incluir:

- Os objetivos de cada questão;
- Espaço para o professor preencher com as dificuldades percebidas;
- Quadro com os possíveis erros para o professor assinalar;
- Espaço para o aluno explicar porque não resolveu a questão/quais dúvidas teve.

O que fazer após a prova? Professor/a:

- Tabulação de dados para acompanhamento/comparação com outros dados, por exemplo, tarefas de casa.
- Atividade após a prova (orientação de estudo), na qual você poderá evidenciar para os estudantes os seus objetivos e o que já aprenderam. É possível, ainda, propor a resolução de uma lista de exercícios na qual os estudantes devem escolher com base nos erros e nas dificuldades que tiveram. Ao final, eles avaliam se a atividade ajudou a avançar.
- Separação de alguns tipos de erros clássicos, cometidos pelos estudantes, e proponha que façam uma análise e levantem pistas para não os cometer novamente.
- Realização de uma conversa aberta sobre a prova: o que foi mais fácil, o que foi mais difícil, que pontos retomar (onde e quando).
- Elaboração conjunta do roteiro para a reunião de pais.

O que fazer após a prova? Estudantes:

- Análise e correção dos erros cometidos.
- Correção da prova – análise do que fez/o que é correto/por que errou.
- Realização de comentários por escrito dos estudantes sobre o que acharam da prova.
- Análise da prova corrigida com o gabarito feito pelo professor.

Para ampliar suas reflexões e saber mais sobre o tema, sugerimos a leitura do texto “Avaliação escolar e seus instrumentos”, de Katia Stocco Smole, disponível em: bityli.com/instrumento-avaliacao (acesso em: 2 jul. 2022).

Atividade 2

ATIVIDADE 2

RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Foco: Explorar diferentes estratégias para resolver equações do 2º grau.

Tempo sugerido: 10 horas/aula.

Possíveis materiais:

- Papel quadriculado: uma folha para cada estudante.
- Calculadora: uma ou duas para cada grupo. Caso seja possível, eles podem utilizar a calculadora disponível no smartphone.
- Acesso ao vídeo bityli.com/baskhara (acesso em: 10 ago. 2022). Caso esse acesso não seja possível na sala de aula, você pode sugerir que o estudante assista ao vídeo em casa, ou então você pode disponibilizar, para pesquisa, alguns livros didáticos que exploram a fórmula de Bhaskara.
- 1 cópia do **Anexo 6** para cada grupo de estudantes. Você pode disponibilizar a versão impressa ou digital (enviar por e-mail ou pelo grupo de WhatsApp).
- 1 cópia do **Anexo 7** para cada estudante. Você pode disponibilizar a versão impressa ou digital (enviar por e-mail ou pelo grupo de WhatsApp).

Nesta etapa, a ideia é explorar a resolução de equações do 2º grau com diferentes estratégias: fatoração, soma e produto e a fórmula resolutiva, de maneira a levar o estudante a refletir qual destas estratégias é mais indicada para cada caso. As explorações serão apoiadas em forte apelo na investigação e em atividades em grupos.

Essa escolha tem como objetivo se opor ao ensino meramente expositivo e ao treino de técnicas, que muitas vezes não tem significado para os estudantes, e pode estar relacionado a não aprendizagem do tema pelos estudantes. A proposta visa também consolidar o desenvolvimento da habilidade EF09MA09 - Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

A proposta também contribui com o desenvolvimento da Competência Geral 4, visando utilizar a linguagem matemática e científica para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. Além disso, o diálogo, a resolução de conflitos, a cooperação e o respeito permeiam todo o processo, o que contribui com o desenvolvimento da Competência Geral 9 proposta na BNCC. Você pode relembrar estas competências aqui: “Base Comentada - Matemática e suas tecnologias”,- disponível em: bityli.com/mat-e-tec (acesso em: 5 jun. 2022).

ORIENTAÇÕES GERAIS PARA GESTÃO DA SALA DE AULA

Professor/a, a proposta é que, ao longo das aulas, além das habilidades cognitivas, você observe, registre e avalie questões relacionadas ao processo de resolver problemas, de desenvolver a capacidade argumentativa (raciocínio lógico) e as habilidades relacionadas à comunicação, à autoconfiança, à autogestão (como a organização, a persistência e a responsabilidade) e a forma de aprender colaborativamente. Por isso, tenha um caderno/bloco por perto (em papel ou na versão virtual) para anotar suas observações sobre cada estudante.

Foque suas atenções nos seguintes pontos:

- **Autoconfiança e comunicação:** Os estudantes expressam suas opiniões sem temer julgamento do colega ou do/a professor/a? Como resolvem os impasses nos trabalhos em grupo? Participam das discussões coletivas? Todos se sentem ouvidos por você?

- **Colaboração:** Todos participam e colaboram com o trabalho do grupo? Como você procura envolver aqueles que demonstram falta de iniciativa ou que não têm espaço no grupo para expor sua opinião? Os estudantes demonstram respeito aos diferentes conhecimentos e opiniões?

- **Autogestão:** Os estudantes se organizam para estudos individuais e em grupos? Demonstram responsabilidade pelas atividades e propostas realizadas em sala de aula e em casa? De que forma você incentiva a persistência e a motivação diante de desafios e erros na resolução de problemas?

- **Leitura e resolução de problemas:** Os estudantes identificam os dados em cada problema? Eles se arriscam em elaborar alguma estratégia para resolver o problema ou ficam aguardando a resolução do colega ou do/a professor/a?

Sua gestão da sala de aula:

- Você procura envolver todas as/os duplas/grupos na tarefa de buscar uma solução para as situações-problema propostas?
- Você proporciona um ambiente de liberdade de expressão para seus estudantes?
- O que você tem a dizer sobre seus estudantes para os demais professores a respeito da forma como tem organizado as suas aulas?

Visite com frequência seus registros. Eles podem dar excelentes pistas tanto no momento do planejamento das suas aulas quanto nos momentos de avaliação dos estudantes.

Professor/a, o texto “Abrindo Nossas Ideias: Como uma abordagem matemática voltada para todos os alunos promoveu respeito, responsabilidade e alto rendimento” (sugerido como leitura no início desse documento e disponível em: bityli.com/yc-nossas-ideias pode apoiar suas reflexões sobre a gestão da aula.

ATIVIDADE 2 ▶ **MOMENTO 1**

2 aulas:

Reconhecer equação do 2º grau e resolver equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$ (b = 0)

Inicie a proposta com uma roda de conversa, retomando alguns conceitos já estudados. Você pode fazer essa exploração a partir de duas sentenças escritas no quadro, por exemplo: $5x - 4 = 2x + 8$ e $5x - 4$. Peça que identifiquem semelhanças e diferenças entre elas. Questione: "Qual o papel da letra em cada uma das situações apresentadas? O que significa resolver uma equação? Como resolver uma equação?".

Garanta que todos reconheçam que resolver uma equação significa encontrar o(s) valor(es) da letra(incógnita) que torna(m) a expressão verdadeira e que uma equação pode ser resolvida por cálculo mental, por tentativa e erro ou mesmo por meio de um algoritmo (passo a passo) de resolução. No caso de equação apresentada acima, a solução é 4, pois $5 . 4 - 4 = 2 . 4 + 8$.

Após essa exploração inicial, anuncie que, nesta proposta, o foco é ampliar o estudo de equações e que esse estudo vai começar com uma "brincadeira". Apresente várias equações em um quadro e peça para que, em duplas, conversem sobre as características dessas equações e anotem suas observações.

Exemplos de equações que podem ser apresentadas:

$x^2 - 2x = 4$	$x^2 = 0$	$x^2 - 5x=0$
$x^2 = 16$	$4x - 2 = 3x - 1$	$0 = 13 - 5x$
$3x^2 = 27$	$x^2 + 3x - 2 = 0$	$- x^2 - x + 9 = 0$
$4x - 2 = 0$	$x^2 = -25$	$x^2 - 121 = 0$

Dê um tempo adequado para a realização da proposta. Enquanto isso, circule pela sala e aproveite o momento para verificar se os estudantes utilizam o vocabulário algébrico, ou se precisam de um apoio, e se justificam com argumentos convincentes as características observadas.

Aproveite o momento para selecionar quais as duplas que identificaram características diferentes para que você as convide para apresentá-las aos colegas no momento coletivo.

Alguns critérios que podem surgir são: possuem apenas 2 termos ou possuem mais do que 2 termos; possuem 2 como maior expoente de x ou possuem 1 como maior expoente de x (1º grau). Nesse momento, explore as características observadas e aproveite para introduzir o vocabulário adequado. Peça aos estudantes que completem seus registros com uma característica apresentada pelos colegas e que ele não tinha identificado antes.

Em seguida, apresente o quadro abaixo e peça que reescrevam na coluna adequada as equações apresentadas:

Equações do 1º grau	Equações do 2º grau

Explique que, entre as equações apresentadas, existem equações do 1º grau (que já foram estudadas anteriormente) e equações do 2º grau, que serão o foco de estudo nesta etapa da sequência didática.

Sistematize que uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c representam números reais e $a \neq 0$, é chamada equação do 2º grau e que resolver uma equação do 2º grau é encontrar o(s) valor(es) da incógnita(letra) que a torna(m) verdadeira.

Peça que observem as equações do 2º grau disponibilizadas anteriormente e as organize na tabela a seguir, que pode ser construída no caderno. Em seguida, peça que completem todas as informações.

Equação (na forma $ax^2 + bx + c = 0$)	a	b	c
$x^2 - 2x - 4 = 0$	1	-2	-4
$x^2 - 16 = 0$	1	0	-16
$3x^2 - 27 = 0$	3	0	-27
$x^2 + 3x - 2 = 0$	1	3	-2
$x^2 = 0$	1	0	0
$x^2 + 25 = 0$	1	0	25
$x^2 - 5x = 0$	1	-5	0
$-x^2 - x + 9 = 0$	-1	-1	9
$x^2 - 121 = 0$	1	0	-121

Pergunte semelhanças e diferenças entre essas equações e formalize que as equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais diferentes de zero, são equações completas, mas que existem casos em que $b = 0$ e/ou $c = 0$ e, nesses casos, as equações são ditas incompletas. Incentive-os a anotar em seus lapbooks todos os termos e conceitos aprendidos.

Organize os estudantes em pequenos grupos e apresente os desafios disponíveis no **Anexo 6**.

EXERCÍCIO 1

A professora do 1º ano pediu que seus alunos resolvessem a seguinte equação do 2º grau incompleta: $x^2 - 81 = 0$. Abaixo estão as estratégias utilizadas por 3 jovens desta turma. O seu desafio é compreender a resolução de cada jovem e verificar se ela está correta. Caso a resposta esteja incorreta, você precisa escrever uma pista para ajudar o estudante a aprimorar a sua estratégia.

MANU

Eu acho mais fácil resolver por cálculo mental. Primeiro eu sei que a equação $x^2 - 81 = 0$ é equivalente a $x^2 = 81$.
Para resolver essa equação, eu preciso pensar em um número que elevado ao quadrado dá 81.
Essa é fácil!
Eu sei que $(-9)^2 = 81$, então a resposta é -9.

CRIS

Eu resolvi assim:
$x^2 - 81 = 0$
$x^2 = 81$
Existem 2 números que tornam essa equação verdadeira:
o 9 e o (-9), pois $(9)^2 = 81$ e $(-9)^2 = 81$.
Então são duas as respostas: 9 e -9.

PEDRO

Eu sei que preciso encontrar o valor da incógnita x que torna a sentença verdadeira.
Então, eu pensei assim:
$x^2 - 81 = 0$
$x^2 - 81 + 81 = 0 + 81$
$x^2 = 81$
A resposta é 9, pois $9^2 = 81$.

Resposta: Espera-se que os estudantes concluam que a Cris está correta e que escrevam para os demais a seguinte pista: existem 2 números que tornam essa equação $x^2 - 81 = 0$ verdadeira: o 9 e o (-9), pois $(9)^2 = 81$ e $(-9)^2 = 81$.

EXERCÍCIO 2

Agora que você analisou as resoluções de Pedro, Manu e Cris, volte nas equações do 2º grau apresentadas no início desta proposta. Selecione e resolva em seu caderno aquelas que possuem as mesmas características que a equação resolvida pelos jovens.

Resposta: Espera-se que os jovens identifiquem que a característica da equação é b = 0 e que resolvam as equações.

Equação (na forma $ax^2 + bx + c = 0$)	a	b	c	Raízes
$x^2 - 16 = 0$	1	0	-16	-4 e +4
$3x^2 - 27 = 0$	3	0	-27	-3 e +3
$x^2 = 0$	1	0	0	0
$x^2 + 25 = 0$	1	0	25	
$x^2 - 121 = 0$	1	0	-121	-11 e +11

No final da proposta, convide alguns estudantes para apresentar suas resoluções no quadro e comente as estratégias, fazendo os alinhamentos e as correções necessárias. Explore no coletivo a equação $x^2 + 25 = 0$ e questione como resolveria. É possível que respondam:

$x^2 + 25 = 0$ ▸ $x^2 + 25 - 25 = -25$ ▸ $x^2 = -25$

Nesse momento, questione qual é o número real que elevado ao quadrado resulta em -25. Anote no quadro as possíveis respostas sem emitir juízo de valor - certo ou errado -, mas peça que conversem sobre essas possibilidades. Se necessário, apresente algumas perguntas norteadoras:

- Quanto é 5^2?
- E $(-5)^2$?
- E -5^2?
- E então, qual o número real que elevado ao quadrado resulta -25?

Sistematize que não existe esse número, logo a equação $x^2 + 25 = 0$ não possui raiz real.

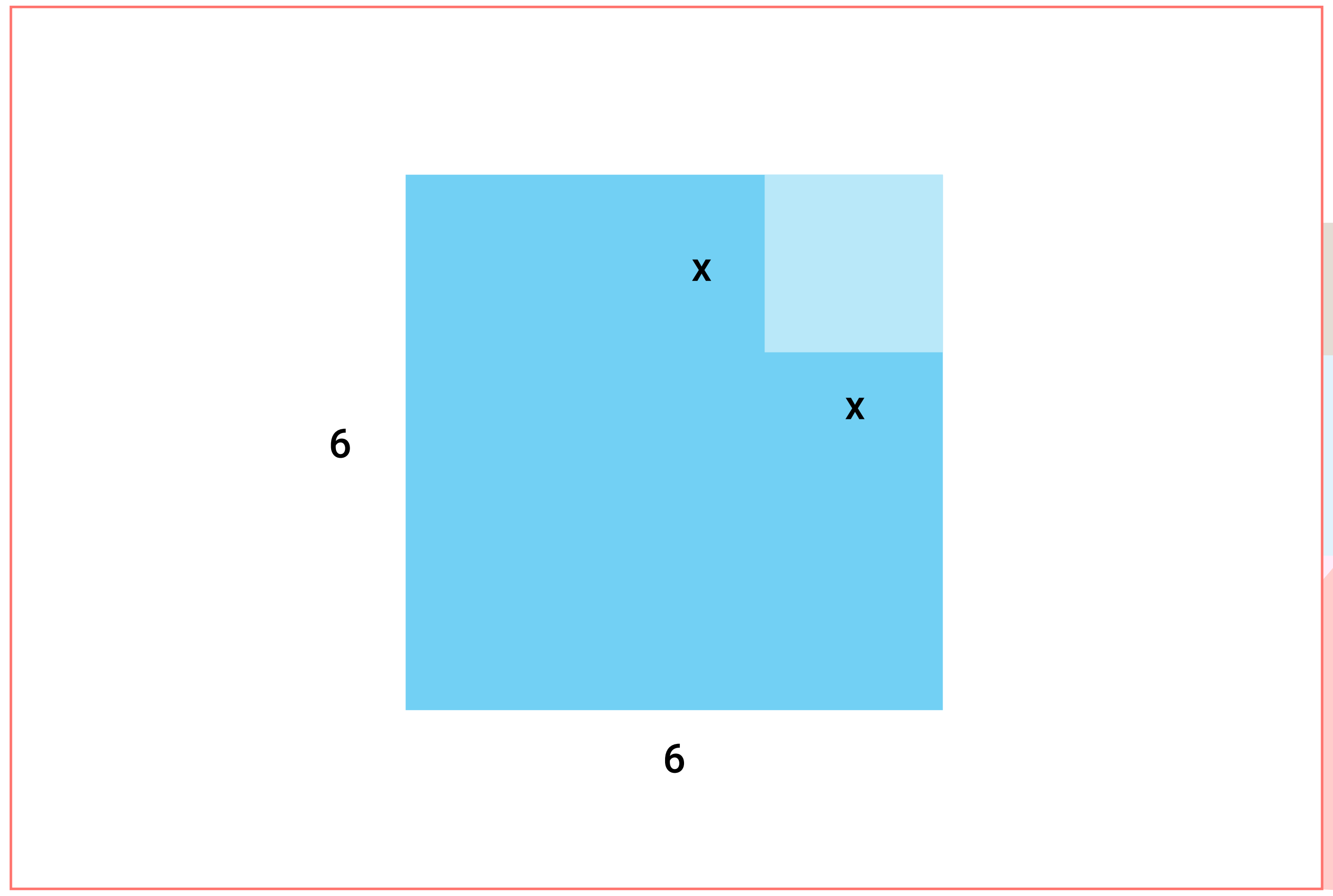
Com o objetivo de ampliar os estudos envolvendo equações do 2º grau e a resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$, apresente exercícios e problemas que possam ser modelados e resolvidos com esse tipo de equação e convide os estudantes a resolvê-los em duplas, como:

De um tecido quadrado de 6m, foi retirada uma parte também quadrada, conforme a figura abaixo.

a) Escreva uma expressão algébrica para representar a área restante. $36 - x^2$

b) Se x = 3m, qual a área restante do tecido? $27m^2$

c) Determine o valor de x se a área restante for 11?
$36 - x^2 = 11$ logo x = 5m



Você pode selecionar outras atividades do material didático. Para sistematizar as aprendizagens, convide os estudantes a organizar um algoritmo/fluxograma que expresse o passo a passo para resolver equações incompletas de 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$. Eles podem trabalhar em pequenos grupos.

Vale lembrar que:

- A BNCC (2018) propõe que os estudantes sejam estimulados a desenvolver o pensamento computacional por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas.

- O algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos (BNCC, 2018, p. 273).

Professor/a, os estudantes já produziram um fluxograma na segunda SD deste material. Por isso, você pode iniciar esse momento retomando o que já fizeram:

- Vamos relembrar o fluxograma que construímos?
- Como ele era?
- Para que servia?
- Como ele era organizado?
- Quais as modificações que você faria no fluxograma construído para expressar o passo a passo para resolver equações incompletas 2º grau, do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$?

Enquanto realizam a proposta, circule pelos grupos. A elaboração do fluxograma pode dar pistas para o/a professor/a sobre aquilo que o estudante já sabe e o que ainda precisa rever sobre resolução de equações incompletas. Faça registros dessas observações, pois, com base nelas, você pode propor intervenções assertivas para contribuir com a aprendizagem dos estudantes, por exemplo, você pode convidar os estudantes que já sabem para serem tutores daqueles que ainda apresentam fragilidades.

Exemplo de resposta esperada:

INÍCIO

↓

LEIA A EQUAÇÃO

$ax^2 + c = 0 \ (a \neq 0)$

↓

SOME O OPOSTO DE C (-C) NOS DOIS MEMBROS DA EQUAÇÃO, OBTENDO

$ax^2 = -c$

↓

DIVIDA OS DOIS MEMBROS DA EQUAÇÃO POR A, OBTENDO

$x^2 = \frac{-c}{a} > 0$

↓

QUANDO

$\frac{-c}{a} > 0$

↓

AS RAÍZES DA EQUAÇÃO SÃO

$\sqrt{\frac{-c}{a}}$ e $-\sqrt{\frac{-c}{a}}$

↓

FIM

ATIVIDADE 2 ▸ **MOMENTO 2**

2 aulas:

Resolvendo equações do 2º grau incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0)$

O foco desta etapa é discutir estratégias para resolver equações do 2º grau incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0)$. É bem possível que, no decorrer da atividade, o estudante identifique que a fatoração pode ser uma excelente estratégia para resolver esse tipo de equação, porém, cabe ao professor explorar que existem outras estratégias possíveis e assegurar que o estudante tenha a autonomia para escolher aquela que lhe parecer “mais fácil”.

Organize os estudantes em pequenos grupos e apresente uma situação-problema que possa ser modelada por uma equação do tipo $ax^2 + bx = 0$, como:

Pensei em um número real. Elevei-o ao quadrado. Depois, somei o dobro do número pensado. E, para minha surpresa, obtive zero como resultado. Em que número pensei?

Convide-os a resolver o problema em uma folha. Incentive-os a buscar diferentes estratégias de resolução: desenhos, esquemas, tabelas, entre outras.

Enquanto eles realizam a proposta, circule pelos grupos e verifique se eles têm a iniciativa de buscar uma estratégia inicial de formular hipóteses. Se necessário, faça algumas perguntas para ajudá-los a iniciar o processo de resolução, como:

- Será que o número pensado poderia ser 3? Explique porque não poderia.
- O que precisa acontecer para que a soma desses dois números seja igual a zero? Como essa informação pode lhe ajudar a resolver o problema?

Caso o grupo encontre o número -2 como resposta, por exemplo, questione se haveria algum outro número nestas mesmas condições e incentive-os a continuar a investigação.

Anote a estratégia escolhida por cada grupo. Depois da resolução, peça aos estudantes que troquem as folhas de resolução, garantindo que cada grupo receba uma estratégia diferente daquela que utilizou. A ideia é que cada grupo analise a produção de um dos grupos, depois registre no quadro e explique para a turma a estratégia utilizada. Peça que identifiquem semelhanças e diferenças entre as estratégias apresentadas. Convide os estudantes a escolher uma das estratégias apresentadas (diferente daquela que eles utilizaram inicialmente) e a copiá-la em seu caderno. Pergunte qual das estratégias eles acharam mais fácil, qual a mais difícil e peça que expliquem porque ela é fácil ou difícil.

Exemplos de estratégias esperadas:

a) Tabela (tentativa e erro):

NÚMERO PENSADO	NÚMERO PENSADO AO QUADRADO	DOBRO DO NÚMERO PENSADO	SOMA (EXPRESSÃO)	RESULTADO
1	1	2	1 + 2	3
-1	1	-2	1 - 2	-1
2	4	4	4 + 4	8
-2	4	-4	4 - 4	0
0	0	0	0 + 0	0

Resposta: Pensei no número zero ou no número -2.

b) Utilizando a modelagem e o Cálculo Mental:

Descobri que, para a soma dar zero, os dois números precisam ser opostos, como um número ao quadrado é sempre positivo, então o dobro desse número precisa ser negativo. A partir daí, escrevi a expressão $x^2 = -2x$. Fiquei pensando e descobri que quando $x = 0$, temos $0^2 = -2.0$, então o número pensado pode ser o zero. Mas também descobri que $(-2)^2 = -2.(-2)$, então o número pensado também pode ser o -2.

O próximo passo é ampliar o repertório dos estudantes e explorar a resolução por fatoração. Em outra aula, inicie com uma proposta de cálculo mental para retomar uma propriedade que é essencial para a resolução por fatoração. Coloque no quadro alguns produtos incompletos e peça que completem e, em seguida, observem as regularidades presentes, por exemplo:

___ x 3 = 0	5 x 0 = ___	6 x ___ = 12
2 x ___ = 0	___ x ___ = 6	___ x ___ = 6
0 x 15 = ___	7 x 0 = ___	___ x ___ = 0
	0 x ___ = 6	

Após a realização da atividade, convide alguns estudantes para contarem como completaram as igualdades, explicarem porque fizeram essas escolhas e quais as regularidades encontradas. Explore que as igualdade ___ x ___ = 0 pode ser completada de diferentes maneiras (5 x 0, 0 x 9 etc.), já a igualdade 0 x ___ = 6 não pode ser completada, pois é impossível o produto ser 6 se um dos fatores é zero.

Sistematize que, para um produto ser igual a zero, um dos fatores necessariamente deve ser igual a zero. Solicite que registrem suas aprendizagens no lapbook e oriente-os a consultá-lo durante a próxima etapa da atividade, pois aqui vão retornar e mobilizar/aplicar alguns temas já estudados para conhecer mais uma estratégia de resolução de equações do 2º grau incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$).

Para realizar a próxima etapa, oriente-os a consultar o problema da última aula que envolvia uma equação incompleta:

Pensei em um número real. Elevei-o ao quadrado. Depois, somei o dobro do número pensado. E, para minha surpresa, obtive zero como resultado. Em que número pensei?

Retome com a turma a equação que modela essa situação, $x^2 + 2x = 0$, e diga que eles estudarão agora outra forma de resolvê-la.

Pergunte se é possível fatorar o primeiro membro e peça que consultem o lapbook para retomar os registros sobre fatoração. Se necessário, apresente algumas questões norteadoras:

- Lembram o que é fatorar?
- Lembram qual estratégia utilizamos para fatorar algumas expressões algébricas no momento 4 da Atividade 1 desta sequência?
- Existe algum fator comum na expressão $x^2 + 2x$?

Espera-se que os estudantes concluam que:
$x^2 + 2x = x\ (x + 2)$.

Escreva no quadro a equação e reescreva-a utilizando a forma fatorada:

$x^2 + 2x = 0$
$x\ (x + 2) = 0$

Questione: “O que é preciso acontecer para que esse produto fique igual a zero?”. Com base nessas reflexões, coletivamente, vá explicando e registrando no quadro:

$x\ (x + 2) = 0$ para um produto ser igual a zero, um dos fatores precisa ser zero, então
$x = 0$ ou $x + 2 = 0$
$x = 0$ ou $x = -2$ que são as soluções da equação $x^2 + 2x = 0$

Proponha a resolução de mais algumas situações envolvendo equações do 2º grau incompletas:

$3y^2 - y = 0$, $t^2 - 5t = 0$, entre outros.

Proponha também a resolução de problemas como os propostos a seguir ou similares:

O triplo do quadrado é igual a 15 vezes este número. Qual é esse número?

Resposta esperada:
$3n^2 = 15n$ $3n^2 - 15n = 0$ $n(3n - 15) = 0$ $n = 0$ ou $n = 5$,
logo o número pode ser 0 ou 5.

Em uma conversa, aproveite para sistematizar que sempre é possível escrever $ax^2 + bx = 0$ na forma fatorada $x\ (ax + b) = 0$, por isso a fatoração pode ser uma excelente estratégia para resolver essas equações do 2º grau incompletas.

Com o objetivo de ampliar os estudos envolvendo equações do 2º grau e a resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $c = 0$, apresente exercícios e problemas que possam ser modelados e resolvidos com esse tipo de equação. Você pode selecionar atividades do material didático.

Professor/a, no final desta etapa, convide os estudantes a registrar no seu lapbook as descobertas/aprendizagens realizadas. Incentive-os a fazer desenhos, esquemas, breves descrições e/ou lembretes relacionados ao tema estudado.

Atenção para a avaliação!

Para acompanhar as aprendizagens, você pode pedir para que os estudantes escrevam um e-mail contando tudo o que já aprenderam sobre resolução de equações do 2º grau para você.

Peça também que reflitam sobre sua postura durante a realização da proposta. Lembre-se de que fazer uma autoavaliação não é um processo simples, por isso sugerimos que apresente para os estudantes alguns pontos para reflexão:

- Você conseguiu expressar no trabalho em grupo suas opiniões sem temer o julgamento do colega?
- Soube ouvir a opinião dos colegas? Todos se sentiram ouvidos por você?
- Colaborou para que o grupo resolvesse o problema proposto?
- Como resolveu os impasses com grupo?
- Participou ativamente dos momentos de discussões coletivas?
- O que você poderia mudar na próxima atividade em grupo para contribuir mais com os seus colegas, para aprender mais e para garantir que nenhum colega fique para trás?

Para se aprofundar

Professor/a, antes de seguir com a exploração desta SD, que tal convidar os estudantes para explorarem um pouco a origem africana da História da Matemática? Pergunte se algum deles conhece a contribuição dos africanos para a Matemática. Se teriam exemplos a citar dessas contribuições.

Provavelmente os alunos responderão que não conhecem ou sabem pouco, o que abre a possibilidade de mais um questionamento: “Por que estudamos pouco sobre o conhecimento produzido pelos africanos na Matemática?”.

Em seguida, o professor apresenta os vídeos.

- A Matemática Africana Antiga”, disponível em: bityli.com/mat-africa (acesso em: 9 jun. de 2022).
- Geometria Sona”, disponível em: bityli.com/geo-sona (acesso em: 9 jun. 2022).

E a realizar a leitura do texto: “Professora usa a cultura africana para ensinar matemática”, disponível em: bityli.com/mat-cultura-afri (acesso em: 9 jun. 2022).

Em seguida, promova um debate para que os estudantes contem suas aprendizagens, os pontos que chamaram a atenção.

Aqui pode surgir um importante debate sobre colonialidade do saber e como nosso conhecimento está pautado em uma perspectiva eurocêntrica, que apaga os conhecimentos produzidos por povos africanos, indígenas, populações negras em diáspora, entre outros.

Pergunte se eles acham relevante saber mais sobre o tema e convide-os a continuar pesquisando sobre ele.

Convide-os a organizar formas de divulgar na escola a influência africana para a história da Matemática. Eles podem, por exemplo, organizar uma semana para debater o tema: apresentar os vídeos, o texto, e outros materiais que encontrarem em suas pesquisas e promover um debate com os colegas de outras turmas.

Atenção, professor/a, sugerimos os dois artigos abaixo para ampliar o seu repertório sobre o tema:

“Opção decolonial e modos outros de conhecer na Educação (Matemática)]”, de Carolina Tamayo e Jackeline Rodrigues Mendes, disponível em: bityli.com/ed-decolonial (acesso em: 11 ago. 2022).

“Matemática e colonialidade, lados obscuros da modernidade: giros decoloniais pela Educação Matemática”, de Filipe Santos Fernandes, disponível em: bityli.com/mat-e-colonialidade (acesso em: 11 ago. 2022).

ATIVIDADE 2 ▶ MOMENTO 3

5 aulas:

Resolvendo equações do 2º grau completas (fatoração, soma e produto das raízes e fórmula de Bháskara)

ETAPA 1

Resolvendo equações do 2º grau completas utilizando a fatoração

O foco da 1ª etapa do momento 3 é explorar a resolução de equações do 2º grau completas utilizando a fatoração. A ideia é retomar o estudo de fatoração de expressões algébricas realizado anteriormente e mobilizar os conhecimentos adquiridos para resolver situações que envolvem equações do 2º grau completas.

Inicie o momento retomando o que já estudaram sobre resolução de equações do 2º grau. Você pode colocar duas equações no quadro e convidá-los a resolver: $x^2 - 25 = 0$ e $a^2 + 5a = 0$.

Converse com a turma alertando que todas as equações que resolveram são incompletas e que agora vão avançar para resolver equações completas, mas diga que fiquem tranquilos. pois algumas delas poderão ser resolvidas com estratégias bastante semelhantes com as já utilizadas por eles.

Apresente então a equação $x^2+4x+3=0$ e pergunte se eles saberiam encontrar a forma fatorada para a expressão que está no 1º membro (x^2+4x+3). Diga que podem pesquisar a tabela contendo as fatorações já construída nesta SD.

Após a pesquisa dos estudantes, sistematize que a forma fatorada de x^2+4x+3 é $(x + 1).(x + 3)$, assim a equação $x^2+4x+3 = 0$ pode ser escrita de outra forma: $(x + 1).(x + 3) = 0$. Amplie as discussões questionando: “Aqui vocês têm um produto? E qual o resultado desse produto? Em que situações o produto pode ser igual a zero?” Peça que conversem com o colega ao lado, e que, juntos, tentem formular hipóteses/validar hipóteses. Enquanto eles realizam a proposta, circule pelos grupos e apresente algumas perguntas norteadoras para ampliar as reflexões já iniciadas no momento anterior.

Depois que os grupos realizaram a proposta, abra uma roda de conversa. Convide alguns estudantes a explicar como pensaram e quais as conclusões do grupo. Aproveite o momento para sistematizar que se o resultado de um produto é igual a zero, necessariamente pelo menos um dos seus fatores é zero, logo:

$(x + 1).(x + 3)= 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -3$, então -1 e -3 são as raízes da equação $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Se necessário, retome o significado de que resolver uma equação é encontrar sua(s) raiz(raízes), ou seja, encontrar todos os valores que podem substituir o valor da incógnita e que tornam essa equação verdadeira.

Assegure-se de que todos entenderam e peça que completem a 1ª linha da tabela. Em seguida, proponha que os grupos realizem a atividade a seguir, que pode ser colocada no quadro e os estudantes copiam no caderno. Oriente-os a buscar a forma fatorada do 1º membro das equações na tabela construída na 1ª atividade desta SD. As resposta esperadas estão destacadas em vermelho.

Equação $ax^2 + bx + c = 0$	Equação na forma fatorada $(x+p).(x+q)=0$	Raízes da equação (-p e -q)
$x^2 + 4x + 3 = 0$	$(x + 1).(x + 3) = 0$	-1 e -3
$x^2 + 5x + 4 = 0$	$(x + 1).(x + 4) = 0$	-1 e - 4
$x^2 + 2x + 1 = 0$	$(x + 1).(x + 1) = 0$ ou $(x + 1)^2= 0$	-1 (duas raízes iguais)
$2x^2 + 3x + 1 = 0$	$(x + 1).(2x + 1) = 0$	-1 e -1/2
$x^2- 3x + 2 = 0$	$(x-1). (x-2) = 0$	1 e 2

Enquanto os estudantes realizam a proposta, circule pela sala, observe e registre se os estudantes reconhecem os fatores, utilizam parênteses corretamente e se reconhecem as raízes das equações.

É importante que os estudantes, em suas falas, demonstrem se estão ou não entendendo a resolução de equações do 2º grau pelo processo de fatoração. Faça orientações individuais para as dúvidas pontuais e anote as dúvidas comuns para discutir no momento coletivo.

Depois que todos completaram a tabela, divulgue um gabarito comentado e peça que identifiquem semelhanças e diferenças entre a resolução do grupo e a apresentada pelo/a professor/a e, em caso de dúvidas/ converse com os colegas ou peça ajuda do/a professor/a. Faça também uma conversa coletiva sobre a penúltima equação da tabela, pois, como ela envolve números racionais não inteiros, talvez os estudantes apresentem dificuldade em resolvê-la.

A atividade apresentada na última linha da tabela é semelhante às anteriores, porém tem como objetivo analisar equações com coeficientes negativos. Apesar da maior complexidade, geralmente os alunos se sentem muito desafiados e envolvidos com as investigações propostas.

Professor/a, no final desta etapa, convide os estudantes a registrar no seu lapbook as descobertas/ aprendizagens realizadas. Lembre-os que esse material poderá ser utilizado em momentos de exercitação ou mesmo de avaliação, desta forma, é importante fazer anotações completas, contendo esquemas, breves descrições, lembretes e alguns exemplos relacionados ao tema estudado.

Para se aprofundar

Para profundar a exploração da resolução de equações completas do 2º grau, desenvolvendo a fluência dos estudantes, utilizando a fatoração, você pode propor as atividades disponíveis nos planos de aula da Nova Escola: "Resolvendo equações quadráticas por fatoração", disponível em: bityli.com/resolvendo-quadraticas (acesso em: 7 jun. 2022).

Proponha também alguns problemas que possam ser modelados por equações completas do 2º grau e resolvidos por fatoração ou por cálculo mental, por exemplo: "O quadrado de um número real somado com o seu quádruplo resulta em -3. Qual é esse número?"

Resposta esperada: $x^2 + 4x + 3 = 0$ » $(x + 1).(x + 3) = 0$ » $(x + 1) = 0$ ou $(x + 3) = 0$ » $x = -1$ O ou $x =-3$, ou seja esse número pode ser -1 ou -3.

ATIVIDADE 2 ▶ MOMENTO 3 ▶ ETAPA 2

Resolvendo equações do 2º grau completas com base na soma e produto das raízes

A partir da exploração da forma fatorada realizada na etapa anterior, os estudantes serão convidados a observar algumas regularidades e terão contato com outra estratégia de resolução de equações completas do 2º grau: a relação entre os coeficientes e a soma e o produto das raízes de uma equação.

Diga que agora vão ampliar a discussão da forma fatorada de uma equação do 2º grau para "descobrir" outra estratégia de resolução. Disponibilize para os estudantes as orientações e a tabela a seguir. Complete o que você já sabe na tabela a seguir. Observe que algumas informações você poderá encontrar nas duas tabelas anteriores. As respostas esperadas estão destacadas em vermelho.

EQUAÇÃO	A	B	C	FORMA FATORADA	RAÍZES DA EQUAÇÃO ($X_1 . X_2$)	SOMA DAS RAÍZES ($X_1 + X_2$)	PRODUTO DAS RAÍZES
$x^2 + 5x + 4 = 0$	1	5	4	$(x + 1).(x + 4) = 0$	-1 e -4	-5	4
$x^2 + 2x + 1 = 0$	1	2	1	$(x + 1).(x + 1) = 0$ ou $(x + 1)^2 = 0$	-1 (duas raízes iguais)	-2	1
$x^2 - 3x + 2 = 0$	1	-3	2	$(x-1).(x-2) = 0$	1 e 2	3	2
$x^2 - 6x + 5 = 0$	1	-6	5	$(x-1).(x-5) = 0$	1 e 5	-6	5
$x^2 - 7x + 12 = 0$	1	-7	12	$(x-3).(x-4) = 0$	3 e 4	7	12
$x^2 + 11x + 24 = 0$	1	11	24	$(x+3)(x+8) = 0$	-3 e -8	-11	24

Em seguida, observe as equações e responda:

- Identificam alguma regularidade em todas as equações?
- Existe alguma relação entre o coeficiente b e a soma das raízes da equação $(x_1 + x_2)$? Explique.
- Existe alguma relação entre o coeficiente c e o produto das raízes da equação $(x_1 . x_2)$? Explique.

Provavelmente os estudantes inicialmente preencham apenas as 3 primeiras linhas da tabela, pois eles possuem informações sobre essas equações nas tabelas anteriores.

Como regularidades, espera-se que identifiquem que:

- Todas as equações apresentadas são do 2º grau e são completas;
- Todas as equações apresentadas possuem a = 1;
- A soma das raízes é igual a -b, isto é, $(x_1 + x_2) = -b$;
- O produto é igual a c, isto é, $x_1 . x_2 = c$.

Oriente os estudantes a registrar as regularidades encontradas e incentive-os a voltar na tabela para completar o que ainda está faltando, utilizando essas regularidades.

No final da proposta, discuta coletivamente as respostas encontradas.

Se achar necessário, apresente mais algumas propostas envolvendo todas as estratégias de resolução de equações já estudadas. Incentive o estudante a refletir e analisar as características de cada equação para escolher a estratégia que seja mais adequada.

Atenção para a avaliação!

Peça aos estudantes que retomem os registros realizados no final do Momento 2 desta atividade da SD, no quadro Atenção para a Avaliação. Lembre-os de que, naquele momento, eles foram desafiados a registrar (em um e-mail) tudo que já sabiam sobre resolução de equação do 2º grau. Peça que leiam os registros e reflitam sobre os seus conhecimentos atuais. Questione: *E agora? O que vocês já sabem sobre esse tema?* Convide-os a completar/ampliar seus registros. Eles podem utilizar caneta de outra cor para que percebam o quanto avançaram com suas aprendizagens. Destaque as aprendizagens deste período e mostre como, ainda que cada pessoa aprenda em um ritmo e tenha mais facilidade com um tipo de conteúdo ou conhecimento, todos são capazes de aprender e desenvolver habilidades diversas.

ATIVIDADE 2 ▸ MOMENTO 3 ▸ ETAPA 3

Uma fórmula para resolver equações do 2º grau

Inicie a proposta exibindo o vídeo "Esse tal de Bhaskara", disponível em: bityli.com/yt-baskhara (acesso em: 1 jul. 2022). Caso não tenham acesso ao vídeo na escola, eles podem assistir antes em casa ou na casa de algum colega. Peça aos estudantes que anotem os pontos interessantes do vídeo, o que mais chamou sua atenção, o que eles aprenderam que ainda não sabiam.

Durante a exibição do vídeo, faça algumas pausas para que possam fazer suas anotações. No final, peça que socializem suas observações e converse sobre as questões importantes do vídeo, por exemplo:

- Quais as contribuições das civilizações antigas (entre os egípcios, babilônios, gregos, hindus e europeus) para resolução da equação do 2º grau?
- Quais as semelhanças entre as estratégias de resolução que você já conhece e as que foram apresentadas no vídeo?

Em seguida, amplie a conversa, peça aos estudantes que contem o que já aprenderam sobre equações do 2º grau. Pergunte como resolveriam cada uma das equações abaixo e peça que expliquem o porquê da escolha de cada estratégia escolhida. O foco não é a resolução, mas sim a identificação das características da equação e a escolha do método mais adequado.

Analisar uma equação e decidir sobre a forma mais prática de resolvê-la é tão importante quanto saber a fórmula de Bhaskara.

$x^2 - 25 = 0$	$x^2 - 4x = 0$	$x^2 - 3x + 2 = 0$	$x^2 + 4x - 21 = 0$

Verifique se há discordâncias, sempre incentivando a justificativa. Espera-se que identifiquem que a equação $x^2 - 25 = 0$ é uma equação incompleta com $b = 0$ e que, nesse caso, é possível "isolar" o x para determinar a raiz. Já a equação $x^2 - 4x = 0$ é incompleta com $c = 0$ e, nesse caso, a fatoração é um método muito eficaz.

Já a terceira equação é completa, possui a = 1, mas não é difícil encontrar dois números cuja soma é 3 e cujo produto é 2, porém pode acontecer de os estudantes encontrarem alguma dificuldade para resolvê-la por uma das estratégias já estudadas. Relembre com eles a estratégia de resolução que envolve a soma e o produto de duas raízes da equação.

É esperado que os estudantes não consigam resolver a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ pelas estratégias já estudadas. Anuncie então que, para esses casos existe, outra estratégia de resolução: a fórmula de Bhaskara. Pergunte se algum estudante já conhece essa fórmula, o que sabe sobre ela e quando é indicado que ela seja utilizada.

Anuncie que, neste momento, quem já conhece essa estratégia de resolução vai aprofundar sua aprendizagem e quem não conhece ainda vai ter a oportunidade de estudá-la.

Você pode iniciar o momento propondo uma aula invertida. Retome com os estudantes que essa metodologia já foi utilizada anteriormente e possibilite que eles resolvam as propostas com autonomia, protagonismo e no seu ritmo. O trabalho com metodologias ativas, como a aula invertida, está relacionado ao desenvolvimento das Competências Gerais 7, 9 e 10 da BNCC, que se relacionam com desenvolver diálogo, argumentação, empatia, autoconhecimento e autogestão.

Relembre da importância do estudante se preparar com antecedência, organizando os materiais necessários e fazendo gestão do seu tempo antes da aula marcada para participar das discussões que serão realizadas com o grupo. Encaminhe as propostas de trabalho a seguir para o momento que antecede a aula. O estudante pode se preparar em casa ou mesmo na escola. Disponibilize o roteiro de estudos do Anexo 7.

Obs.: Caso os estudantes não tenham acesso aos vídeos, você pode entregar, na versão impressa, o texto “Revisão da fórmula de Bhaskara”, disponível em: bityli.com/yc-revisao-baskhara (acesso em: 11 ago. 2022) e adaptar as questões apresentadas para o vídeo.

Proposta de trabalho para a aula invertida

1. Assista ao vídeo disponível em: bityli.com/baskhara (acesso em: 16 maio 2022). Você pode assisti-lo quantas vezes achar necessário. Em seguida, reflita sobre as seguintes questões e registre suas conclusões:

a) Qual a equação do 2º grau apresentada inicialmente? Nessa equação, qual o valor dos coeficientes a, b e c? Resposta: $x^2 + 4x - 21 = 0$, a = 1, b = 4 e c = 21.

b) Você poderia resolver essa equação utilizando um dos métodos que você já estudou? Espera-se que o estudante utilize a forma fatorada ou a soma e o produto das raízes e conclua que: $(x + 7).(x - 3) = 0$ ou então: a soma das raízes é -4 e o produto é -21. Logo, as raízes são -7 e 3.

c) Qual a fórmula de Bhaskara? $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

d) Assim como foi feito no vídeo, resolva a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ utilizando a fórmula.

e) Você resolveu a mesma equação com duas estratégias diferentes. As respostas encontradas foram as mesmas? Sim.

f) Qual das estratégias você achou mais fácil? Resposta pessoal.

g) Em que situações você acha mais adequado utilizar a fórmula de Bhaskara? Possível resposta: quando a equação é completa, não é muito fácil resolver por soma e produto ou por fatoração.

2. Assista ao vídeo disponível em: bityli.com/exemplo-baskhara (acesso em: 11 ago. 2022) e explique como foi resolvida a equação $-x^2 + 8x = 1$ nesse vídeo.

3. Pronto você concluiu sua tarefa! Agora junte suas anotações, suas conclusões e suas dúvidas e traga para a aula do dia xx/xx/xxxx. Com seus colegas e professor/a, você poderá solucionar as dúvidas, contar suas descobertas e avançar com suas aprendizagens.

Se você quiser usar outro canal para estudar, não há problema. Apenas anote o nome/endereço para que possamos analisar coletivamente essa opção e compartilhar com a turma.

Professor/a, caso não seja possível que o estudante assista aos vídeos em casa e se a escola tiver acesso à internet, eles podem assistir na escola, ou, caso não exista acesso à internet, separe alguns livros didáticos ou textos que explorem a fórmula de Bhaskara e a resolução de equações completas com essa estratégia para que pesquisem no momento anterior a aula.

Após a realização da proposta, no momento da aula, converse com os estudantes sobre o vídeo, peça que contem suas aprendizagens, o que acharam mais fácil, o que acharam difícil, se ainda ficaram com dúvidas. Se necessário, resolva no quadro a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ utilizando a fórmula e peça aos estudantes que expliquem cada uma das passagens. Abra um espaço para que todos apresentem dúvidas e faça os alinhamentos necessários. Se necessário, comente também a resolução da equação $-x^2 + 8x = 1$.

Para exercitar as aprendizagens, proponha que resolvam os exercícios online, disponíveis em: bityli.com/exercicio-baskhara (acesso em: 11 ago. 2022).

Sistematize a fórmula de Bhaskara, mas enfatize que, apesar de resolver qualquer equação do 2º grau, nem sempre ela é a estratégia mais fácil, pois envolve muitos cálculos e pode levar os estudantes que não se atentarem a cometer alguns erros.

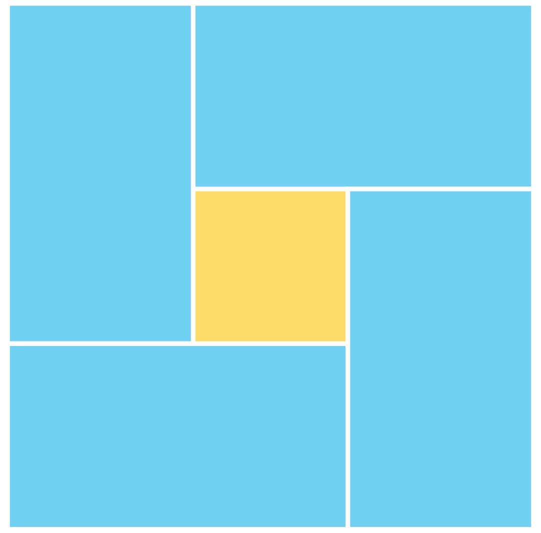
Para finalizar a etapa e desenvolver a fluência dos estudantes, apresente mais equações que podem ser selecionadas de livros didáticos do 9º ano e intercale também alguns problemas que possam ser modelados e resolvidos por equações do 2º grau. Oriente-os a resolver pela estratégia que achar mais adequada. Veja o exemplo:

EXERCÍCIO 1

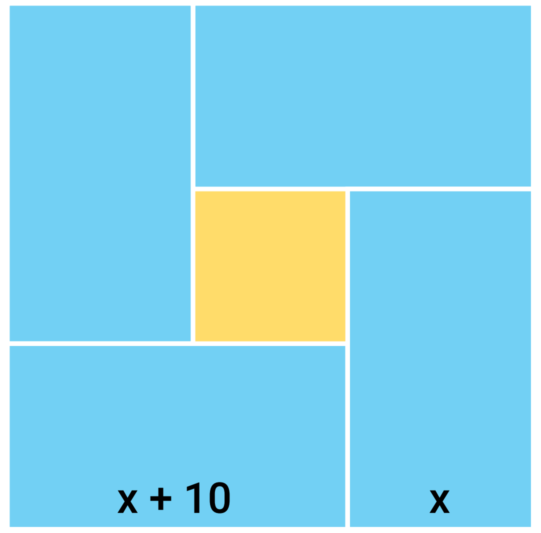
G1 - CP2 - adaptado
Você pode convidar dois amigos para analisar esse problema com você e tenha sua calculadora por perto, pois ela pode lhe ajudar com os cálculos.

Nas salas de aula de um colégio serão colocados pisos conforme a figura a seguir. Cada piso é formado por quatro retângulos iguais de lados 10 cm e (x+10) cm respectivamente e um quadrado de lado igual a x cm.

Sabendo-se que a área de cada piso equivale a 900 cm², qual é a medida do lado do quadrado menor que se encontra no centro do piso?



Resposta:
Uma das opções é fazer cálculo mental: se a área do quadrado é 900cm², então a medida do seu lado é 30cm, dessa forma, temos: e $x + x + 10 = 30$, logo $x = 10$, que é a medida do lado do quadrado menor.
Outra estratégia de resolução é modelar o problema pela equação:
$(x + 10) .x.4$ (área de 4 retângulos) $+ x^2$ (área do quadrado menor) $= 900$
$4x^2 + 40x + x^2 = 900$
$5x^2 + 40x - 900 = 0$
$x^2 + 8x - 180 = 0$
Utilizando a fórmula resolutiva, obtém-se $x = 10$ ou $x = -18$, mas como x é a medida do lado do quadrado, ele não pode ser negativo.



Professor/a, valorize a diversidade de caminhos na busca da resolução, assim como as diferentes formas para resolver uma equação do 2º grau, pois, nessas situações, os estudantes confrontam seus saberes com os de seus colegas, com o saber do livro e com o do professor. Nesse processo, percebem se sua forma de pensar e de aprender a matemática está correta, tomam consciência do que sabem e do que falta saber e conhecem a si mesmos. Isso gera autonomia e os tornam protagonistas de suas escolhas e de seus projetos de vida.

Não esqueça de contemplar equações com 2 raízes distintas, com duas raízes iguais e com nenhuma raiz real. Proponha também problemas que possam ser modelados por equações quadradas. Você pode selecionar atividades do material didático.

Para se aprofundar

Explore a dedução da fórmula resolutiva da equação quadrática, sugerimos propor aos estudantes as atividades disponíveis no plano de aula da Nova Escola: "Dedução da fórmula resolutiva da equação quadrática", de Lais Aline Casagrande Pires de Melo, disponível em: bityli.com/formula-resolutiva (acesso em: 26 maio 2022).

Atenção para a avaliação!

1. Peça aos estudantes que retomem os registros realizados Momento 2 desta SD, no quadro **Atenção para a Avaliação**. Lembre-os de que, naquele momento, eles foram desafiados a ampliar os registros (em um e-mail) sobre tudo que já sabiam sobre resolução de equação do 2º grau. Peça que leiam os registros e reflitam sobre os seus conhecimentos atuais. Questione: *E agora? O que vocês já sabem sobre esse tema?* Convide-os a completar/ampliar seus registros. Eles podem utilizar caneta de outra cor para que percebam o quanto avançaram com suas aprendizagens. Esses registros podem dar pistas do que os estudantes já sabem e quais os pontos que eles ainda precisam avançar.

Com base nessas observações, você poderá propor diferentes intervenções, como agrupar os estudantes de acordo com suas dificuldades, convidar estudantes que já avançaram para serem tutores dos que ainda precisam avançar, entre outras. Outra boa sugestão é a formação de grupos de estudo heterogêneos, formados com base no nível de aprendizagem de cada estudante.

Para saber mais sobre essa estratégia, acesse: bityli.com/grupos-heterogeneos (acesso em: 30 jun. 2022).

Atenção para a avaliação!

2. Peça que, individualmente, resolvam a seguinte proposta: *Pensei em um número, elevei-o ao quadrado e somei o seu dobro. O resultado obtido foi 3. Em que número pensei?*

Resposta esperada: $x^2 + 2x = 3$ >> $x = 1$ ou $x = -3$

Ao final dessa proposta, avalie e registre suas observações em relação aos estudantes no que diz respeito a:

- Utilizar adequadamente a linguagem matemática.
- Modelar o problema utilizando corretamente a linguagem algébrica.
- Escolher uma estratégia adequada e resolver corretamente a equação do 2º grau.
- Persistir na resolução de problemas.

Dê um feedback para os estudantes indicando em quais pontos já avançaram e o que é possível fazer para avançar naqueles que ainda merecem atenção. Oriente-os a fazer o levantamento desses pontos e retomá-los em um momento de estudo individual: leia sobre o tema, retome as suas anotações do lapbook, resolva alguns exercícios e anote as dúvidas encontradas para depois conversar sobre elas com algum colega que já avançou neste tema ou mesmo com o professor em um momento oportuno.

Bora se preparar?!

Professor/a, para ampliar as aprendizagens dos estudantes e permitir que pensem mais a respeito dos temas estudados nesta 2ª atividade da SD, peça que resolvam as questões a seguir. Eles podem trabalhar em duplas ou trios. Oriente-os a consultar o lapbook, pois as anotações realizadas nesse material contribuirão efetivamente com a resolução das propostas.

Caso surja alguma dúvida, eles poderão discuti-las com seus colegas e professor/a na próxima aula.

EXERCÍCIO 1

(G1 - CPS) Suponha que um terreno retangular de área 4.225 km^2 será delimitado para se tornar uma nova Reserva Extrativista. Se o comprimento do terreno exceder em 100 Km sua largura (x), uma equação que permite determinar essa largura (x) é:

a) $x^2 + 100x + 4.225 = 0$
b) $x^2 - 100x + 4.225 = 0$
c) $x^2 + 100x - 4.225 = 0$
d) $x^2 + 4.225x - 100 = 0$
e) $x^2 - 4.225x + 100 = 0$

Gabarito: C

EXERCÍCIO 2

(ESPM) Quando eu nasci, meu pai tinha 32 anos. Hoje, o produto das nossas idades é igual a 900. A soma das nossas idades atuais é igual a:

a) 72
b) 68
c) 64
d) 83
e) 75

Gabarito: B

EXERCÍCIO 3

ID da Questão: 2070.
Código do Descritor: M412 – Questões – MT – Fase 2

Um polinômio Q(x) do 2º grau tem raízes iguais a -7 e 2. Das expressões abaixo, a que pode representar Q(x) é:

a) (x - 7)(x - 2)
b) (x + 7)(x + 2)
c) (x -7)(x + 2)(x + 5)
d) (x - 7)(x + 2)
e) (x + 7)(x - 2)

Gabarito: E

EXERCÍCIO 4

D da Questão: 1792.
Código do Descritor: M480 – Questões – MT Fase 1

O produto da idade de Rafael hoje pela idade que ele terá daqui a 5 anos é 266. Quantos anos Rafael terá daqui a 5 anos?

a) 14
b) 5
c) 9
d) 12
e) 19

Gabarito: E

EXERCÍCIO 5

ID da Questão: 222.
Código do Descritor: M694 – Questões – MT – Fase 1 (adaptado)

Das equações abaixo, qual tem raízes iguais a -4 e a 5?

a) $x^2 - x - 20 = 0$
b) $x^2 + x - 20 = 0$
c) $x^2 - x + 10 = 0$
d) $x^2 + x + 20 = 0$
e) $x^2 - x - 10 = 0$

Gabarito: A

EXERCÍCIO 6

(IFSC - adapt.)
Quanto à equação $x^2 - 4x + 3 = 0$,é correto afirmar que:

a) A soma de suas raízes é igual a – 4.
b) Tem duas raízes iguais.
c) Tem duas raízes distintas.
d) Não tem raízes reais.
e) O produto de suas raízes é nulo.

Gabarito: C

Conectando sequências

Conexões com o Material do Volume I e outras explorações

As propostas apresentadas na atividade 1 desta sequência têm como foco inicial a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conjuntos numéricos, propondo o desenvolvimento da habilidade EF09MA02 - Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica. Esse tema é considerado conhecimento prévio necessário para o desenvolvimento das habilidades EF09MA09 - Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, para resolver problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau; e EF09MA14 - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras, ambas contempladas nesta sequência didática.

Para avançar no trabalho com esse tema, propomos que você explore a SD2 do Material do Volume I, em que é proposto o desenvolvimento da habilidades EM13MAT502 - Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax2; e EM13MAT503 - Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Novamente se faz presente a articulação entre as aprendizagens dos anos finais do Ensino Fundamental com as aprendizagens focais do Ensino Médio. Essa é a essência da recomposição da aprendizagem: escolher boas propostas de atividade que permitam desenvolver simultaneamente conhecimentos de diferentes anos escolares.

Esse processo diferencia a recomposição da recuperação, que deve acontecer após os estudantes terem tido chance de aprender, e permite que, de certa forma, possamos avançar nas aprendizagens e garantir que nas séries do Ensino Médio, eles aprendam o máximo possível daquilo que é direito de aprendizagem apresentado nas habilidades e nas competências pela BNCC.

Atividade extra: cálculo mental

Uma primeira ideia que nos ocorre quando falamos em "cálculo mental" é de fazer contas "de cabeça", sem uso de papel, e, em geral, imagina-se que seja feito muito rapidamente, com destreza. No entanto, nesta proposta, queremos ampliar um pouco essa concepção de cálculo mental incluindo a análise da situação e a escolha da estratégia mais adequada. Nessa perspectiva, o cálculo mental pode contar com o apoio escrito.

Essa proposta pode ser realizada em duplas para que discutam, analisem e façam boas escolhas. Nesse momento, você não interfere nem faz comentários de qualquer tipo. Procure garantir que eles tenham tempo para dialogar e foquem na proposta. Qualquer comentário, ainda que carinhoso ou divertido, atrapalha a concentração que é necessária para eles.

Resolva as seguintes equações:

a) $x^2 - 5x = 0$

b) $-x^2 - 5x = 0$

c) $5x^2 + x = 0$

d) $x^2 = 9x$

e) $x^2 - 9 = 0$

f) $25x^2 = 1$

g) $x^2 - 64 = 0$

h) $-7x^2 + 28 = 0$

i) $(x - 7).(x - 3) = 0$

j) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

k) $x^2 - 4x - 12 = 0$

l) $x^2 + 6x + 9 = 0$

m) $3x^2 + 4x + 2 = 0$

n) $y^2 - 16y + 64 = 0$

o) $6x^2 - x - 5 = 0$

p) $x^2 - 6x - 16 = 0$

Depois do tempo combinado, convide os estudantes a socializar as estratégias utilizadas para resolver cada equação, explicando o porquê da sua escolha.

O foco não é corrigir erros e acertos, mas, sim, olhar para a decisão e para a justificativa do tipo de estratégia escolhida.

Atividade 3

ATIVIDADE 3

ESTUDANDO AS FUNÇÕES DO 2º GRAU

Foco: o foco da atividade é a construção do conceito da função do 2º grau.

Tempo sugerido: 4 horas/aula

Materiais necessários:

- Uma cópia do **Anexo 4** para cada estudante. Pode ser uma versão impressa ou projetada para os estudantes.
- Malha quadriculada: uma folha para cada estudante.
- Acesso ao aplicativo bityli.com/segundo-grau. Caso o acesso não seja possível, providenciar a versão impressa de diferentes gráficos de funções do 2º grau para todos os estudantes.
- Uma cópia do **Anexo 5** (kit com regras e cartas do jogo): uma para cada equipe.

Pensando na progressão das aprendizagens pautadas nas habilidades do Ensino Fundamental EF09MA09 (Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau) e EF09MA06 (Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis), o foco é a realização do estudo das funções do 2º grau, previstas para serem desenvolvidas no Ensino Médio, com base nas habilidades EM13MAT302 (Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais) e EM13MAT502 (Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$).

Uma conversa inicial

A aula de Matemática, voltada para um enfoque problematizador, exige do/a professor/a planejamento e uma condução organizada, que respeite o tempo e a possibilidade de trabalho pessoal de cada estudante, seja individualmente ou em grupos. Assim, os estudantes poderão se envolver nas atividades e ter responsabilidade e organização para pensar, analisar e discutir.

ATIVIDADE 3 ▶ MOMENTO 1

1 aula:

Identificando funções do 2º grau

Gestão da aula

Para melhor gerir essa etapa da sequência didática:

- Compartilhe com os estudantes o que será realizado na aula. Faça isso colocando em itens as principais atividades previstas por você. Ao final da aula, podem voltar a elas e analisar o que fizeram, o que não e o porquê. Isso favorece a organização de todos para o trabalho.

- Dê tempo e permita que os estudantes observem as sequências e tentem identificar padrões e regularidades. Não interrompa com nenhum comentário específico, circule na classe para identificar as estratégias utilizadas.

- Evite chamar a atenção dos estudantes em voz alta. Isso desconcentra a classe e pode constranger o estudante. Se precisar fazer algum alerta, aproxime-se do jovem e fale diretamente com ele. A experiência mostra que, ao se sentir respeitado, mas, ao mesmo tempo, saber que o adulto está atento, o jovem modifica seu comportamento porque é chamado a ser corresponsável por sua aprendizagem e de seus colegas.

- Depois de pensar individualmente, eles podem trabalhar em grupo de, no máximo, 4 alunos para discutir como pensaram para resolver as atividades.

- Convide dois ou três estudantes para explicar suas soluções, de modo que todos possam identificar semelhanças, diferenças ou mesmo eventuais equívocos nas soluções encontradas.

Disponibilize uma cópia do **Anexo 4** para cada estudante.

Pode ser uma versão impressa ou projetada para os estudantes.

Neste caso, peça que façam todos os registros no caderno conforme sugestões anteriores, e que, inicialmente, trabalhem individualmente, reunindo-se depois em grupos com 3 ou 4 componentes para conversarem sobre suas descobertas.

Respostas esperadas:

1. Espera-se que os estudantes percebam que o número de peças (p) é o número da casa na sequência (n) somado com 1 unidade.

Casa	Número de peças
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10
10	11
n	$p = n + 1$

2. Espera-se que percebam que o número de peças (p) é o número da casa na sequência (n) elevado ao quadrado, somado com uma unidade. Eles podem usar outras letras para representar as variáveis neste caso.

Casa	Número de peças
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26
6	37
7	50
8	65
9	82
10	101
n	$p = n^2 + 1$

A partir do que fizerem juntos, escreva no quadro as duas leis de formação das sequências ($p = n + 1$ e $p = n^2 + 1$) e peça para identificarem semelhanças e diferenças entre elas. Espera-se que identifiquem que a diferença está no expoente do n (número de peças). Foque na 1ª lei e faça oralmente uma retomada das aprendizagens dos estudantes sobre função do 1º grau. Apresente algumas questões norteadoras: *Vocês já estudaram essas funções, quem lembra alguma característica da escrita algébrica desse tipo de função? Quem lembra como é o gráfico deste tipo de função? Como encontrar a raiz (ou zero) dessa função?* Se eles não se lembrarem, sugira que consultem os registros que fizeram durante o estudo desse tema e façam juntos esta retomada.

Em seguida, retome a expressão obtida na 2ª lei ($p=n^2 +1$) e sua característica principal: o expoente 2 do n (número de peças). Peça aos estudantes que pesquisem, em livros didáticos, outras situações que podem ser representadas com essa característica. Exemplos de respostas esperadas:

- A área do quadrado cuja medida dos lados é representada por x: $A = l^2$.
- Um foguete foi lançado de uma plataforma e sua altura h, em metros, t segundos, após o seu lançamento é dada pela função $h = -t^2 + 20t + 300$.
- Um projétil é lançado por um canhão e a sua trajetória pode ser representada pela função $y=-x^2 + 150x$.

Peça que escrevam no quadro as funções obtidas na pesquisa e que identifiquem semelhanças e diferenças entre elas. Exemplos de respostas esperadas:

- Semelhanças: todas têm 2 como maior expoente da letra (variável) e todas têm 2 letras diferentes (variáveis).
- Diferenças: elas usam letras diferentes; uma tem 1 termo do lado direto, a outra tem 2 termos e a outra tem 3 termos, entre outras.

Aproveite o momento para sistematizar função do 2º grau: é toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Peça que retomem as funções encontradas no momento da pesquisa, que analisem se elas são exemplos de função do 2º grau e que identifiquem os coeficientes a, b e c em cada uma delas.

Construa, coletivamente, uma tabela com essas informações no quadro. Veja um exemplo de resposta esperada:

Função do 2º grau	a	b	c
$A = l^2$	1	0	0
$h = -t^2 + 20t + 300$	-1	20	3
$y = -x^2 + 150x$	-1	150	0

Para finalizar, convide os estudantes a registrar no lapbook tudo que aprenderam até aqui.

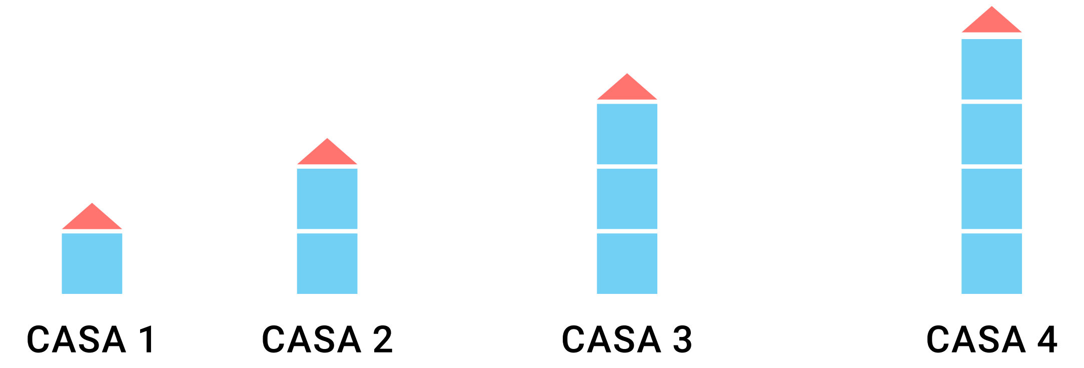
ATIVIDADE 3 ▶ MOMENTO 2

2 aulas:

Ampliando a exploração da representação gráfica das funções do 2º grau

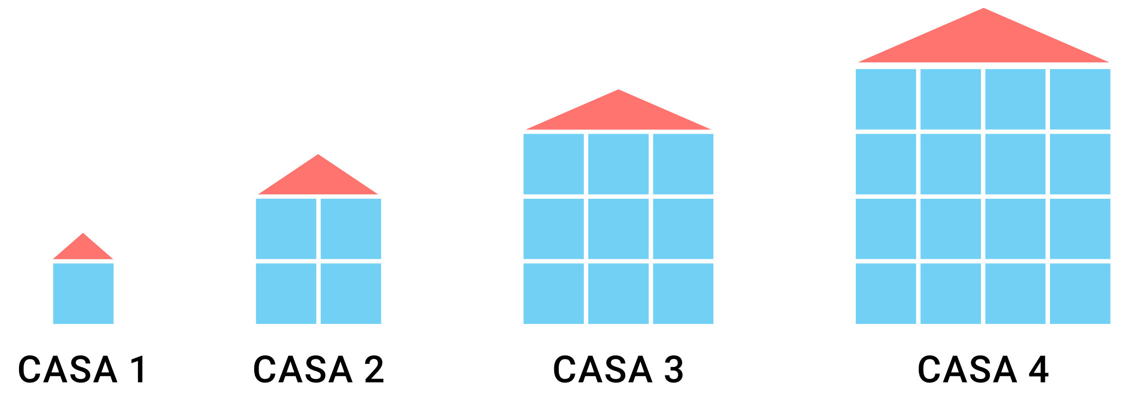
Para iniciar o estudo dos gráficos das funções do 2º grau, convide os estudantes a retomar as duas sequências de figuras estudadas no momento 1 dessa atividade. Peça que retomem também suas respectivas leis de formação e a tabela construída para cada sequência.

Sequência 1



Casa	Número de peças
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10
10	11
n	$p = n + 1$

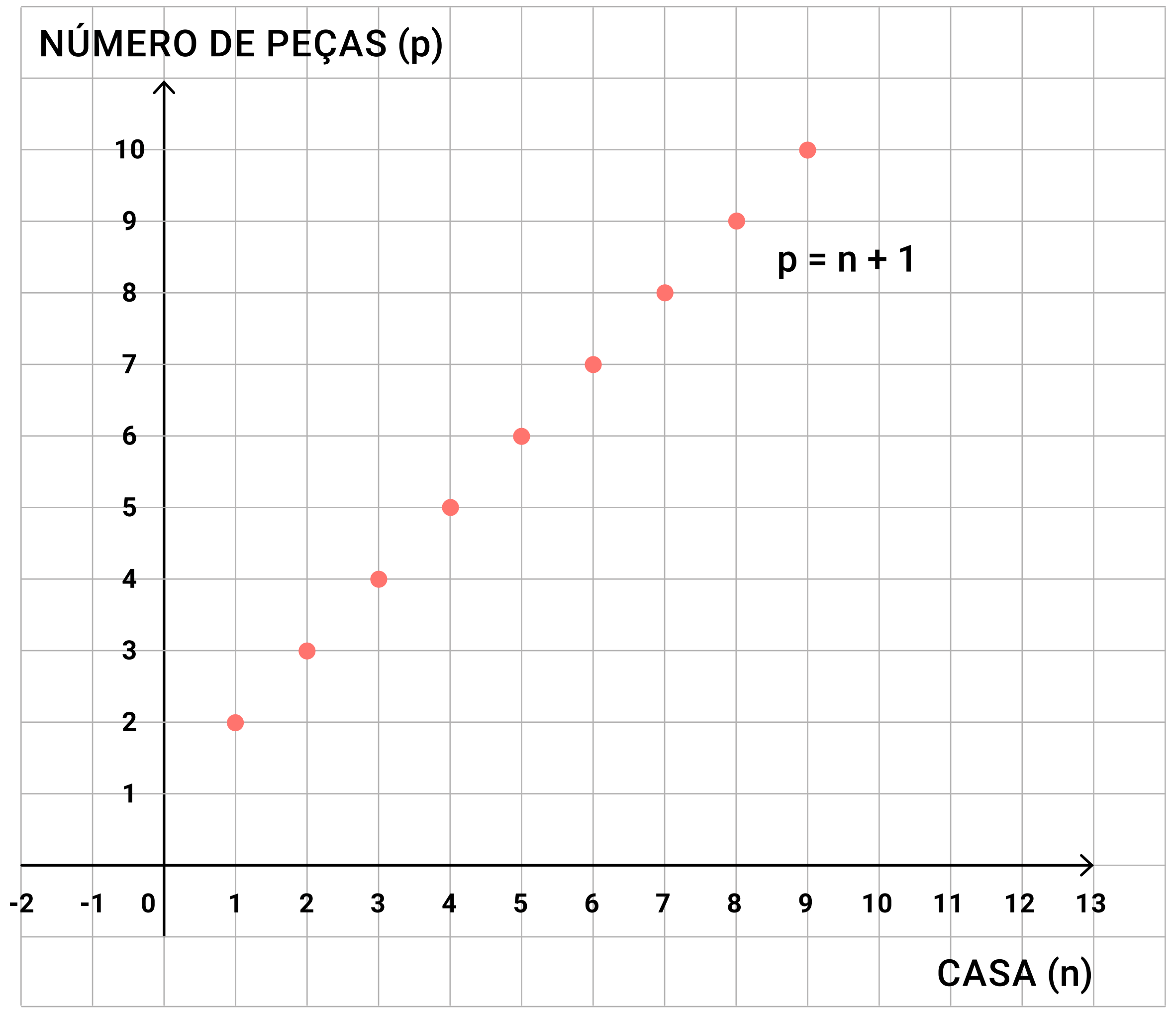
Sequência 2



Casa	Número de peças
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26
6	37
7	50
8	65
9	82
10	101
n	$p = n^2 + 1$

LEI DE FORMAÇÃO:

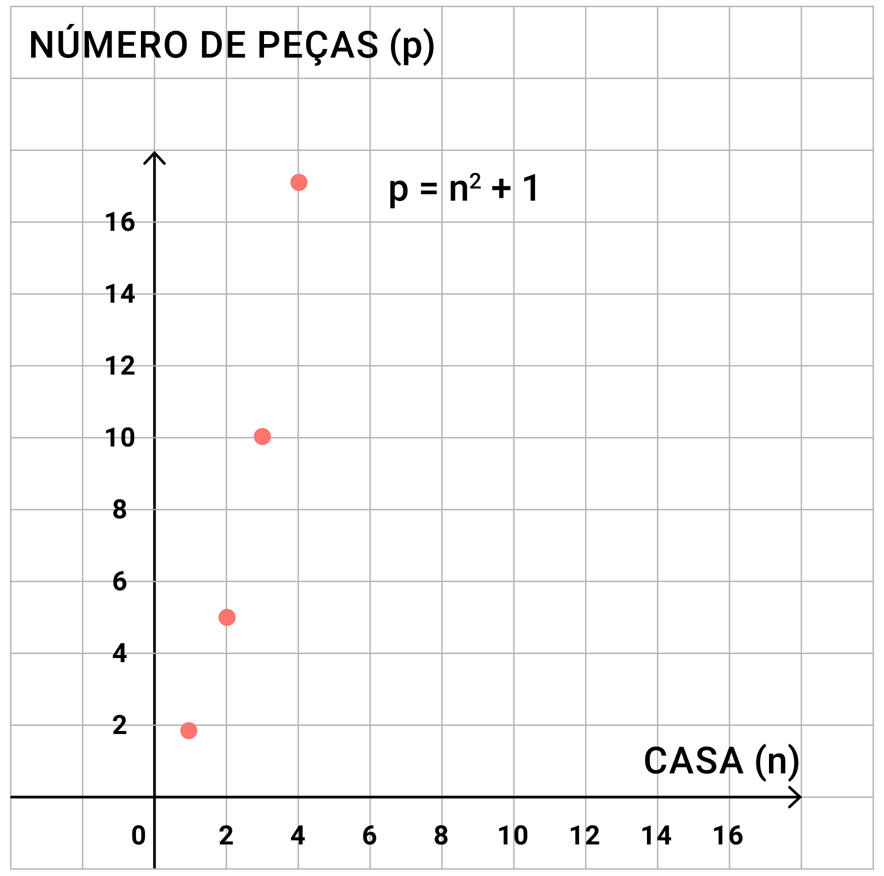
$p = n^2 + 1$



Organize os estudantes em duplas, disponibilize papel quadriculado e convide-os a construir os gráficos das funções que representam as leis de formações dessas sequências. Eles podem utilizar as informações contidas nas tabelas já construídas. Em seguida, peça que identifiquem semelhanças e diferenças entre os gráficos construídos. Caso necessário, retome com os estudantes que os gráficos dessas funções são formados apenas por pontos e não podem assumir valores negativos devido ao fato de estarmos apenas usando números pertencentes ao conjunto dos Números Naturais. Abra uma roda de conversa para socializar as conclusões das duplas.

Respostas esperadas:

Nesse momento, talvez os estudantes apenas identifiquem que, no primeiro gráfico, que envolve uma função do 1º grau, os pontos estão alinhados; e que, no segundo, uma função do 2º grau, os pontos não estão alinhados. Convide-os então para aprofundar o estudo dos gráficos da função do 2º grau, realizando a proposta a seguir.



Neste momento, o foco é o reconhecimento do gráfico das funções do 2º grau, de suas características e de seus elementos. Como o foco é a exploração, e não a construção, sugerimos que, se possível, os estudantes acessem o aplicativo disponível em: www.geogebra.org/m/dkkjkpv4. Peça que, utilizando os controles deslizantes, representem algumas funções do 2º grau, como: $f(x) = x^2 + 4$, $f(x) = x^2 - 4$, $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$.

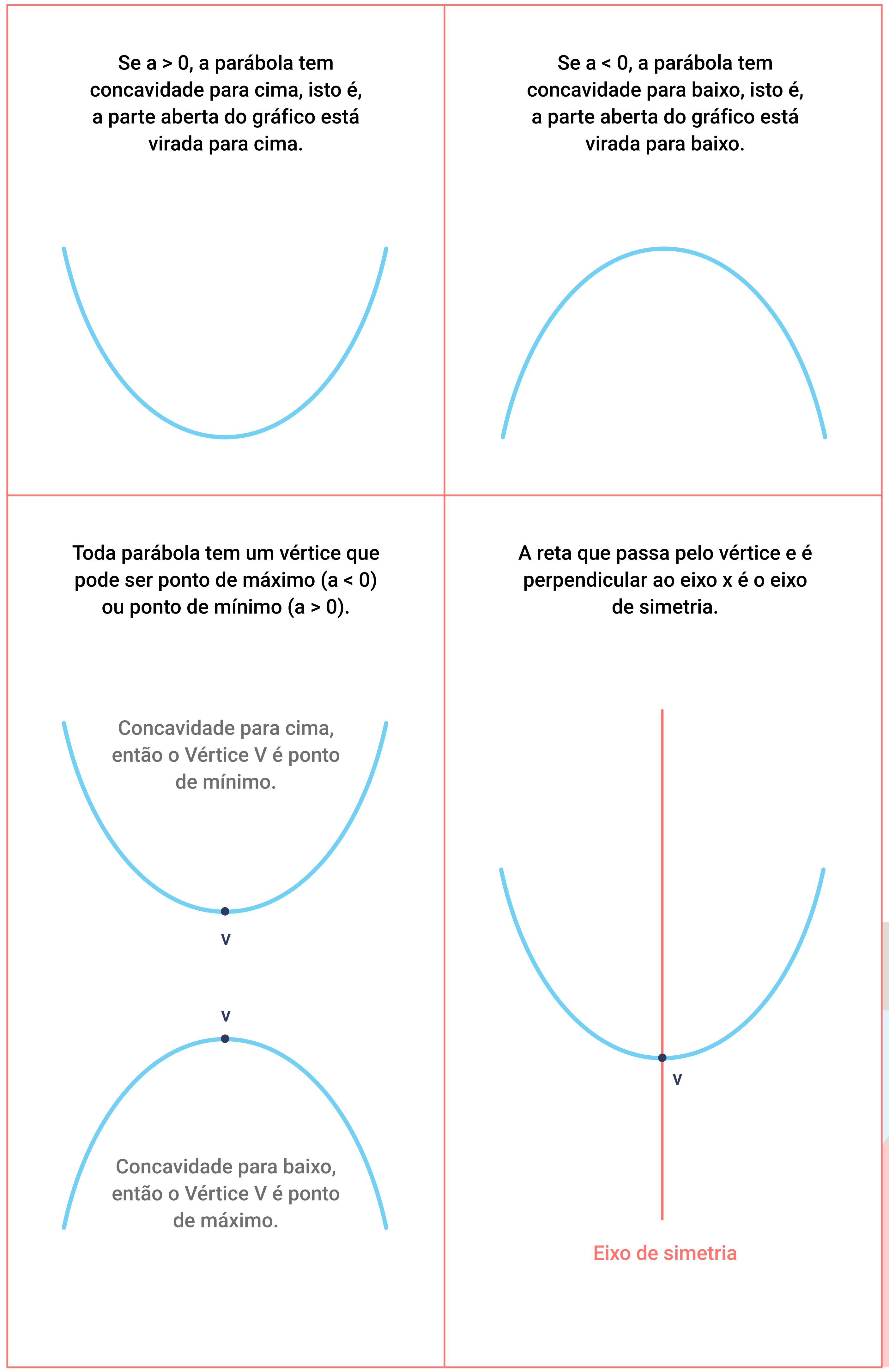
Se o acesso ao aplicativo não for possível, disponibilize gráficos impressos de diferentes funções do 2º grau para que os estudantes possam fazer a análise. Apresente algumas questões norteadoras para as observações, por exemplo:

- Qual o "formato" dos gráficos?
- Fixe um valor para "b" e para "c" e mude o valor de "a". O que você observa quando a > 0? E quando a < 0?
- Esses gráficos são crescentes? São decrescentes ou são as duas coisas?
- É possível identificar no gráfico um ponto com a maior ordenada (y)? Qual é esse ponto?
- É possível identificar no gráfico um ponto com a menor ordenada (y)? Qual é esse ponto?
- É possível traçar algum eixo de simetria?
- Identifique as regularidades. Não se esqueça de registrar suas observações.

Depois das explorações, abra uma roda de conversa, vá sistematizando as regularidades encontradas. Para este momento, você pode preparar, com antecedência, um slide contendo as imagens para ilustrar cada uma das situações ou mesmo utilizar figuras de livros didáticos. Peça que os estudantes registrem suas observações/conclusões no lapbook e que enriqueçam esses registros com esboços de parábola para representar as situações, pois, nesse momento, as imagens são muito importantes.

- A representação gráfica é sempre uma parábola, que é a linha que define o gráfico.
- Se a > 0, a parábola tem concavidade para cima, isto é, a parte aberta do gráfico está virada para cima.
- Se a < 0, a parábola tem concavidade para baixo, isto é, a parte aberta do gráfico está virada para baixo.
- Toda parábola tem um vértice que pode ser ponto de máximo (a < 0) ou ponto de mínimo (a > 0).
- A reta que passa pelo vértice e é perpendicular ao eixo x é o eixo de simetria.

Para ampliar as aprendizagens, selecione do material didático exercícios e problemas que possam ser modelados por uma função do 2º grau. Eles podem utilizar os registros do lapbook para apoiar esse momento.



ATIVIDADE 3 ▸ MOMENTO 3

3 aulas:

Jogo: família das funções

Com a intencionalidade de aprofundar o estudo das funções do 1º e do 2º grau, propomos a realização do jogo Família das funções, cujo objetivo é formar famílias de quatro cartas.

Cada família é formada pela expressão algébrica da função, pelo esboço de seu gráfico e por duas outras cartas que contêm propriedades da função, a saber: pontos importantes do gráfico, comportamento do sinal da função. É possível formar, no máximo, dez famílias.

Gestão da aula

- Com antecedência, providencie kits com a regra e as cartas do Jogo (Anexo 5) um para cada grupo.
- Comece a aula escrevendo no quadro a rotina do dia (o que aprenderão, o nome do jogo, como eles deverão se organizar, materiais necessários, tempo para jogar, fechamento da aula e conversa a respeito do jogo). Peça que anotem no caderno.
- Peça que se organizem em grupos de quatro alunos.
- Esclareça que a aula do dia irá tratar, novamente, de um importante conteúdo da álgebra: as funções. Relembre-os da importância da leitura atenta para aprender e de anotar suas ideias e dificuldades para que você possa auxiliá-los a avançar.
- Proponha que os grupos leiam as regras do jogo e observem as cartas antes de começar a jogar. Se necessário, simule uma jogada para garantir que todos compreenderam as regras.
- Circule pelos grupos e observe os estudantes em ação. Anote as dúvidas, as observações interessantes, os questionamentos, para socializar com a turma no momento de discussão coletiva.
- Ao final, destine 10 minutos para conversarem a respeito do jogo, sobre as aprendizagens, as dúvidas e os pontos que você observou. Esta é a hora de você destacar como estão melhorando suas estratégias e indicar com clareza os pontos que ainda podem avançar e como fazer isso.

Trazemos o jogo como uma resolução de problemas, visto que, durante o jogo, surgem muitas situações em que os jogadores devem: fazer análises e escolhas amparados em conhecimentos matemáticos, aprimorar suas jogadas, argumentar para convencer seu time de seu ponto de vista e até pensar em estratégias para neutralizar ou dificultar a jogada seguinte do oponente de jogo. Nesses momentos, os estudantes estão enfrentando situações que envolvem resolução de problemas.

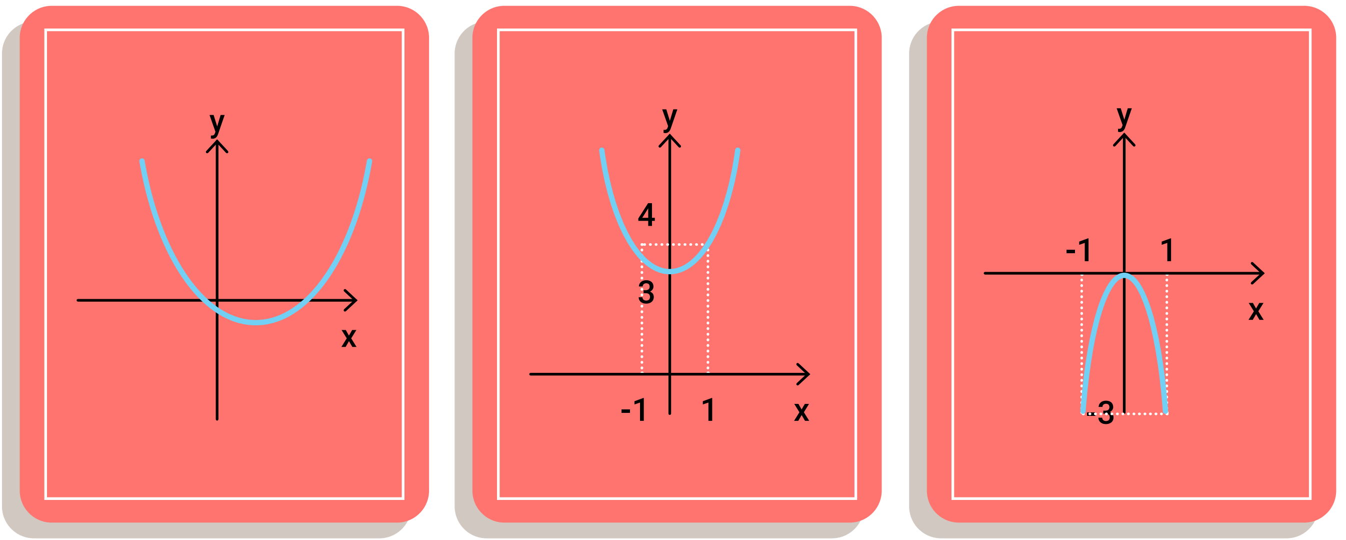
Desta forma, sugerimos que você planeje que um mesmo jogo seja explorado em 3 aulas, um em cada semana, com uma turma:

- **1ª vez que os estudantes jogam:** o foco é jogar para conhecer as regras e as cartas e para elaborar as estratégias iniciais para vencer o jogo;

- **2ª vez que os estudantes jogam:** os estudantes refinam suas estratégias e avançam na aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos no jogo. Após a realização do jogo, o professor pode apresentar algumas problematizações apoiadas em situações relacionadas a ele, permitindo que os estudantes ampliem suas reflexões, como no exemplo ao lado.

- **3ª vez que os estudantes jogam:** o foco é que os estudantes avancem e sistematizem suas aprendizagens. Após a realização do jogo, o professor pode solicitar que os estudantes registrem todas as cartas de uma família de função que construíram durante o jogo, ou contem para um colega suas descobertas e aprendizagens, Vale lembrar que cada registro, oral ou escrito, é um exercício metacognitivo: ao registrar, o estudante fica com maior clareza daquilo que já sabe e o que ainda precisa estudar mais.

NA SUA VEZ DE JOGAR, RITA OBSERVOU AS CARTAS DA MESA E PERCEBEU QUE SÓ FALTAVA UMA CARTA PARA COMPLETAR UMA DAS SUAS FAMÍLIAS.



$y = 2x^2 - x$

É UMA FUNÇÃO DE 2º GRAU QUE NÃO POSSUI

O GRÁFICO DA FUNÇÃO PASSA PELO PONTO (0,0)

O GRÁFICO INTERCEPTA O EIXO y NO PONTO DE ORDENADA ZERO

ELA VIROU ESTA CARTA.
ELA CONSEGUIU FORMAR A FAMÍLIA?
EXPLIQUE!

Atenção para a avaliação!

Professor/a, o momento do jogo também pode ter como foco a avaliação processual. Uma sugestão é, na segunda vez que jogam, após terminarem as jogadas, peça que individualmente organizem uma lista com o que já que aprenderam sobre funções do 1º e do 2º grau e quais os pontos que precisam cuidar para se sair ainda melhor no jogo. O/a professor/a recolhe esses registros para ler e anotar as considerações de cada estudante. No final do terceiro dia do jogo, o professor devolve o registro e propõe que cada estudante releia e, se necessário, faça alterações ou complemente suas anotações. O professor recolhe novamente e faz uma nova leitura para acompanhar os estudantes que avançaram e ajudar aqueles que ainda precisam avançar. Ele pode, por exemplo, nomear aqueles que já avançaram como tutores dos grupos que ainda precisam avançar, mas é preciso não fomentar o clima de cooperação entre os estudantes e tomar muito cuidado para que não surja uma competição entre os estudantes, no sentido de que um sabe mais do que o outro, então é um melhor do que o outro.

Durante esse processo, é necessário que você verifique também se as opiniões são apenas de natureza comportamental, repetindo slogans que ouvem repetidas vezes dos/as professores/as, como: prestar mais atenção na aula, estudar mais, ficar quieto durante as aulas. Converse que de nada adianta essas reflexões sem a iniciativa de tentar. Oriente-os a colocar a mão na massa, errar, corrigir o erro, enfim, ter uma postura cognitivamente ativa durante as aulas.

Conectando sequências

Conexões com o Material do Volume I e outras explorações

Como ampliação dos temas estudados, o/a professora também pode explorar a SD 2 do Material do Volume I, em que são apresentadas propostas para consolidar o desenvolvimento da habilidades: EM13MAT402 - Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais; EM13MAT502 - Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$; e EM13MAT503 - Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Bora se preparar?!

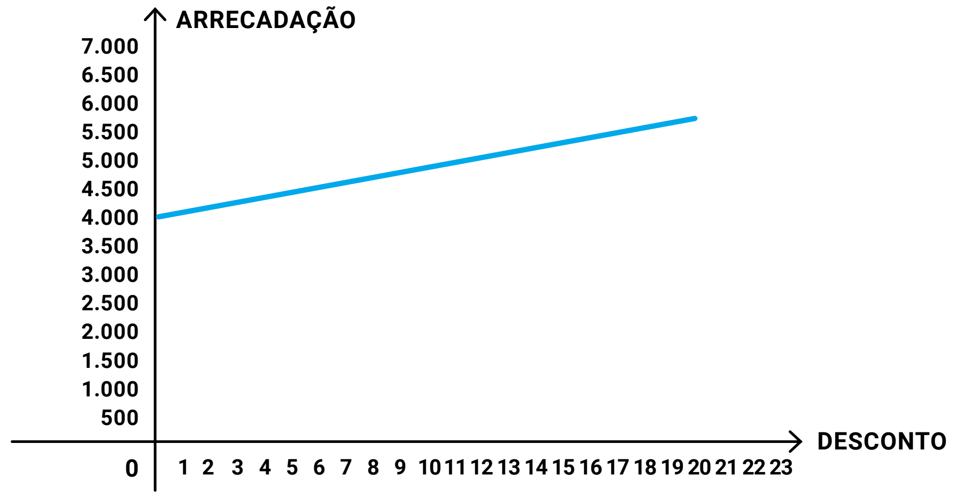
1 aula:

Professor/a, comunique ao estudante que chegou o momento de aprofundar as aprendizagens realizando as propostas a seguir. Você pode sugerir que trabalhem em duplas, que consultem o lapbook e que entreguem a resolução para você. Esses registros podem servir como instrumento de avaliação. Mas, além de avaliar, é muito importante você dar feedbacks para os estudantes: quais eram as aprendizagens esperadas, em quais pontos eles já atingiram as expectativas, em quais pontos eles ainda podem avançar. Apresente pistas de como pode ocorrer esse avanço: você pode, por exemplo, encaminhar vídeos, textos e exercícios do Khan Academy para os alunos que apresentaram dificuldade em resolver as propostas. Outra forma de apoio específico é organizar o grupo com mais dificuldade e dar um apoio especial a eles. Nesse caso, você pode fazer isso em uma aula na qual distribua atividades específicas para os estudantes com habilidades diferentes. Professor/a, agrupamento deve ser cuidadoso, para não expor nenhum estudante, desta forma, é necessário que essa organização diferenciada venha após um processo de autoavaliação claro, para que os estudantes tenham clareza dos pontos que já avançaram e daqueles que ainda merecem sua atenção.

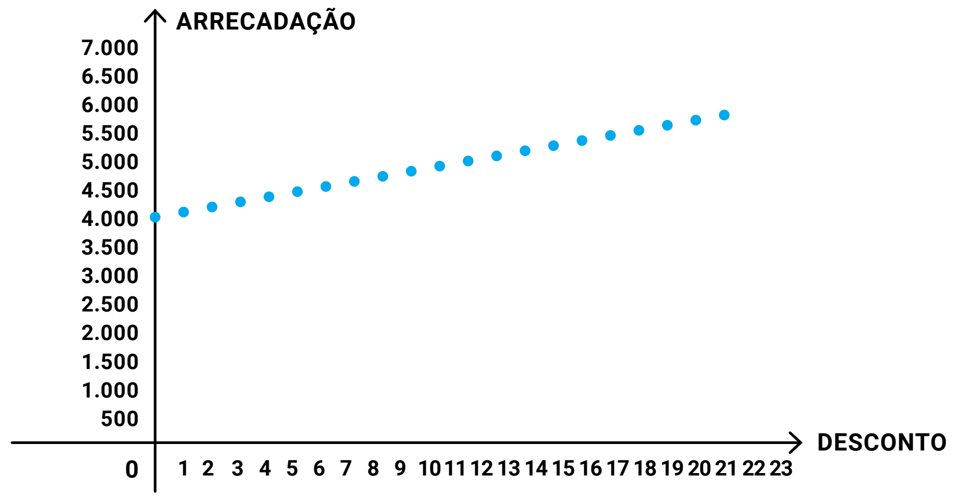
EXERCÍCIO 1

(ENEM) O administrador de um teatro percebeu que, com ingresso do evento a R$ 20,00, um show conseguia atrair 200 pessoas e que, a cada R$ 1,00 de redução no preço do ingresso, o número de pessoas aumentava em 40. Ele sabe que os donos do teatro só admitem trabalhar com valores inteiros para os ingressos, pela dificuldade de disponibilizar troco, e pretende convencê-los a diminuir o preço do ingresso. Assim, apresentará um gráfico da arrecadação em função do valor do desconto no preço atual do ingresso. O gráfico que mais se assemelha ao que deve ser elaborado pelo administrador é:

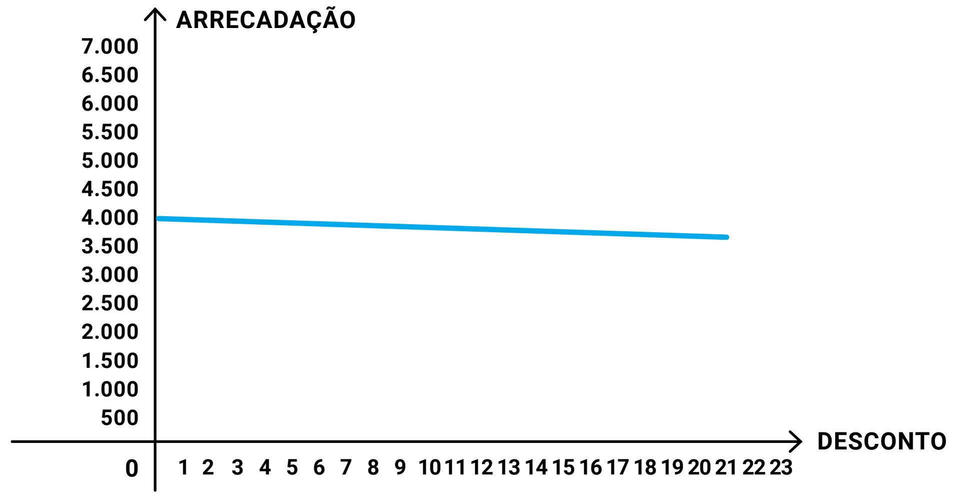
a)



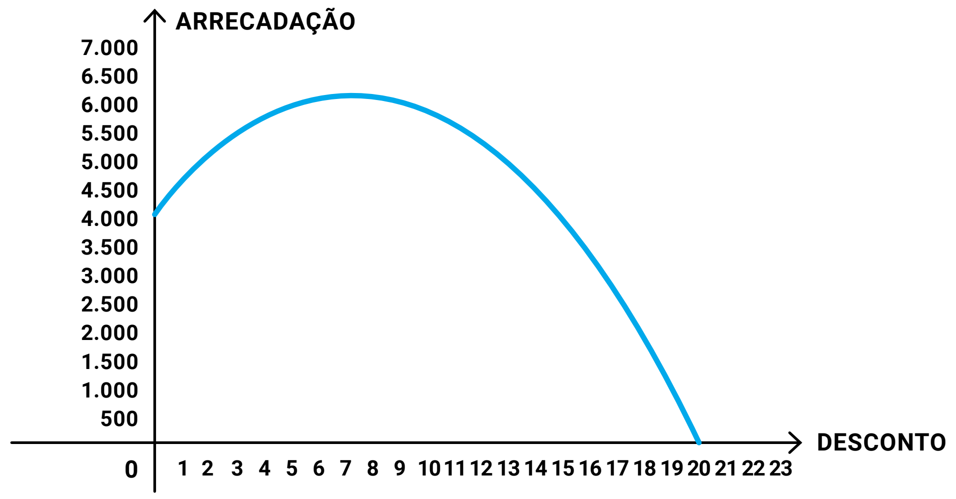
b)



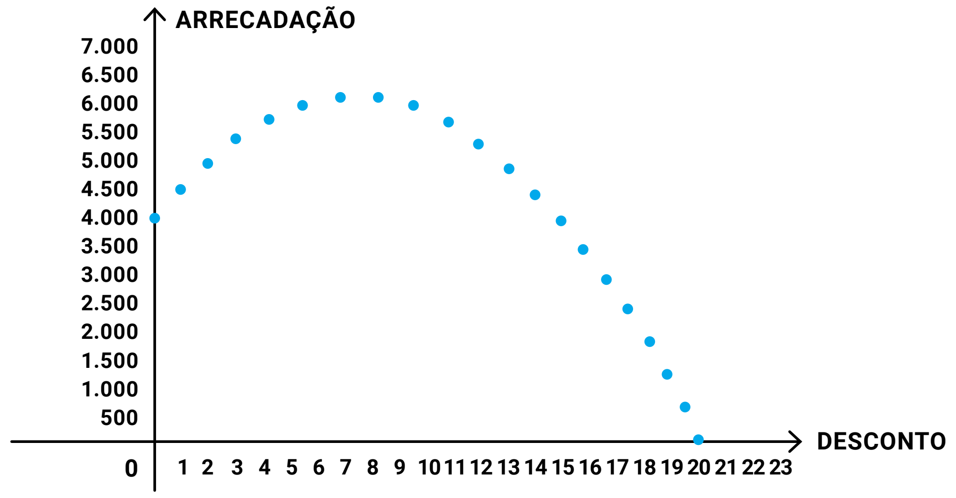
c)



d)



e)



Gabarito: E

EXERCÍCIO 2

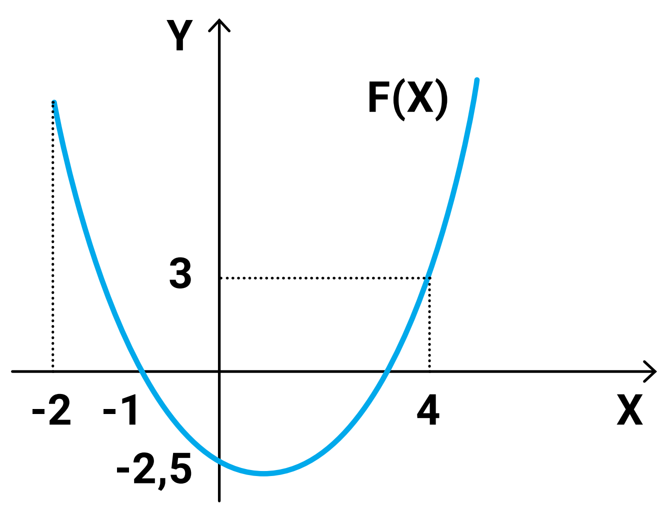
(ENEM) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T^{(t)}=-t^2/4+400$ com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39º. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19,0
b) 19,8
c) 20,0
d) 38,0
e) 39,0

Gabarito: D

EXERCÍCIO 3

Questão 1981, descritor M137, questões MT, fase 2.
Uma raiz da função f(x) abaixo é:



a) -2,5
b) 3
c) -1
d) -2

Gabarito: C

EXERCÍCIO 4

(ENEM) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades variadas. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo.
Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a

a) 4
b) 6
c) 9
d) 10
e) 14

Gabarito: B

EXERCÍCIO 5

CFTMG - adaptado) O lucro L de uma empresa é calculado em função do tempo t, em meses, pela função: $L(t) = 3t^2 - 39tx + 66$. Considerando essa função, o lucro da empresa é negativo entre o...

a) 2º e o 11º mês.
b) 4º e o 16º mês.
c) 1º e 4º e entre o 5º do 16º mês.
d) 2º e 5º e entre o 7º do 14º mês.
e) 1º e 4º e entre o 7º do 14º mês.

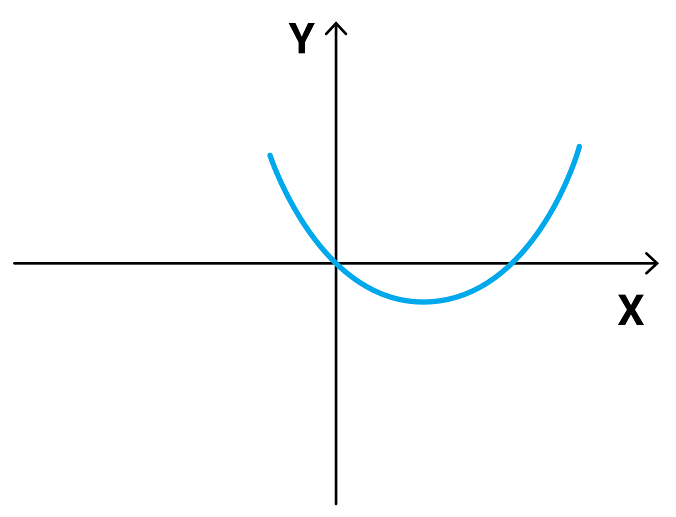
Gabarito: A

EXERCÍCIO 6

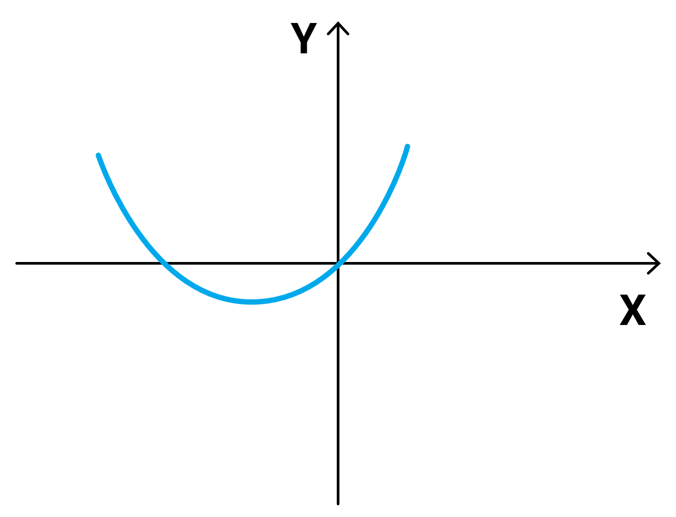
(UNICAMP - adaptado) Considere a função do 2º grau definida por $f(x)=ax^{(2)}$+bxdefinida para todo número real. Sabendo que a > 0 e b > 0, qual figura corresponde ao gráfico desta função?

Gabarito: B

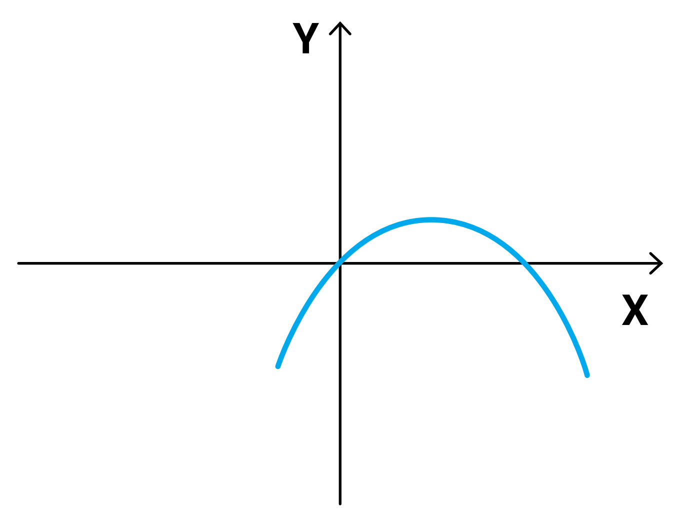
a)



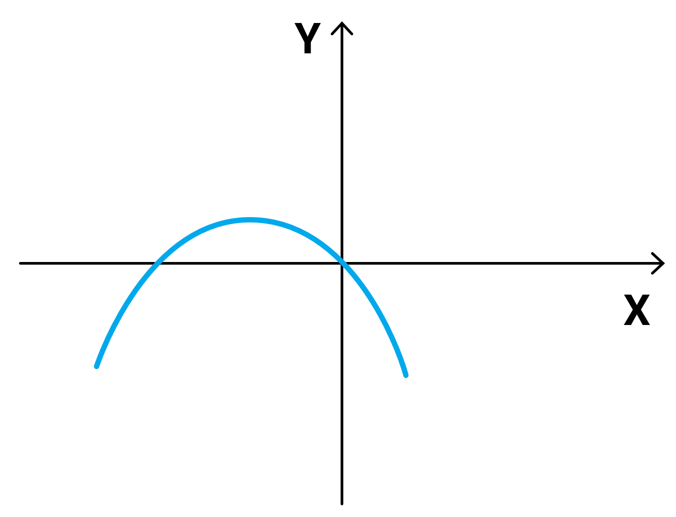
b)



c)



d)



Atividade 4

ATIVIDADE 4

ÂNGULOS, TRIÂNGULOS, TEOREMA DE PITÁGORAS E AS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Foco: retomar o estudo de ângulos e de triângulos, explorar o teorema de Pitágoras, as relações trigonométricas no triângulo retângulo e o cálculo dessas relações para os ângulos notáveis.

Tempo sugerido: 7 horas/aula

Materiais necessários:

- Tesoura, régua e 15 canudinhos para cada grupo.
- Uma cópia para cada grupo do **Anexo 9**. Pode ser a versão impressa ou a versão digital, para ser projetada para os estudantes.
- Acesso aos vídeos "Como usar o transferidor parte 1" e "Como usar o transferidor parte", disponíveis em: bityli.com/yt-transferidor e bityli.com/yt-transferidor2 (acessos em: 13 ago. 2022). Caso os estudantes não tenham acesso aos vídeos, providencie livros didáticos que abordem esse tema e disponibilize para pesquisa.
- Acesso ao vídeo "A história da Matemática", disponível em: bityli.com/yt-hist-mat (acesso em: 30 jun. 2022).
- Acesso ao quebra-cabeças disponível em: bityli.com/quebra-cabeca (acesso em: 23 maio 2022). Caso os estudantes não tenham acesso ao quebra-cabeças digital, é possível imprimir as peças e disponibilizar um conjunto de peças para cada dupla.
- Uma cópia do **Anexo 3** para cada dupla ou uma cópia para cada estudante, dependendo da organização da turma que você escolher para essa proposta.
- Malha quadriculada, régua e transferidor para todos os grupos ou acesso ao Geogebra, disponível em: bityli.com/Geogebra.

Para a construção do teodolito, os seguintes materiais para cada grupo:

- Um pedaço de cartolina grossa de 20cm x 20cm ou tampa de embalagem de papelão.
- Copo de plástico.
- Percevejo ou alfinete de cabeça ou parafuso e porca.
- Fita adesiva.
- Canudo de refrigerante.
- Palito de sorvete.
- Cópia de transferidor de 360°.
- Uma cópia para cada grupo do **Anexo 10** (versão impressa).

Você pode substituir os materiais da lista por outros similares!

Esta etapa da SD tem como foco desenvolver as habilidades relacionadas ao desenvolvimento do pensamento geométrico: visualização, desenho, verbais, lógicas e aplicadas, conforme teoria apresentada no texto "Geometria é mais que prova", de Alan Hofer, sugerido no início desta SD e disponível em: bityli.com/mais-que-prova (acesso em: 13 ago. 2022). Se você ainda não teve a oportunidade de fazer essa leitura, esse é o momento ideal para fazê-la.

Iniciamos a proposta retomando a condição de existência dos triângulos, relembrando os nomes dos diferentes tipos de triângulos; medindo ângulos e calculando a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo. O objetivo é consolidar o desenvolvimento das habilidades EF06MA25 - Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas; e EF07MA24 - Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° que são conhecimentos prévios importantes para o desenvolvimento do que propomos a seguir.

Na sequência, o foco é explorar o Teorema de Pitágoras com o objetivo de desenvolver as habilidades EF09MA13 - Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos; e EF09MA14 - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. O estudo deste teorema é muito importante para que os estudantes percebam que é possível calcular distâncias inacessíveis e também contribuir com a familiarização do estudante com os números irracionais. Ao propor as atividades apresentadas nesta etapa da sequência, também estamos desenvolvendo parcialmente a habilidade EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos -, visto que o Teorema de Pitágoras é uma das relações métricas do triângulo retângulo.

Na próxima etapa desta atividade, o foco é construir o conceito das relações trigonométricas no triângulo retângulo seno, cosseno e tangente e estudar como essas relações se aplicam em ângulos notáveis (30o, 45o e 60o). Esses são conhecimentos essenciais para o desenvolvimento das habilidades EM13MAT308 e EM13MAT306 Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Durante todo o percurso, o estudante é convidado a analisar as situações apresentadas, identificar regularidades, estabelecer relações, formular e validar hipóteses e tirar conclusões. Desta forma, a atividade contribui com o desenvolvimento da Competência Geral 2, proposta na BNCC: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Gestão das aulas

Em vários momentos da SD, apresentamos como proposta diálogos com a sala toda para introduzir um tema (caráter diagnóstico) ou para fechar um estudo (caráter de sistematização das aprendizagens). Para atingir os objetivos propostos para esse momento, é muito importante uma boa gestão da aula por parte do/a professor/a.

- Garanta que todos os estudantes se sintam à vontade para compartilhar o que pensam e sentem.
- Quando houver divergências de opiniões, valorize todas, propondo uma atitude de respeito do grupo em relação à diversidade.
- Incentive os mais tímidos a se expressar e a compartilhar suas estratégias, seus pontos de vista etc.
- Enfatize a importância de registrar os pontos importantes, as conclusões, as aprendizagens nesses momentos de conversas coletivas.

ATIVIDADE 4 ▶ **MOMENTO 1**

5 aulas:

Revendo ângulos e triângulos

Um tema prioritário no currículo do Ensino Médio é a trigonometria. No entanto, muitas vezes ele não é simples para os estudantes simplesmente porque desconhecem algumas noções de geometria plana e medidas, como a noção de ângulo, algumas propriedades dos triângulos e o Teorema de Pitágoras, que estão diretamente envolvidas no estudo das relações trigonométricas.

Pensando nisso, optamos por retomar esses temas em algumas atividades especialmente planejadas para abordar os assuntos de forma lúdica e investigativa, visando que os jovens ampliem seu conhecimento geométrico e se preparem para a introdução da trigonometria, além de desenvolverem habilidades de pensamento geométrico. Você pode selecionar, baseado em resultados de avaliações diagnósticas já realizadas, quais das propostas apresentadas são adequadas para os seus estudantes neste momento.

PARTE 1 – ESSE TRIÂNGULO EXISTE?

Para essa etapa, os grupos precisarão de 15 canudos, régua, tesoura e papel para anotações. A meta é investigar a condição de existência dos triângulos com base nas propostas disponíveis na 1ª etapa do anexo 9.

Inicie com uma proposta individual: os estudantes devem ler os problemas, identificar o que é para fazer, levantar palavras desconhecidas e dúvidas. Somente depois disso é que conversam no grupo tentando esclarecer o que não sabem, para que todos compreendam a tarefa. Eles devem esgotar as dúvidas uns com os outros no grupo. Depois, poderão solicitar sua ajuda.

Feito isso, os grupos iniciam a resolução da proposta. Durante a resolução, circule pela sala e assegure-se de que os estudantes sabem usar a régua para medir. Se não souberem, explique para que façam a medição correta.

Após realizarem todas as propostas, discuta coletivamente as descobertas e as conclusões dos grupos. Solicite que façam registros. Discuta com eles a escrita da condição de existência de um triângulo, você pode inclusive representar com a desigualdade triangular e utilizar esse nome com eles. Por ora basta que experimentem, investiguem e tirem conclusões, ações básicas do fazer matemático.

Para finalizar o momento, solicite que registrem em seu lapbook as aprendizagens sobre condição de existência de um triângulo.

PARTE 2 – VAMOS MEDIR ÂNGULOS?

Nesta etapa, o foco está nas ideias básicas de ângulos e a proposta é utilizar a aula invertida, metodologia que já foi utilizada anteriormente e que contribui para o desenvolvimento da autonomia e do protagonismo do estudante.

Disponibilize, com antecedência, o endereço dos seguintes vídeos:

- “Como usar o transferidor parte 1”, disponível em: bityli.com/yt-transferidor (acesso em: 13 ago. 2022).
- “Como usar o transferidor parte 2”, disponível em: bityli.com/yt-transferidor2 (acesso em: 13 ago. 2022).

Caso os estudantes não tenham acesso aos vídeos, eles podem combinar de assisti-los na casa de algum colega ou então você pode providenciar livros didáticos que abordem esse tema e disponibilizar para pesquisa.

Peça que assistam aos dois vídeos anotando informações importantes, termos novos e seu significado e, principalmente, observando como usar o transferidor para fazer medição de ângulos. Peça que tragam esses registros na próxima aula. Retome com eles a importância da autogestão desse momento individual de estudos e a relevância de realizar a atividade proposta, apresentar suas descobertas e suas dúvidas no momento coletivo que ocorrerá no início da próxima aula.

Inicie a aula seguinte com uma conversa sobre os vídeos, peça que socializem suas anotações, o que já sabiam e as dúvidas que ainda têm. Valorize quem realizou a tarefa solicitada. Faça uma breve exposição sobre a presença de ângulos em objetos e espaços que se encontram ao redor dos estudantes, apresente de modo organizado a nomenclatura relativa a ângulos e peça que anotem em seu lapbook esse resumo para futuras consultas.

Em seguida, convide-os a realizar a atividade disponível na 2ª etapa do **Anexo 9**.

Acompanhe a produção dos estudantes e registre como resolvem os problemas, essa é uma oportunidade para avaliá-los individualmente em relação ao conhecimento que já possuem sobre ângulos e à sua capacidade de leitura de textos matemáticos simples. Esses registros poderão dar pistas para você replanejar suas aulas ou mesmo a organização dos estudantes nas próximas atividades em grupos, por exemplo, formar duplas produtivas: um estudante que já avançou com aquele que ainda precisa avançar. Nesta hora, um aprende com o outro.

Finalize a proposta convidando os estudantes a anotar individualmente em seu lapbook tudo o que aprenderam sobre ângulos até aqui. Incentive-os a fazer desenhos para ilustrar suas anotações.

PARTE 3 – A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÂNGULO

Para concluir essa retomada das propriedades básicas de triângulos, a proposta é uma dobradura simples que permite inferir que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180o. Para isso, com os alunos organizados em pequenos grupos, proponha que realizem a 3ª etapa do **Anexo 9**.

Acompanhe o trabalho dos grupos e a realização da dobradura inicial, incentive-os a produzir triângulos bem diferentes uns dos outros para que possam perceber a propriedade independente do tipo e tamanho do triângulo.

No final, ao socializar as respostas dos grupos, solicite que anotem coletivamente no lapbook tudo que aprenderam sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Aproveite o momento para avaliar se é necessário propor outros problemas para os estudantes. Você pode selecionar algumas propostas de materiais didáticos do Ensino Fundamental.

É importante avaliar as aprendizagens dos estudantes neste momento e a autoavaliação pode trazer pistas para o planejamento das próximas aulas. Verifique se os estudantes percebem se avançaram. Em caso de dúvidas pontuais, você pode propor atividades diferenciadas organizando os grupos de acordo com as habilidades ainda não consolidadas e, caso perceba alguma dúvida comum à maioria dos estudantes, planeje retomar o assunto, mas utilizando uma nova estratégia de ensino. Disponibilize o roteiro de autoavaliação a seguir para os estudantes. Pode ser na versão impressa ou no quadro ou, então, projete e peça que copiem em uma folha.

Atenção para a avaliação!

Estudante, na realização das propostas apresentadas no “Momento 1: Revendo ângulos e triângulos”, você foi desafiado a realizar muitas atividades que envolviam importantes temas de Geometria e Medidas. Agora chegou o momento de você avaliar como foi esse percurso, para isso, você vai precisar retomar todas as anotações que fez em seu caderno e em seu lapbook durante esse estudo e de atenção porque essa proposta pode auxiliar você a organizar suas aprendizagens e dúvidas e seu/sua professor/a a pensar melhor em como auxiliar cada uma de vocês a aprender mais.

A seguir, mostramos o roteiro que você usará para se autoavaliar. Seu/sua professor/a explicará melhor a todos como ele deve ser preenchido, qual o prazo para você entregá-lo e como será usado para o/a professor/a auxiliar a todos a aprender mais.

Autoavaliação

Data: ________ Nome: ______________________________ Turma: ______________

Retome suas anotações de todas as atividades “Momento 1: Revendo ângulos e triângulos”. Escreva na primeira coluna da tabela os conteúdos e conceitos que você estudou até agora nas aulas e complete a segunda coluna com:

Aprendi – Se você tem certeza de que sabe esses conceitos e consegue responder questões relacionadas ao tema.

Preciso estudar mais – Se você sabe os conceitos, mas não está seguro para resolver novos exercícios ou responder questões relacionadas a ele.

Não aprendi – Se você não entendeu as ideias. Nesse caso, escreva nas linhas finais exatamente o que você não entendeu, como seu/sua professor/a pode ajudá-lo e o que você deve fazer para conquistar o que faltou.

TEMAS E CONCEITOS ESTUDADOS	MINHA APRENDIZAGEM

Não entendi: ______________________________

O professor pode me ajudar: ______________________________

Eu preciso fazer: ______________________________

Percebeu o quanto você avançou? Quantas aprendizagens foram realizadas?

ATIVIDADE 4 ▶ MOMENTO 2

2 aulas:

Explorando o Teorema de Pitágoras

Para iniciar essa etapa, organize os estudantes em duplas e peça para que escrevam tudo o que sabem sobre um triângulo retângulo. Em seguida, convide dois ou três estudantes para socializar seus registros e peça que todos anotem as informações que ainda não estão registradas.

Peça que desenhem um triângulo retângulo no caderno e marquem um de seus ângulos agudos. Em seguida, apresente algumas orientações:

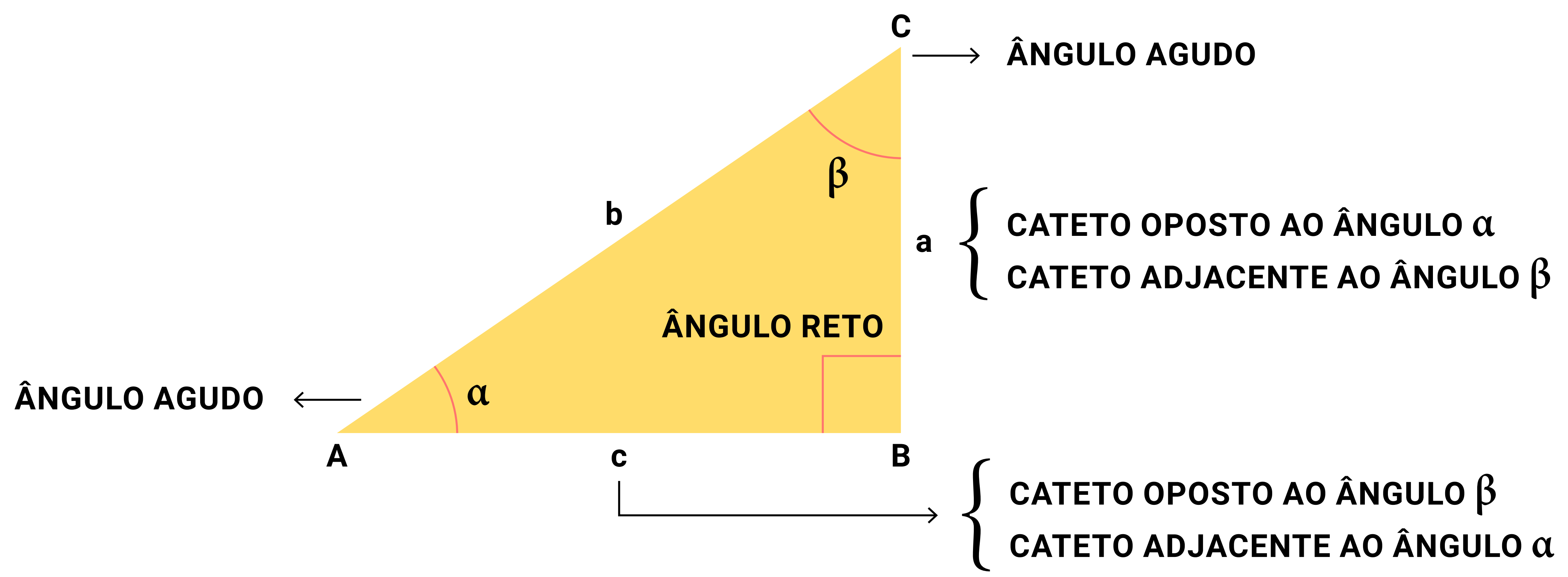
- Reforce com o lápis vermelho a hipotenusa do triângulo.
- Reforce com o lápis azul o cateto oposto ao ângulo pintado.
- Reforce com o lápis verde o cateto oposto ao ângulo pintado.

Aproveite o momento para explorar o vocabulário correto, converse sobre os nomes dos lados dos triângulos retângulos: catetos e hipotenusa, o significado das expressões cateto oposto e cateto adjacente a um determinado ângulo. Peça que localizem o outro ângulo agudo do triângulo desenhado e explore:

- Qual a cor do cateto oposto a esse ângulo agudo?
- Qual a cor do cateto adjacente a esse ângulo agudo?

Finalize o momento desenhando no quadro um triângulo retângulo e peça que os estudantes identifiquem os catetos opostos e adjacentes de cada ângulo. Registre as conclusões no seu desenho. Veja o exemplo ao lado.

Após essa exploração inicial, apresente para os estudantes o vídeo “A história da Matemática”, disponível em: bityli.com/yt-hist-mat (acesso em: 30 jun. 2022). Neste momento, apresente apenas um recorte desse vídeo - de 33min24s até 46min 40s -, mas disponibilize o endereço e convide-os para assistirem ao vídeo na íntegra em outro momento.



Para se aprofundar

Em outro momento, disponibilize também o texto “Pitágoras não criou o teorema de Pitágoras”, disponível em: bityli.com/teorema-de-pitagoras (acesso em: 13 ago. 2022) que também aborda um pouco da História da Matemática e as origens do Teorema de Pitágoras.

Após a exibição do trecho do vídeo, convide os estudantes a comentar o que mais gostaram, o que foi abordado e eles já sabiam e o que eles ainda não sabiam.

Pode ocorrer de algum dos estudantes comentar que já estudou o Teorema de Pitágoras ($hip^2 = cat^2 + cat^2$). Caso isso ocorra, peça que ele conte o que já sabe sobre este importante teorema da matemática. Apresente algumas perguntas norteadoras:

- Em que tipos de triângulos esse teorema pode ser utilizado?
- O que diz esse teorema?
- Com que objetivo você poderia utilizá-lo?

Anuncie então que os estudantes que já estudaram esse teorema terão a oportunidade de aprofundar seus estudos e quem ainda não estudou terá a oportunidade de fazê-lo agora.

Proponha a sequência de atividades disponível no **Anexo 3.** Os estudantes podem trabalhar em duplas. Oriente-os a fazer o registro das atividades no caderno.

Enquanto os estudantes realizam a proposta, circule pelas duplas registrando:

- Quem faz com facilidade (esses alunos podem ser monitores nas próximas atividades desta sequência didática).
- Quais são as principais dificuldades e dúvidas (esses registros ajudarão você a planejar os pontos que serão abordados no momento de conversa coletiva).
- Os erros que conseguir identificar (esses erros podem ser focos de atenção na discussão da atividade e também base para as planejas as próximas atividades).

Exemplo de exercícios para a 1ª etapa:

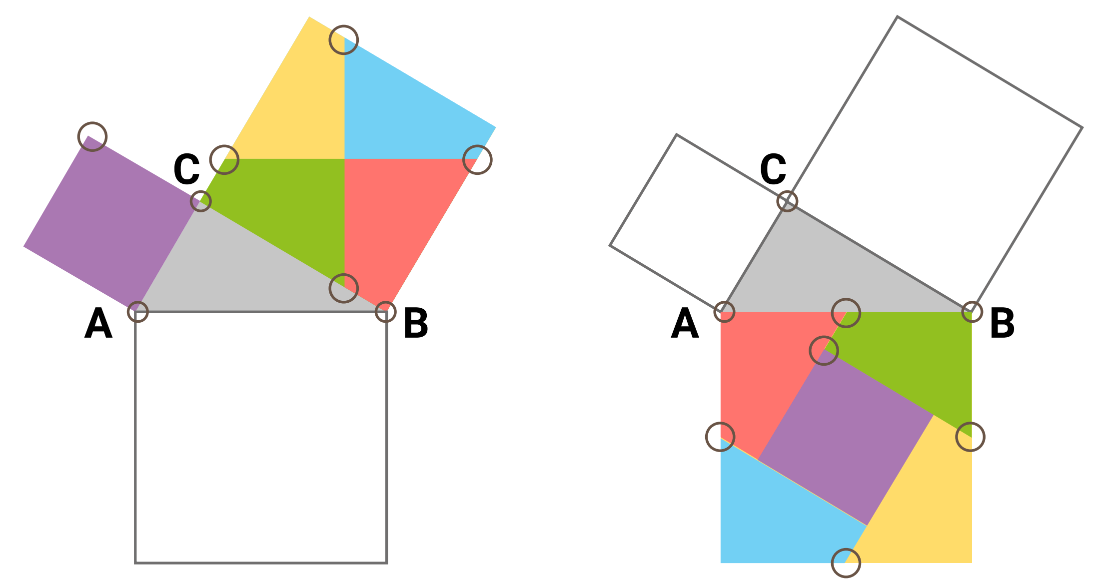
a) Qual(ais) a(s) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado menor?

b) Qual(ais) a(s) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado médio?

c) Qual(ais) a(s) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado maior?

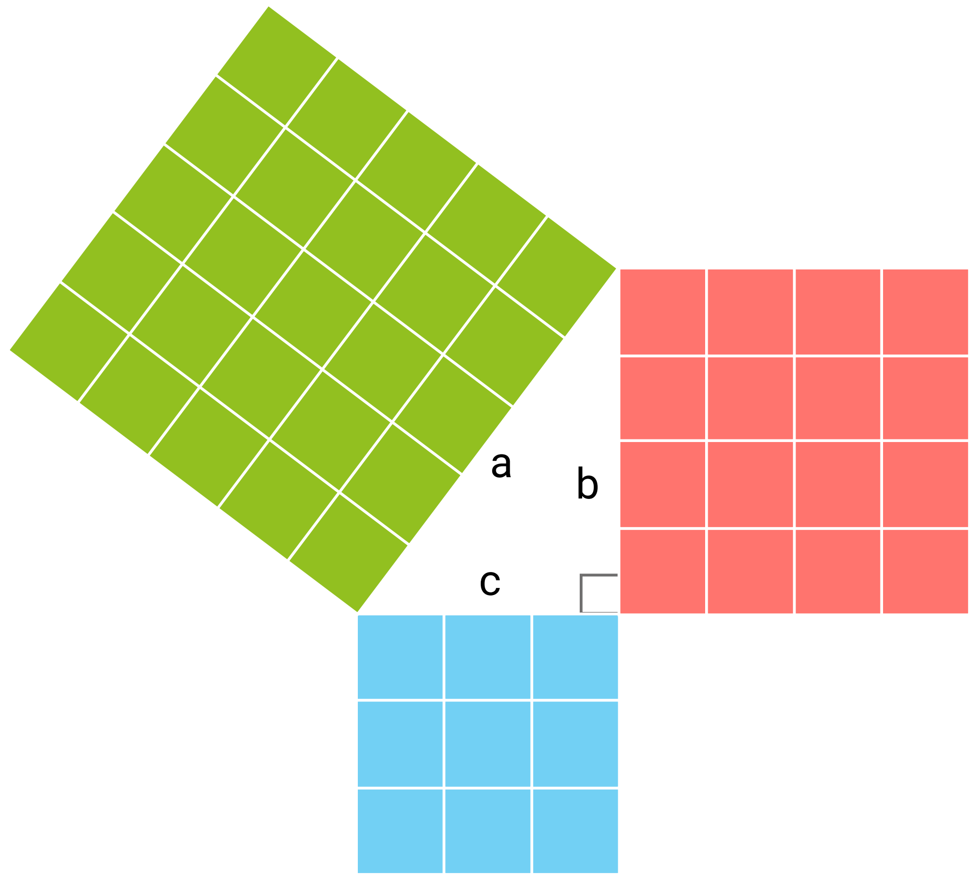
d) Qual a relação entre as áreas desses três quadrados? Explique sua resposta e escreva uma expressão matemática para representar essa situação. A soma das áreas dos dois quadrados menores é igual à área do quadrado maior, pois para cobrir o quadrado maior utilizei todas as peças que cobriram os dois quadrados menores. área do quadrado maior = área do quadrado menor + área do quadrado médio

e) Lembrando que a medida dos lados do triângulo retângulo é equivalente à medida dos lados de um dos quadrados, é possível reescrever a sentença anterior utilizando as palavras cateto e hipotenusa? $hip^2 = cat^2 + cat^2$



Exemplo de exercícios para a 2ª etapa:

Analise as seguintes situações:



a) Se cada quadradinho possui lado igual a 1 (uma) unidade, identifique a medida dos seguintes elementos:

- Hipotenusa a. Resposta: 5u
- Cateto b. Resposta: 4u
- Cateto c. Resposta: 3u

b) Se cada quadradinho possui lado igual a 2 (duas) unidades, identifique a medida dos seguintes elementos:

- Hipotenusa a. Resposta: 10u
- Cateto b. Resposta: 8u
- Cateto c. Resposta: 6u

c) Se cada quadradinho possui lado igual a 3 (três) unidades, identifique a medida dos seguintes elementos:

- Hipotenusa a. Resposta: 15 u
- Cateto b. Resposta: 12 u
- Cateto c. Resposta: 9 u

d) Qual a regularidade que você observa entre as medidas dos lados desses triângulos?
Resposta esperada: Os lados desses triângulos são proporcionais: (3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15).

e) O Teorema de Pitágoras é válido em todas as situações apresentadas? Efetue os cálculos e verifique se sua hipótese estava correta.
Resposta esperada: Sim, o teorema de Pitágoras é válido para todos os triângulos, pois:

$5^2 = 3^2 + 4^2$	$10^2 = 6^2 + 8^2$	$15^2 = 9^2 + 12^2$
$25 = 9 + 16$	$100 = 36 + 64$	$225 = 81 + 144$

Para encontrar mais ternas pitagóricas, basta partir do triângulo cujos lados medem 3, 4, 5 e encontrar novos triângulos com lados proporcionais, por exemplo: (12, 16, 20), (15, 20, 25). Porém existem outros exemplos: (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (12, 35, 37), (13, 84, 85), (16, 63, 65), (20, 21, 29)...

Após a realização da proposta, proponha um momento de discussão coletiva. Convide alguns estudantes para socializar suas estratégias. Professor/a, lembre-se que o foco aqui não é apenas uma exposição dos registros, mas sim, um momento de muita troca, onde um estudante aprende com o outro. Aquele que está explicando como pensou, apreende mais sobre o tema, pois organiza suas ideias e desenvolve a argumentação e a oralidade.

Por outro lado, aquele que está escutando, está cognitivamente ativo, tentando entender como seu colega pensou, validando ou questionando a resolução, isto é, está ampliando seu repertório de estratégias, desta forma, estará mais preparado para enfrentar uma próxima situação que envolve resolução de problemas. Vale ressaltar que mesmo que a estratégia não esteja totalmente correta ou que esteja incompleta, ela pode ser apresentada para o grupo no momento de discussão coletiva, pois os próprios colegas podem apresentar "pistas" para que essa estratégia seja revisitada e ajustada/corrigida.

Aproveite o momento de conversa coletiva para retomar a semelhança de triângulos e garantir que todos tenham compreendido o Teorema de Pitágoras e as ternas pitagóricas.

Finalize a etapa, convidando o estudante a registrar em seu lapbook as descobertas/ aprendizagens realizadas. Incentive-o a fazer desenhos, esquemas, breves descrições e/ou lembretes relacionados ao tema estudado.

Para aprofundar as aprendizagens, é muito importante apresentar situações que envolvam a aplicação do Teorema de Pitágoras. Proponha que os estudantes resolvam problemas que possam ser modelados pelo teorema estudado. Você pode selecionar essas atividades do material didático. Oriente-os a pesquisar os registros do lapbook sempre que necessário.

Para se aprofundar

Se necessário, para ampliar o estudo do Teorema de Pitágoras e das ternas Pitagóricas, proponha os exercícios disponibilizados pela plataforma do Khan Academy, disponíveis em: bityli.com/use-o-teorema e bityli.com/medidas-triângulos-retângulos (acessos em: 23 maio 2022).

Conectando sequências

Conexões com o Material do Volume I e outras explorações

Nesta SD. exploramos a representação geométrica do Teorema de Pitágoras, contemplando parcialmente a habilidade EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. Para aprofundar as aprendizagens dos estudantes, é essencial que o/a professora também explore a SD 3 do Material do Volume I, em que são contempladas todas as relações métricas do triângulo retângulo, com base na semelhança de triângulos, incluindo a demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras.

ATIVIDADE 4 ▶ MOMENTO 3

2 aulas:

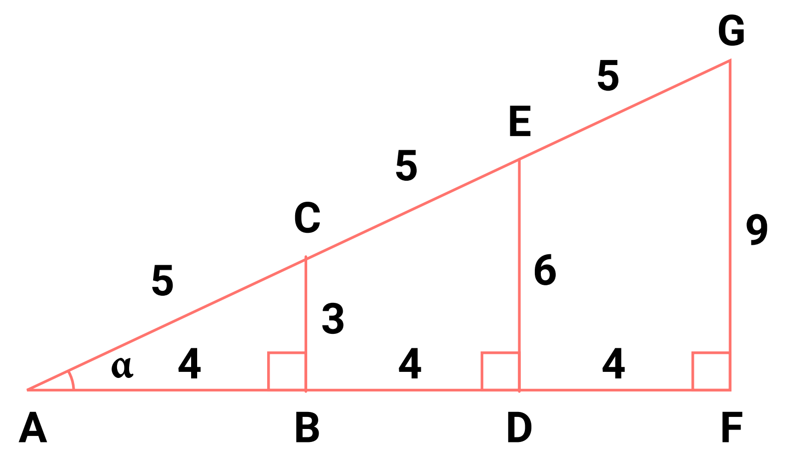
As relações trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente

Inicie o diálogo retomando um pouco da história da Matemática. Conte que a Matemática nasceu e se desenvolveu a partir das necessidades que a humanidade encontrava para entender o mundo ao seu redor.

Anuncie que, nesta etapa da terceira SD, o foco é explorar algumas relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de triângulos retângulos e que as atividades vão envolver muita investigação, formulação de hipóteses e muita troca e cooperação entre os estudantes. Desta forma, é muito importante que todos se engajem, realizem as propostas apresentadas, colaborando assim para que o grupo atinja as expectativas de aprendizagem. Lembre-os de que é importante não deixar ninguém para trás.

Para realizar essa proposta, organize os estudantes em pequenos grupos. Explique que se desejarem, poderão utilizar a calculadora, pois ela será uma grande aliada para agilizar os cálculos envolvidos e contribuir com a identificação de regularidades. As orientações para a atividade podem ser disponibilizadas no quadro da sala ou ser projetada para os estudantes.

A professora de Paulo solicitou que ele desenhasse 3 triângulos retângulos, semelhantes entre si. Veja a figura construída pelo estudante:



Converse com seus colegas e procure explicar:

- Quais são os triângulos retângulos construídos pelo estudante?
- Como é possível verificar se eles são realmente semelhantes? Explique.
- Determine a medida dos lados desses triângulos. Lembre-se de que você pode obter esses valores apenas analisando as informações contidas na figura. Construa em seu caderno a tabela apresentada a seguir e registre as informações obtidas.

Nome do triângulo	Medida do cateto oposto ao ângulo α	Medida do cateto adjacente ao ângulo α	Medida da hipotenusa
Triângulo 1	3	4	5
Triângulo 2	6	8	10
Triângulo 3	9	12	15

Obtenha, em cada triângulo, a razão (divisão) entre as medidas do cateto oposto ao ângulo alfa e da hipotenusa e registre suas conclusões:

Triângulo 1: $\dfrac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \_\_\_\_\_$

Triângulo 2: $\dfrac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \_\_\_\_\_$

Triângulo 3: $\dfrac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \_\_\_\_\_$

Você identifica alguma regularidade entre essas razões? Converse com seus colegas e registre suas conclusões.

Professor/a, se achar adequado, para ampliar as aprendizagens: solicite que, com o transferidor, os estudantes meçam o ângulo α e, com a régua e a malha quadriculada, construam um novo triângulo retângulo, semelhante aos demais triângulos. Caso seja possível, eles também podem construir a figura desejada utilizando um software de geometria dinâmica, como o Geogebra (disponível em: bityli.com/Geogebra. Em seguida, peça aos grupos que troquem os triângulos construídos e repitam a mesma exploração com esse novo triângulo: medir os lados e encontrar o valor da razão.

Novo Triângulo: $\dfrac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \_\_\_\_$

Questione então: "A mesma regularidade foi observada?"

Enquanto os estudantes realizam a proposta, circule pelos grupos. Esse pode ser um momento de avaliar os estudantes para fazer ajustes de rotas, replanejar para contribuir com o avanço das aprendizagens. Prepare previamente algumas questões que poderão ser o foco da sua avaliação, por exemplo:

- Identificam os 3 triângulos construídos?
- Explicam usando argumentos corretos e convincentes porque é possível afirmar que eles são congruentes?
- Identificam, em todos os triângulos, a hipotenusa, os catetos opostos e adjacentes ao ângulo α?
- Reconhecem a regularidade, isso é, em todos os casos, o valor da razão é 3/5?

Registre as fragilidades e as dificuldades encontradas para retomá-los no momento de discussão coletiva.

Após a realização da atividade, convide os estudantes a socializar suas estratégias e suas conclusões. Incentive-os a explicar como pensaram, o que descobriram e em que pontos ainda ficaram com dúvidas. Conduza a discussão de modo que percebam que, em todos os casos, a razão entre a medida do cateto oposto a alfa e a hipotenusa é sempre α, inclusive quando cada grupo construiu o seu triângulo. É importante que percebam que esses triângulos construídos pelos grupos podem ter sido diferentes, mas a razão obtida é a mesma.

Formalize então que, em um triângulo retângulo, a razão

$$\frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

é constante e recebe o nome de seno de α, então

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

No caso dos triângulos envolvidos nesta proposta,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{3}{5}$$

Em outro momento, proponha que os estudantes realizem uma nova exploração, contemplando agora as outras duas razões trigonométricas: cosseno e tangente. Você pode repetir a mesma estratégia. Enquanto circula pela sala no momento que os estudantes estão realizando a proposta, você pode coletar evidências e quais as dúvidas que existiam na exploração do seno que já foram sanadas e quais ainda se configuram como ponto de atenção.

No momento de discussão coletiva, garanta que os estudantes concluam que:

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

No caso dos triângulos envolvidos nesta proposta,

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}$$

No caso dos triângulos envolvidos nesta proposta,

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha} = \frac{3}{4}$$

Após todas as discussões, você pode rever os seus registros e analisar se as habilidades que se configuraram como fragilidades foram consolidadas, se as dúvidas dos estudantes foram resolvidas. E, caso necessário, retome os pontos importantes das explorações realizadas nesta SD. Antes de avançar com o estudo do tema, proponha um momento de sistematização das aprendizagens. Peça que, individualmente, construam um texto/resumo contendo tudo que aprenderam sobre as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Esses registros poderão ser realizados no lapbook. Em seguida, convide alguns estudantes para socializar seus registros e todos podem complementar seus registros a partir da socialização dos colegas.

Nesse momento, é muito importante apresentar alguns exercícios ou resolução de problemas envolvendo as relações trigonométricas. Você pode selecionar algumas propostas interessantes do material didático. Solicite que trabalhem sozinhos, resolvendo aquilo que já sabem e anotando suas dúvidas para que vocês conversem a respeito delas após um tempo combinado.

Depois disso, os estudantes devem trocar suas respostas com as de um colega e um corrigir as respostas do outro para depois conversarem sobre as observações que um fez às respostas do outro. Em seguida, se considerar necessário, solicite a alguns estudantes que coloquem no quadro suas respostas e, caso haja divergências entre elas, evite dizer se está certo ou não, incentive a discussão porque, nesse momento, os estudantes desenvolvem a linguagem matemática e as habilidades de argumentação.

Para se aprofundar

Professor/a, caso você perceba que os estudantes ainda apresentam fragilidades com a aplicação dos temas estudados, você pode disponibilizar vídeos, textos e exercícios extras, como os disponíveis na plataforma do Khan Academy: bityli.com/razoes-trigo (acesso em: 23 maio 2022).

Você pode selecionar atividades diferentes para grupos de estudantes com diferentes dificuldades. Por exemplo, para aqueles que ainda não construíram os conceitos, solicite que assistam ao vídeo e façam um texto explicando as suas aprendizagens. Aqueles que apresentam dificuldades com as operações, solicite que resolvam os exercícios etc.

ATIVIDADE 4 ▶ MOMENTO 4

2 aulas:

Construindo um teodolito para medir altura

As primeiras noções de Trigonometria estão ligadas às relações existentes entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo. Essas relações possibilitam o cálculo de valores desconhecidos (lados e ângulos) do triângulo e, com base nelas, é possível calcular alturas e distâncias inacessíveis.

Nesta proposta, os estudantes vivenciarão, na prática, como isso acontece, ou seja, mobilizarão as aprendizagens sobre as relações trigonométricas do triângulo para calcular uma altura inacessível (prédio da escola, ou uma árvore, ou um prédio vizinho, entre outros).

Desta forma, a proposta visa consolidar o desenvolvimento da Competência geral 2 prevista pela BNCC: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Inicie a proposta convidando os estudantes a estimar alguma medida inacessível: pode ser a altura de árvore localizada no pátio da escola ou a altura do prédio da escola ou de algum prédio vizinho. Vamos tomar como exemplo a medida da altura de uma árvore. Proponha algumas questões iniciais:

- Quanto você acha que mede a árvore do pátio da escola? Faça uma estimativa dessa altura e anote esse valor.
- O que você poderia fazer para ter certeza se sua estimativa foi adequada, ou seja, estava próxima da altura real da árvore?
- Você conhece algum instrumento que possibilite medir essa altura?

Pergunte também se eles já ouviram falar no teodolito e, caso ninguém conheça esse instrumento, convide-os a fazer uma rápida pesquisa na internet para saber mais sobre esse tema: o que é, para que serve e quais os profissionais que utilizam esse instrumento.

Anuncie então que farão a construção de um teodolito caseiro para medir a altura da árvore. Organize os estudantes em grupos e disponibilize para uma cópia do Anexo 10 e os materiais solicitados e peça que realizem as atividades I, II e III. Circule pelos grupos durante a realização desta etapa da proposta para ajudá-los com a construção do instrumento e a medição do ângulo e da distância entre a árvore e o teodolito. Quando todos terminarem esta etapa, peça que se sentem formando uma roda para facilitar a comunicação e convide os grupos para socializarem seus desenhos, as medidas obtidas.

Exemplo de registro:

É importante que observem que não existe uma única resposta correta. Dependendo da posição da pessoa que está com o teodolito o valor do ângulo e da distância serão diferentes. Verifique se todos identificaram que existe um triângulo retângulo cujos vértices são as extremidades da árvore e o centro do teodolito. Questione também quais as medidas conhecidas e quais as desconhecidas desse triângulo. Pergunte se a altura da pessoa que está segurando o teodolito deve ser considerada para calcular a altura da árvore. Espera-se que identifiquem que conhecem o ângulo, o cateto adjacente a ele e que a altura da árvore é a medida do cateto oposto mais a altura da pessoa.

Após essas explorações coletivas, peça que retomem os grupos e conversem sobre quais estratégias poderiam utilizar para obter a medida da árvore. Realizem a atividade IV do Anexo 10. Enquanto realizam as discussões, circule pelos grupos. Se necessário, peça que consultem o lapbook para relembrar as relações trigonométricas do triângulo retângulo. Certifique-se que todos identificaram que a relação trigonométrica a ser utilizada é a tangente e peça que expliquem porque não escolheram o seno ou o cosseno. Oriente-os também a buscar a tangente do ângulo em uma tabela trigonométrica do livro didático ou da internet, ou até mesmo em calculadoras científicas, se for possível.

Finalize a proposta convidando os grupos para uma roda de conversa. Peça que expliquem qual a estratégia utilizada e justifiquem o porquê da escolha. Amplie as discussões com algumas perguntas norteadoras:

- A estimativa realizada estava próxima da medida obtida com os cálculos?
- A medida obtida com os cálculos é a medida exata da altura da árvore? Explique!

Peça também que realizem uma autoavaliação individual com base nos seguintes pontos:

- Como foi participar da atividade?
- Você participou ativamente da proposta, apresentando sua opinião e dando sugestões?
- Respeitou a opinião e o tempo dos colegas?
- Colaborou para que o grupo chegasse à resolução do problema?
- Existem alguns aspectos que você pode melhorar na próxima atividade para efetivar a sua colaboração com o grupo? Quais?

Peça que registrem suas respostas e guarde para que sejam consultadas de tempos em tempos para analisarem em que pontos já avançaram e em quais ainda precisam avançar.

ATIVIDADE 4 ▸ **MOMENTO 5**

3 aulas:

As relações trigonométricas dos ângulos notáveis: 30º, 45º e 60º

O foco desta atividade é ampliar o estudo das relações trigonométricas no triângulo retângulo abordado no momento anterior. A ideia agora é construir o conceito de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30º, 45º e 60º) visto que esse é um conhecimento prévio necessário para o desenvolvimento das habilidades EM13MAT306 - Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria; e EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos, esse última explorada no volume 1 desse material.

A proposta contribui com o desenvolvimento da Competência Específica 3 de Matemática para o Ensino Médio: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

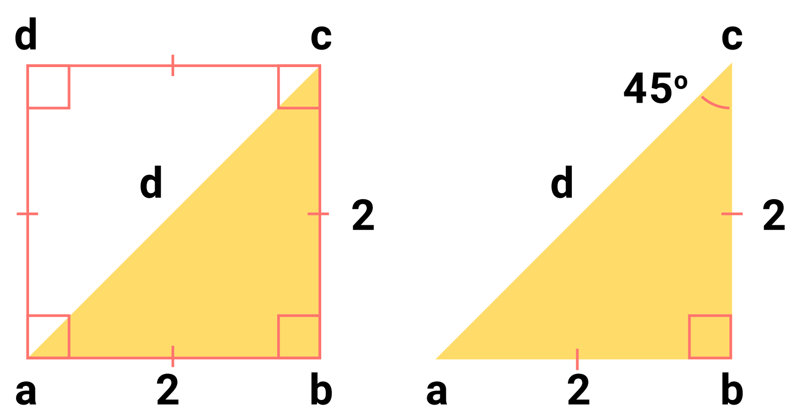
Após prender o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos notáveis, de forma significativa, os estudantes poderão utilizar essas informações sempre que desejarem e elas podem contribuir com a agilidade no cálculo de distâncias inacessíveis.

Converse um pouquinho sobre a dinâmica da aula: serão alternados momentos de investigação coletivas e momentos expositivos dialogados. Ressalte a importância de todos participarem da aula expositiva, apresentando suas dúvidas, suas descobertas e suas aprendizagens. Lembre-os de que fazer os registros em uma aula expositiva é essencial, pois eles podem ser utilizados em outros momentos da aprendizagem. Para isso, faça algumas paradas ao longo da aula e solicite que anotem isso ou aquilo conforme sua orientação. Ao final, organize uma pequena síntese da aula com toda a turma e peça que registrem em seus cadernos. Isso mostra o sentido e a lógica do percurso de estudo que foi realizado.

1 ª ETAPA:

Inicialmente, o objetivo é explorar as relações trigonométricas do ângulo de 45º. Peça que, em duplas, construam um quadrado com qualquer medida de lado. Diga que o objetivo é explorar um ângulo de 450 e questione se o quadrado seria uma figura adequada para essa exploração, se é possível obter um ângulo com a medida procurada. Peça que expliquem.

Espera-se que os estudantes percebam que, ao traçar a diagonal do quadrado, eles obtêm um triângulo retângulo cujos ângulos agudos medem 45º. Explore também, oralmente, quais são as medidas conhecidas desse triângulo e garanta que percebam que, apesar da medida dos lados dos quadrados construídos serem diferentes, todos conseguem obter os triângulos retângulos com ângulos agudos de 45º. Pergunte quais as medidas necessárias para determinar o seno desse ângulo. Espera-se que percebam que precisam do valor da hipotenusa. Questione qual estratégia seria adequada para encontrar esse valor. Escolha um dos quadrados construídos na sala e resolva no quadro, em um momento expositivo dialogado, o passo a passo para se obter essa medida. Por exemplo:



$hip^2 = cat^2 + cat^2$
$d^2 = 2^2 + 2^2$
$d^2 = 8$
$d = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Em seguida, convide as duplas a determinar o valor da medida da hipotenusa do triângulo construído e peça que socializem a medida do lado do quadrado e a medida da diagonal. Pergunte se eles identificam alguma regularidade e conclua pedindo para escrever uma sentença matemática que forneça a regularidade encontrada. Espera-se que concluam que:

- lado do quadrado é 2 » diagonal $2\sqrt{2}$
- lado do quadrado é 5 » diagonal $5\sqrt{2}$
- lado do quadrado é 3 » diagonal $3\sqrt{2}$
- lado do quadrado é 1 » diagonal $1\sqrt{2}$

Retome porque encontraram o valor da medida da diagonal e peça para 4 ou 5 duplas determinar o sen 45º, outras 4 ou 5 duplas determinam o cos 45º, e outras, a tg 45º.

Nesta etapa, é muito importante você circular pelos grupos, pois talvez alguns estudantes apresentem dificuldades em trabalhar com os números irracionais. Anote as dificuldades de cada estudante e, antes de iniciar a 2ª etapa da atividade, agrupe os estudantes por necessidades de aprendizagem, apresentando diferentes atividades, conforme sugerido no quadro "Aprofundando a aprendizagem" a seguir.

No final da proposta, peça que comparem os resultados obtidos e questione os valores encontrados. Mais uma vez, enfatize que, apesar dos quadrados construídos terem medidas diferentes, todos encontraram os mesmos valores para sen, cos e tg de 45º. Esse fato pode embasar as conclusões dos estudantes e contribuir que percebam que sen 45º é igual a $\sqrt{2}/2$ em qualquer situação. Oriente-os a registrar as informações obtidas em uma tabela que poderá ser consultada em outros momentos da aula.

Resposta:

	30º	45º	60º
sen		$\sqrt{2}/2$	
cos		$\sqrt{2}/2$	
tag		1	

Para se aprofundar

Professor/a, caso tenha identificado que alguns estudantes apresentaram dificuldades durante a realização da proposta, esse é o momento de retomar suas anotações, agrupar os estudantes de acordo com as dificuldades encontradas e apresentar diferentes propostas para a mesma turma:

- Para aqueles que estão com dúvidas em simplificar, somar e subtrair números irracionais, proponha que realizem as atividades propostas no plano de aula da Nova Escola, "Revendo o conceito de soma e subtração", disponível em: bityli.com/revendo-conceito (acesso em: 25 maio 2022).

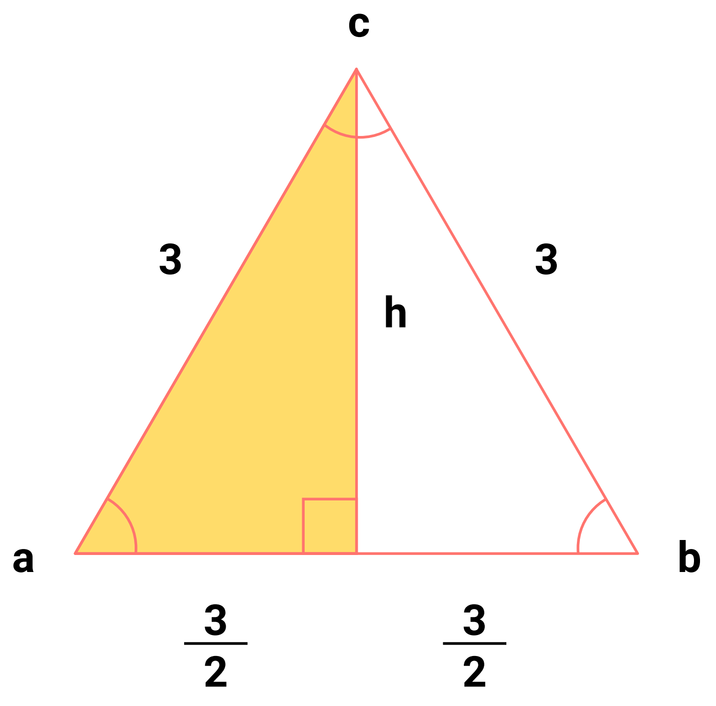
- Para aqueles que estão com dificuldades em modelar uma situação que possa ser modelada pelo Teorema de Pitágoras, apresente as atividades do plano de aula da Nova Escola "Calculando perímetro de triângulo e quadrilátero no Geoplano com o auxílio do Teorema de Pitágoras", disponível em: bityli.com/calculando-perimetro (acesso em: 25 maio 2022).

Os estudantes que não apresentaram dificuldades durante a realização das propostas poderão ser os tutores e contribuir com aqueles que ainda precisam avançar em suas aprendizagens.

2 ª ETAPA:

O objetivo é explorar as relações trigonométricas do ângulo de 60o. Questione se o quadrado seria uma figura adequada para essa exploração. Espera-se que concluam que não é muito tranquilo obter um ângulo com essa medida no quadrado. Pergunte então se eles têm alguma sugestão sobre qual figura utilizar nesse momento. Espera-se que tragam como resposta o triângulo equilátero. Caso eles não apresentem essa resposta, você pode apresentar alguns polígonos regulares, como o triângulo, o hexágono e o octógono, e pedir a eles que descubram a medida dos ângulos de cada um deles justificando a sua resposta.

Peça então que desenhem um triângulo equilátero (pode ser apenas um esboço). Questione quais as medidas necessárias para determinar o seno 60o, quais delas eles já sabem e quais eles precisam determinar. Espera-se que percebam que precisam obter inicialmente um triângulo retângulo, pois as relações estudadas nesta etapa de sequência só são válidas para esse tipo de triângulo. Questione como obter um triângulo retângulo a partir do triângulo equilátero. Em seguida, após realizar a divisão, questione quais as medidas do triângulo obtido. Dê um tempo adequado para que cada dupla calcule a medida dessa altura. Em seguida, peça para socializar os resultados e questione qual estratégia seria adequada para encontrar esse valor. Escolha um dos triângulos construídos na sala e resolva, no quadro, em um momento expositivo dialogado, o passo a passo para se obter essa medida. Por exemplo:



$$3^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + h^2$$

$$9 = \frac{9}{4} + h^2$$

$$9 - \frac{9}{4} = h^2$$

$$\frac{27}{4} = h^2$$

$$\frac{\sqrt{27}}{4} = h$$

Em seguida, convide as duplas a determinar o valor da medida da hipotenusa do triângulo construído e peça que socializem a medida do lado do quadrado e a medida da diagonal. Pergunte se eles identificam alguma regularidade e conclua pedindo para escrever uma sentença matemática que forneça a regularidade encontrada. Espera-se que concluam que:

lado do triângulo é 2 » altura $\frac{2\sqrt{3}}{2}$

lado do triângulo é 5 » altura $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

lado do triângulo é 3 » altura $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

lado do triângulo é 1 » altura $\frac{1\sqrt{3}}{2}$

Retome o porquê de encontrar o valor da medida da altura desse triângulo equilátero e novamente peça para 4 ou 5 duplas determinarem o sen 60º, outras 4 ou 5 duplas determinam o cos 60º, e outras a. tg 60º.

No final da proposta, peça que comparem os resultados obtidos e questione os valores encontrados. É muito importante que percebam que, apesar dos triângulos equiláteros construídos serem diferentes, todos encontraram o mesmo valor para sen 60º, cos 60º e tg 60º. Oriente-os a registrar essas informações em uma tabela que poderá ser consultada em outros momentos.

Resposta:

	30º	45º	60º
sen		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tag		1	$\sqrt{3}$

Professor/a, não se esqueça de observar os estudantes durante a realização da proposta e dar retorno para a classe a respeito do que estão fazendo bem, no que já melhoraram, e quais metas ainda precisam ser vencidas.

Pergunte também a opinião deles: O que acham que já fazem? Em que é preciso aperfeiçoar?

3 ª ETAPA:

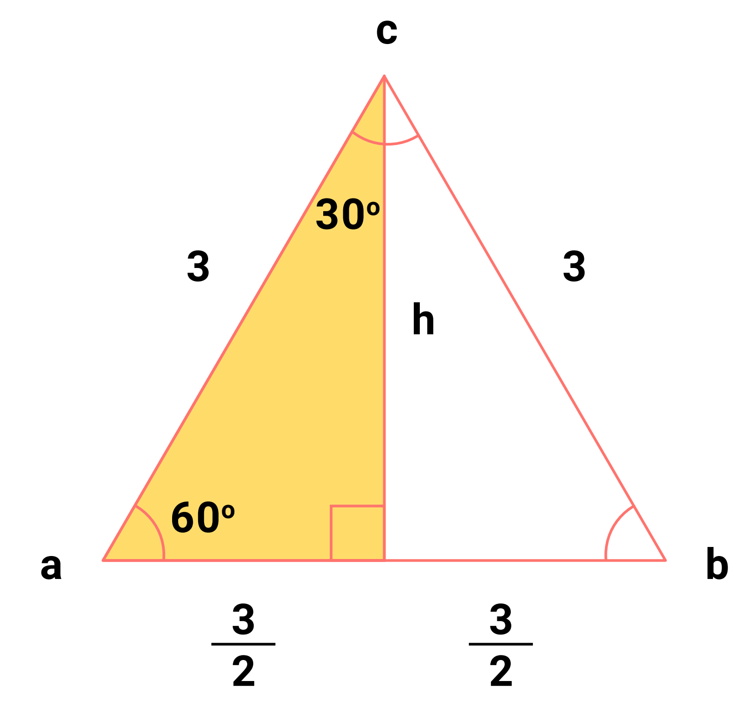
O objetivo agora é explorar as relações trigonométricas do ângulo de 30º. Questione se em alguma das figuras utilizadas nas etapas anteriores existe algum ângulo de 30º. Se necessário, em um momento expositivo dialogado, retome o conceito de simetria e deixe que percebam que a altura do triângulo equilátero é o eixo de simetria, portanto divide o ângulo de 60º em duas partes congruentes, ou seja, 30º.

Proponha então que os estudantes, organizados em duplas, repitam a exploração, no mesmo triângulo equilátero, porém com um olhar para o ângulo de 30º.

Assim, percebem se sua forma de pensar e de aprender a matemática está correta ou equivocada, tomam consciência do que sabem e do que falta saber, conhecem a si mesmos, conhecem o outro, percebem como cada um avança, retrocede, aprende. Isso gera autonomia e os tornam protagonistas de suas escolhas, de seus projetos e de sua história de vida.

Após a realização da proposta, convide os estudantes a socializar os resultados. Caso haja alguma divergência, você pode solicitar que os estudantes realizem a proposta no quadro e abrir uma roda de conversa para todos discutirem e alinharem suas aprendizagens. No final, peça que completem a tabela com os resultados obtidos.

Para finalizar a etapa, oriente os estudantes a registrar suas aprendizagens no lapbook. Para ampliar as aprendizagens, proponha exercícios disponíveis no material didático.



Resposta:

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tag	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

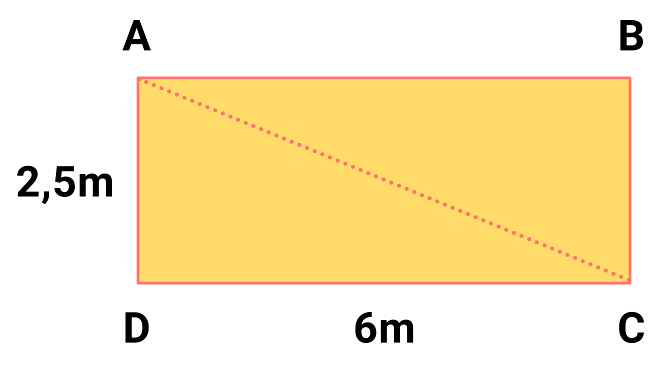
Bora se preparar?!

1 aula:

Professor/a, para ampliar as aprendizagens dos estudantes e permitir que pensem mais a respeito do Teorema de Pitágoras e das relações trigonométricas no triângulo retângulo, peça que resolvam as questões a seguir. Eles podem trabalhar individualmente e consultar os registros do lapbook. No final, peça que troquem suas resoluções e disponibilize um gabarito comentado para que um corrija a produção do outro. Caso necessário, resolva 1 ou 2 exercícios no quadro. Para agilizar os cálculos, permita que os estudantes trabalhem com a calculadora.

EXERCÍCIO 1

Questão: 2346. Descritor: M600. MT – fase 1
Uma formiga está sobre um tampo de uma mesa, representado pelo quadrilátero ABCD, e se desloca sobre a diagonal AC. Quanto essa formiga irá percorrer em metros?

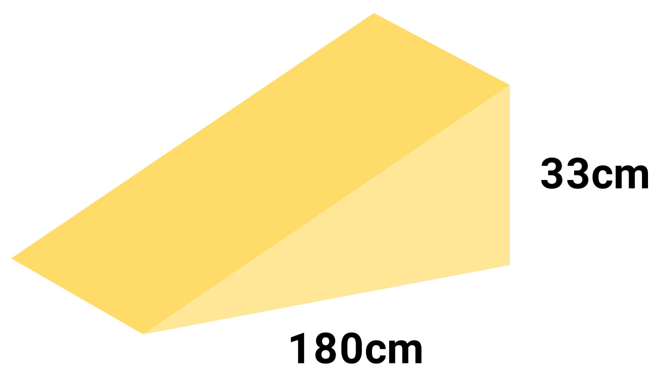


a) 2,5 m
b) 3,5 m
c) 5,0 m
d) 6,0 m
e) 6,5 m

Gabarito: E

EXERCÍCIO 2

Questão: 165. Descritor: M157. MT – fase 1
A figura abaixo mostra uma rampa de acesso a uma plataforma. De acordo com as medidas indicadas na figura, determine o comprimento dessa rampa.

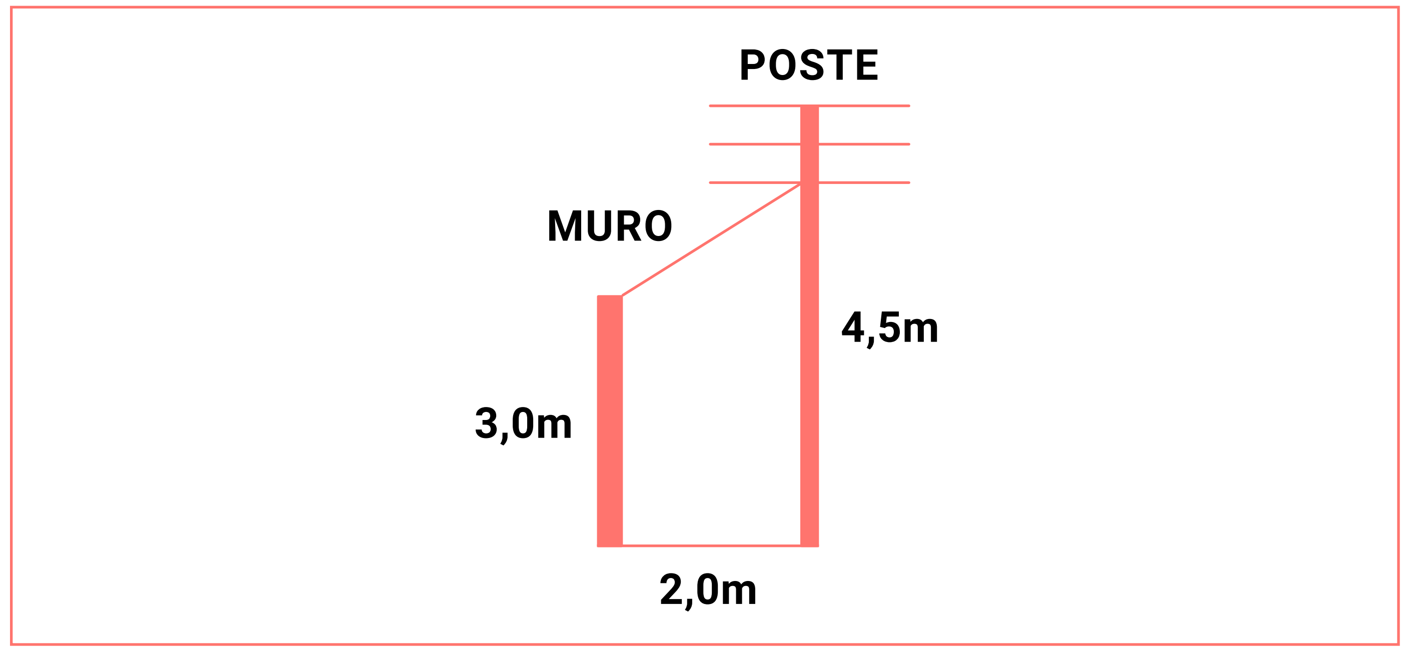


a) 216 cm
b) 180 cm
c) 213 cm
d) 183 cm
e) 33 cm

Gabarito: D

EXERCÍCIO 3

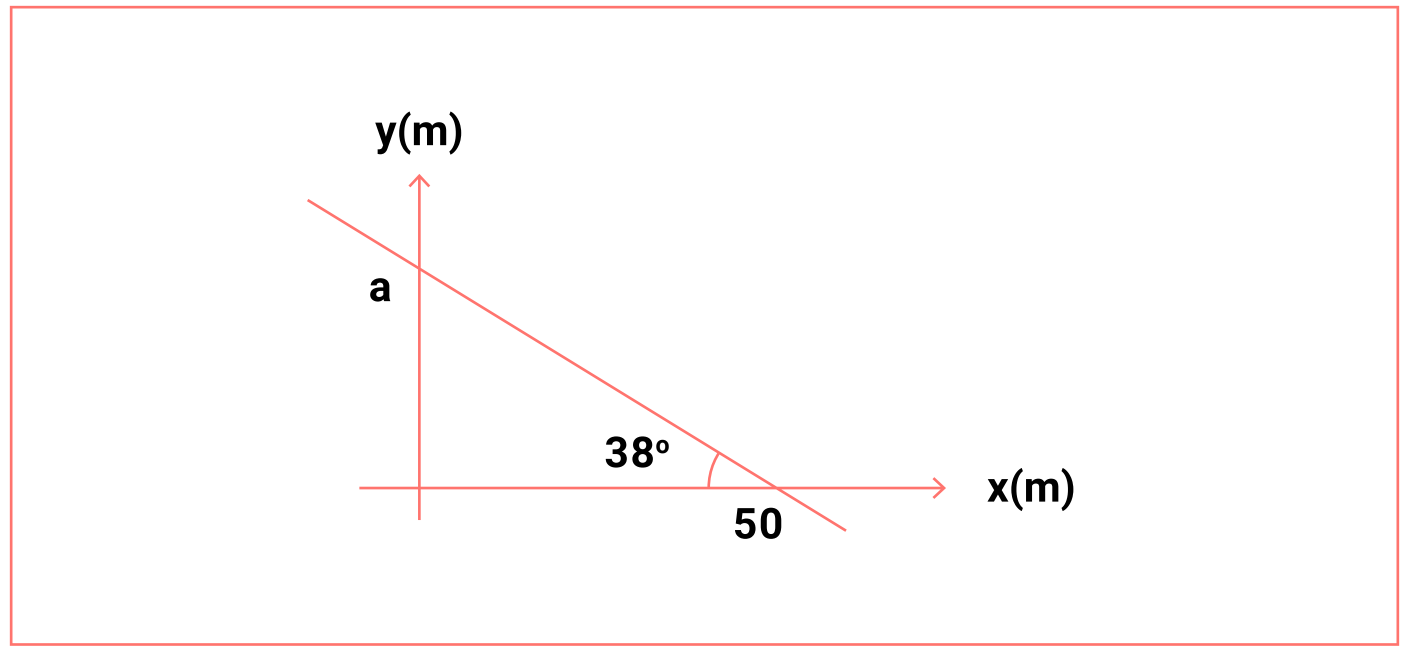
Questão: 1657. Descritor: M156. MT – fase 1
Uma das extremidades de um fio elétrico está presa a um poste a 4,5 m de altura e a outra extremidade está presa a um muro a 3 m de altura. Se o poste está a 2 m do muro, qual o comprimento do fio?



a) 4,5 m
b) 2,5 m
c) 3,0 m
d) 2,0 m
e) 1,5 m
Gabarito: B

EXERCÍCIO 4

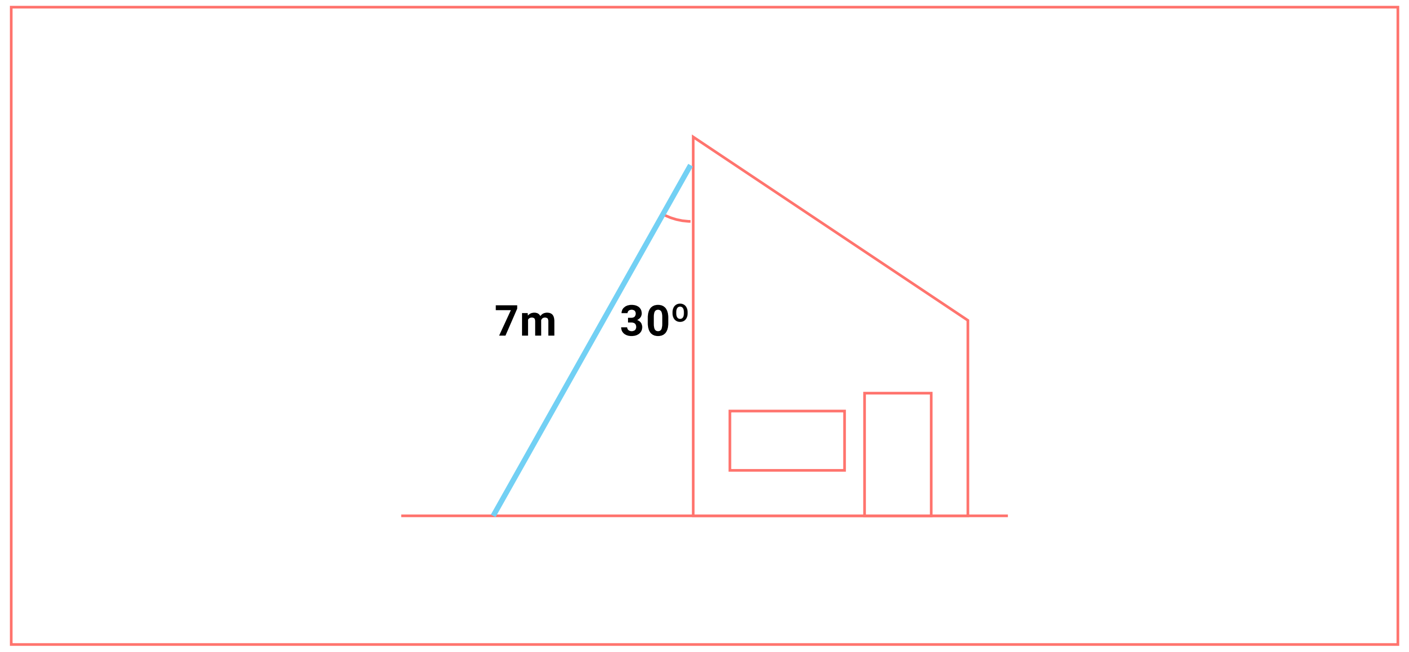
Questão: 1863. Descritor: M082. MT – fase 1
Considere o gráfico abaixo. Determine o valor aproximado de a, em metros, que corresponde ao valor em que o gráfico cruza o eixo da ordenada. Considere: sen 38° = 0,615; cos 38° = 0,788; tg 38° = 0,781.



a) 39,05 m
b) 63,45 m
c) 39,4 m
d) 30,75 m
e) 81,3 m
Gabarito: A

EXERCÍCIO 5

Questão: 2285. Descritor: M742. MT – fase 1.
Para consertar um telhado, um pedreiro colocou uma escada de 7 metros de comprimento encostada a uma parede, formando com ela um ângulo de 30°, como mostra a figura abaixo. A que distância do chão, em metros, o topo da escada está apoiado na parede?



a) $\sqrt{3}/2$ m
a) $\sqrt{3}$ m
a) 7 m
a) $7\sqrt{3}$ m
a) $7\sqrt{3}$ m
Gabarito: E

Atividade 5

ATIVIDADE 5

RESOLVENDO UM PROBLEMA NÃO CONVENCIONAL

Foco: resolução de um problema não convencional.

Tempo sugerido: 1 hora/aula

Possíveis materiais: 1 cópia do problema para cada grupo ou a sua versão digital para ser projetada para os estudantes.

Professor/a, organize os estudantes em grupo e apresente a situação a seguir. Dê um tempo adequado para a elaboração de uma estratégia de resolução. No final da proposta, convide alguns estudantes a socializar suas estratégias. Esse é um momento muito importante para a aprendizagem em matemática.

Enquanto explica, o estudante organiza suas ideias, desenvolve a argumentação, a oralidade, e contribui para aumentar o repertório de resolução dos demais colegas. Nesse momento, um aprende com o outro e ficam mais fortalecidos para enfrentar as próximas situações problemas.

A intenção é que os estudantes desenvolvam estratégias de solução e diferentes modos de pensar, estimulando o raciocínio divergente, indutivo e lógico dedutivo nas aulas de matemática. A resolução desses problemas exige muita reflexão e, muitas vezes, uma estratégia não usual, que pode ser por meio de desenho, tabela, esquema, tentativa e erro etc.

Chegou a hora de resolver um problema desafiador. Não tenha medo de errar nem desista se a primeira tentativa falhar. Você sabia que as tentativas fazem seu raciocínio matemático se desenvolver mais do que se você acertar rapidamente. Resolver problemas exige esforço, mas você chega lá se não desistir.

Lembre-se de:

- Ler todo o texto com calma.
- Grifar os dados fornecidos e que serão importantes para ajudar você a encontrar a solução.
- Resolver o problema como quiser: fazendo um desenho, um esquema, uma tabela. O importante é sempre registrar no papel a forma como resolveu, tomar nota da sua estratégia.
- Após resolver, releia o problema e valide a resposta.

(OBMEP) Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que cada um deles daria uma única resposta correta a três perguntas que ela faria.

Ela perguntou:
Que dia da semana é hoje?
Hoje é quinta, disse João.
É sexta, respondeu Maria.

Depois perguntou:
Que dia da semana será amanhã?
Segunda, falou João.
Amanhã será domingo, disse Maria.

Finalmente ela perguntou:
Que dia da semana foi ontem?
Terça, respondeu João.
Quarta, disse Maria.

Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

EXEMPLO DE RESPOSTA ESPERADA:

Inicialmente vamos organizar, em uma tabela, as respostas de João e de Maria. É importante lembrar que somente uma resposta de cada criança está correta, ou seja, duas respostas de cada criança estão incorretas.

	João	Maria
Ontem	Terça-feira	Quarta-feira
Hoje	Quinta-feira	Sexta-feira
Amanhã	Segunda-feira	Domingo

Agora, uma das estratégias que podemos utilizar é considerar uma das respostas verdadeiras (formular uma hipótese) e analisar se as outras são verdadeiras ou falsas. Veja:

1ª hipótese:

Considere que a primeira afirmação de João (da tabela) é a correta, isto é, vamos considerar que ontem foi terça-feira. Logo, hoje é quarta e amanhã, quinta-feira. Vamos colocar essas informações na tabela na cor azul.

	João	Maria
Ontem	Terça-feira	Quarta-feira
Hoje	Quinta-feira	Sexta-feira
Amanhã	Segunda-feira	Domingo

Comparando cada informação já existente na tabela, com as informações escritas em azul, podemos classificá-las em verdadeiras ou falsas.

	João	Maria
Ontem	Terça-feira V	Quarta-feira F
Hoje	Quinta-feira F	Sexta-feira F
Amanhã	Segunda-feira F	Domingo F

Observe que, se ontem era terça-feira, então nenhuma afirmação de Maria está correta, e, pelo problema apresentado, uma de suas afirmações é verdadeira.
Conclusão: ontem não era terça-feira.

2ª hipótese:

Considere que a primeira afirmação de Maria (da tabela) é a correta, isto é, vamos considerar que ontem foi quarta-feira. Logo, hoje é quinta e amanhã, sexta-feira. Vamos colocar essas informações na tabela (cor azul) e classificar as informações já existentes na tabela.

	João	Maria
Ontem	Terça-feira F	Quarta-feira V
Hoje	Quinta-feira V	Sexta-feira F
Amanhã	Segunda-feira F	Domingo F

Observe que, se ontem era quarta-feira, temos apenas uma afirmação correta para cada uma das crianças. Portanto, o problema está resolvido.

Conclusão: Ontem era quarta-feira, hoje é quinta-feira e amanhã, sexta.

Lembra da pergunta do problema: Em que dia da semana a brincadeira aconteceu? A resposta é quinta-feira.

Atenção para a avaliação!

Professor/a, ao término do percurso das três sequências didáticas, é importante que os estudantes se conscientizem de suas aprendizagens. Organize com eles uma lista de tudo que fizeram e do que se esperava que aprendessem. Incentive que expressem suas opiniões e, depois, apresente a sua mostrando concordâncias e pontos de vista que são seus e que podem ajudá-los a avançar.

Nada de informações genéricas ou sermões, tais como:

- Precisa estudar mais.
- Precisa prestar mais atenção.

Procure fazer colocações que contribuam com o avanço, como:

- É importante ler e identificar as palavras desconhecidas no momento de resolução de problemas.
- No final da resolução, é importante validar se a sua resposta responde à pergunta do problema.
- No trabalho em grupo, é importante respeitar a opinião e o tempo dos colegas e colaborar para que todos ampliem suas aprendizagens.

Promover uma reflexão com os jovens sobre de que forma exercitar a resolução de problemas matemáticos também pode apoiar a resolução de problemas em outras áreas do conhecimento e na vida como um todo.

Quais processos e aprendizagens eles tiram desses problemas que podem ser levados para momentos de decisão e resolução em suas vidas?

Exemplos de reflexões que podem surgir:

- A análise cuidadosa de todas as informações disponíveis.
- A colaboração entre as pessoas.
- O tempo necessário para refletir sobre as possibilidades, entre outros.

Finalize com um convite:

- Que tal anotar tudo que aprenderam para levar para a série seguinte?

Esta avaliação vai evidenciar aos estudantes seu percurso, mostrar as conquistas pelo que aprenderam e motivá-los a continuar aprendendo com a matemática.

Materiais de apoio

Plano de estudos

Orientações para o estudante em momentos de autogestão

Caro/a, professor/a,

Para os estudantes ampliarem os seus estudos, encontram-se a seguir atividades sobre os temas que foram desenvolvidos em sala de aula durante a SD 3. As questões apresentadas podem ser propostas ao final de cada atividade vivenciada em sala, uma vez que elas estão diretamente relacionadas aos temas desenvolvidos em cada parte desta SD.

Você pode idealizar um plano de estudo específico para cada estudante em função de suas observações sobre o percurso de cada um dos jovens de sua turma. Selecionar questões em função das dificuldades identificadas por você ou pela avaliação diagnóstica permite esse planejamento mais efetivo para o avanço de cada estudante.

Reforce com o estudante a importância do momento de estudo individual, incentive-o a consultar as anotações e os materiais produzidos nas aulas, e oriente-o a registrar uma justificativa para as questões de múltipla-escolha, lembrando-o de que o importante não é a resposta certa, mas sim saber como chegar a ela. Em caso de dúvidas, ele pode conversar com seus colegas ou mesmo procurar o professor no momento oportuno.

Este material também pode contribuir para que o estudante organize a sua rotina e desenvolva procedimentos de estudo. Com a finalidade de ajudá-los, procure dar algumas dicas, como:

- Organização de um cronograma de estudos.
- Registrar suas aprendizagens (gravações de áudios, sínteses, esquemas, mapas de ideias etc.)
- Registrar suas dúvidas para conversar com o/a professor/a sobre elas no momento oportuno.

Bom trabalho!

Bloco de questões referentes à Atividade 1

EXERCÍCIO 1

(G1 - IFPE) Na tentativa de incentivar os alunos da Educação de Jovens e Adultos do Ensino Fundamental II, a Coordenação criou uma gincana em que os estudantes respondiam a perguntas sobre vários assuntos. Numa dessas rodadas da gincana, o professor de Matemática propôs a seguinte pergunta: "Ao quadrado de um número x, você adiciona 7 e obtém sete vezes o número x menos 3. Quais são as raízes dessa equação?" A resposta correta desse problema é:

a) 2 e -5
b) -2 e -5
c) -2 e 5
d) 2 e 5
e) A equação não tem raiz real.

Gabarito: D

EXERCÍCIO 2

Questão: 2067. Descritor: M413. MT fase 2.
O polinômio $P(x) = x^2 - 7x + 10$ pode ser decomposto da seguinte maneira: $P(x) = (x - 2)(x - 5)$. Pode-se afirmar que as raízes de P(x) são:

a) 7 e 10
b) -2 e -5
c) -7 e -10
d) 2 e 5
e) -2 e 5

Gabarito: D

EXERCÍCIO 3

Questão: 1783. Descritor: M462. MT fase 1.
Calcule o valor de x da expressão

$$x = -b + \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

para a = 1; b = 3; c = -10.

a) 3
b) 4
c) 2
d) 10
e) 1

Gabarito: C

EXERCÍCIO 4

Questão: 1987. Descritor: M278. MT fase 2.
As raízes da equação $-x^2 + 6x - 5 = 0$ correspondem às medidas dos lados de um retângulo. Qual o perímetro desse retângulo?

a) 10
b) 12
c) 6
d) 14
e) 4

Gabarito: B

EXERCÍCIO 5

Questão: 1990. Descritor: M282. MT fase 2.
A idade de Júlio ao quadrado menos o quádruplo da sua idade é igual a 60. Qual a idade de Júlio?

a) 14 anos
b) 6 anos
c) 12 anos
d) 8 anos
e) 10 anos

Gabarito: E

Bloco de questões referentes à Atividade 3

EXERCÍCIO 8

Questão: 1652. Descritor: M154. MT – fase 1.
Uma escada de 2,5 m de comprimento está apoiada em um muro. Sabendo que o pé da escada dista 0,7 m do muro, determine a que altura do solo a escada está apoiada no muro.

a) 2,4 m
b) 2,5 m
c) 1,3 m
d) 1,2 m
e) 0,7 m

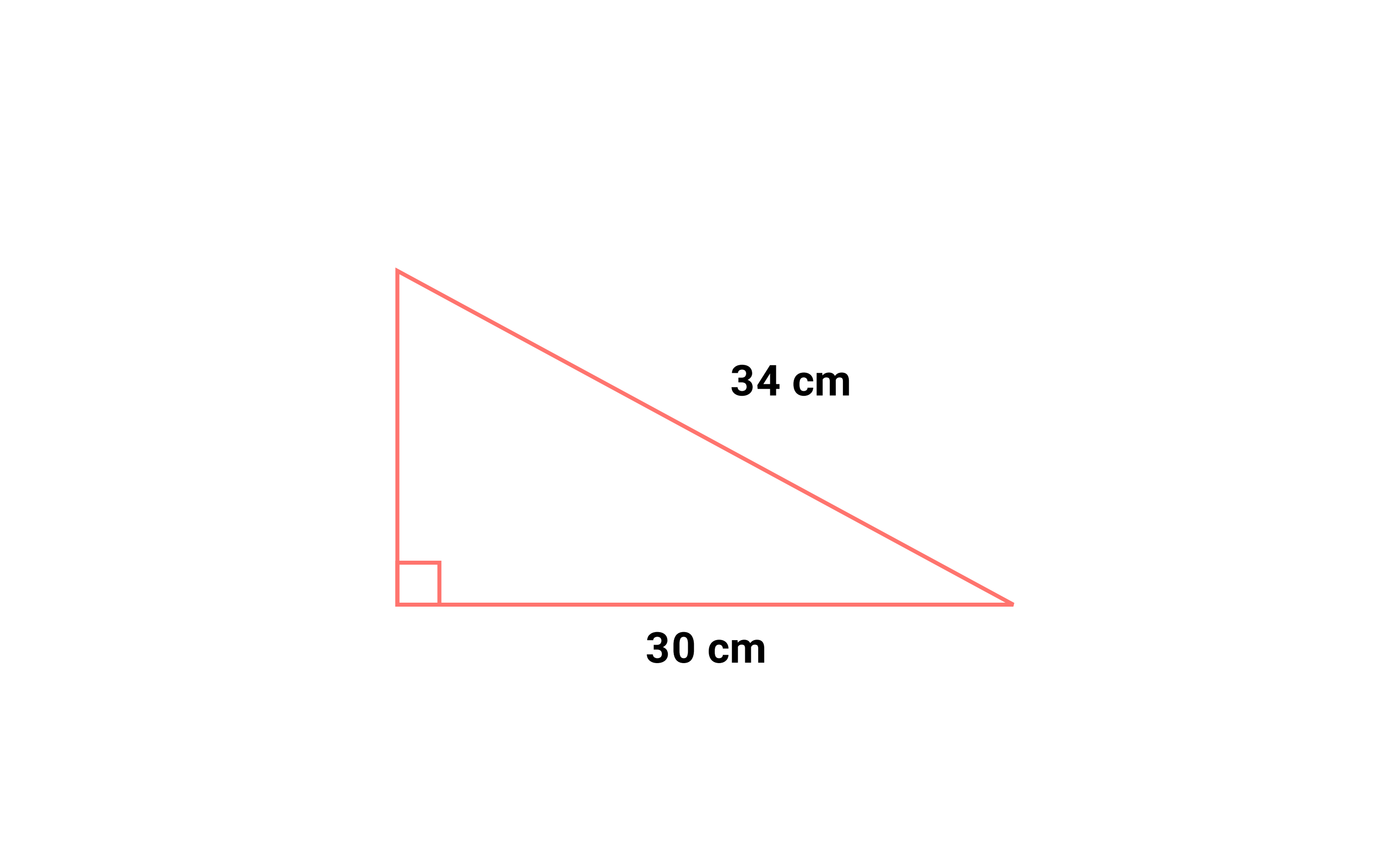
Gabarito: A

EXERCÍCIO 9

Questão: 1924. Descritor: M179. MT – fase 1.
Determine o perímetro do triângulo retângulo abaixo:

a) 34 cm
b) 16 cm
c) 80 cm
d) 64 cm
e) 50 cm

Gabarito: B

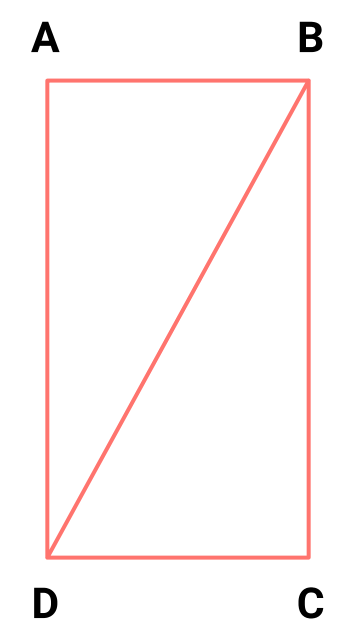


EXERCÍCIO 10

Questão: 19. Descritor: M181. MT – fase 1.
No retângulo abaixo, BD = 61 cm e BC = 60 cm.
Determine a medida do seu perímetro.

a) 60 cm
b) 71 cm
c) 121 cm
d) 132 cm
e) 142 cm

Gabarito: E

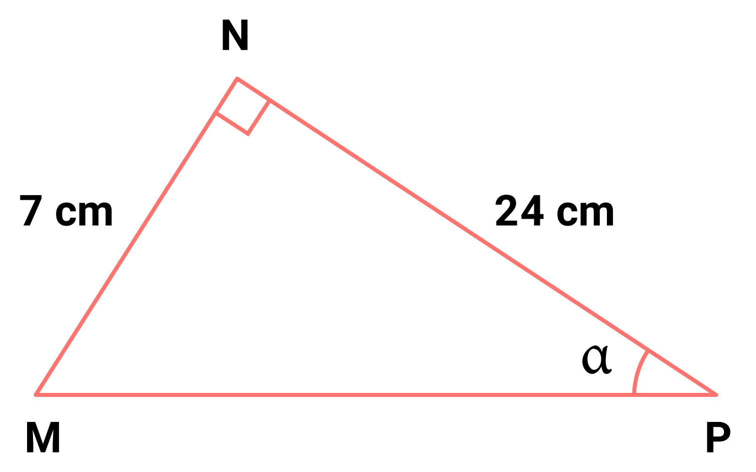


EXERCÍCIO 11

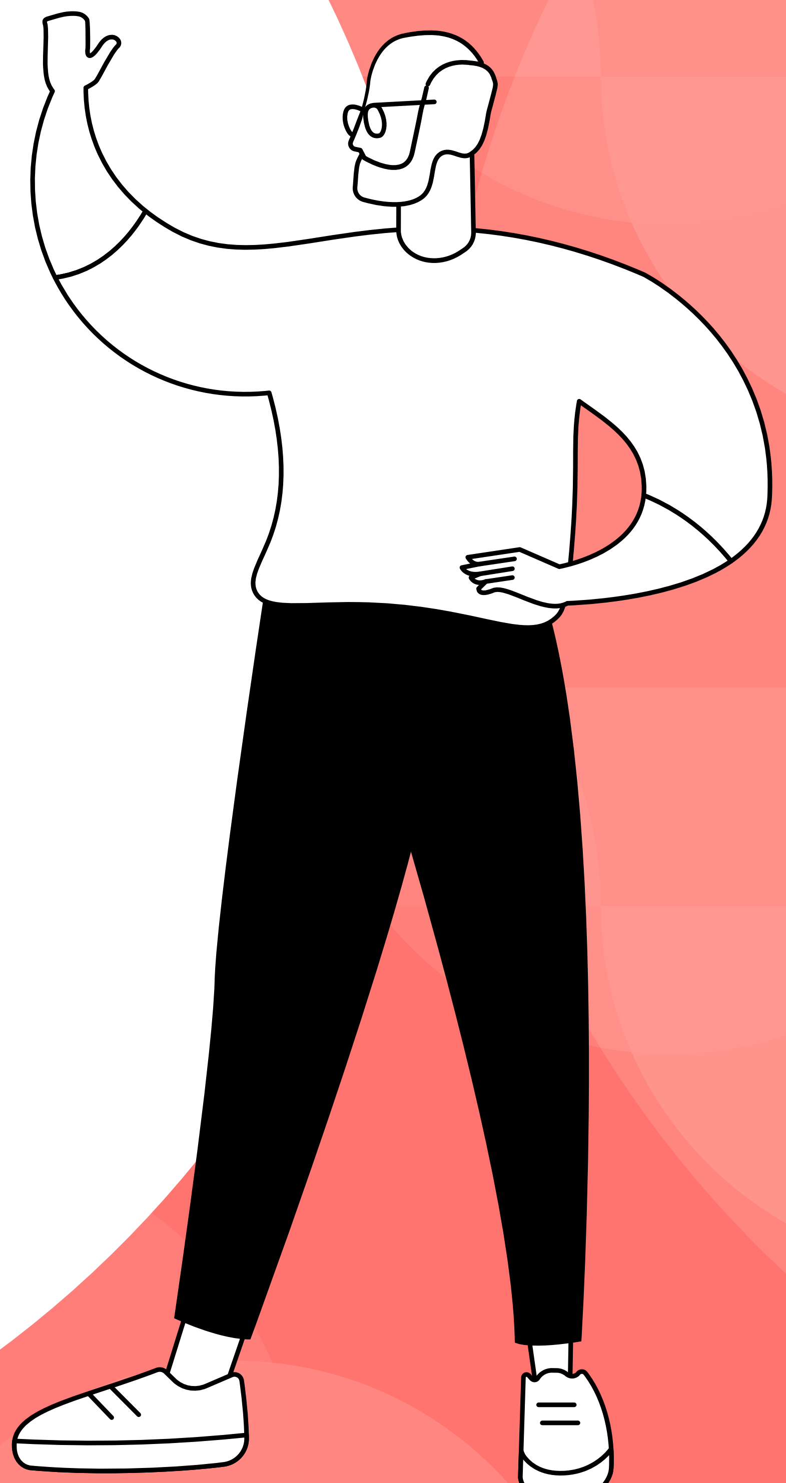
Questão: 1866. Descritor: M084. MT – fase 2.
No triângulo MNP, determine o valor de sen α é

a) 7/25
b) 7/24
c) 25/24
d) 24/25
e) 24/7

Gabarito: A



Anexo 1



EXERCÍCIO 1

Este é um problema literal, você sabe o que isso significa? Além disso, o problema tem várias respostas possíveis na forma de expressões com letras. A sua tarefa é encontrar pelo menos duas delas, considerando que x e y representam números reais positivos. Observe as figuras abaixo e responda:

a) Qual expressão indica a área do quadrado maior?
b) Qual a área desse quadrado quando x = 5 u.a?
E quando x = 8 u.a?
c) Qual expressão indica a área do quadrado menor?
d) Qual a área desse quadrado quando y = 2u.a?

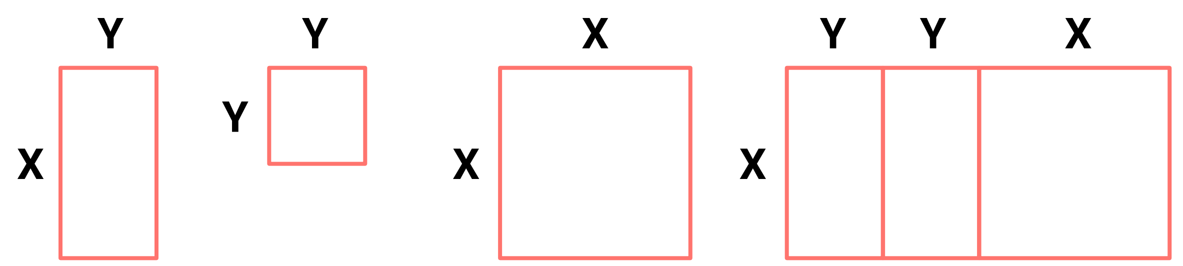


FIGURA A

EXERCÍCIO 2

A professora do 1º ano do EM pediu para seus estudantes escreverem uma expressão que represente a área da figura A. Veja a resposta e a justificativa de dois jovens desta turma e responda as perguntas.

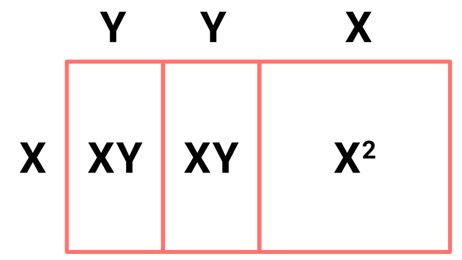
Júlia – A figura A é formada por 3 regiões menores: 2 retângulos e um quadrado. Então, para calcular a área da figura A, basta somar as áreas dessas partes menores: $xy + xy + x^2$, ou então $2xy + x^2$.

Simoni – A figura A é um retângulo cujos lados medem x e y + y + x. A área da figura A é obtida multiplicando a medida dos lados: $x \cdot (y + y + x) = x \cdot (2y + x)$.

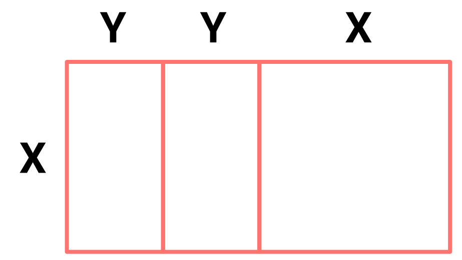
a) Quem está correta: Júlia ou Simoni?

b) É possível afirmar que $x \cdot (y + y + x) = 2xy + x^2$? Explique!

JÚLIA

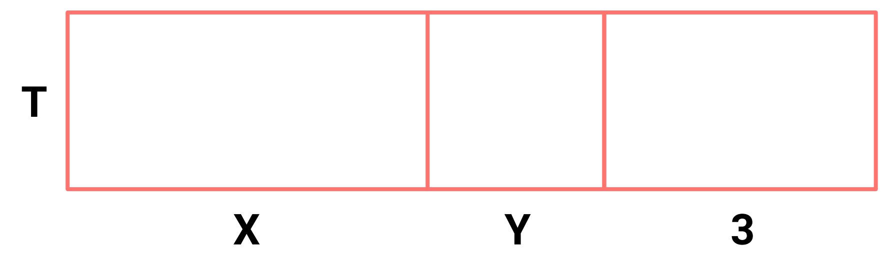


SIMONI



EXERCÍCIO 3

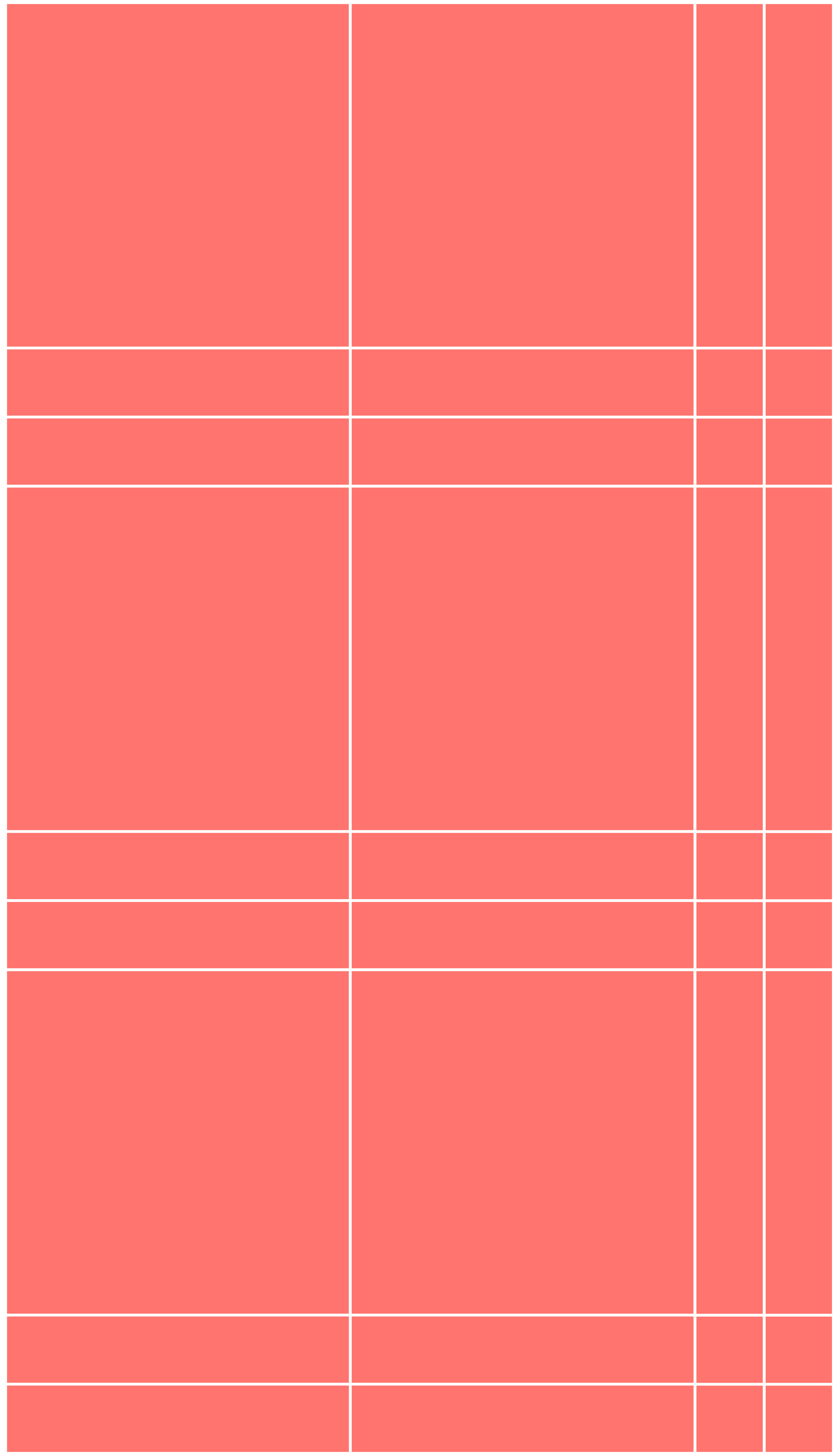
Agora é sua vez! Utilizando as estratégias de Simoni e de Júlia, escreva a área da figura abaixo de duas formas: utilizando a soma e o produto (forma fatorada).



EXERCÍCIO 4

Fatore a expressão algébrica $y^2 - 3xy + 2y$

Anexo 2



Anexo 3

1ª ETAPA:

Acesse o link a seguir e tente resolver o quebra-cabeças: bityli.com/quebra-cabeca (acesso em: 23 maio 2022).

A figura que aparece no centro desse quebra-cabeças é um triângulo retângulo. Após resolver o desafio, reflita:

a) Qual(ais) a(as) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado menor?

b) Qual(ais) a(as) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado médio?

c) Qual(ais) a(as) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado maior?

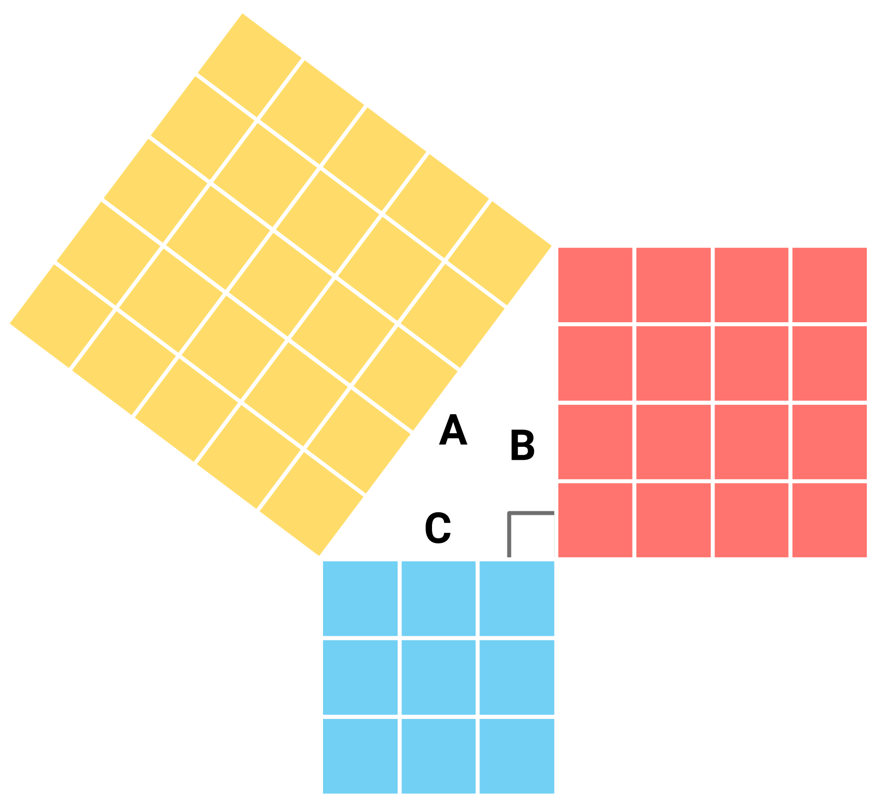
d) Qual a relação entre as áreas desses três quadrados? Explique sua resposta e escreva uma expressão matemática para representar essa situação.

e) Lembrando que a medida dos lados do triângulo retângulo é equivalente à medida dos lados de um dos quadrados, é possível reescrever a sentença anterior utilizando as palavras cateto e hipotenusa?

Registre suas conclusões e suas dúvidas para localizá-las no momento da conversa coletiva.

2ª ETAPA:

A figura a seguir apresenta um triângulo retângulo e 3 quadrados cujos lados coincidem com os catetos e com a hipotenusa desse triângulo. Cada quadrado está dividido em pequenos quadradinhos, todos do mesmo tamanho.



Analise as seguintes situações:

a) Se cada quadradinho possui lado igual a 1 (uma) unidade, identifique a medida dos seguintes elementos:

Hipotenusa a: ____________________
Cateto b: ____________________
Cateto c: ____________________

b) Se cada quadradinho possui lado igual a 2 (duas) unidades, identifique a medida dos seguintes elementos:

Hipotenusa a: ____________________
Cateto b: ____________________
Cateto c: ____________________

c) Se cada quadradinho possui lado igual a 3 (três) unidades, identifique a medida dos seguintes elementos:

Hipotenusa a: ____________________
Cateto b: ____________________
Cateto c: ____________________

d) Qual a regularidade que você observa entre as medidas dos lados desses triângulos?

e) O Teorema de Pitágoras é válido em todas as situações apresentadas? Efetue os cálculos e verifique se sua hipótese estava correta.

Quando as medidas dos lados de um triângulo retângulo são expressos por três números inteiros, esses números são chamados pitagóricos, ou terna pitagórica (três números pitagóricos), isto é:

"Se a, b e c são três números inteiros e positivos tais que $a^2 = b^2 + c^2$, dizemos que a, b e c são números pitagóricos, ou que formam uma terna pitagórica".

f) Utilizando os conhecimentos adquiridos com essa proposta, escreva 3 ternas pitagóricas diferentes das que foram apresentadas acima e explique quais os critérios que você utilizou para descobrir esses números.

Anexo 4

1ª ETAPA:

Observe a sequência 1 de figuras.

a) Para cada casa, escreva o total de peças necessárias na construção. Observe que são quadrados e triângulos. Organize a informação em uma tabela.

b) Descreva e desenhe como serão a 5ª e a 7ª casas.

c) Continue a tabela do item a até a 10ª casa. Explique como você fez para colocar na tabela a quantidade de peças necessárias para a 8ª casa. Existe alguma regularidade na sequência de figuras? Qual?

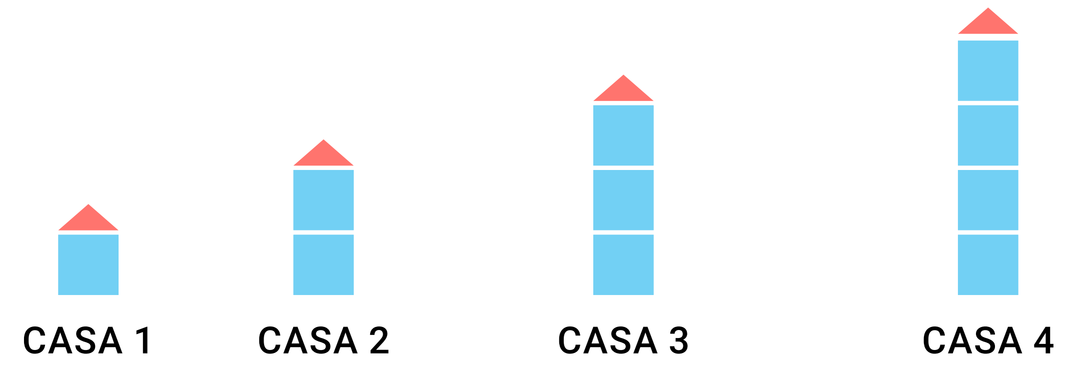
d) Escreva uma regra, isto é, uma lei de formação, que mostre a quantidade de peças (p) para construir uma figura qualquer dessa sequência (n).

Dica: Observe a tabela e, se necessário, primeiro escreva a regularidade com palavras e depois com a escrita matemática.

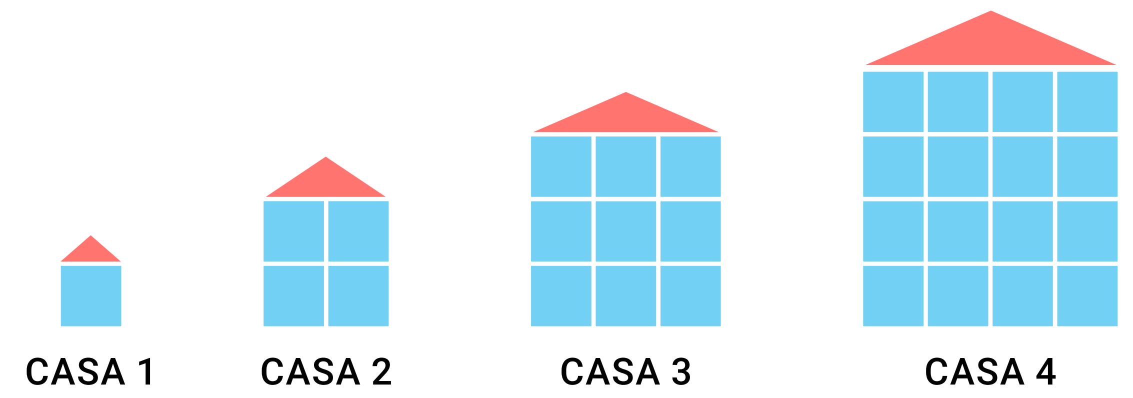
2ª ETAPA:

Repita toda a exploração para a sequência 2 de figuras.

Sequência 1



Sequência 2



Anexo 5

JOGO: FAMÍLIA DAS FUNÇÕES

Materiais:

- 37 cartas com expressões algébricas de funções, esboços de gráficos e características das funções.
- 2 cartas com termo **função**.

Organização da classe: em trios ou quartetos.

Regras:

01. O objetivo do jogo é formar famílias de quatro cartas. Cada família é formada pela expressão algébrica da função, pelo esboço de seu gráfico e por duas outras cartas que contêm propriedades da função, a saber: pontos importantes do gráfico e comportamento do sinal da função. É possível formar, no máximo, dez famílias.

02. Embaralham-se as cartas e coloca-se o baralho sobre a mesa, com a face virada para baixo.

03. Um dos jogadores tira uma das cartas do baralho e a coloca sobre a mesa, com a face virada para cima.

04. O próximo a jogar procede do mesmo modo.

05. Se a carta tirada por um dos jogadores pertence à mesma família de uma das cartas já viradas, coloca-se a carta retirada embaixo da carta de mesma família. Caso contrário, coloca-se a carta sobre a mesa sem aproximá-la de outras cartas.

06. Se um dos jogadores colocar uma das cartas na família errada, ele perde a vez de jogar e essa carta é colocada no fim do baralho.

07. Se a carta tirada por um jogador for uma carta **função,** ele poderá utiliza-lá em qualquer momento do jogo para formar uma família.

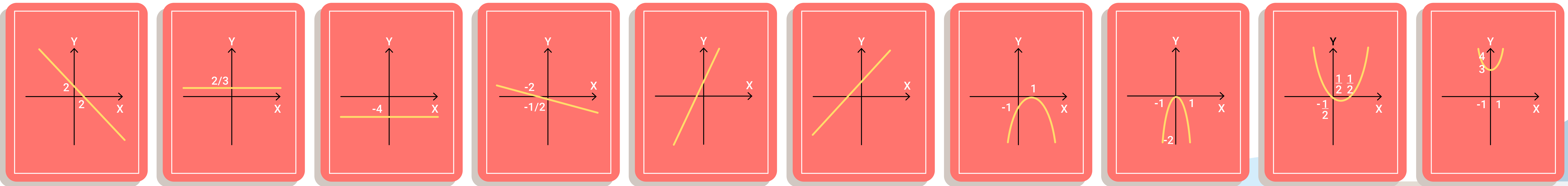
08. O jogo termina quando não for possível formar mais famílias.

09. Ganha o jogo quem tiver maior pontuação, de acordo com as seguintes regras:

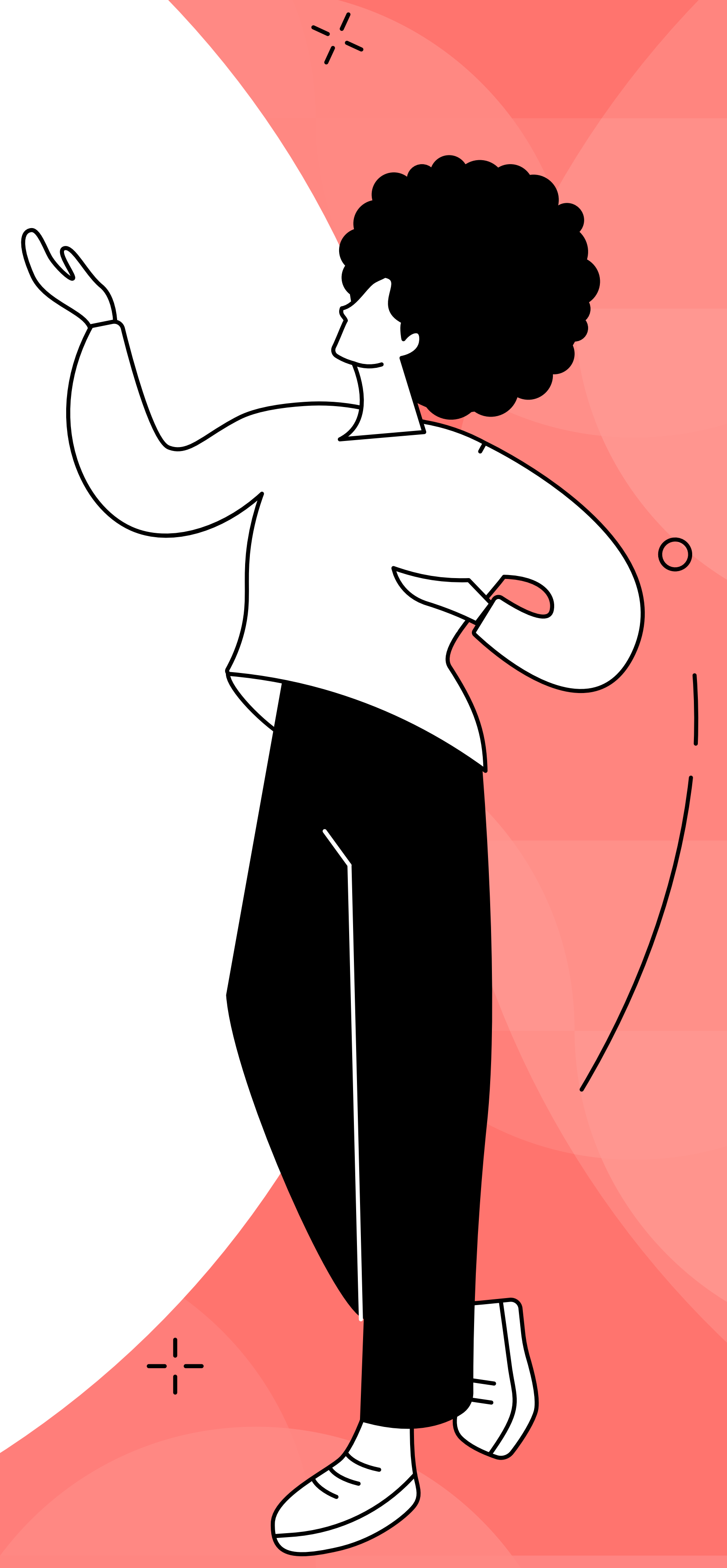
- Sempre que um dos jogadores retirar uma carta que pertence à mesma família de uma das cartas da mesa, coloca a carta retirada ao lado da carta de mesma família e ganha 1 ponto.
- O jogador que completar uma das famílias ganha 5 pontos.

Cartas: veja as cartas na página a seguir!

$y = 2/3$	$y = -4$	$y = (-1/4)x - 1/2$	$y = -x + 2$	$y = 2x + 1$	$y = x + 1$	$y = -x^2 + 2x - 1$	$y = -3x^2$	$y = 2x^2 - x$	$y = 2x^2 + 3$
$y = 2/3$ para qualquer x do domínio	-2 é a raíz da função	$y \leq 0$ quando $x \leq -1/2$; e $y \geq 0$ quando $x \geq 1/2$	1 é coeficiente angular e linear da função	é uma função afim decrescente	possui uma concavidade para baixo e $f(0) = -1$	y é crescente em -]∞, 0] e decrescente em [0, + ∞[	y= -4 para qualquer x do domínio	FUNÇÃO	FUNÇÃO



Anexo 6



A professora do 1º ano pediu que seus alunos resolvessem a seguinte equação do 2º grau incompleta: $x^2 - 81 = 0$. Abaixo estão as estratégias utilizadas por 3 jovens desta turma. O seu desafio é compreender a resolução de cada jovem e verificar se ela está correta. Caso a resposta esteja incorreta, você precisa escrever uma pista para ajudar o estudante a aprimorar a sua estratégia.

MANU

Eu acho mais fácil resolver por cálculo mental. Primeiro eu sei que a equação $x^2 - 81 = 0$ é equivalente a $x^2 = 81$.
Para resolver essa equação, eu preciso pensar em um número que elevado ao quadrado dá 81.
Essa é fácil!
Eu sei que $(-9)^2 = 81$, então a resposta é -9.

CRIS

Eu resolvi assim:
$x^2 - 81 = 0$
$x^2 = 81$
Existem 2 números que tornam essa equação verdadeira:
o 9 e o (-9), pois $(9)^2 = 81$ e $(-9)^2 = 81$.
Então são duas as respostas: 9 e -9.

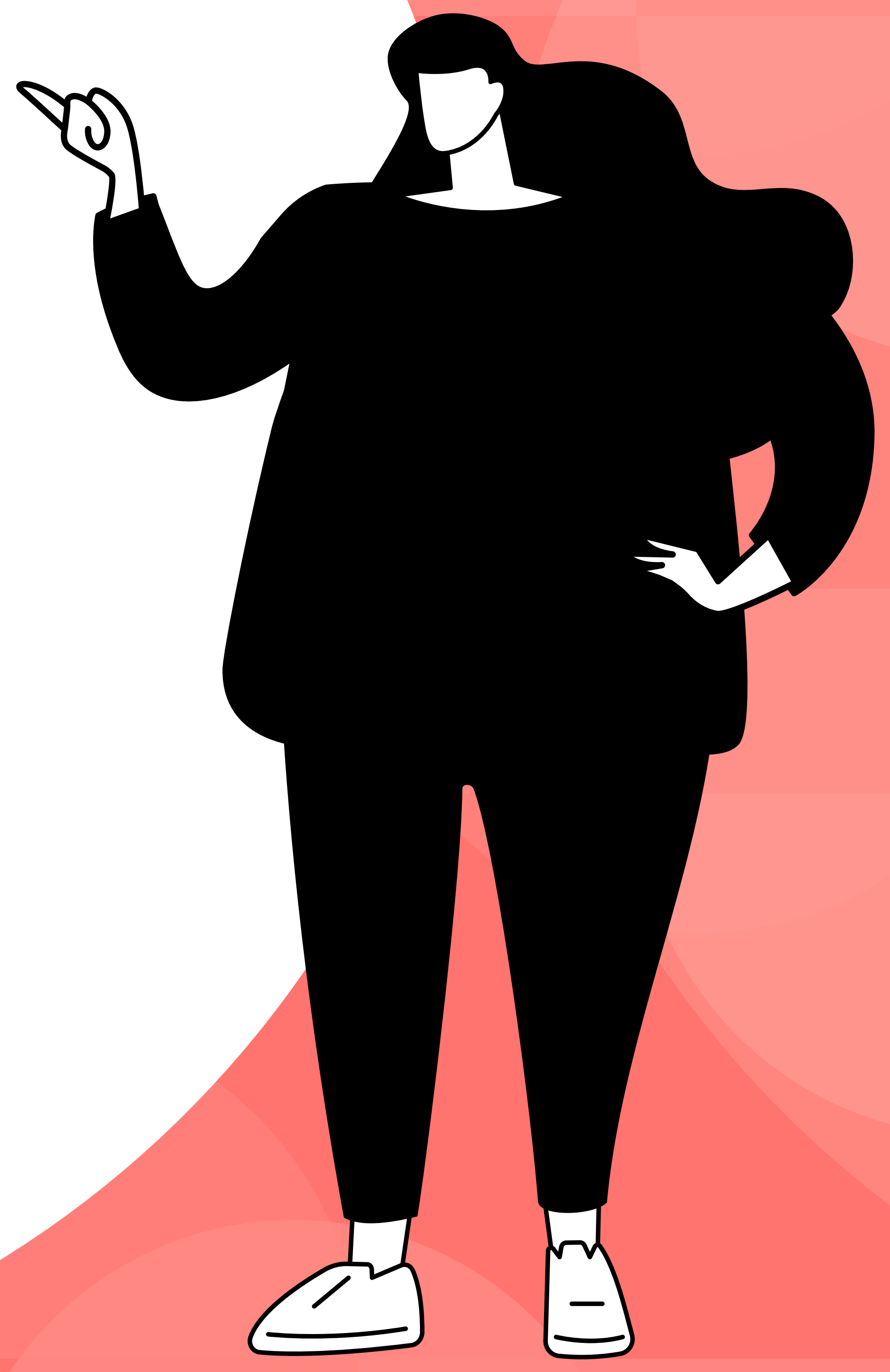
PEDRO

Eu sei que preciso encontrar o valor da incógnita x que torna a sentença verdadeira.
Então, eu pensei assim:
$x^2 - 81 = 0$
$x^2 - 81 + 81 = 0 + 81$
$x^2 = 81$
A resposta é 9, pois $9^2 = 81$.

Resposta: Espera-se que os estudantes concluam que a Cris está correta e que escrevam para os demais a seguinte pista: existem 2 números que tornam essa equação $x^2 - 81 = 0$ verdadeira: o 9 e o (-9), pois $(9)^2 = 81$ e $(-9)^2 = 81$.

Agora que você analisou as resoluções de Pedro, Manu e Cris, volte nas equações do 2º grau apresentadas no início desta proposta. Selecione e resolva em seu caderno aquelas que possuem as mesmas características que a equação resolvida pelos jovens.

Anexo 7



Proposta de trabalho para a aula invertida

01. Assista ao vídeo disponível em: bityli.com/baskhara (acesso em: 16 maio 2022). Você pode assisti-lo quantas vezes achar necessário. Em seguida, reflita sobre as seguintes questões e registre suas conclusões:

a) Qual a equação do 2º grau apresentada inicialmente? Nesta equação, qual o valor dos coeficientes a, b e c?

a) Você poderia resolver essa equação utilizando um dos métodos que você já estudou?

a) Qual a fórmula de Bhaskara?

a) Assim como foi feito no vídeo, resolva a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ utilizando a fórmula.

a) Você resolveu a mesma equação com duas estratégias diferentes. As respostas encontradas foram as mesmas?

a) Qual das estratégias você achou mais fácil?

a) Em que situações você acha mais adequado utilizar a fórmula de Bhaskara?

02. Assista ao vídeo disponível em: bityli.com/exemplo-baskhara (acesso em: 7 ago. 2022) e explique como foi resolvida a equação $-x^2 + 8x = 1$ nesse vídeo.

03. Pronto você concluiu sua tarefa! Agora junte suas anotações, suas conclusões e suas dúvidas, e traga-as para a aula do dia XX/XX/XX. Com seus colegas e o/a professor/a, você poderá solucionar as dúvidas, contar suas descobertas e avançar com suas aprendizagens. Se você quiser usar outro canal para estudar, não há problema. Apenas anote o nome/endereço para que possamos analisar coletivamente essa opção e compartilhar com a turma.

Anexo 8

Leia cada proposta com atenção, analise cada pergunta, converse com seu colega de dupla a respeito das dúvidas e aprendizagens, e anote suas conclusões.

01. Usando a tecla √ da calculadora, determine as raízes exatas ou aproximadas para os valores da 1ª linha da tabela:

√	1	2	3	4	5	6	8

02. Observe que $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$, ou seja, $\sqrt{2}$ é um número entre 1 e 2. Utilize este fato e os valores que encontrou para $\sqrt{6}$ e $\sqrt{8}$ para estimar $\sqrt{7}$.

03. Com base nos conceitos estudados na sequência didática anterior, sobre números racionais irracionais, classifique os números da tabela acima como racionais ou irracionais. Se necessário, retome as anotações que você realizou sobre esse tema.

04. Com sua calculadora, usando a tecla √, preencha a tabela abaixo. Em seguida, responda:

a) Compare os resultados nas colunas I e II. Que relação você acha que existe entre os resultados dessas duas colunas?

b) Compare os resultados nas colunas III e IV. Que relação existe entre eles?

c) Compare os resultados obtidos nas colunas V e VI e nas colunas VII e VIII. O que você pode dizer sobre eles?

d) Preencha as lacunas com os símbolos = ou ≠:

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ___ $\sqrt{(a+b)}$ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ___ $\sqrt{(a-b)}$

$\sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}$ ___ $\sqrt{(a.b)}$ $\sqrt{a} / \sqrt{a}$ ___ $\sqrt{(a/b)}$

e) Essas conclusões ainda são válidas se a ou b forem iguais a zero?

a	b	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{(a+b)}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{(a-b)}$	$\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}$	$\sqrt{(a.b)}$	$\sqrt{a}/\sqrt{a}$	$\sqrt{(a/b)}$
16	4								
25	9								
121	36								
64	49								
32	17								
49	144								
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

Anexo 9

1ª ETAPA

Para começar, meçam e cortem pedaços de canudos nestas quantidades e medidas:

- 3 pedaços de 2cm
- 2 pedaços de 3cm
- 1 pedaço de 4cm, 5cm, 6cm e 7cm, respectivamente.

Agora, tentem formar triângulos utilizando três peças de cada vez e registrem o resultado na tabela a seguir:

Lado 1	Lado 2	Lado 3	Foi possível construir o triângulo? (sim ou não)
2	3	4	
2	3	5	
2	3	6	
2	3	7	
2	2	2	
3	4	5	
3	4	6	
3	4	7	
3	2	3	

Nem sempre foi possível construir os triângulos, não é?

O que acontece com as medidas dos lados quando o triângulo existe? O que acontece com essas medidas que impedem a formação de um triângulo?

Conversem em grupos sobre essas questões e depois completem a frase:

Para que um triângulo exista,
é preciso que...

Para terminar, escrevam **sim** ou **não** para registrar se existem ou não os seguintes triângulos com lados medindo:

a) 10cm, 8cm e 7cm?

b) 8cm, 4cm e 3cm?

c) 2cm, 4cm e 6cm?

d) 3cm, 4cm e 5cm?

e) 3cm, 5cm e 6cm?

f) 4cm, 10cm e 5cm?

Em cada caso, escrevam em seus cadernos a justificativa para sua resposta.

2ª ETAPA

Resolvam as atividades a seguir, lembrando que:

- Se houver dúvida, anotem-na para discutir em sala com os colegas e o professor/a.
- Vocês podem também tirar dúvidas com outras duplas.
- Sempre é possível rever o vídeo e mesmo consultar o seu lapbook, pois eles têm uma revisão de ângulos.

01. Complete as definições:

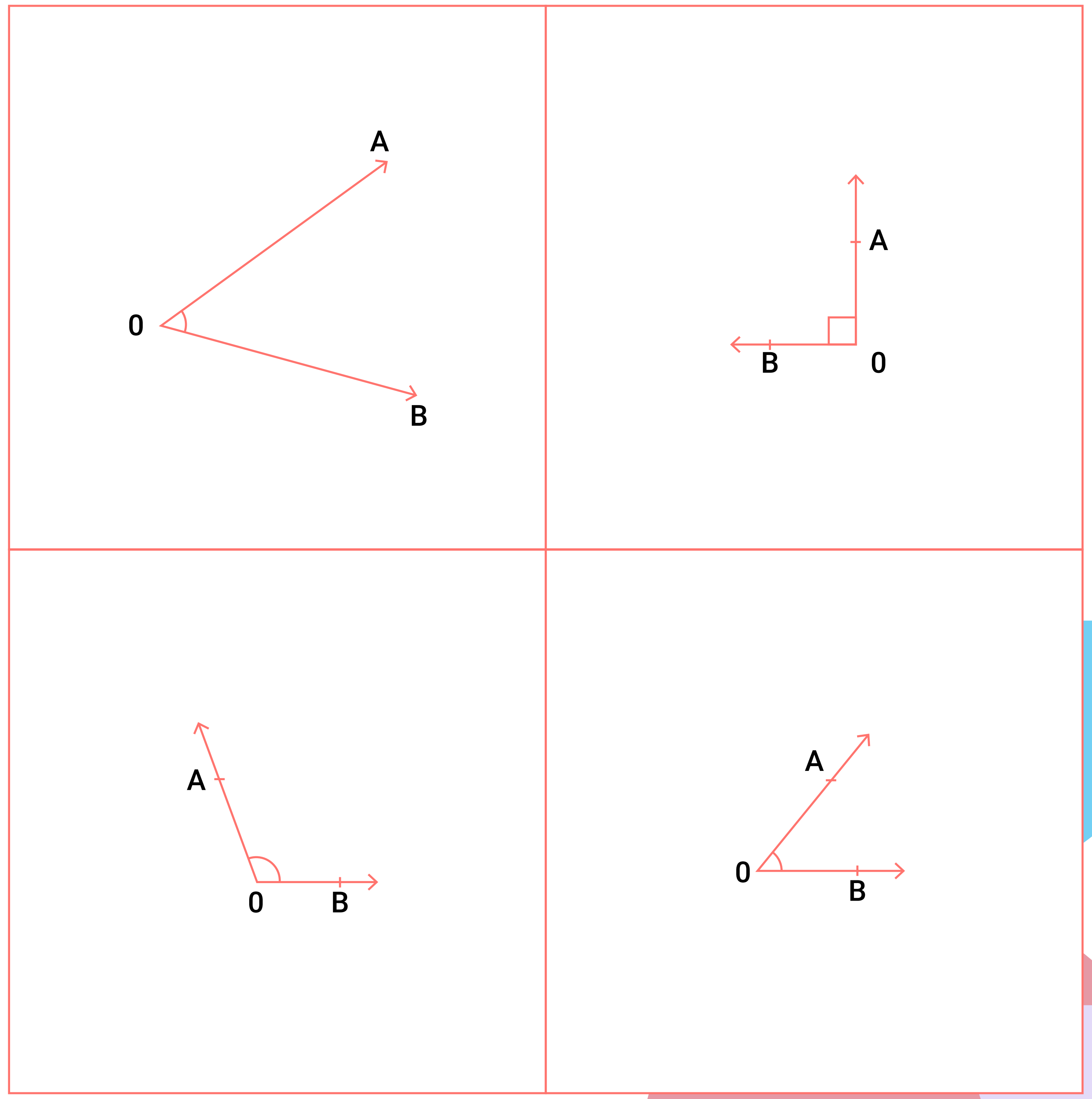
a) Um ângulo reto é aquele que mede _____

b) Um ângulo agudo mede _____ de _____

c) Um ângulo obtuso mede _____ de _____

d) Um ângulo raso mede _____

2. Meça cada um dos ângulos a seguir e diga se ele é agudo, obtuso ou reto:



3. Usando a régua e o transferidor, construa no seu caderno os ângulos pedidos:

a) Um ângulo reto

b) Um ângulo de 45º

c) Um ângulo de 20º

d) Um ângulo de 160º

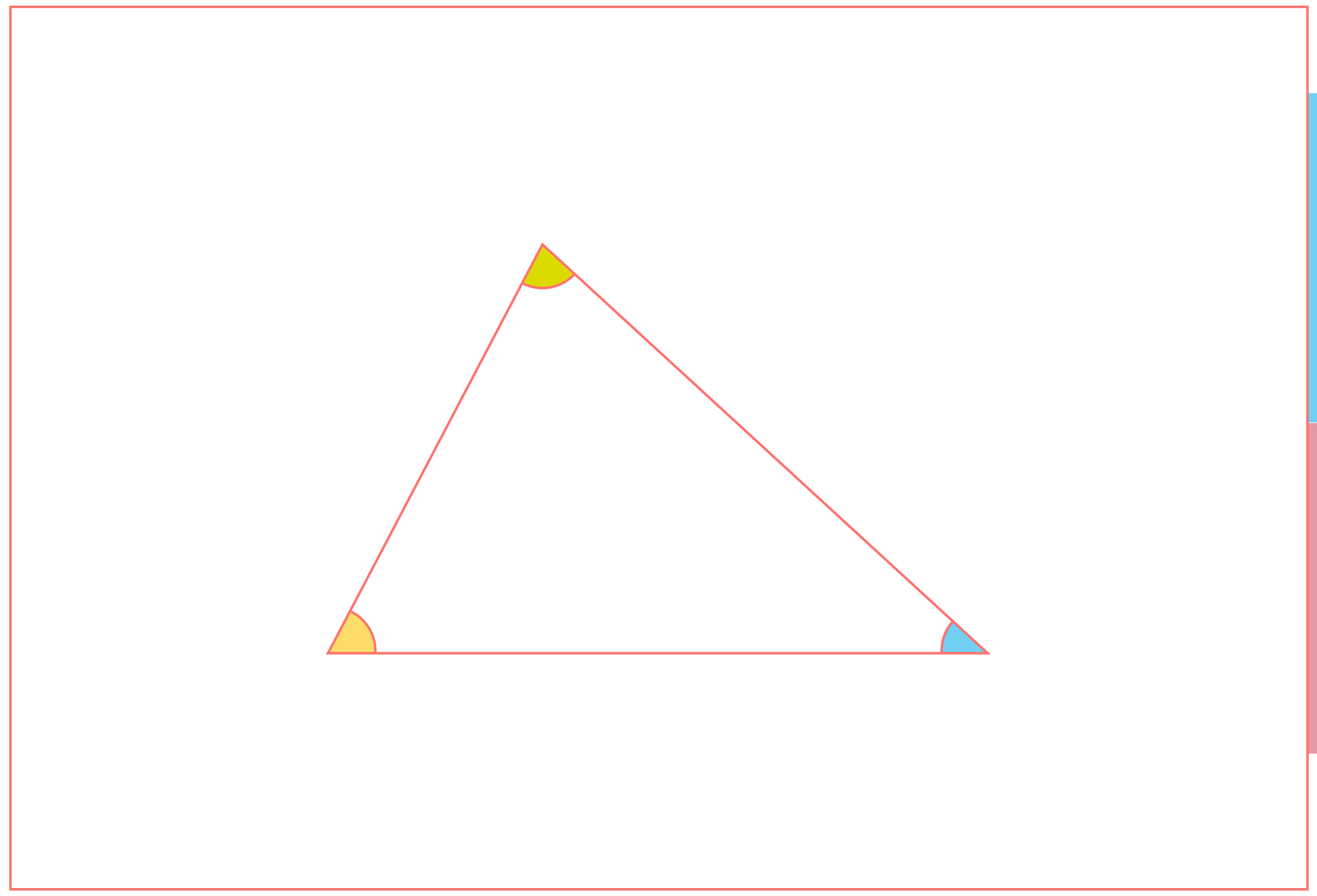
3ª ETAPA

01. Fazendo dobras

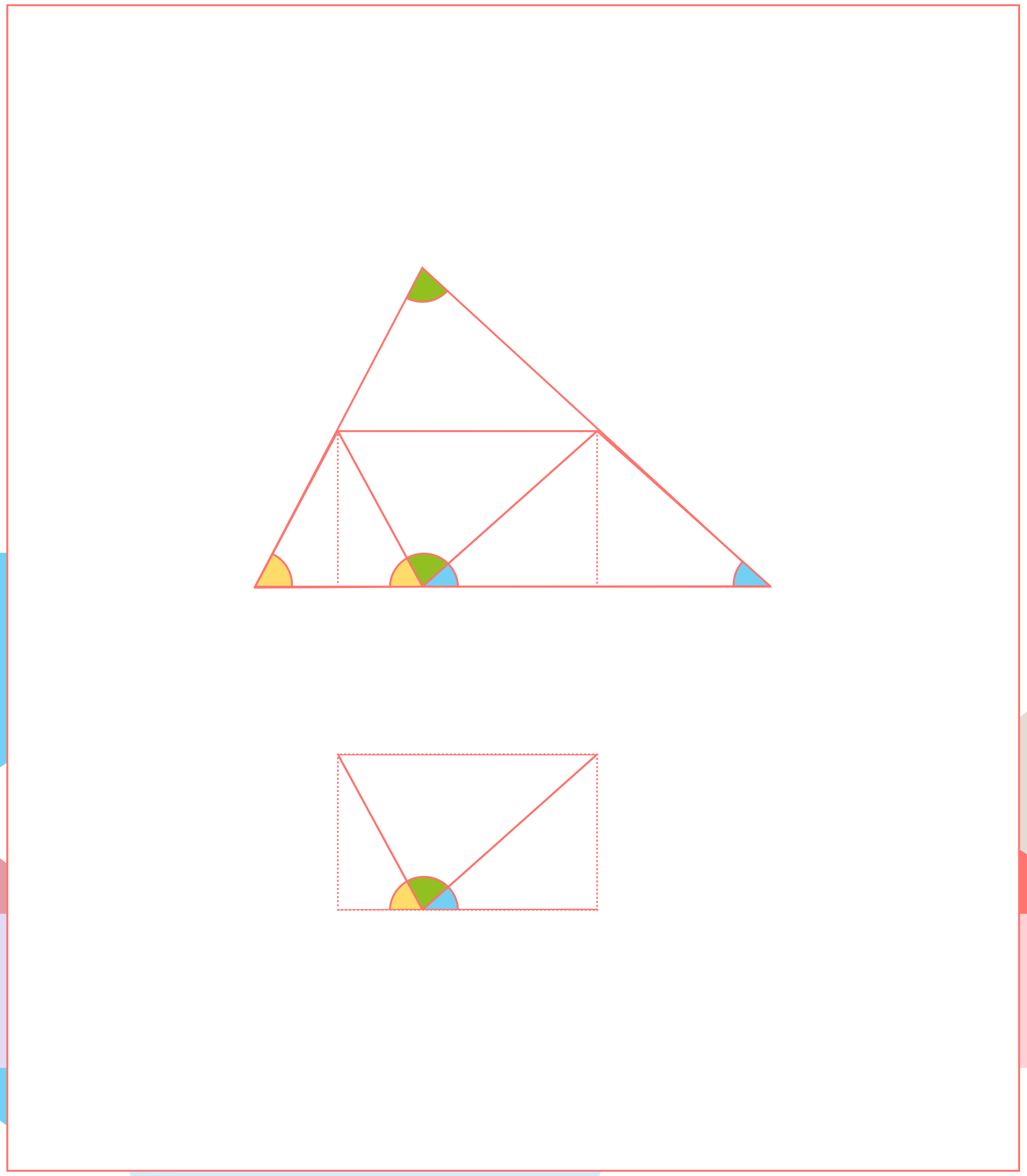
Para realizar esta atividade, cuide bem das dobraduras pedidas em cada etapa para descobrir quanto vale a soma dos ângulos internos de um triângulo.

a) Cada um de vocês deve usar a régua e traçar um triângulo diferente. Tentem não fazer triângulos que tenham todos os lados da mesma medida.

b) Após terminar, pinte os três ângulos, como mostra a imagem, e recorte o triângulo.



c) Agora observem e dobrem o triângulo construído como na imagem:



d) Se você dobrou como devia, percebeu que os ângulos juntos formam uma meia volta, um ângulo de 180º, isto é, 18º graus. Agora complete a seguinte afirmação:

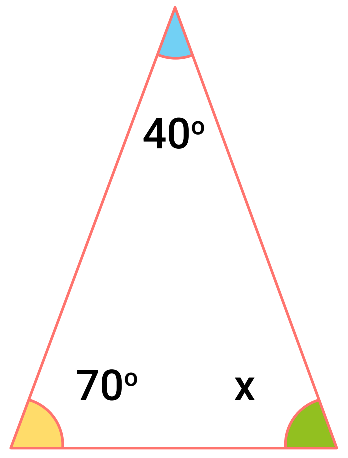
a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a _____

02. Testando o que foi aprendido

Vamos utilizar o que você aprendeu para resolver problemas e calcular medidas nos triângulos?

a) Aqui estão dois problemas resolvidos: um deles está correto e o outro tem um erro. Seu desafio é verificar qual deles não está correto e corrigi-lo.

Qual é a medida do ângulo x deste triângulo?
O ângulo x mede 70º.



$70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$
$180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$
$x = 70^\circ$

ou

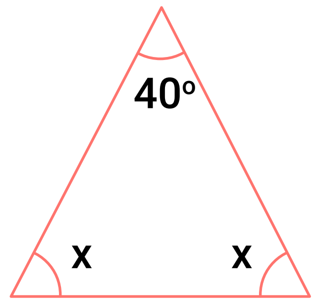
$x + 70^\circ + 40^\circ = 180^\circ$
$x = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ$
$x = 70^\circ$

As medidas dos ângulos internos de um triângulo são x, 3x e 5x respectivamente. Calcule o valor de x.

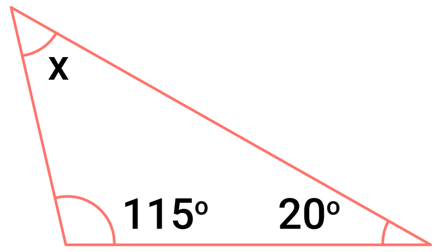
$x + 3x + 5x = 180^\circ$
$10x = 180^\circ$
$x = 180^\circ /10$
$x = 18^\circ$
O ângulo x mede 18º.

03. Nos triângulos a seguir, calcule o valor dos ângulos desconhecidos:

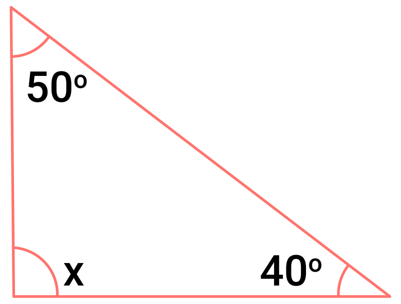
a)



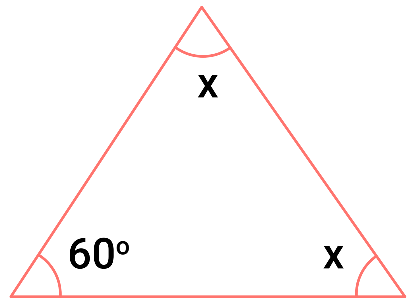
b)



c)



d)



04. Agora responda quanto mede (m):

a) o terceiro ângulo de um triângulo que tem um ângulo de 60º e outro 65º?

b) os ângulos de um triângulo que tem um ângulo reto e o outro medindo 35º?

c) o terceiro ângulo de um triângulo com ângulos 50º e 135º?

d) os três ângulos de mesma medida de um triângulo?

Anexo 10

01. Antes de iniciar a construção do teodolito e a medição da árvore, registre sua estimativa:

Eu estimo que a árvore tem ______ de altura.

02. Construa do teodolito:

Materiais:

- 1 pedaço de cartolina grossa de 20 cm x 20 cm ou tampa de embalagem de papelão;
- copo de plástico;
- 1 percevejo ou alfinete de cabeça ou parafuso e porca;
- fita adesiva;
- canudo de refrigerante;
- palito de sorvete;
- cópia de transferidor de 360°.

Atenção: Você pode substituir os materiais da lista por outros similares.

Etapas de construção:

a) Com fita adesiva, fixe o palito de sorvete na base do copo. Fixe também o canudo na parte vazada. Atenção: o canudo e o palito de sorvete precisam passar pelos centros das circunferências e apontarem para a mesma direção. Se necessário, recorte um pedaço do canudo ou do palito. O canudo será o ponteiro do teodolito, que permitirá fazer a leitura em graus no transferidor. O palito será a mira por onde você avistará os pontos a serem medidos.

b) Cole a cópia do transferidor na cartolina ou tampa de embalagem.

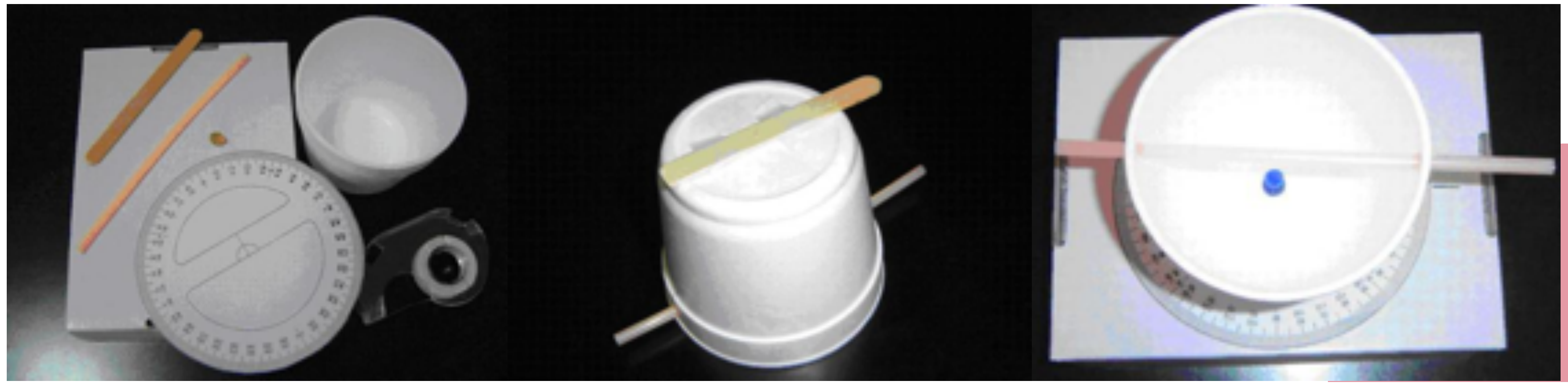
c) Com o percevejo, fixe o copo na tampa da caixa, de modo que o percevejo passe pelo centro da base do copo e pela marca do centro do transferidor.

d) Faça duas marcas como as mostradas na figura: uma na extremidade do palito de sorvete para servir como ponteiro e outra na mesma direção do zero da cópia do transfer.

Está pronto o seu teodolito. A versão caseira funciona como o aparelho verdadeiro. Com ele, você mede, a partir da sua posição, o ângulo formado entre dois outros pontos.

Na horizontal ou na vertical, basta alinhar a indicação 0° do transferidor com um dos pontos e girar a mira até avistar o outro ponto. O ponteiro indicará de quantos graus é a variação.

Apesar de não se obter medidas exatas com esse instrumento, chega-se a medidas aproximadas de distâncias e alturas de objetos não acessíveis de forma direta.



03. Medindo e coletando as informações necessárias

- O primeiro passo consiste em posicionar o teodolito na posição horizontal de modo que o palito fique paralelo ao chão, conforme figura anterior.
- O segundo passo consiste em deslocar o canudo focando o ponto mais alto da árvore.
- Em seguida, observe (na cópia do transferidor) e anote a medida do ângulo formado entre o palito e o canudo.
- Determine também a distância entre a pessoa que está fazendo a medição e a árvore.
- Represente todas essas informações em um desenho.

04. Fazendo cálculos para obter a altura da árvore

Em grupos, observem o desenho elaborado na atividade anterior, identifiquem quais as medidas conhecidas e qual o valor que vocês procuram. Conversem e busquem uma estratégia para resolver esse problema.

Utilizem a calculadora para agilizar os cálculos. Se necessário, vocês podem consultar os registros realizados nas aulas anteriores e a tabela trigonométrica disponível na internet ou no material didático.

Registre sua conclusão no espaço abaixo:

Após os cálculos realizados, podemos afirmar que a árvore tem _______ de altura.

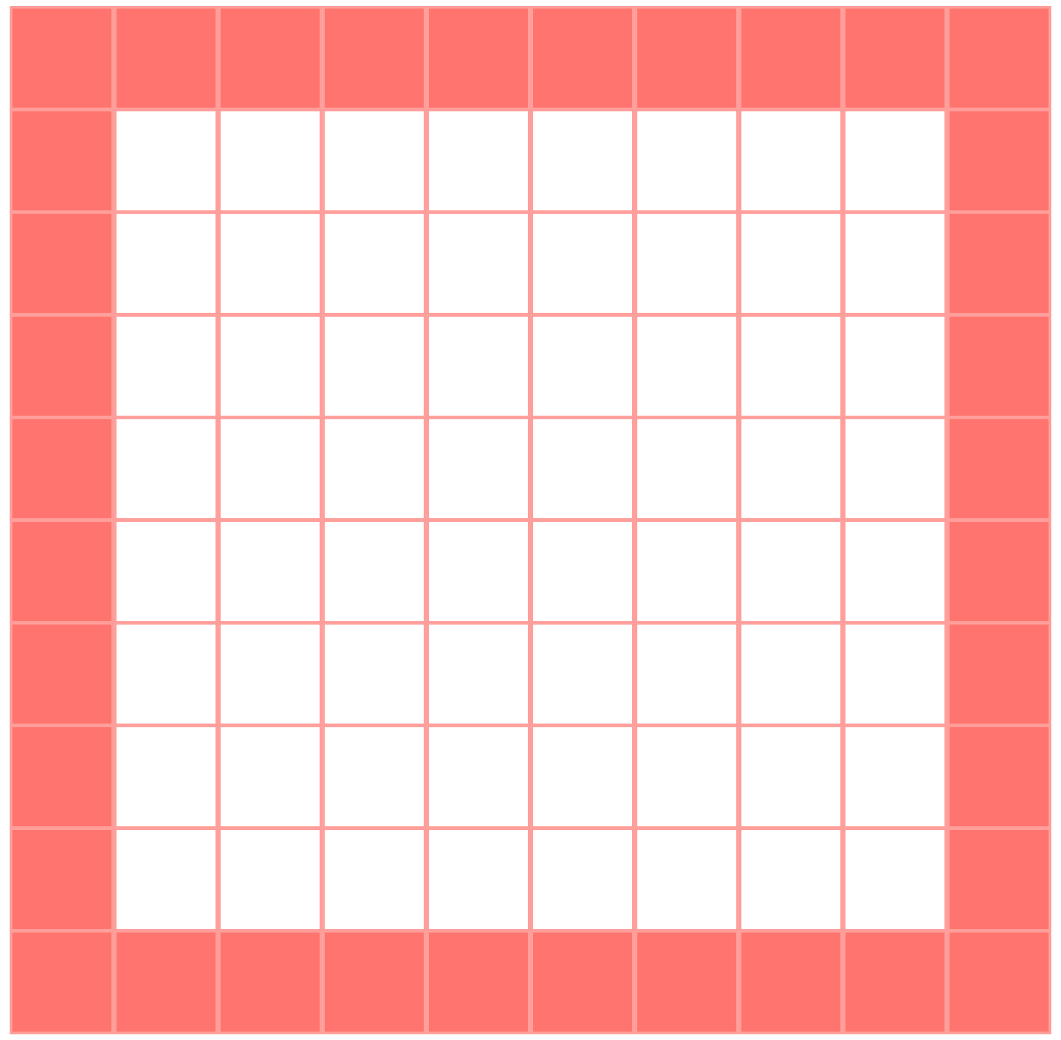
Agora conversem sobre as seguintes questões:

- A sua estimativa estava próxima da medida obtida com os cálculos?
- Vocês acham que a medida obtida com os cálculos é a medida exata da altura da árvore? Explique!

Para finalizar, conversem com os colegas do grupo sobre como foi realizar essa proposta, o que acharam mais difícil e quais as aprendizagens. Registrem suas conclusões para socializarem no momento coletivo.

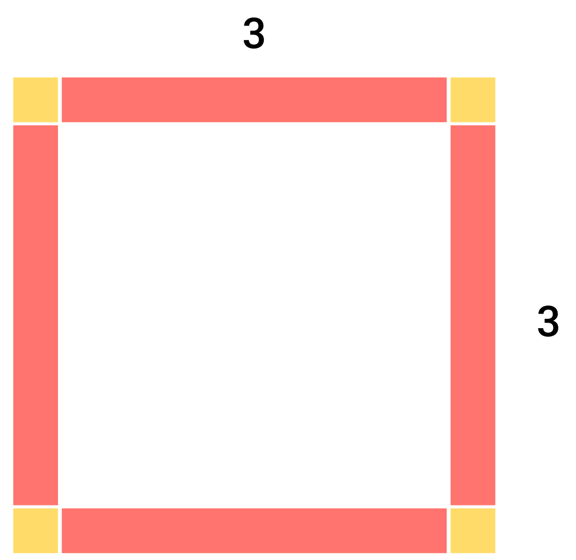
Anexo 11

PARTE 1

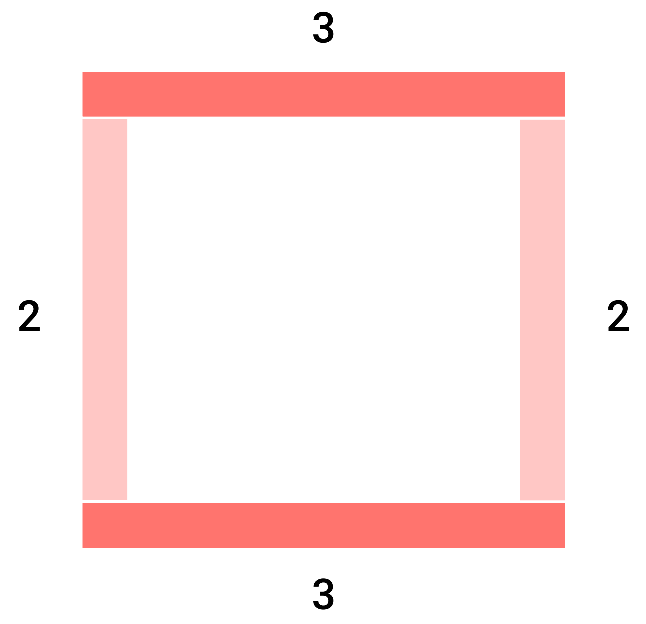


PARTE 2

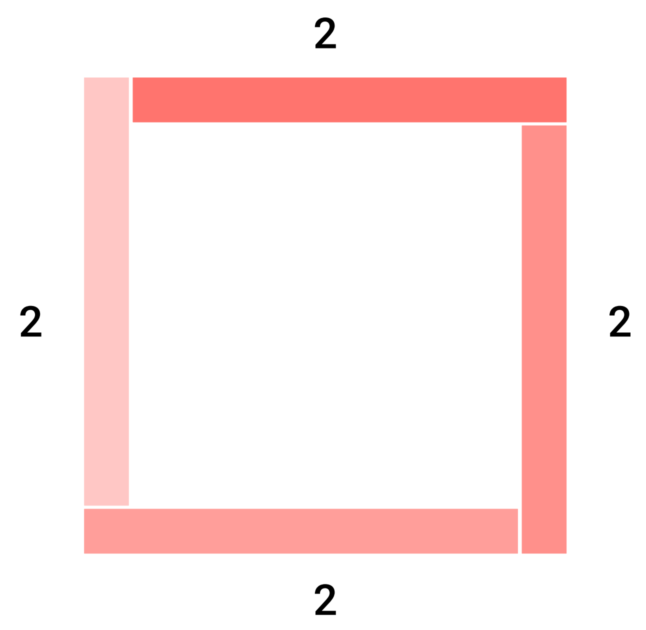
O primeiro estudante disse: *multiplica 3 x 3 e subtrai 4*.



A segunda aluna falou: *3 + 3 + 2 + 2*.



A terceira estudante disse: eu fiz *2 + 2 + 2 + 2*.



reúna

INSTITUTO UNIBANCO