UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

SILVIA HELENA DA GAMA MONTEIRO

MODELAGEM MATEMÁTICA E RECURSOS COMPUTACIONAIS: UMA PROPOSTA PARA A TEORIA DE GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

UBERABA-MG

2015

SILVIA HELENA DA GAMA MONTEIRO

MODELAGEM MATEMÁTICA E RECURSOS COMPUTACIONAIS: UMA PROPOSTA PARA A TEORIA DE GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à banca para defesa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM sob a orientação do Prof. Wellington Barros e Barbosa e coorientação da Profa. Alyne Toscano Martins.

UBERABA-MG

2015

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

	Monteiro, Sílvia Helena da Gama
M779m	Modelagem matemática e recursos computacionais: uma proposta para a teoria de grafos no ensino médio / Sílvia Helena da Gama Monteiro. -- 2015.
	92f. : il., fig., tab.
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2015
	Orientador: Prof. Me. Wellington Barros e Barbosa
	Coorientador: Prof. Me. Alyne Toscano Martins
	1. Matemática. 2. Teoria dos grafos. 3. Ensino médio. 4. I. Barbosa, Wellington Barros e II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III.Título.
	CDU 51

SÍLVIA HELENA DA GAMA MONTEIRO

Modelagem Matemática e Recursos Computacionais:

Uma Proposta para a Teoria de Grafos no Ensino Médio

Dissertação apresentada à banca para defesa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Departamento de Matemática.

06 de novembro de 2015

Banca Examinadora

Prof. Me. Wellington Barros e Barbosa

Orientador

Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Alyne Toscano Martins

Profa. Me. Alyne Toscano Martins

Coorientadora

Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Flávio Molina da Silva

Prof. Dr. Flávio Molina da Silva

Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira

Universidade Federal de Uberlândia

Comece fazendo o necessário. Depois o possível e de repente estará fazendo o impossível.

São Francisco de Assis

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que, com sua presença em minha vida, me dá a força, confiança, humildade e perseverança necessárias nessa jornada.

Agradeço a toda a minha família, em especial meu marido Ricardo e meus filhos Mariana e Miguel pelo incentivo, paciência e compreensão nesses quase três anos de estudo. Vocês fazem toda a diferença na minha caminhada.

Agradeço ao meu orientador Prof. Wellington por toda boa vontade, incentivo, dedicação e ensinamentos. Uma pessoa adorável e verdadeiramente vocacionado para a docência.

Agradeço a minha coorientadora Profa. Alyne, quem primeiro me orientou e me apresentou esse assunto que tanto me encantou e cativou. Seus esclarecimentos, questionamentos e sugestões foram fundamentais para o fechamento dessa proposta.

Não esquecendo dos meus colegas. De turma, pelo companheirismo, troca de conhecimento, ajuda em todas as horas. Enfim, pela simples convivência. Tornaram a caminhada mais alegre e leve as sextas-feiras. De trabalho, em especial Prof. Luciano. Alguém que pude recorrer e esteve sempre pronto a ajudar, com muita paciência e boa vontade nessa reta final.

Finalmente agradeço a todos que de alguma forma possibilitaram que eu fizesse esse mestrado.

Para quem adora matemática, foi uma oportunidade única de aprender e desenvolver muitos conhecimentos nessa área tão apaixonante e ao mesmo tempo desafiadora. Um primeiro passo de uma caminhada.

Resumo

Essa dissertação apresenta uma visão geral e básica sobre a teoria dos grafos. A proposta principal é a inclusão desse assunto no ensino médio, apresentando problemas para serem resolvidos utilizando modelagem matemática, recursos computacionais e heurísticas. São sugeridos exercícios em vários contextos e níveis de dificuldade. Muitos deles já apresentados e testados em sala de aula.

O foco principal é o problema do caminho mínimo e o problema do caixeiro viajante. Ambos permitem utilizar uma analise diferenciada na solução de problemas. Além de utilizar conhecimentos já aprendidos como combinatória, equações lineares e matrizes.

Palavras-chaves: Teoria de grafos, modelagem matemática, ensino médio, problema do caminho mínimo e problema do caixeiro viajante.

Abstract

This thesis presents a general and basic view on graph theory. The main proposal is an include of this subject in high school, it shows problems to be solved with a mathematical modeling, computational resources and heuristics. Exercises in various contexts and difficulty levels are sugested. Many of them already presented and tested in the classroom.

Main focus is shortest path problem and travelling Salesman's problem. Both allow to use a differentiated analysis in problems resolution. Besie, it uses knowledge already learned such as combinatorics, linear equations, matrices.

Key-words: Graph theory, mathematical modeling, high school, minimum way problem and traveling salesman problem.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
MEC	Ministério da Educação e Cultura
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PCM	Problema do Caminho Mínimo
PCV	Problema do Caixeiro Viajante
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática

Sumário

1 Introdução

A teoria dos Grafos não é algo recente. O primeiro registro de um problema utilizando-a foi em 1736. O primeiro livro dedicado a esse assunto vem da escola húngara e data de 1936 (a theorie der endlichen und unendlichen graphen, de Dénes König (1884-1944)). No Brasil este assunto é referido desde o I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional em 1968. Um histórico sobre essa teoria pode ser lido em (BOAVENTURA NETTO, 2006) e (BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ, 2009).

Esse conteúdo baseia-se nas relações entre os objetos de um determinado conjunto. Ele pode ser aplicado em vários ramos da matemática, informática, transporte, biologia, telecomunicações, sociologia, ciência da organização, jogos recreativos e outros. Muitos problemas desafiadores e importantes questões práticas são resolvidos com a utilização dessa teoria, o que a torna um assunto muito interessante, porém geralmente tratado somente no ensino superior. Conforme consta nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio do Ministério da Educação - MEC (2006, p.69-70)

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva.

O ensino da matemática deve priorizar situações em que o aluno precise, diante de um problema, realizar tentativas, estabelecer hipóteses, testá-las e analisar os resultados. Uma dessas situações é encontrada na modelagem matemática, que consiste em transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los. Segundo os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (2000, p.46)

> os alunos devem ter entre outras, as seguintes competências e habilidades desenvolvidas: Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc); Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; Formular hipóteses e prever resultados; Selecionar estratégias de resolução de problemas e Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

Dentre as sugestões dadas nas orientações curriculares para o ensino médio estão os problemas com conjuntos finitos, com enunciados simples mas não necessariamente fáceis de resolver. Dentre esses problemas são sugeridos o problema das pontes de Könisberg, o de determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou o problema de determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade. Essas situações são vistas como uma forma de desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar e explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução.

Assim, o objetivo dessa dissertação é apresentar a teoria dos grafos, abordando alguns problemas práticos e como esse assunto pode ser desenvolvido junto aos alunos do ensino médio, buscando produzir uma proposta diferenciada de aprendizado. Essa teoria envolve vários conteúdos (combinatória, raciocínio lógico, matriz, equações lineares) e pode ser utilizada para aprimorar as habilidades dos alunos nas análises e resoluções de problemas, o que vai de encontro com as orientações curriculares atuais. Inclusive, nas nossas pesquisas encontramos a teoria de grafos já presente em várias olimpíadas brasileiras de matemática, como também em provas de vestibulares e no ENEM (Exame Nacional de Ensino Médio).

Selecionamos o Problema do Caminho Mínimo (PCM) e o Problema do Caixeiro Viajante (PCV) pois estes tem enunciado simples, mas resoluções nem sempre imediatas. O PCM consiste em se obter o melhor trajeto (pode ser o mais curto, ou o mais econômico, ou o mais rápido) entre dois pontos. É um problema até hoje muito explorado principalmente pela sua vasta aplicabilidade. O PCV é um problema típico de otimização combinatória, onde se deseja sair de um ponto inicial, passar por determinados locais (em um grafo serão os vértices) e retornar ao ponto inicial passando uma única vez em cada ponto e com um menor custo possível (esse custo pode ser tempo, dinheiro, etc). Muito utilizado por empresas distribuidoras de produtos, para definição de furos em placas de circuitos impressos, nas indústrias com linhas de produção, entre outras inúmeras aplicações. Esse problema é considerado do tipo NP-difícil[1] onde geralmente só se consegue uma solução, não necessariamente a solução ótima, através de uso de heurísticas. Para esse problema, o número de caminhos possíveis aumenta exponencialmente em relação ao aumento do número de vértices.

Essa proposta envolve ainda a utilização de ferramentas computacionais. Isso é sempre visto como algo positivo pelos alunos, atualmente tão habituados ao uso de dispositivos eletrônicos e softwares diversos. Conforme as Orientações Curriculares do MEC (2006, p.87) "o aprendizado da matemática pode e deve ser trabalhado juntamente com tecnologias de informação. A inserção de tecnologias no dia-a-dia, exige indivíduos capacitados para utilizá-la e muitos desses recursos podem agregar valores ao aprendizado da matemática".

Cabe ainda como justificativa da nossa proposta conforme o trecho dos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (2000, p.41) "cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida".

[1] Para maiores informações sobre NP-difícil consultar capítulo 9 de (ZIVIANI, 2004)

A dissertação expõem primeiramente a história, os conceitos e informações necessárias para o entendimento básico da teoria dos grafos. Incluímos alguns conceitos que não são utilizados diretamente nos exemplos de exercícios mostrados mas podem ser utilizados em outros exercícios a serem propostos. Em seguida, apresentamos o Problema do Caminho Mínimo (PCM) e o Problema do Caixeiro Viajante (PCV). Finalizamos com uma proposta da aplicação dessa teoria no ensino médio, através de atividades utilizando não apenas exercícios em sala de aula, mas também ferramentas computacionais.

Toda a dissertação foi escrita em uma linguagem acessível aos professores e alunos do ensino médio, buscando dispor a teoria de uma forma objetiva e direta, de modo a tornar esse material uma opção de consulta e uso pelos professores que queiram adotá-lo no ensino da teoria dos grafos.

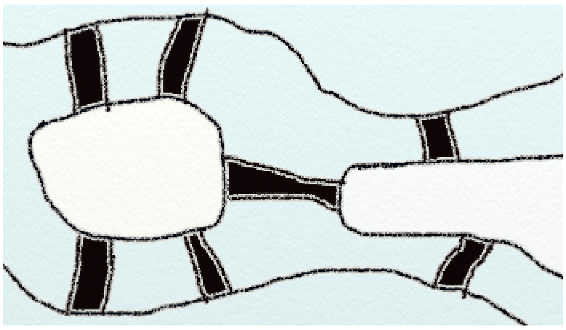
2 Teoria dos grafos

2.1 Um pouco de história

A teoria de grafos tem sua origem no século XVIII. Pode-se dizer que ela foi utilizada pela primeira vez por Leonhard Euler(1707-1783), um matemático e geômetra, que em 1736 visitou a cidade de Königsberg (atual Kaliningrad), localizada na Rússia entre a Polônia e a Lituânia, e se deparou com um problema que, embora parecesse simples, não havia sido resolvido até então.

A cidade de Königsberg é cortada por um rio, onde se localizam duas ilhas. Essas ilhas eram ligadas às margens e entre elas por sete pontes conforme figura a seguir:

Figura 1 – Modelo das pontes da Cidade de Königsberg em 1736.



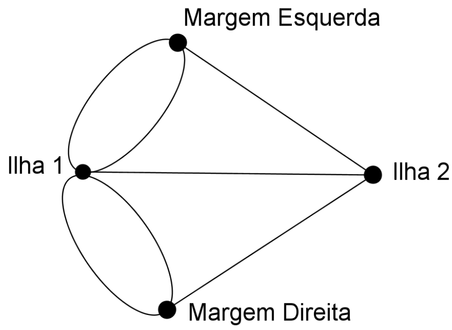
Fonte: Da autora, 2015.

Os intelectuais da cidade estavam discutindo se haveria um caminho para um passeio que passasse por todas as pontes uma única vez, sem repetir o trajeto já feito, saindo de uma das margens e retornando a ela no final do percurso. Maiores detalhes podem ser obtidos em (BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ, 2009).

Após estudar o problema, Euler conseguiu provar que não era possível realizar o percurso pretendido. A não ser que cada margem se ligasse a uma ilha por um número par de pontes e entre as ilhas também houvesse um número par de pontes. Esse resultado é considerado como o primeiro teorema da teoria dos grafos.

Euler demonstrou esse fato criando um modelo para representar a cidade conforme Figura 2.

Figura 2 – Modelo representativo das pontes da Cidade de Königsberg.



Fonte: Da autora, 2015.

O problema de encontrar um caminho que passe por todas as linhas uma única vez retornando ao ponto de origem é facilmente encontrado em jornais e revistas com o objetivo de puzzles como passatempo.

Após Euler, somente em 1847, Gustav Kirchhoff (1824-1887) utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos. Com esse estudo ele criou a teoria das árvores para caracterizar conjuntos de ciclos independentes. Dez anos depois temos os modelos de grafos utilizados por Arthur Cayley (1821-1895) na área de química orgânica.

Ao longo do século XX muitos matemáticos se interessaram pela teoria dos grafos. A partir da década de 1950, a Pesquisa Operacional começou a utilizar modelos de grafos para solucionar problemas de projetos, organização e distribuição o que deu um grande impulso ao desenvolvimento da teoria que, até então, possuia várias aplicações em áreas disjuntas como circuitos elétricos e química orgânica. Maiores informações sobre Pesquisa Operacional, sugerimos (LOESCH; HEIN, 2009).

Pode-se citar Lester Randolph Ford (1886-1967) e Delbert Ray Fulkerson (1924-1976) que desenvolveram em 1962 a teoria dos fluxos em redes. Um dos mais importantes resultados da teoria dos grafos.

A teoria dos grafos é hoje muito utilizada pelas inúmeras aplicações que podem ser resolvidas com ela. Podemos citar problemas de localização, traçado de rotas, planejamentos diversos na área de gestão de recursos, placas de circuitos impressos, engenharia molecular, entre outras.

2.2 Grafos: Conceitos Iniciais

Todos os conceitos apresentados nesse capítulo estão baseados nas referências bibliográficas presentes nessa dissertação. Poucas são as referências no decorrer do texto, pois o mesmo foi escrito de uma forma menos formal, mas embasado nessas fontes:(BOAVENTURA NETTO, 2006), (BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ, 2009) e (GOLDBARG, M. C.; GOLDBARG, 2012).

Conforme (SCHEINERMAN, 2011) "a palavra Grafo tem vários significados. Em linguagem não matemática, refere-se a um método de representação de uma ideia ou conceito, por meio de uma ilustração ou por escrito."

Uma definição formal de Grafos é encontrada também em (SCHEINERMAN, 2011): "Um **Grafo** é um par G=(V, E) em que V é um conjunto finito e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V."

Por exemplo, temos os **vértices** dados pelos elementos de V e as relações entre os vértices, ou **ligações** dadas pelos elementos de E. Lembrando que E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V. Exemplificando: G=($\{1,2,3\}$; $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,1\}$). Temos V=$\{1,2,3\}$, um conjunto finito de vértices e E=$\{$ $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,1\}$ $\}$ um conjunto que contém 3 subconjunto de dois elementos de V. Cada subconjunto representa uma **aresta**, que liga um vértice a outro.

A representação gráfica apresentada na Figura 3 a seguir é um modelo representativo de um grafo. Todo modelo tem por objetivo simplificar um problema, com o objetivo de encontrar as respostas que necessitamos.

Figura 3 – (a)Grafo com arestas e (b)Grafo com Arcos.

(a) (b)

Fonte: Da autora, 2015.

As ligações entre dois vértices que não possuem uma indicação de direção (seta) são chamadas de **arestas**. Já as ligações que possuem um sentido definido (uma seta indicando uma direção) são chamadas de **arcos**.

É importante entender que arestas não são segmentos de retas ou curvas. Mas sim um subconjunto de dois elementos do conjunto dos vértices. Na figura 3 (a), temos a ligação (1,2) que poderia ser escrita também como (2,1) pois não há indicação de sentido de direção. Já os arcos são pares ordenados que indicam uma direção. O primeiro elemento desse par ordenado indica de onde sai o arco e o segundo elemento, para onde aponta o arco. Na figura 3(b) temos os pares ordenados indicando os arcos: (1,2), (3,1) e (3,2).

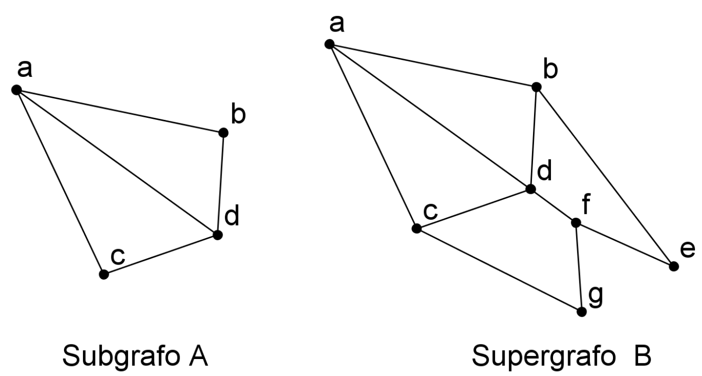
Na Figura 3(a), o grafo é formado apenas por arestas (ligações não orientadas). Esse grafo recebe o nome de **grafo não orientado** .

Já na Figura 3(b), o grafo possui arcos (ligações orientadas). Esse grafo recebe o nome de **grafo orientado** .

O número de vértices e de arestas de um grafo geram dois conceitos importantes: ordem e tamanho de um grafo. A **ordem** de um grafo é o número de vértices desse grafo e o **tamanho** do grafo é o número de arestas que ele possui. Baseando nesses conceitos de ordem e tamanho, podemos definir quando um grafo é subgrafo ou supergrafo (desde que se enquadre nessa situação).

Podemos ter um grafo que é um **subgrafo** de outro. Ou seja, é um grafo que está contido em outro com tamanho e/ou ordem maior ou igual ao dele. Todo subgrafo pertence a um **supergrafo**, que é o grafo que o contém. Na Figura 4 o grafo A é um subgrafo do grafo B e o grafo B é supergrafo de A.

Figura 4 – Subgrafo e Supergrafo.



Fonte: Da autora, 2015.

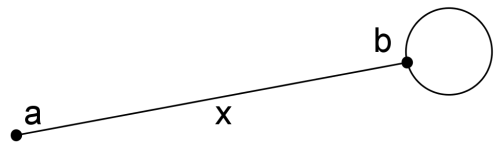
Dois vértices que participam de uma ligação são chamados **vértices adjacentes** e são os pontos extremos dessa ligação. Dois vértices adjacentes são chamados também de **vizinhos**. O conjunto de todos os vizinhos de um vértice é chamado de **vizinhança** desse vértice.

Um grafo onde todos os pares de vértices são adjacentes, ou seja, possuem pelo menos uma aresta em comum é chamado de **completo**.

Sejam a , b os vértices adjacentes de uma ligação x. Pode-se dizer que a e b pertencem a ligação x, pois x é um conjunto de dois elementos (a, b). Dizemos também que tanto a quanto b é **incidente** a x.

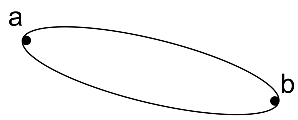
Uma ligação que envolve apenas um vértice é chamada **laço**. Já, se ocorrem duas ou mais arestas entre dois vértices temos as chamadas **arestas paralelas**. Na Figura 5 temos os vértices adjacentes a e b, a ligação x e um laço em b. E na Figura 6 temos arestas paralelas.

Figura 5 – Vértices adjacentes, aresta e laço.



Fonte: Da autora, 2015.

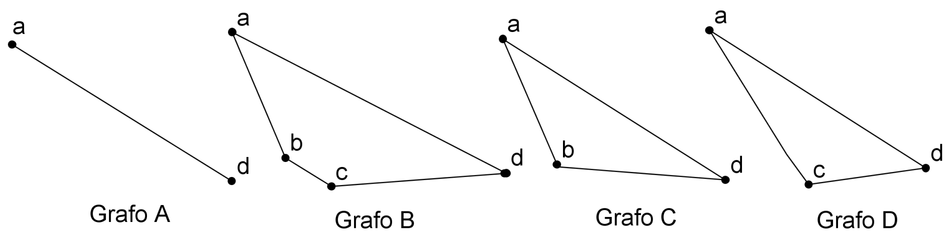
Figura 6 – Arestas paralelas.



Fonte: Da autora, 2015.

Grafo Simples é aquele que não possui laços e nem arestas paralelas. Quando o grafo possui laços ou arestas paralelas será um **Grafo Multigrafo**. Todos os grafos da Figura 7 são simples.

Figura 7 – Grafos simples.

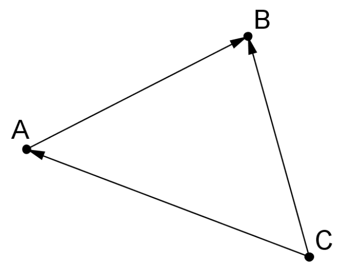


Fonte: Da autora, 2015.

Em uma ligação orientada (onde existe uma indicação de direção), apenas a adjacência entre vértices não é suficiente para entender a relação entre eles. Assim, torna-se necessário indicar o sentido da ligação. Isso é feito nomeando os vértices pertencentes a essa ligação de sucessor e antecessor. Um vértice é dito **sucessor** de outro quando existe pelo menos uma ligação entre eles e essa ligação é orientada e aponta (a seta indica o vértice sucessor) para esse vértice em questão. E um vértice é dito **antecessor** de outro quando existe pelo menos uma ligação entre eles e essa ligação é orientada e a indicação de direção (a seta parte do vértice antecessor) inicia neste vértice.

Na Figura 8 o vértice B é sucessor de A e de C. O vértice A é antecessor de B e sucessor de C. O vértice C é antecessor de A e B.

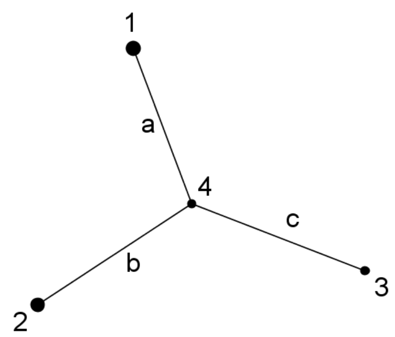
Figura 8 – Sucessor e antecessor.



Fonte: Da autora, 2015.

Além de vértices adjacentes, temos arestas adjacentes. Duas arestas são **adjacentes** quando compartilham um vértice, ou seja, possuem um vértice em comum. Na Figura 9 as arestas a, b e c são adjacentes pois compartilham o mesmo vértice 4.

Figura 9 – Arestas adjacentes.



Fonte: Da autora, 2015.

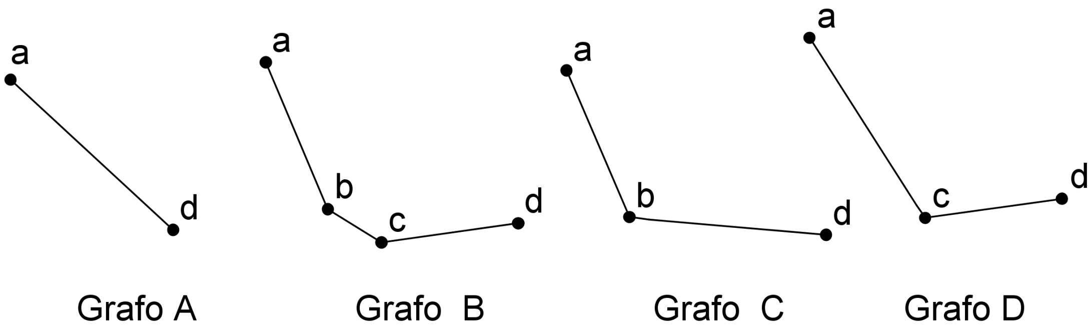
O ponto de partida na modelagem de problemas utilizando a teoria de grafos é a identificação de quem são os vértices e quais as relações entre eles. Um exemplo simples representando vértices e arestas poderia ser a escolha de um caminho para ir do ponto *a* ao ponto *d*, conforme Figura 10.

Podemos escolher vários caminhos dependendo da necessidade. O caminho *ad* (que pode ser o mais curto em termos de distância, mas não necessariamente o caminho mais rápido em termo de tempo para percorrê-lo), o caminho *abcd* ou *abd* ou *acd* entre outros. Fazemos escolhas assim quando buscamos o melhor trajeto de acordo com nossa prioridade: menor tempo de percurso, caminho mais rápido (mas não necessariamente o mais curto), etc.

A teoria dos grafos é usada em muitas situações práticas e cotidianas (logística de transporte, distância entre cidades, árvore genealógica, fluxo em rede, etc). Sabendo utilizá-la, pode-se resolver vários problemas, muitas vezes de forma mais simples e rápida.

O primeiro passo na resolução de uma situação que pode ser modelada por grafo é a definição de todos os vértices e suas ligações. É necessário definir as adjacências entre os vértices criando uma

Figura 10 – Caminho do ponto A ao ponto D - Exemplos.



Fonte: Da autora, 2015.

lista, que chamamos de **lista de adjacência** do grafo. Essa lista nada mais é do que indicar as relações de adjacências entre os vértices. Num grafo não orientado, como o da Figura 3(a) teríamos a seguinte lista de adjacência:

Vértice	Vértices adjacentes
1	2, 3
2	1, 3
3	2, 1

Num grafo orientado, a definição de adjacência está relacionada com vértice sucessor e antecessor. Em uma ligação, o vértice sucessor é considerado o vértice adjacente. Veja a lista de adjacência referente a Figura 3(b),

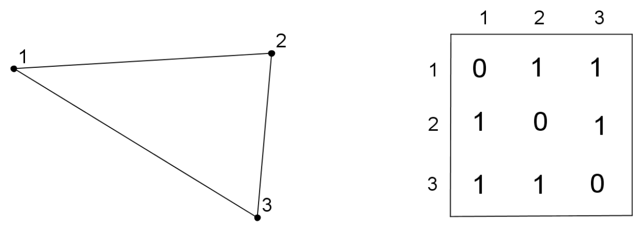
Vértice	Vértices adjacentes
1	2
2	-
3	1, 2

Na ligação (1,2), temos o vértice antecessor 1 e o vértice sucessor 2. A ligação (1,3) e (2,3) temos o vértice 3 como antecessor e os vértices 1 e 2 como sucessores.

Além da representação gráfica, podemos representar um grafo através do uso de matrizes. Existem dois tipos de representação utilizando matrizes: uma que envolve apenas os vértices e outra que relaciona os vértices e suas ligações. Assim, no primeiro tipo, os vértices de um grafo podem ser associados a linhas e colunas de uma matriz quadrada chamada **matriz de adjacência** (vértice-vértice). A matriz de adjacência é criada tendo cada vértice associado ao mesmo tempo a uma linha e a uma coluna. Em cada posição indicada por um par de vértices (representados pela interseção de uma linha com uma coluna) indicamos se há ou não uma aresta os unindo. Isso é feito colocando 1 quando existe uma aresta unindo os vértices analisados e 0 para quando não há ligação entre eles (no caso de grafos não orientados).

A Figura 11 representa um exemplo de uma matriz de adjacência para o grafo não orientado apresentado:

Figura 11 – Grafo não orientado e sua matriz de adjcência.

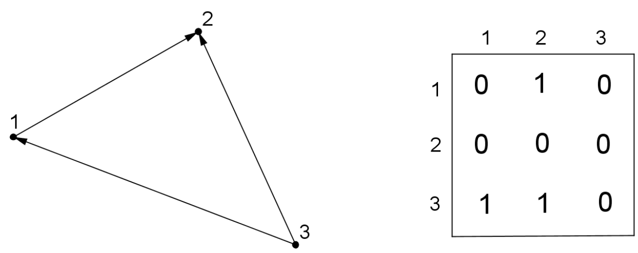


Fonte: Da autora, 2015.

Já grafos orientados possuem sua matriz de adjacência com preenchimento igual a 1 nas células que representam arcos saindo dos vértices e 0 quando representa arcos entrando ou não há nenhum arco associado ao vértice. Além disso, a matriz deve ser analisada pelas linhas, ou seja, a primeira linha representa o primeiro vértice. Possui algum arco saindo dele? Se sim, na coluna que representa o vértice para o qual sai o arco em questão recebe 1. Caso contrário, recebe 0. E assim sucessivamente é definida a matriz de adjacência.

Um exemplo para um grafo orientado pode ser visto na Figura 12 a seguir.

Figura 12 – Grafo orientado e sua matriz de adjacência.

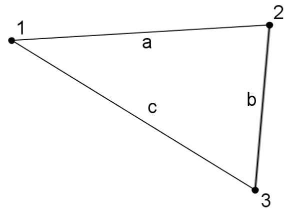


Fonte: Da autora, 2015.

O outro tipo de representação utilizando matrizes é a **matriz de incidência** (vértice-ligação). Ela é definida tendo os vértices nas linhas da matriz e as ligações nas colunas. Nesta matriz, cada ligação possui um rótulo para ser usada na identificação das colunas na matriz. Na interseção da linha com coluna é colocado 1 quando existe uma ligação associada ao vértice ou 0 quando não existe ligação associada ao vértice em questão.

Exemplo de uma matriz de incidência para o grafo não orientado:

Figura 13 – Grafo não orientado e sua matriz de incidência.



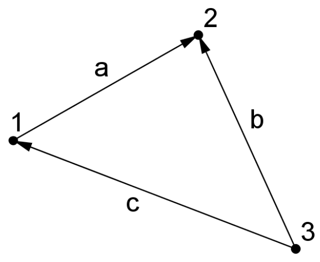
	a	b	c
1	1	0	1
2	1	1	0
3	0	1	1

Fonte: Da autora, 2015.

Fica fácil identificar qual aresta liga dois vértices. Observando as colunas, a aresta *a* liga os vértices 1 e 2. A aresta *b* liga os vértices 2 e 3 e a aresta *c* liga os vértices 1 e 3. Os vértices conectados por uma aresta recebem 1 na coluna que representa essa aresta.

Já para um grafo orientado, nos arcos que saem do vértice coloca-se 1, nos arcos que chegam nos vértices -1 e quando o arco não chega e nem saem do vértice coloca-se 0. Um exemplo para um grafo orientado pode ser visto na Figura 14.

Figura 14 – Grafo orientado e sua matriz de incidência.



	a	b	c
1	1	0	-1
2	-1	-1	0
3	0	1	1

Fonte: Da autora, 2015.

Algumas definições importantes surgem dessas relações de adjacências dos vértices: o grau dos vértices, se o grafo é regular ou não e se é completo.

O **grau** de um vértice é o número de arestas que incidem nesse vértice. A soma dos graus dos vértices é sempre o dobro do número de arestas. Intuitivamente sabemos que isso é verdade, pois para cada dois vértices ligados por uma aresta teremos o grau de cada vértice igual a 1. Logo, a soma dos graus será 2, que é o dobro do número de arestas.

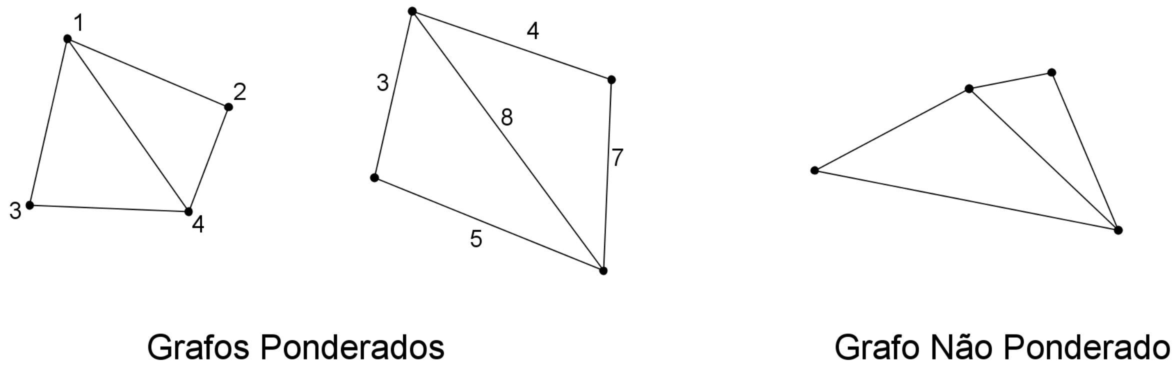
Na matriz de adjacência de grafos não orientados, o somatório dos números 1 presentes na matriz representa o grau do grafo. Logo, o número de arestas é metade desse valor.

Na Figura 7 temos o exemplo de grafos com graus diferentes. O grafo A possui os vértices de grau 1. Já os grafos B, C e D possuem todos os vértices de grau 2. Se todos os vértices de um grafo possuem o mesmo grau esse grafo é dito **regular**. Todos os grafos da Figura 7 são regulares.

Em alguns casos são necessárias mais informações sobre as arestas e vértices para se conseguir representar um problema (como por exemplo a distância entre cidades, custo de viagem entre dois pontos, número de fornecedores em cada cidade, etc). Nestas situações dizemos que existe um peso ou ponderação para as arestas ou vértices. Os grafos que possuem valores numéricos associados as arestas ou vértices são ditos **ponderados**.

Os grafos que não possuem valores numéricos associados aos vértices ou arestas são grafos **não ponderados**. Segue um exemplo de grafos ponderados e não ponderados na Figura 15.

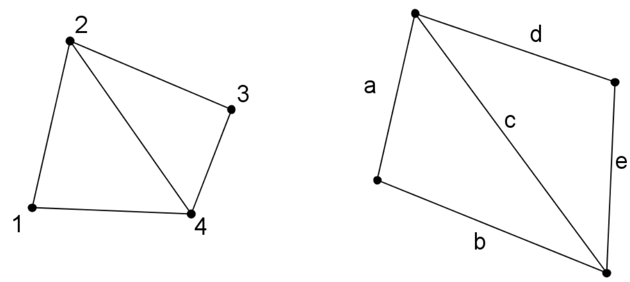
Figura 15 – Grafos ponderados e não ponderados.



Fonte: Da autora, 2015.

Na Figura 16, os grafos ponderados são de dois tipos: o da esquerda é ponderado nos vértices e o da direita é ponderado nas arestas. Mas, se as informações nos vértices e arestas são apenas indicação (podem ser numéricas ou alfabéticas) temos um **grafo rotulado**.

Figura 16 – Grafos rotulados.



Fonte: Da autora, 2015.

2.3 Conexão, percurso e caminho

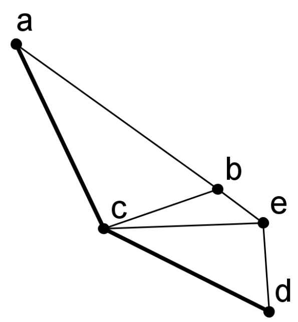
Através da teoria dos grafos podemos modelar situações que envolvem comunicação entre os vértices. Utilizando os conceitos de vértices e arestas é possível encontrar uma melhor rota entre duas cidades por exemplo. Isso é o que chamamos de **conexão**. Ou seja, existe uma ligação entre dois pontos.

Quando temos uma sequência de vértices em que cada um é adjacente ao seguinte, temos o que chamamos de **percurso** ou **passeio**. Quando o percurso chega ao último vértice e esse é igual ao primeiro, temos um **percurso fechado**. Se o último vértice for diferente do primeiro, temos um **percurso aberto**.

Quando um percurso termina em um vértice que é o primeiro vértice de outro percurso temos uma **concatenação**.

Podemos ainda nomear os percursos pelas seguintes características: Se o percurso não repete ligações, ele é dito **simples**. E será **elementar** se não repetir vértices.

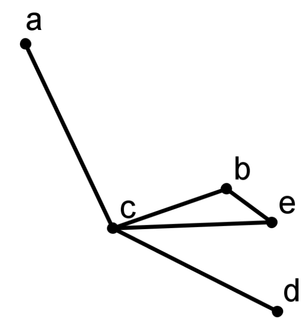
Figura 17 – Grafo representado um percurso simples e elementar: $a \sim c \sim d$.



Fonte: Da autora, 2015.

Na Figura 17 os vértices a, c e d estão ligados de tal modo que temos um percurso simples e também elementar. Mas se a ligação entre a e d fosse $a \sim c \sim b \sim e \sim c \sim d$ (conforme Figura 18) teríamos um percurso simples, mas não elementar (repetiu o vértice c). Mas todo percurso que é elementar, será também simples.

Figura 18 – Percurso fechado: $c \sim b \sim e$.

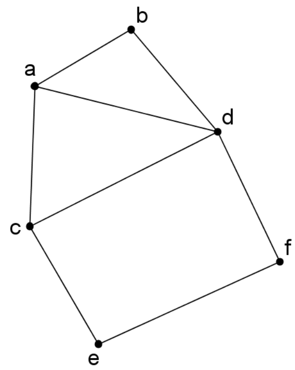


Fonte: Da autora, 2015.

Na Figura 18 temos o exemplo de percurso fechado: $c \sim b \sim e$. Quando um percurso fechado é também elementar, temos um **ciclo**.

Todo ciclo presente em um grafo terá um tamanho referente a ele. Esse tamanho corresponderá ao número de arestas que formam esse ciclo. Associados ao tamanho de um ciclo em um grafo temos os conceitos cintura e circunferência. **Cintura** é o comprimento do menor ciclo que se pode ter em um grafo. Já **circunferência** é o comprimento do maior ciclo que se pode ter. Veja um exemplo na Figura 19 a seguir:

Figura 19 – Cintura e circunferência.



Fonte: Da autora, 2015.

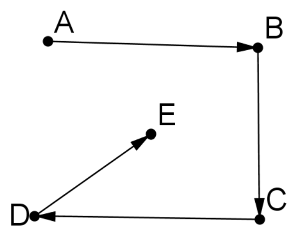
Neste exemplo, a cintura é formada pelas arestas que ligam os vértices $a - b$, $b - d$ e $d - a$ ou $a - c$, $c - d$ e $d - a$ e corresponde ao comprimento 3 (número de arestas que formam o menor ciclo possível no grafo apresentado). Já a circunferência será formada pelas arestas que ligam os vértices $a - b$, $b - d$, $d - f$, $f - e$, $e - c$ e $c - a$. E corresponde ao comprimento 6 (número de arestas que formam o maior ciclo possível no grafo apresentado).

Todo percurso simples e elementar é um **caminho**. Ou seja, nenhuma aresta e nenhum vértice são usados duas vezes. Num percurso, que não é caminho, podemos passar mais de uma vez por um mesmo vértice e também por uma mesma aresta. Já num caminho exige-se que nenhum vértice do grafo seja repetido e nenhuma aresta pode ser percorrida mais de uma vez.

Uma definição formal é dada por (GOLDBARG; LUNA, 2005): "Se uma sequência de arestas, além de distinta, não repetir os nós a denominaremos caminho". Ou ainda, "um caminho é uma sequência de arestas em que todos os nós visitados são distintos". Podemos ter em um grafo G dois vértices ligados por um percurso. Logo, deve existir um caminho ligando esses vértices. Conforme Figura 18 acima, temos o percurso $a \sim c \sim b \sim e \sim c \sim d$ e o caminho $a \sim c \sim d$.

Na Figura 20 a seguir temos um caminho em um grafo orientado.

Figura 20 – Caminho em um grafo orientado.

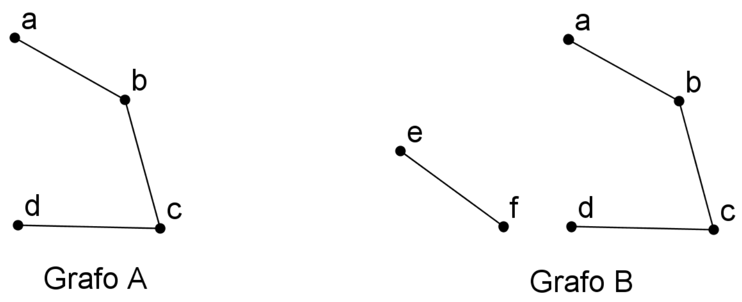


Fonte: Da autora, 2015.

A mesma definição para tamanho de um ciclo se aplica ao **comprimento** de um caminho em um grafo não ponderado. Já em um grafo ponderado, o comprimento de um caminho é o somatório dos valores associados as arestas ou arcos desse caminho.

Em um grafo G, quando temos um vértice (por exemplo o vértice a na Figura 19) conectado a outro vértice (por exemplo o vértice e) por um caminho, dizemos que a **é ligado a** e. Caminho este em que a é o primeiro vértice e e o último. Quando esse grafo é uma estrutura única o nomeamos de **componente** . Na figura 21, o grafo A possui uma única componente e o grafo B possui duas componentes.

Figura 21 – Grafo A conexo e Grafo B não conexo.



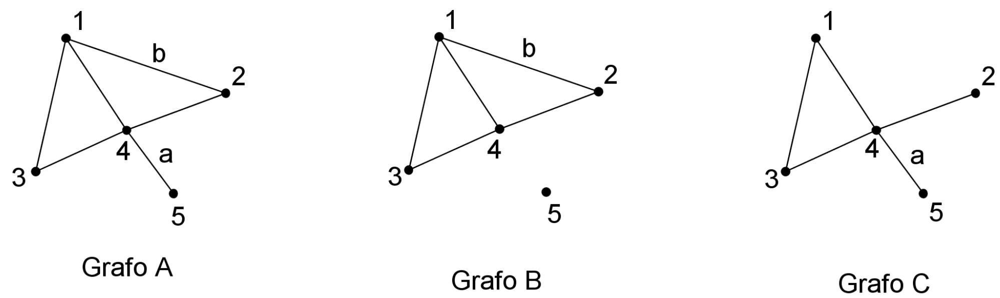
Fonte: Da autora, 2015.

Quando um grafo possui apenas uma componente esse grafo é dito **conexo**. Na Figura 21 o grafo A é conexo pois possui apenas uma componente e o grafo B não é conexo pois possui duas componentes.

Conforme (BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ, 2009) "em um grafo não orientado **conexo**, sempre se pode ir de um a outro vértice atravessando arestas". Ou seja, todo par de vértice está conectado.

Se uma aresta é indispensável para manter um grafo conexo, ela é chamada de **ponte**. A remoção de uma ponte torna o grafo desconexo. Veja essa situação na Figura 22 a seguir:

Figura 22 – Remoção de ponte.



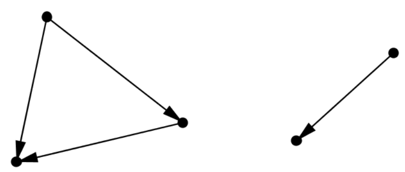
Fonte: Da autora, 2015.

O Grafo A é conexo. Temos a aresta *a* que conecta o vértice 5 ao vértice 4 e é a única forma de conexão entre o vértice 5 e os outros vértices do grafo. Assim, se for retirada a aresta *a*, conforme Grafo B, o vértice 5 deixa de estar ligado aos outros vértices. O grafo B, após a retirada da aresta *a* se tornou desconexo. Ou seja, passou a ter mais de uma componente. Logo, a aresta *a* é considerada uma ponte. Analisando outra aresta, no caso a *b*, que liga os vértices 1 e 2, podemos ver no Grafo C que mesmo que ela seja retirada do grafo, o mesmo continua conexo pois mantém o grafo com apenas uma componente. Isso mostra que a aresta b não é uma ponte.

A conexidade em grafos orientados precisa de uma análise mais detalhada por envolver a questão de sentido de percurso Temos quatro tipos de situação em grafos orientados:

Grafos não conexo: Existe pelo menos um par de vértices não unido por um percurso.

Figura 23 – Grafo não conexo.

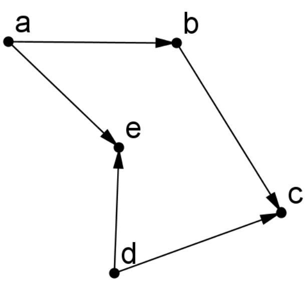


Fonte: Da autora, 2015.

O lado direito da Figura 23, formado por dois vértices, não é unido ao lado esquerdo por um percurso.

Grafo simplesmente conexo (s-conexo): todos os pares de vértices são interligados (não levando em conta a orientação). Mas nenhum vértice consegue chegar a todos os outros vértices por causa da orientação.

Figura 24 – Grafo simplesmente conexo (s-conexo).

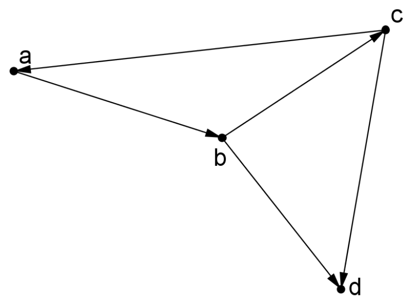


Fonte: Da autora, 2015.

Por causa da orientação do grafo da Figura 24 o vértice a nunca chegará ao vértice d. Da mesma forma o vértice b não chega aos vértices a, d e e. Os vértices c e e não chegam a nenhum outro vértice. O vértice d não chega aos vértices a e b.

Grafo semi-fortemente conexo (sf-conexo): Alguns vértices conseguem chegar a todos os outros vértices, mas existem vértices que não conseguem.

Figura 25 – Grafo semi-fortemente conexo (sf-conexo).

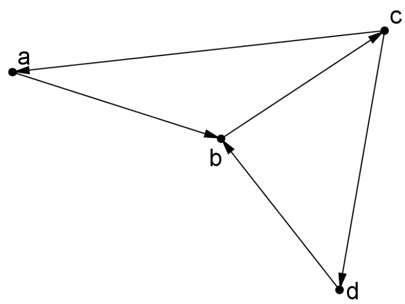


Fonte: Da autora, 2015.

Neste exemplo, apenas o vértice d não consegue atingir os outros vértices.

Grafo fortemente conexo (f-conexo): Para todo par de vértices existe um caminho.

Figura 26 – Grafo fortemente conexo (f-conexo).



Fonte: Da autora, 2015.

Nas nossas pesquisas encontramos algumas divergências nos conceitos apresentados neste item 2.3. Sendo assim, apenas para esclarecimento, nos baseados em (BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ, 2009) para as definições dessa seção.

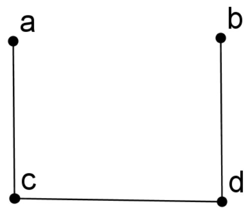
2.4 Grafo Euleriano e Grafo Hamiltoniano

Chamamos de **trilha Euleriana** ou **caminho Euleriano** quando temos um percurso em um grafo que atravessa cada aresta exatamente uma vez. E chamamos de **tour Euleriano** ou **circuito Euleriano**, se além de ter uma trilha Euleriana, ela começar e terminar no mesmo vértice. Assim, um **grafo Euleriano** é todo grafo que possui um tour Euleriano.

Para um grafo ser Euleriano, existe uma condição necessária e suficiente. Essa condição é que todos os seus vértices sejam de grau par.

Para um grafo ter uma trilha Euleriana, ele precisa ter dois vértices de grau ímpar e todos os outros de grau par. A trilha Euleriana começa num vértice a e termina num vértice b (com a diferente de b), onde os vértices a e b possuem grau ímpar. Veja um exemplo na Figura 27.

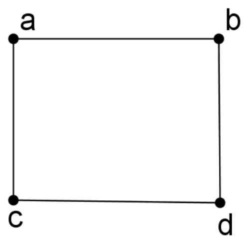
Figura 27 – Grafo com trilha Euleriana.



Fonte: Da autora, 2015.

Já na Figura 28 todos os vértices possuem grau par, logo temos um grafo Euleriano.

Figura 28 – Grafo Euleriano.



Fonte: Da autora, 2015.

Nesse exemplo, G é um grafo conexo onde todos os vértices possuem grau par. Logo para cada vértice existe um tour Euleriano que começa e termina neste vértice.

Um caminho que contém todos os vértices de um grafo, não repetindo nenhum, ou seja, passa por todos os vértices uma única vez é chamado **caminho Hamiltoniano**. Um grafo que possua um ciclo que contenha todos os vértices, sendo que cada vértice só aparece uma vez no ciclo é chamado de **grafo Hamiltoniano**. Este ciclo é chamado de **ciclo Hamiltoniano**. Sendo assim um grafo é Hamiltoniano se ele contiver um ciclo Hamiltoniano.

Não existe, como no caso dos grafos Eulerianos, uma condição necessária e suficiente da existência de um caminho Hamiltoniano em um grafo não orientado. Existem apenas condições suficientes para grafos simples não orientados que indicam a possibilidade de existir um ciclo Hamiltoniano em um grafo com tais condições atendidas.

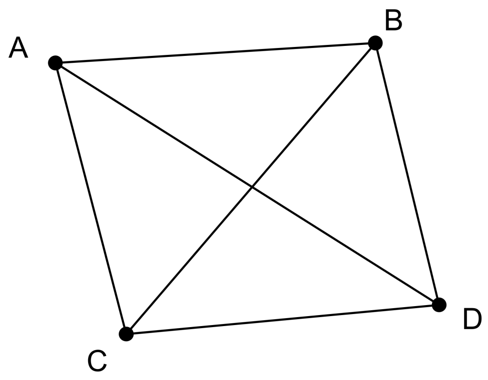
Uma das condições é o teorema de Dirac: se G é um grafo de ordem maior ou igual a 3, onde cada vértice possui grau maior ou igual a ordem dividida por 2 ($\frac{ordem}{2}$) então G é Hamiltoniano.

Na Figura 29 temos um exemplo de grafo Hamiltoniano que atende a condição acima. Ou seja:

Possui número de vértice igual a 4, ou seja, *ordem* ≥ 3;

Todos os vértice possuem grau 3. Logo, todos possuem $grau \geqslant \frac{ordem}{2}$.

Figura 29 – Grafo Hamiltoniano que atende ao Teorema de Dirac

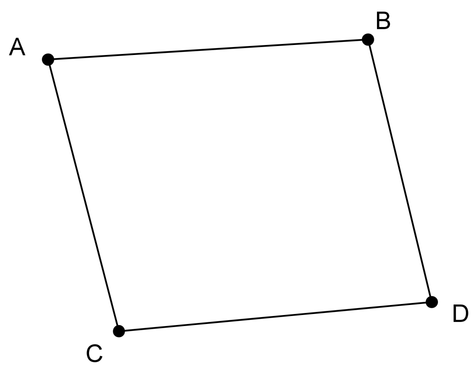


Fonte: Da autora, 2015.

Outra condição seria o teorema de Ore: se G é um grafo de ordem maior ou igual a 3, onde a soma dos graus de cada par de vértices não adjacentes seja maior ou igual a ordem, então G é Hamiltoniano.

Na Figura 30 temos um grafo que atende a essa condição. Ou seja, possui ordem 4 ($ordem \geq 3$) e a soma dos graus dos vértices não adjacentes (A e D; B e C) é 4, logo igual a ordem.

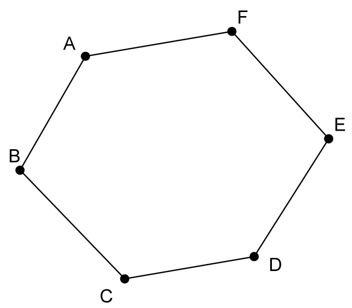
Figura 30 – Grafo Hamiltoniano que atende ao Teorema de Ore.



Fonte: Da autora, 2015.

Mas, conforme explicado anteriormente, as condições são suficientes mas não necessárias. Temos na Figura 31 um grafo que é Hamiltoniano mas não atende a nenhuma das duas condições. Possui 6 vértices, ou sejam sua ordem é maior que 3, mas cada vértice possui grau 2, ou seja, menor que $\frac{ordem}{2}$. Logo não atende a primeira condição. Além disso, a soma dos graus de pares de vértices não adjacentes (4) é menor que a ordem. Também não atende a segunda condição. Mesmo não atendendo as condições, o grafo é Hamiltoniano.

Figura 31 – Grafo Hamiltoniano que não satisfaz as condições 1 e 2.

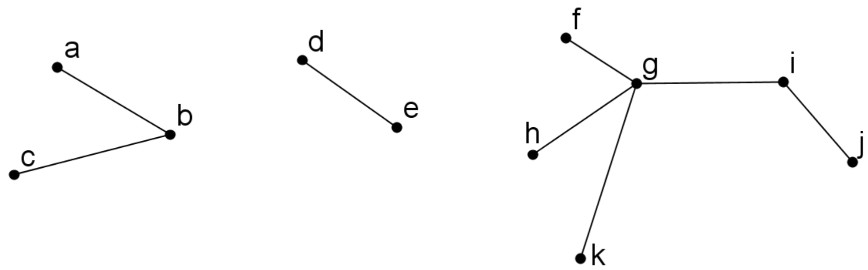


Fonte: Da autora, 2015.

2.5 Árvores

As **árvores** são grafos conexos que não possuem ciclos. Uma forma equivalente de definir seria que **árvores** são grafos conexos e acíclicos. Na Figura 32 temos alguns exemplos de árvores. Várias árvores formam uma **floresta**.

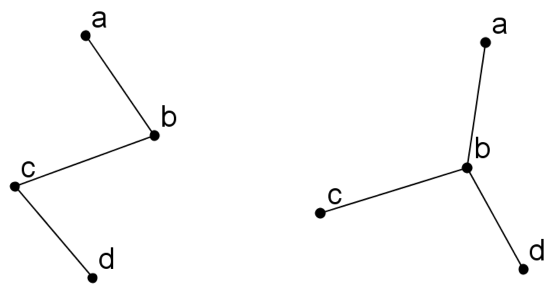
Figura 32 – Exemplos de árvores.



Fonte: Da autora, 2015.

Um vértice isolado e único é considerado uma árvore. A árvore mais simples possível. Já uma árvore com dois vértices, deve ter os mesmos ligados por uma aresta, uma vez que toda árvore é conexa. E neste caso só existe uma forma de ligação entre os vértices. Uma árvore com três vértices terá um caminho ligando os vértices (conforme primeira árvore da Figura 32). Os vértices não adjacente (na figura são o a e c) não podem ser ligados, pois senão teríamos um ciclo e não uma árvore. Já com 4 vértices podemos tem um caminho ou uma estrela como a Figura 33 a seguir.

Figura 33 – Modelo de caminho ou estrela para árvore com 4 vértices.

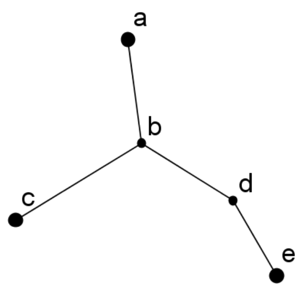


Fonte: Da autora, 2015.

Toda árvore possui um único caminho ligando dois vértices quaisquer. Ou seja, se G é um grafo onde para dois vértices quaisquer existe exatamente um caminho, logo G deve ser uma árvore.

Em um grafo, os vértices de grau 1 são chamados de **folhas**. As folhas são chamadas também de **vértices terminais** ou **vértices pendentes**.

Figura 34 – Exemplo de folhas.



Fonte: Da autora, 2015.

Os vértices a, c e e da Figura 34 são folhas. Toda árvore com pelo menos dois vértices possui no mínimo duas folhas. Além disso, toda árvore pode ter uma folha removida, que continuará sendo uma árvore desde que o número de vértices restantes seja maior ou igual a 1. O número de arestas será igual ao número de vértices menos um.

Finalizando, se temos um grafo G conexo com um número de vértices maior ou igual a 1, G será uma árvore se e somente se G tem exatamente n-1 arestas.

Informações mais detalhadas e demonstrações do conteúdo apresentado sobre grafos podem ser encontradas em (BOAVENTURA NETTO, 2006) e (BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ, 2009).

3 Problemas de minimização de caminhos e do caixeiro viajante

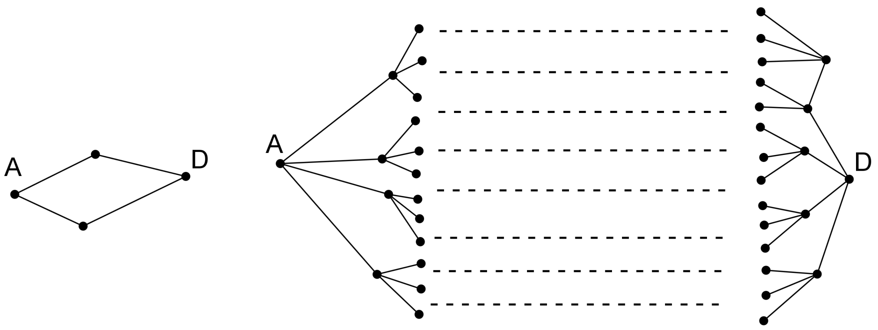
3.1 O Problema do Caminho Mínimo (PCM)

Os problemas de minimização de caminhos é um dos temas mais importantes na teoria dos grafos, tanto pela diversidade de situações em que podem ser utilizados como também por ser um conteúdo obrigatório nos estudos que exigem o conhecimento das distâncias em um grafo.

As aplicações utilizando o PCM envolvem problemas relacionados com sequências de decisões, em que se busca minimizar alguma variável envolvida (distâncias, tempo, perdas, ganhos, despesas) que se acumula linearmente ao longo de um caminho (roteamento, fluxo de rede, sequencias de tarefas, etc). Ou seja, as variável serão as ligações a serem percorridas de modo a obter o menor caminho possível. O objetivo é decidir quais variáveis escolher para se obter o menor tamanho de caminho. Passaremos a referenciar esse objetivo por *custo*. Ou seja, neste tipo de problema queremos minimizar nosso custo.

Achar um caminho mínimo é algo que pode inicialmente parecer simples. E é, desde que as escolhas sejam "poucas". Como num problema combinatório, para ir de A a D (conforme Figura 35), podemos ver o grau de complexidade da escolha quando se aumentam as possibilidades:

Figura 35 – Escolha do melhor caminho.



Fonte: Da autora, 2015.

No grafo da esquerda temos apenas duas opções de escolha para ir de A a D. Já no grafo da direita teremos inúmeras opções. O objetivo na solução de problemas desse tipo consiste em se encontrar o caminho de menor custo (de acordo com um critério dado) entre dois vértices quaisquer de um grafo, orientado ou não.

Situações que se enquadram como PCM podem ser resolvidas utilizando o processo conhecido como modelagem matemática. Conforme já descrito anteriormente, a modelagem matemática transforma uma situação problema em um modelo matemático. Esse modelo matemático (que pode ser fórmula, diagrama, tabela, algoritmo, etc) permitirá obter a solução para a situação problema apresentada.

Para isso, de forma resumida, temos três etapas. Primeiramente analisa-se a situação problema apresentada, obtendo as informações necessárias para a próxima etapa, a modelagem. Na modelagem é que ocorre a criação do modelo matemático. Define-se como serão utilizadas e processadas as informações levantadas na etapa anterior. E, finalizando, aplica-se o modelo criado para a resolução do problema analisado.

Apresentamos um modelo matemático para ser utilizado no cálculo de PCM. Esse modelo é o algoritmo em árvore. Como é um modelo, independente do PCM apresentado, ele pode ser utilizado.

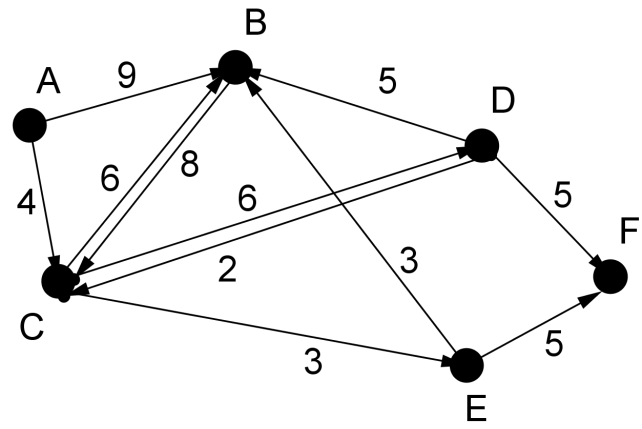
Neste algoritmo, analisa-se os caminhos possíveis a partir do vértice inicial para todos os outros nós da rede ligados a ele e escolhe-se o de menor valor. Repete-se esse procedimento sucessivamente até chegar ao último vértice. A solução é obtida construindo-se uma árvore de caminhos mínimos.

Dentre os algoritmos em árvore pesquisados, apresentamos o de Dijkstra. Esse algoritmo foi proposto pelo holandês Edsger Wybe Dijkstra em 1956 e publicado em 1959. Seu correto funcionamento necessita que os custos associados aos arcos sejam positivos. Na maioria dos problemas práticos isso já se aplica, pois em geral, os custos associados aos arcos são grandezas físicas como distância, custo do percurso, etc.

O algoritmo de Dijkstra é um dos método de solução de problemas de caminho mínimo mais conhecidos. Seu funcionamento consiste em definir um vértice de partida, calcular o caminho mínimo deste vértice para todos os demais vértices do grafo ligados a ele e escolher o que tiver o mínimo custo. E assim sucessivamente. O algoritmo é bastante simples e com um bom nível de performance, ou seja, consegue resolver o problema em um tempo viável.

Este algoritmo parte de um valor inicial e vai sucessivamente ajustando esta estimativa após cada análise. Sua lógica considera que um vértice estará fechado quando, ao analisar todos os vértices adjacentes ao vértice inicial, tiver sido obtido o caminho mínimo do vértice tomado como ponto de partida até o vértice adjacente escolhido. Veja a Figura 36 a seguir:

Figura 36 – Problema do caminho mínimo - primeira etapa.



Fonte: Da autora, 2015.

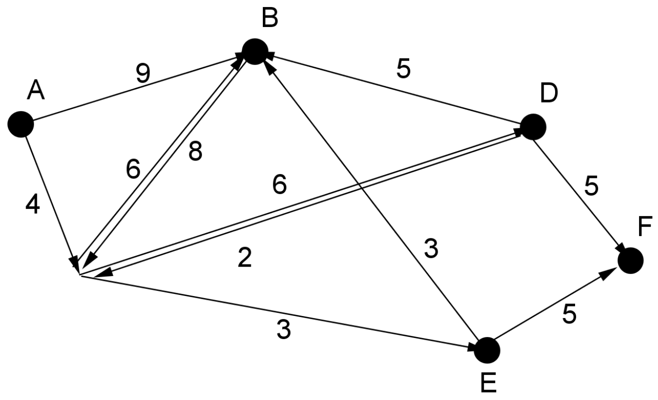
Supondo que temos de ir de A a F, usando o menor caminho. Os valores nos arcos são as distâncias entre os vértices dadas em kilometros (Km). Qual o melhor caminho a seguir?

Seguindo o algoritmo de Dijkstra, vamos iniciar pelo vértice A. Saímos de A, distância zero. Analisamos os percursos que podem serem feitos até os vértices adjacentes. No exemplo temos 9km até B e 4km até C. Logo o menor caminho é por C.

	A	B	C	D	E	F
Distância a partir de A	0	9	<u>**4**</u>			

Fechamos o vértice C. Significa que o grafo passa a ser analisado como se não existisse o vértice C (como se o caminho estivesse ligado direto).

Figura 37 – Problema do caminho mínimo - segunda etapa.



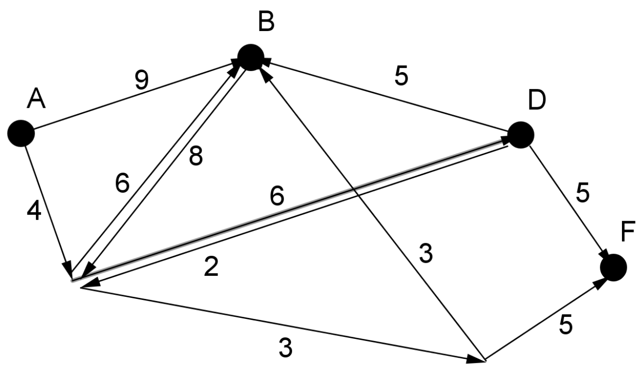
Fonte: Da autora, 2015.

Logo, a partir de A, podemos chegar aos vértices B, D e E. Temos duas opções até B que são 9km ou 10km. São 7km até E e 10km até D. Logo o menor caminho é por E.

	A	B	C	D	E	F
Distância a partir de A	0	9	<u>**4**</u>			
Distância a partir de A		9		10	<u>**7**</u>	

Fechamos o vértice E, passando a analisar como se também não existisse o vértice E (como se o caminho estivesse ligado direto em E).

Figura 38 – Problema do caminho mínimo - terceira etapa.



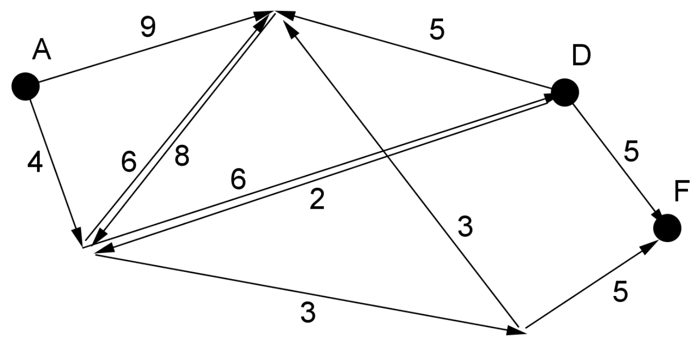
Fonte: Da autora, 2015.

Logo, saindo de A, podemos chegar em B (por três caminhos), D e F. A melhor opção é até B por $A \sim B$: 9km. As outras opções são 10 km (por $A \sim C \sim B$), 10km (por $A \sim C \sim E \sim B$), 10km até D e 12km até F. Logo o menor caminho é por B.

	A	B	C	D	E	F
Distância a partir de A	0	9	**4**			
Distância a partir de A		9		10	**7**	
Distância a partir de A		**9**		10		12

Passa-se a analisar como se também não existisse o vértice B.

Figura 39 – Problema do caminho mínimo - quarta etapa.



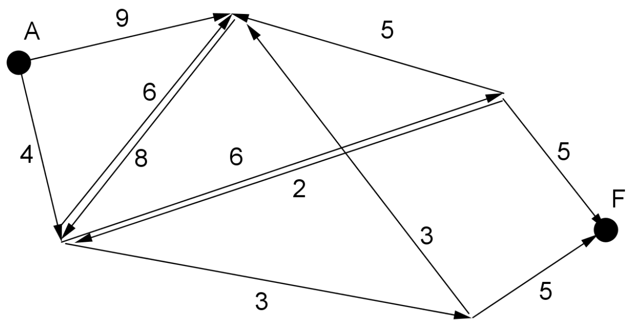
Fonte: Da autora, 2015.

Logo, a partir de A, pode-se chegar em D (dois caminhos) e F. Para D, um caminho tem 23km ($A \sim B \sim C \sim D$) e o outro 10km ($A \sim C \sim D$). Para F são 12km. Logo o menor caminho é para D, 10km.

	A	B	C	D	E	F
Distância a partir de A	0	9	**4**			
Distância a partir de A		9		10	**7**	
Distância a partir de A		**9**		10		12
Distância a partir de A				**10**		12

Passa-se a analisar como se também não existisse o vértice D.

Figura 40 – Problema do caminho mínimo - quinta etapa.



Fonte: Da autora, 2015.

Logo, a partir de A, pode-se chegar em F por três caminhos diferentes. Um caminho tem 28km ($A \sim B \sim C \sim D \sim F$), outra alternativa tem 15km ($A \sim C \sim D \sim F$) e a outra com 12km ($A \sim C \sim E \sim D$).

	A	B	C	D	E	F
Distância a partir de A	0	9	**4**			
Distância a partir de A		9		10	**7**	
Distância a partir de A		**9**		10		12
Distância a partir de A				**10**		12
Distância a partir de A						**12**

E assim, tem-se os caminhos mínimos a partir de A para cada vértice do grafo ficando com:

Vértice B – 9km

Vertice C – 4 Km

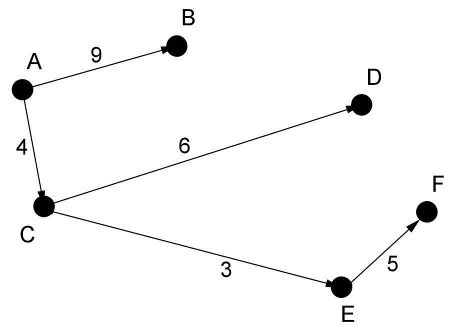
Vértice D – 10 km

Vértice E – 7km

Vértice F – 12 km.

O grafo representando somente os caminhos mínimos a partir de A é uma árvore conforme figura a seguir:

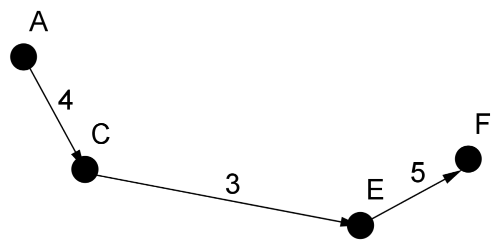
Figura 41 – Árvore de caminho mínimo.



Fonte: Da autora, 2015.

O menor caminho entre os vértices A e F passa pelos vértices $A \sim C \sim E \sim F$.

Figura 42 – Problema do caminho mínimo - menor caminho.

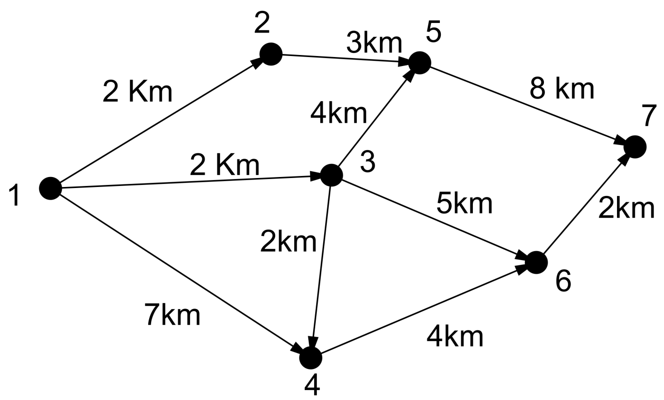


Fonte: Da autora, 2015.

Conforme o exemplo apresentado, o algoritmo de Dijkstra examina os sucessores de cada vértice para definir qual o próximo vértice do caminho será analisado.

Uma observação: em uma comparação que ocorra a mesma distância simultaneamente em dois ou mais vértices e essa for a menor distância entre todas as possíveis comparações, fecham-se todos os vértices que se enquadrarem no menor caminho encontrado. O próximo grafo exemplifica essa situação:

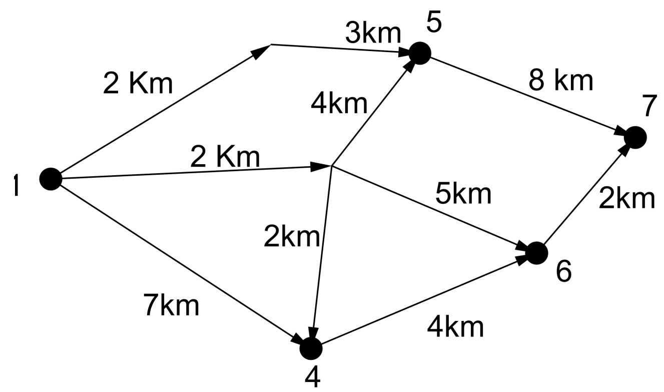
Figura 43 – PCM exemplo II - primeira etapa.



Fonte: Da autora, 2015.

Analisando os vértices adjacentes ao vértice inicial 1, temos que os vértices 2 e 3 possuem a mesma distância de 2km e o vértice 4 está a 7km. Logo, usando o algoritmo de Dijkstra, fechamos os vértices 2 e 3 e o grafo passa a ser analisado sem eles, conforme Figura 44.

Figura 44 – PCM exemplo II - segunda etapa.



Fonte: Da autora, 2015.

Caso, ao analisar a situação apresentada acima, houver a preferência por fechar apenas um vértice por vez, isso não mudará o resultado final. Supondo que se escolha o vértice 2 primeiramente. O que ocorrerá é que, na próxima etapa, o vértice 3 terá a menor distância e será fechado. E o problema continuará a ser analisado conforme Figura 44. Ou seja, é indiferente para a execução do algoritmo de Dijkstra fechar um vértice de cada vez ou os dois em uma mesma etapa, quando ocorrer a situação exemplificada.

Os exemplos de PCM mostrados e discutidos possuem sempre valores positivos em cada arco o que permite que os mesmos sejam resolvidos pelo algoritmo de Dijkstra e sua implementação computacional seja possível é eficiente. Maiores informações sobre essa implementação (algoritmo computacional), sua complexidade e características sugerimos (BOAVENTURA NETTO, 2006) .

3.2 O Problema do Caixeiro Viajante (PCV)

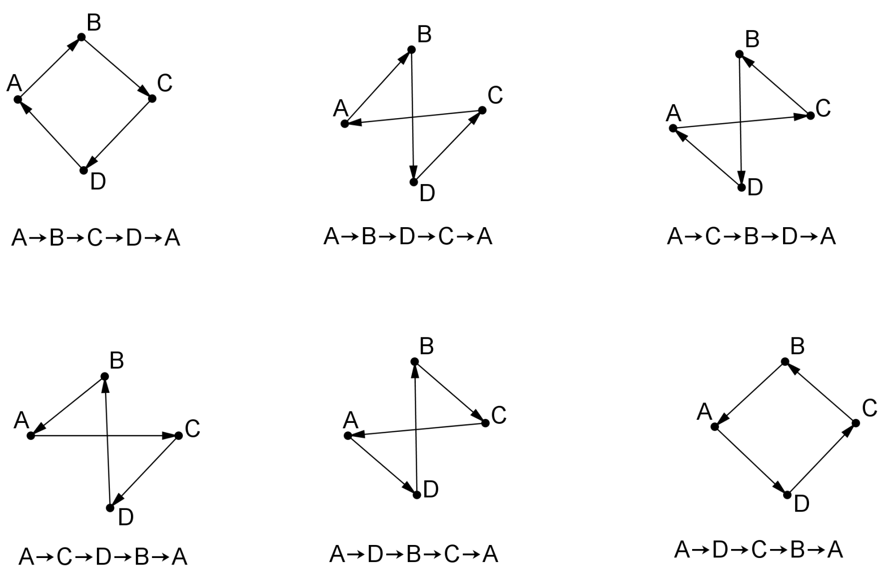
O PCV possui esse nome pois antigamente os vendedores, chamados caixeiros viajantes, visitavam várias cidades para vender suas mercadorias e depois retornavam a sua casa. Para essa situação os caixeiros viajantes buscavam um trajeto em que passariam uma única vez por cada cidade (em um grafo seriam os vértices) e retornariam ao ponto inicial com o menor custo possível.

O PCV aparece em várias situações práticas: roteiro de entregas de uma transportadora, rotas de voo, placas de circuitos impressos (perfuração dos pontos), entre outras aplicações. Podemos resumir esse tipo de problema a encontrar um ciclo hamiltoniano dentro do universo em estudo.

Para modelos em grafos completos com um número reduzido de escolhas (vértices) formando um ciclo hamiltoniano, é razoavelmente fácil encontrar uma solução ótima. Para ciclos hamiltonianos com um número grande de vértices não é possível, em um tempo viável, enumerar todas as possibilidades. É possível achar uma solução em tempo hábil, mas essa pode não ser a solução ótima, apenas uma solução viável. O tamanho do grafo influencia na dificuldade em obter a solução ótima para o problema.

Explicando melhor: partindo da cidade A, é necessário visitar três cidades (B, C, D) em uma viagem (existem conexões entre todas elas) e retornar ao final da viagem para A. As opções se resumiriam conforme Figura 45 a seguir:

Figura 45 – Grafos do problema do caixeiro viajante com quatro vértices.



Fonte: Da autora, 2015.

Cidade inicial: A. Saindo de A, temos três escolhas a fazer – B, C ou D. Escolhendo a segunda cidade temos 2 escolhas para serem feitas (supondo que se escolha B – primeira e segunda figura - tem-se as opções C ou D).

Após essa escolha, só restaria a última cidade a ser visitada. Assim, a quantidade de opções seria fatorial de $3! = 3x2x1 = 6$ opções. Já, se tivéssemos que visitar nove cidades, partindo da primeira teríamos nove escolhas. Para a segunda, oito. Para a terceira sete e assim sucessivamente. Ou seja, $9! = 362.880$ opções (todas as cidades são conectadas entre si). Um pequeno acréscimo no número de cidades visitadas (de três para nove) e o problema passou de 6 para 362.880 possibilidades de roteiro. Podemos ver que esse tipo de problema está diretamente ligado a análise combinatória na matemática.

Entrando um pouco na questão computacional para resolução do PCV, conforme o exemplo acima, dependendo do número de vértices que fazem parte do ciclo hamiltoniano que estamos analisando fica inviável uma solução via enumeração explícita, sendo necessário o uso de dispositivo eletrônico. O PCV é considerado computacionalmente NP (nondeterministic polynomial) e não existe ainda um algoritmo exato que o solucione, em um tempo aceitável, se o número de vértices for "grande".

Explicando melhor: para analisar a quantidade de passos necessários para que um algoritmo no computador consiga resolvê-lo vamos assumir que cada opção de escolha, ou seja, cada passo tenha o mesmo tempo computacional. Aparentemente, é fácil descobrir qual a melhor solução: basta calcular todas as possíveis combinações e selecionar a que apresentar o menor custo.

Para um pequeno conjunto de locais a serem visitados, isto é perfeitamente viável. Já em uma situação com um número maior de vértices, por exemplo 15, teríamos $15x14x13....3x2x1$= 1307674368000 opções a serem analisadas. Supondo (uma vez que cada computador pode ter um tempo de processamento diferente) que tenhamos um computador que consiga fazer 1000 análises a cada um milissegundo. Logo teríamos 1307674368 milissegundos para resolver o problema. Isso corresponde a aproximadamente 1307674 segundos, ou aproximadamente 21794 minutos. Ou ainda 363 horas. Em número de dias teríamos um problema que gastaria aproximadamente 15 dias para ser resolvido. O que significa que não é possível encontrar uma solução ótima em um tempo hábil.

Esse ainda é um dos grandes problemas em aberto da matemática. Não é nosso objetivo entrar nessa questão de características e tempo de resposta de um algoritmo, mas maiores informações sobre o assunto podem ser obtidas em (ZIVIANI, 2004).

Nossa intenção é apresentar uma possibilidade de solução para problemas desse tipo. Essa possibilidade é a utilização de heurística, um conceito que se usa muito na computação, e está diretamente relacionado com resolução de problemas. **Heurísticas** são propostas de solução, dentro de um tempo razoável, mas sem contudo garantir o valor ótimo da solução. Pode ser que a solução encontrada seja até ruim se comparada a solução ótima. Mas como não se conhece a solução ótima, temos uma boa solução para o problema. Muito utilizada na solução de problemas de difícil (ou inexistente) solução,como por exemplo, problemas do tipo caixeiro viajante.

Podem ser usados dois métodos de resolução para o PCV: o método exato, aplicando a problemas de fácil resolução ou de pouca complexidade e métodos heurísticos de resolução, que podem ser aplicados a problema em que é difícil verificar se a solução encontrada é ótima. Cabe lembrar que os métodos heurísticos buscam boas soluções sem garantia de uma solução ótima.

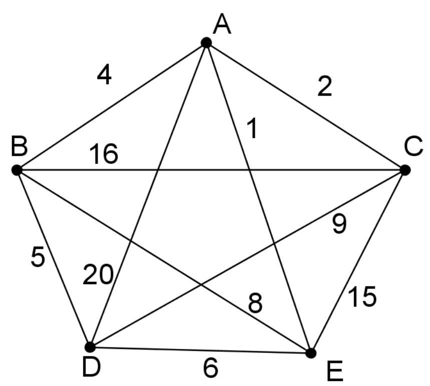
Heurísticas são usadas frequentemente na solução de inúmeros problemas e situações, e não só computacionalmente. A popularização desse conceito se deve ao matemático húngaro George Polya e seu livro "A arte de resolver problemas". Na resolução de problemas matemáticos é usada a heurística, sem muitas vezes darmos conta disso. Temos no livro de Polya uma sequência para resolução de problemas que segue exatamente a noção de heurística que é tentar soluções que se aproximem ao máximo da solução ótima.

Usaremos um exemplo simples de PCV para mostrar que o uso de heurísticas pode ajudar na solução de um problema. No próximo capítulo utilizaremos essa abordagem para propor situações com o objetivo de desenvolver nos alunos esse tipo de análise.

Dentre os tipos de heurísticas existentes, temos as **construtivas**, que partem de um ponto inicial que é alterado a cada escolha do próximo elemento segundo o objetivo procurado (minimizar custo, distância, tempo). E assim, a solução vai sendo construída passo a passo até chegar a uma solução aproximada desejável. Uma heurística construtiva muito utilizada na resolução do PCV é a **Heurística gulosa** (míope ou do vizinho mais próximo). Essa heurística busca em cada passo, dentre os vértices adjacentes, o de menor custo e escolhe esse como o próximo vértice. E assim sucessivamente até passar por todos os vértices e retornar ao ponto inicial.

Na Figura 46 a seguir, devemos sair do vértice A e, após passar uma única vez por todos os vértices, voltar ao vértice inicial.

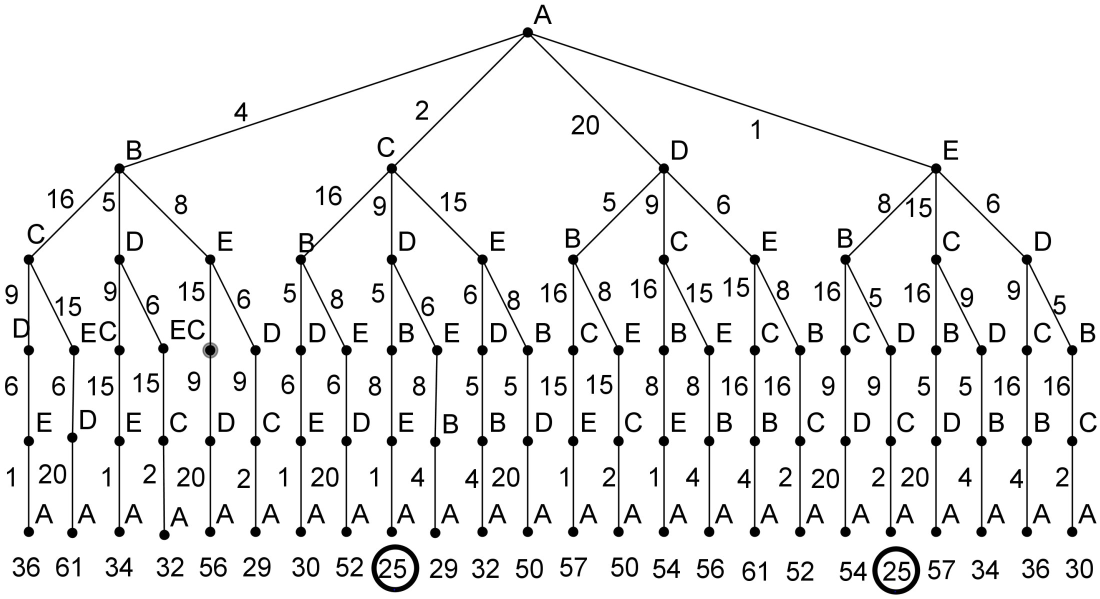
Figura 46 – Exemplo de um PCV.



Fonte: Da autora, 2015.

Buscando uma solução exata teríamos de analisar todas as possibilidades (neste caso 24 soluções):

Figura 47 – Exemplo de um PCV com solução ótima.

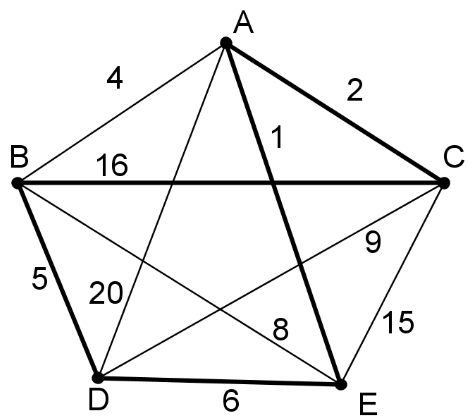


Fonte: Da autora, 2015.

A solução $A \sim C \sim D \sim B \sim E \sim A$ (é a mesma que $A \sim E \sim B \sim D \sim C \sim A$) é a do menor custo.

Se usássemos a heurística gulosa teríamos:

Figura 48 – Solução usando heurística.



Fonte: Da autora, 2015.

Passo 1- Iniciando por A, escolheríamos o caminho mais curto até o próximo vértice que seria o E – distância 1.

Passo 2- Do vértice E, o caminho mais curto até o próximo vértice é 6 – vértice D.

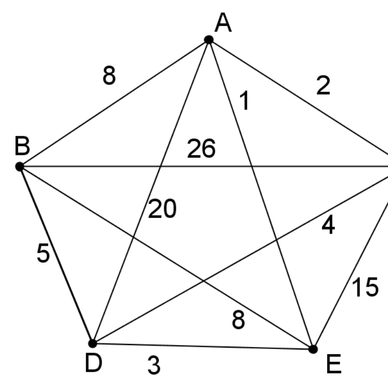
Passo 3- Do vértice D, o caminho mais curto até o próximo vértice é 5 – vértice B.

Passo 4- Do vértice B, apesar do caminho mais curto até A ser 4 é necessário passar por todos os vértices. Logo deve-se ir primeiro para o vértice C e depois para o A fechando o caminho.

O caminho usando a heurística gulosa seria $A \sim E \sim D \sim B \sim C \sim A$, totalizando 30. Não é a melhor opção (que é a solução ótima, 25), mas é uma boa resposta para o problema. Além de se chegar nessa resposta mais rápido do que no cálculo exato, onde teriam de ser analisadas 24 possibilidades, ao contrário dessa solução que analisou 4 passos. Muitas vezes a heurística gulosa não é a melhor opção pois, ao se escolher inicialmente os caminhos com os menores valores, pode-se, ao final do percurso, sobrar opções que terão de ser selecionadas e que seriam as piores em termos de valores.

Veja o exemplo do grafo seguir:

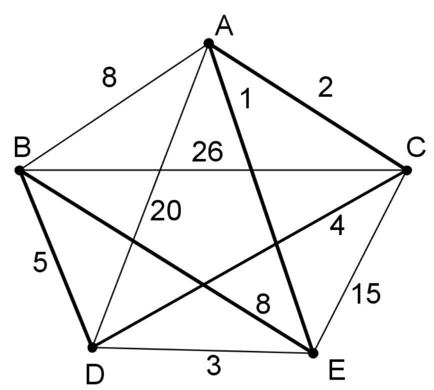
Figura 49 – Grafo para PCV.



Fonte: Da autora, 2015.

Resolvendo de forma exata temos o seguinte percurso $A \sim C \sim D \sim B \sim E \sim A$:

Figura 50 – Menor caminho para visitar todos os vértices.

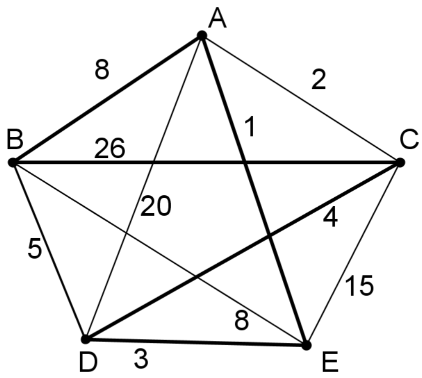


Fonte: Da autora, 2015.

O menor caminho encontrado foi 20, passando uma única vez por cada vértice.

Usando a heurística gulosa teríamos o seguinte percurso escolhido $A \sim E \sim D \sim C \sim B \sim A$:

Figura 51 – Resolução do PCV usando a heurística gulosa.

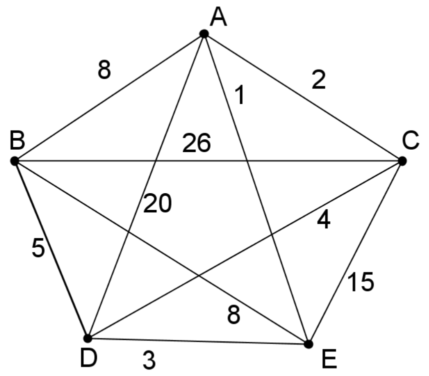


Fonte: Da autora, 2015.

Lembrando que a heurística gulosa escolhe dentre as opções possíveis a que atende o critério desejado, neste exemplo, o menor caminho. Assim, foram escolhidos inicialmente o caminho entre A e E, depois de E a D, em seguida de D a C. Neste ponto como ainda falta visitar o vértice B, fica obrigatório seguir esse caminho, que neste caso é o pior, com tamanho 26. Assim, o percurso usando a heurística gulosa somou 42. Mais que o dobro do valor ótimo.

Existem várias propostas de heurísticas para o PCV. Uma outra opção seria a da **Inserção mais próxima**. Ela consiste em achar um percurso partindo da escolha inicial de três vértices. Em seguida, após examinar todos os outros vértices e suas distâncias para os três vértices inicialmente definidos, selecionamos o vértice que esteja mais perto. Defini-se qual o melhor circuito (neste caso o menor) será encontrado com a inclusão desse novo vértice, de modo a ter um circuito hamiltoniano. Para isso deve-se analisar as opções possíveis para a retirada de uma das aresta dentre as que ligam os vértices iniciais e a inclusão do novo vértice, formando um novo circuito. Em seguida, repete-se essa analise até que todos os vértices sejam visitados. Veja, passo a passo, como utilizar o processo descrito acima:

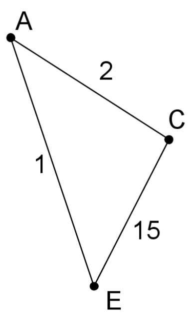
Figura 52 – Resolução do PCV usando a heurística inserção mais próxima.



Fonte: Da autora, 2015.

Primeiro passo: escolha de três vértices:

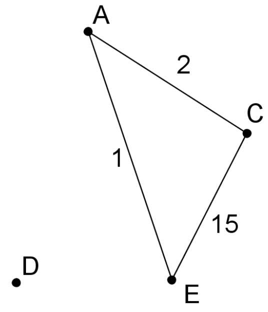
Figura 53 – Heurística da inserção mais próxima - primeiro passo.



Fonte: Da autora, 2015.

Segundo passo: determinação do vértice mais próximo e análise do circuito para definição de qual aresta deve ser retirada dentre as presentes na Figura 53.

Figura 54 – Heurísitca da inserção mais próxima - segundo passo.



Fonte: Da autora, 2015.

O vértice D é o que possui a menor distância, neste caso 3, até um dos três vértices escolhidos inicialmente. Essa distância corresponde a aresta que liga o vértice D ao vértice E. As outras distâncias são:

Vértice $B \sim A = 8$

Vértice $B \sim C = 26$

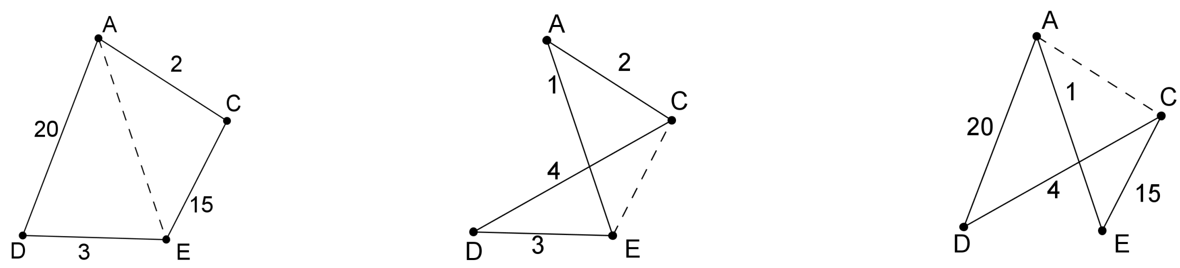
Vértice $B \sim E = 8$

Vértice $D \sim A = 20$

Vértice $D \sim C = 4$

Essa é a análise a ser feita para determinar o próximo vértice a ser escolhido. Após essa definição, temos três opções a analisar:

Figura 55 – (a) Percurso: 40, (b) Percurso: 10 e (c) Percurso: 40.



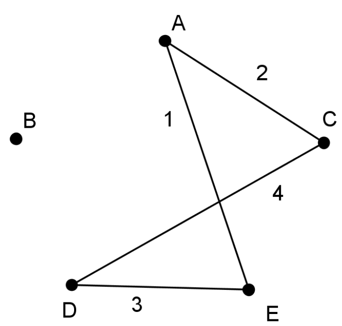
(a) (b) (c)

Fonte: Da autora, 2015.

O menor percurso é a opção b da Figura 55 . Logo, retiramos a aresta $C \sim E$.

Terceiro passo: Determinação do próximo vértice a ser incluído e análise do novo circuito que poderá ser formado com a retirada de uma aresta da próxima figura.

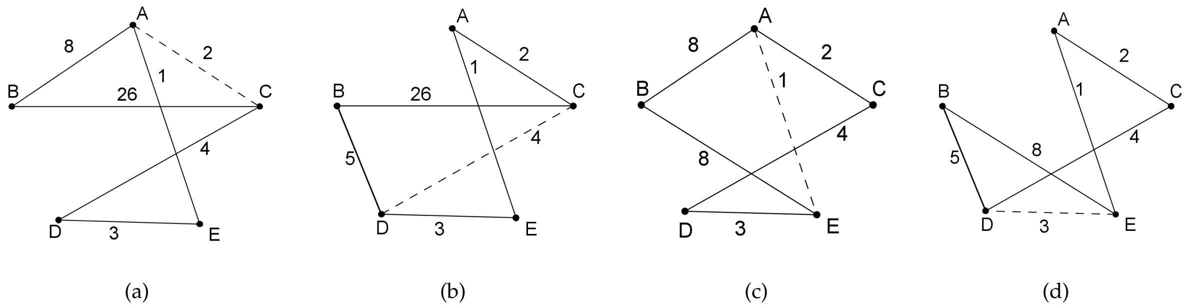
Figura 56 – Heurísitca da inserção mais próxima - terceiro passo.



Fonte: Da autora, 2015.

Como só falta inserir o vértice *B* ele é inserido. A análise fica por conta de qual aresta retirar das quatro que temos na Figura 56

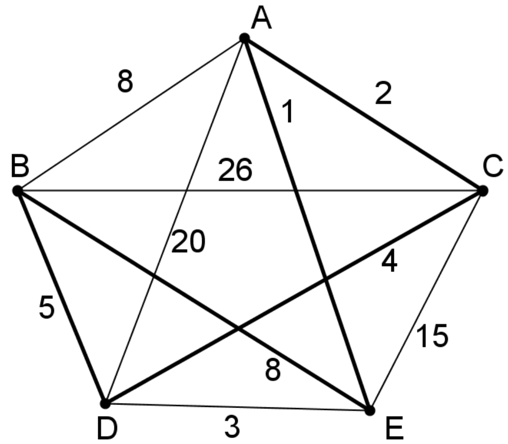
Figura 57 – (a) Percurso *a* 42, (b) Percurso *b* 37, (c) Percurso *c* 25 e (d) Percurso *d* 20.



Fonte: Da autora, 2015.

A melhor opção será *d*, logo tem-se o seguinte percurso:

Figura 58 – Resultado final usando a heurística da inserção mais próxima.



Fonte: Da autora, 2015.

Veja que o percurso procurado somou 20. Uma resposta bem melhor do que a que obtivemos utilizando a heurística gulosa, que foi 42. Uma coincidência foi que com a heurística da inserção mais próxima se chegou ao mesmo resultado feito pelo cálculo exato. Mas isso não é regra.

Existem outras heurísticas para o PCV, e outras ideias podem surgir na busca por uma solução próxima da exata. Ao tentar resolver um problema buscando ideias alternativas, conseguimos muitas vezes encontrar um caminho que chegue a solução. Conforme (POLYA, 2006)

> ao resolvermos problemas matemáticos podemos prever que um certo teorema, ou uma resolução de um problema já resolvido pode ajudar na solução atual. Mas não prevemos essas coisas com certeza. Sem considerações que sejam apenas plausíveis e provisórias jamais encontraríamos a solução. Isso é um raciocínio heurístico na resolução de problemas.

Essa forma de pensar é inerente ao ser humano e deve ser desenvolvida com os alunos na resolução de problemas, pois estimula o raciocínio, o uso de conteúdos diversificados e a troca de ideias.

4 Aplicações de grafos para o ensino médio

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Esta competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos [...] Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas, oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.

Além disso

> Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio privilegia o tratamento de situações-problema preferencialmente tomadas em contexto real.

Conforme as Orientações para o Ensino Médio propostas pelo MEC

> se por um lado a ideia de situação-problema pode parecer paradoxal, pois como o aluno pode resolver um problema se ele não aprendeu o conteúdo necessário à sua resolução? Por outro lado, a história da construção do conhecimento matemático mostra-nos que esse mesmo conhecimento foi construído a partir de problemas a serem resolvidos.

Uma das novas propostas de ensino da matemática é que a mesma utilize modelagem matemática. A **modelagem matemática** transforma problemas reais em problemas matemáticos. E, após essa transformação, passa-se para a resolução e interpretação dos resultados.

Vários estudos e pesquisas mostram que o uso da modelagem matemática desenvolve nos alunos habilidades em solucionar problemas, construindo significado para os conceitos matemáticos aprendidos. Além disso, essa forma de aprendizado exige uma mudança de postura nos alunos que passam de meros ouvintes a participantes ativos. Eles desenvolverão habilidades de interpretação de texto, raciocínio, lógica, argumentação entre outras. Se tornarão mais confiantes, criativos e habilidosos na resolução de problemas.

Propomos que o PCM e o PCV sejam resolvidos desse modo. Acreditamos que ao trabalhar com os alunos esses problemas através da modelagem matemática haverá um ganho significativo na formação dos alunos, além de um maior interesse e gosto pelas aulas de matemática.

Para implementar a modelagem matemática Maria Salett Biembengut, autora do livro Modelagem Matemática no Ensino, sugere que seja feito inicialmente um diagnóstico no intuito de conhecer a realidade dos alunos: situação socioeconômica, tempo disponível para realizar atividades extraclasse e o conhecimento matemático que possuem. Com isso, espera-se conseguir propor uma atividade que possa efetivamente ser desenvolvida pelos alunos e que eles tenham interesse em participar, uma vez que nesse processo de ensino os alunos são os autores principais. Passando para a aplicação da modelagem matemática, a autora sugere os seguintes passos:

- Escolha do tema ou modelo matemático: Definir um tema para que seja possível desenvolver o conteúdo programático planejado além de despertar o interesse e a motivação dos alunos.

- Interação com o tema: reconhecimento da situação-problema proposta e esclarecimentos para uma melhor compreensão do problema e do que está sendo proposto. Nesse momento deve-se fazer um estudo para melhor entendimento do problema, levantar algumas questões para serem respondidas sobre o tema escolhido. Enfim, conhecer todos os aspectos necessários do problema para se passar para o próximo passo.

- Planejamento do trabalho a ser desenvolvido: Nessa etapa os alunos estudarão o problema, examinando os fatos apresentados e propondo soluções, através da formulação de hipóteses. Nessa etapa também serão testadas as soluções propostas e escolhida a que for considerada mais conveniente.

- Conteúdo matemático: Os modelos apresentados para a solução do problema utilizam conteúdos matemáticos já aprendidos e que estarão sendo reforçados pela modelagem. Pode ocorrer também de algum modelo proposto ter conteúdos ainda não aprendidos. Nesses casos é necessário apresentar essa teoria para que os alunos finalizem o problema proposto.

- Validação e extensão dos trabalhos desenvolvidos: nessa fase as soluções testadas devem ser avaliadas para verificar se os resultados encontrados então corretos ou não, se podem ser melhorados ou não.

A tendência é que os alunos formulem modelos que se restrinjam a conteúdos matemáticos já aprendidos. Buscando novos conhecimento matemáticos, o professor pode orientar os alunos para soluções que necessitarão de conteúdos não aprendidos ainda. Isso se aplica a problemas envolvendo teoria de grafos, bem como PCM e do PCV.

Para maiores orientações sobre modelagem matemática sugerimos (BIEMBENGUT; HEIN, 2014) e (BASSANEZI, 2010).

Neste contexto apresentamos problemas para serem desenvolvidos no ensino médio, com vários níveis de complexidade. Em sua grande maioria eles podem ser resolvidos sem o uso da teoria de grafos, apenas com conhecimentos já adquiridos em outros conteúdos apresentados no ensino fundamental e médio. Mas o conhecimento da teoria certamente tornará a resolução mais direta, simplificada e interessante.

Inclusive, o aprendizado desse conteúdo no ensino básico (fundamental e médio) está presente em várias dissertações (listamos algumas apresentadas no Profmat) mostrando a viabilidade prática dessa teoria:

1- Grafos e aplicações para o ensino médio.

2- Introdução aos Grafos no ensino médio.

3- Grafos, a fórmula de Euler e os poliedros regulares.

4- Introdução à Teoria dos Grafos.

5- Uma abordagem para o ensino de teoria dos grafos no ensino médio.

6- Modelagem e resolução de problemas por meio de grafos: aplicações no ensino Básico.

7- Possibilidades em grafos hamiltonianos.

8- Grafos como ferramenta para o ensino de matemática.

9- De grafos a emparelhamentos: uma possibilidade viável de encantar-se com a matemática.

10- Um estudo introdutório da teoria de grafos através de matrizes.

11- Grafos e aplicações em sala de aula.

12- Atividade de modelagem matemática envolvendo a teoria dos grafos no ensino médio.

13- Uma abordagem da teoria de grafos no ensino médio.

14- Teorema de Euler para grafos planares.

Essas dissertações abordam o uso da teoria de grafos com enfoques e objetivos variados. O diferencial da nossa proposta é a utilização de ferramenta computacional na resolução do PCM e a resolução do PCV utilizando heurísticas. Mas todas elas tem em comum com a nossa o entendimento de que esse conteúdo deve ser inserido no ensino da matemática para a educação básica.

4.1 Exercícios baseados no Projeto Fundão

Apresentamos a seguir alguns exemplos de exercícios para serem resolvidos usando a teoria de grafos. Esses exercícios foram baseados no livro "Grafos: Jogos e Desafios" que faz parte da coleção do Projeto Fundão.

Esse projeto surgiu há 30 anos quando uma equipe de professores do Instituto de Matemática da Univerdidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ e alunos de licenciatura, juntamente com professores da rede de ensino fundamental e médio do estado do Rio de Janeiro começaram a trabalhar em prol da melhoria do ensino da matemática e pela valorização do professor.

São linhas de ações no Projeto Fundão a participação em eventos de Educação Matemática e o oferecimento de programas de atualização a escolas e sistemas municipais e estaduais de ensino.

O Projeto Fundão tem 15 livros publicados, dentre eles esse sobre grafos, onde são apresentados vários exercícios.

Conforme consta no site http://www.projetofundao.ufrj.br acessado em 11 de julho de 2015

> Os livros publicados pelo Projeto, a partir de 1996, levam a todas as regiões do país o produto dos trabalhos dos grupos temáticos, seguindo os seus princípios norteadores. Assim, as atividades neles propostas, além de se apoiarem nas pesquisas existentes sobre o assunto, foram testadas em sala de aula dos professores multiplicadores, tornando-as adequadas à realidade da escola e às condições de trabalho dos professores.

Seguem atividades baseadas nos exercícios apresentados no livro "Grafos: jogos e desafios" para serem realizadas com os alunos:

- **Exemplo 1)**

  Sábado é o dia que Dona Maria tem para fazer compras no supermercado, sacolão e ir ao cabeleireiro. Todos os lugares (sua casa, supermercado, sacolão e cabeleireiro) são ligados entre si por ruas diferentes e cada rua liga apenas dois lugares por vez. Pensando em ganhar tempo, Dona Maria quer fazer um trajeto em que passe uma única vez em cada rua (passando por todas elas) para ir ao supermercado, sacolão e salão de beleza, retornando a sua casa no final do percurso. Faça um esboço do problema, representando as ruas e os locais a serem visitados. É possível Dona Maria passar por todas as ruas uma única vez e retornar a sua casa?

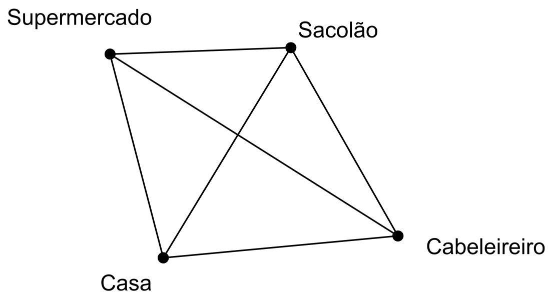
  – Atividade 1: Os alunos deverão primeiro representar graficamente a situação. E depois testar as combinações de trajetos que conseguirem identificar;

  – Atividade 2: Os alunos deverão representar novamente a situação descrita acima em forma de grafo. Analisar o grau dos vértices para responder se é ou não possível fazer o percurso pedido no exercício.

  – Orientações: *Primeiramente deve-se deixar os alunos resolverem a atividade 1. Analisar com eles as respostas encontradas. Após a resolução da atividade 1 é possível introduzir a parte inicial de grafos. Explicar o conceito de vértices, arestas, grau de um vértice e grafo euleriano (condições para ser euleriano ou para ser apenas trilha euleriana). Dar exemplos de grafos eulerianos e não eulerianos. E após essa introdução inicial, pedir aos alunos que resolvam a atividade 2.*

  – Uma solução: Seguindo o que foi pedido no exercício um, temos na Figura 59 abaixo um exemplo que representa o grafo da situação descrita.

Figura 59 – Uma solução - exercício 1.



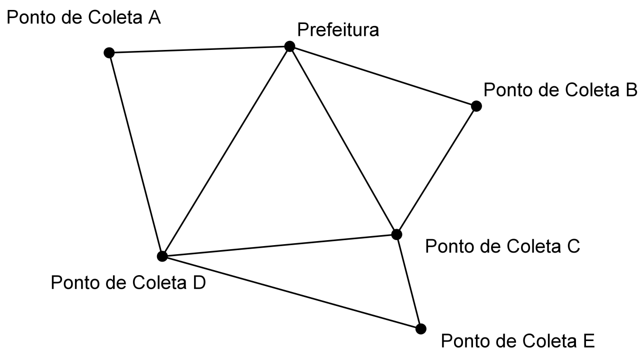
Fonte: Da autora, 2015.

- Observações: Cada local no grafo foi representado por um vértice e cada vértice está ligado aos outros por apenas um caminho, neste caso, uma aresta. Seguindo a proposta feita para esse exercício, os alunos poderão analisar se o grafo é ou não euleriano (neste exemplo não é) e chegar a resposta que não tem como passar por todas as arestas uma única vez e voltar ao ponto inicial. Outras situações podem ser propostas para os alunos desenharem e analisarem se é possível ou não percorrer uma única vez cada aresta e retornarem ao ponto de partida. Essa atividade ainda pode ser explorada, apresentando um grafo não euleriano e pedindo aos alunos que o analise e o transforme em euleriano.

- **Exemplo 2)**

  Toda segunda feira é dia de reciclagem de plástico na cidade. Além de passar em todas as casas, são visitados também os pontos de coleta distribuídos conforme Figura 60:

Figura 60 – Exemplo 2.



Fonte: Da autora, 2015.

Buscando economizar combustível, é possível encontrar um caminho que passe por todas as ruas uma única vez e por todos os pontos de coleta e retorne a prefeitura?

- Atividade 1: Os alunos deverão testar as combinações de trajetos e descobrir se é possível ou não fazê-lo como se pede.

- Orientações: *Os alunos deverão testar os percurso possíveis seguindo as regras do exercício. Com esse exercício é possível mostrar a questão dos grafos eulerianos quando todos os vértices são pares (o que permite achar o percurso procurado). Após a resolução do exercício pode-se apresentar o conceito de grafo Hamiltoniano, dando exemplos para um entendimento melhor. E em seguida pedir aos alunos para verificar se o grafo apresentado no exercício é hamiltoniano.*

- Uma solução: O percurso procurado deve passar por todas as ruas (arestas) uma única vez, por todos os vértices (não necessariamente uma única vez) e retornar a prefeitura. Na situação proposta o aluno verificará as condições para o grafo ser euleriano e hamiltoniano. Logo, pode-se passar por todas as arestas uma única vez mas não tem como passar pelos vértices uma única vez apenas. São vários os percursos que podem ser feitos para responder o exercício proposto. Listamos duas possibilidades:

  a) Prefeitura $\sim$ Ponto de coleta B $\sim$ Ponto de coleta C $\sim$ Ponto de coleta E $\sim$ Ponto de coleta D $\sim$ Ponto de coleta A $\sim$ Prefeitura $\sim$ Ponto de coleta D $\sim$ Ponto de coleta C $\sim$ Prefeitura.

  b) Prefeitura $\sim$ Ponto de coleta A $\sim$ Ponto de coleta D $\sim$ Prefeitura $\sim$ Ponto de coleta C $\sim$ Ponto de coleta D $\sim$ Ponto de coleta E $\sim$ Ponto de coleta C $\sim$ Ponto de coleta B $\sim$ Prefeitura.

- Observações: Podem ser propostas outras atividades como determinar quantas são as possibilidades de solução para um grafo, através da análise combinatória. E depois determinar quais são essas soluções.

• **Exemplo 3)**

O jogo de dominós é muito interessante para mostrar uma aplicabilidade simples da teoria de grafos.

- Atividade 1: Comece propondo uma rodada de dominós com os alunos, estando completo o jogo. Ou seja, com as 28 peças conforme Figura 61 a seguir:

Figura 61 – Jogo de dominós completo.

							1	1	1	1	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	2

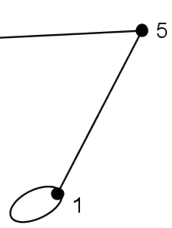
2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	5	5	6
3	4	5	6	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6

Fonte: Da autora, 2015.

Cada número aparece exatamente 8 vezes. Os alunos jogarão e não sobrarão peças. Retire as peças 0-1, 0-2, 0-3. Peça aos alunos que joguem e verifiquem que sobrarão peças sem serem usadas. Agora peça a eles que tirem também a peça 1-2 e joguem novamente. Mas já os avisem que dará certo, e que nas pontas estarão as peças com os números 0 e 3. A questão é: qual a explicação para sobrar ou não peças no jogo de dominó?

– Orientações: *Após os alunos jogarem e confirmarem sua afirmação, pergunte como você pode afirmar isso. Peça a eles que desenhem um grafo representando o jogo de dominó após a retirada das peças 0-1, 0-2, 0-3 e 1-2. Cada peça de dominó representa dois vértices e uma ligação. A peça que tiver o mesmo número, como 1-1 deverá ser representada como um laço. Conforme Figura 62 a seguir, representamos as peças 0-5, 1-1 e 1-5:*

Figura 62 – Grafo representando peças de dominó.



Fonte: Da autora, 2015.

Após os alunos desenharem a representação dos dominós como grafos, peça a eles que verifique se ele é euleriano ou não. Se for, não sobrarão peças quando se jogar dominó.

– Uma solução: Após o desenho do grafo e utilizando a teoria apresentada sobre grafos eulerianos é possível ao aluno concluir o porquê de não sobrar peças. O número de vezes que os números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 aparecem nas peças de dominó são 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8 respectivamente. Ou seja, o grafo possui uma trilha euleriana, mas não é Euleriano.

– Observações: Esse exercício é outra proposta para utilizar a teoria dos grafos eulerianos. Conhecendo a teoria não há maiores dificuldade na sua solução. Por isso sugerimos que essa atividade venha após a primeira apresentada, pois assim o aluno já terá um conhecimento prévio da teoria e das condições para se ter um grafo euleriano. O objetivo é que ele consiga associar uma atividade prática a um conteúdo teórico.

Podem ser propostas outras atividades utilizando os dominós. Uma sugestão seria o professor retirar algumas peças e pedir aos alunos que determinem se é necessário ou não retirar mais alguma peça de modo que não sobre peças ao final do jogo. E qual ou quais peças devem ser retiradas.

- **Exemplo 4)**

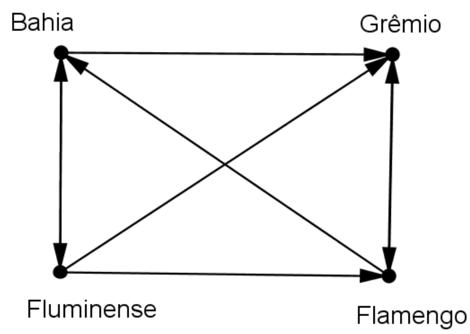
Vamos usar grafos associado a campeonato de futebol? Verificando a tabela dos jogos do campeonato brasileiro temos:

Cruzeiro	3 X 2	São Paulo
Atlético	2 X 1	Vasco
São Paulo	0 x 0	Atlético
Vasco	2 x 1	Cruzeiro
Cruzeiro	2 x 2	Atlético
São Paulo	1 x 0	Vasco

– Atividade 1: Represente em grafos os jogos do campeonato, sendo os vértices os times participantes. Quando houver vitória em um jogo, os arcos sairão do perdedor para o ganhador. Quando houver empate o arco deve ter duplo sentido. Quem irá passar para a próxima fase sabendo que cada vitória vale 2 pontos para o vencedor e cada empate 1 ponto para cada time.

– Atividade 2: Após a realização desse exercício, veja o desenho a seguir e diga quais foram os jogos, quantos pontos cada time contabilizou e quem foi para a próxima etapa:

Figura 63 – Exemplo 4.

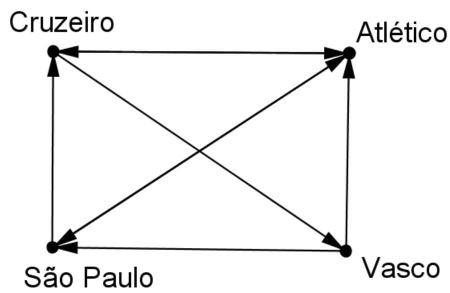


Fonte: Da autora, 2015.

– Orientações: *Para essas atividades, os alunos já devem saber os conceitos iniciais de grafos. Por isso sugerimos que os exemplos propostos sejam aplicados na ordem sugerida. Após a realização da atividade 1 é importante verificar se todos entenderam o problema proposto e se as regras foram respeitadas na representação do grafo pedido. Apenas após a correção da atividade 1 deve-se passar para a atividade 2 para que todos os alunos possam efetivamente finalizarem esse exemplo com total aproveitamento.*

– Uma solução: Representando através de grafos a atividade 1, temos o seguinte grafo:

Figura 64 – Solução Atividade 1 - Exemplo 4.



Fonte: Da autora, 2015.

Olhando para o grafo fica fácil analisar o vencedor da primeira etapa pelas setas que chegam e saem do vértice. No vértice representando o time Atlético, chegam 3 setas e dessas 3, duas saem. As que só chegam somam dois pontos e as que chegam e saem somam 1. Totalizando 4. Nos vértices São Paulo e Cruzeiro chegam duas setas, sendo uma delas bidirecional. E em ambos os vértices também saem uma seta. Logo, São Paulo e Cruzeiro contabilizam 3 pontos (uma vitória, um empate e uma derrota). No vértice Vasco chega uma seta e saem duas, totalizando então 2 pontos, uma vitória. Logo, o time Atlético é o que passará para a próxima fase.

A solução para a atividade 2 será:

Bahia	0 X 1	Grêmio
Bahia	1 X 0	Flamengo
Bahia	0 x 0	Fluminense
Grêmio	1 x 0	Fluminense
Grêmio	0 x 0	Flamengo
Flamengo	1 x 0	Fluminense

Veja que neste problema não se levou em consideração o resultado do saldo de gols nas partidas. Apenas os resultados: vitória (1 X 0), empate (0 X 0) e derrota (0 X 1).

A pontuação de cada time será:

Bahia - 3 pontos

Fluminense - 1 ponto

Flamengo - 3 pontos

Grêmio - 5 pontos

Grêmio seria o vencedor para a segunda fase.

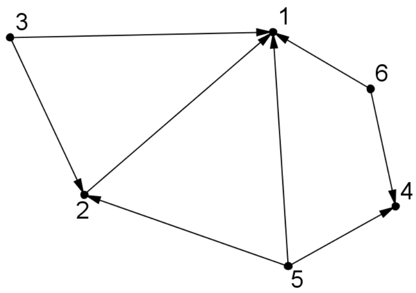
– Observação: Pode-se propor as atividades 1 e 2 com mais times participando.

- **Exemplo 5)**

  Vamos utilizar sequências de números?

  – Atividade 1: Veja como a Figura 65 representa a sequência (3, 5, 2, 6, 1, 4). O grafo respeitou a ordem que os números aparecem. Isto é, só se compara um número com o que o sucede na sequência. Por exemplo, o terceiro número da sequência só será comparado com os próximos da sequência, quarto, quinto e sexto. E serão ligados no grafo os números que são menores que ele (a direção da arco aponta para o número menor)

Figura 65 – Grafo representando o Exemplo 5.

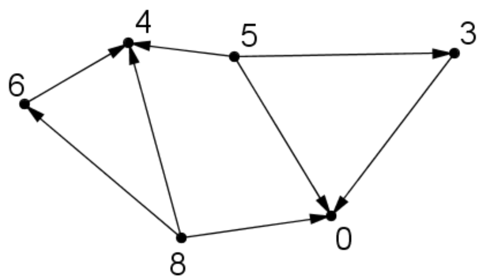


Fonte: Da autora, 2015.

Desenhe o grafo representando a sequência $(\frac{3}{5}, \frac{4}{4}, \frac{2}{4}, \frac{5}{15}, \frac{4}{9})$. Siga as regras explicadas anteriormente.

- Atividade 2: Vamos fazer o oposto. Dado o grafo, analise-o e a seguir escreva a sequência respeitando as mesmas regras descritas na atividade 1:

Figura 66 – Exemplo 5.

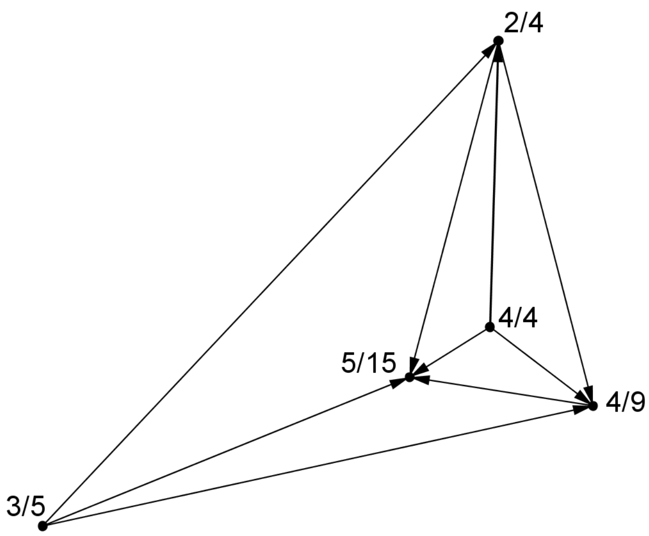


Fonte: Da autora, 2015.

- Orientações: *Deixe os alunos analisarem o exemplo apresentado na atividade 1 e veja se todos entenderam a solução e a regra pedida. Explique detalhadamente: na sequencia dada (*3, 5, 2, 6, 1, 4*) o número* 3 *só é ligado aos números* 2 *e* 1 *que vem após ele na sequência. Assim, quando falamos "ligado"significa que sai um arco do* 3 *para os números* 2 *e* 1 *indicando que eles são menores que o* 3 *e estão após ele na sequência analisada. O número* 5 *que vem após o* 3 *só foi ligado ao* 2, 1 *e* 4 *que são menores que ele e vem após ele na sequência. O número* 2 *só é ligado ao número* 1 *que é menor que ele e vem após ele na sequência. O* 6 *é ligado apenas ao* 1 *e* 4 *pois são menores que ele e estão após ele na ordem. O* 1 *não é ligado (sair um arco dele para outro número) pois não há um número menor que ele e que esteja depois dele na sequência. Da mesma forma o* 4 *que é o último número da sequência. Logo não há ligação saindo dele para nenhum outro. Veja que pelo desenho é fácil ver que os números que apenas chegam setas ou são menores de todos ou estão no final da sequência. Após essa explicação* *detalhada, deixe que os alunos resolvam a atividade 1. Corrija a atividade 1 para depois pedir aos alunos que passem para a atividade 2.*

– Uma solução: Para a sequência pedida $(\frac{3}{5}, \frac{4}{4}, \frac{2}{4}, \frac{5}{15}, \frac{4}{9})$ temos a seguinte solução, que só é possível após comparar todos os números envolvidos e verificar que:
$\frac{4}{4} > \frac{3}{5} > \frac{2}{4} > \frac{4}{9} > \frac{5}{15}$
Após essa análise, é possível representar a sequência em um grafo, respeitando as regras do exercício proposto: só pode haver ligação de um número com os outros da sequência que sejam menores que ele e que apareçam após ele:

Figura 67 – Solução do exercício proposto no exemplo 5.



Fonte: Da autora, 2015.

Na atividade 2 proposta, o aluno deverá analisar todos os vértices para poder determinar as possibilidades para a sequência procurada, seguindo as regras pedidas:

O vértice 6 está antes do vértice 4 e após o vértice 8: (8, 6, 4)

O vértice 4 está após os vértices 6, 5 e 8: (5, 8, 6, 4). Veja que como o vértice 8 não se liga ao 5, ele não pode estar antes do 5. O mesmo raciocínio para o vértice 6 em relação ao vértice 5.

O vértice 5 está antes dos vértices 4, 3 e 0: (5, 8, 0, 3, 6, 4). Como os vértices 6 e 4 não se ligam aos vértices 0 e 3, logo esses vértices estão antes do vértice 6.

O vértice 8 está antes dos vértices 6, 4 e 0 mas não antes do vértice 3: (5, 3, 8, 0, 6, 4)

O vértice 0 está após os vértices 5, 3 e 8 e antes dos vértices 6 e 4: (5, 3, 8, 0, 6, 4)

O vértice 3 está após o vértice 5 apenas. Logo a sequência procurada é (5, 3, 8, 0, 6, 4).

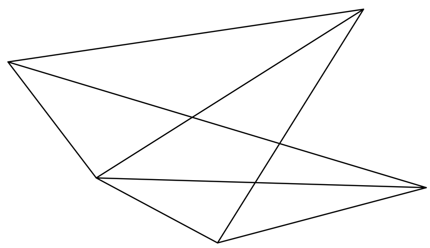
- Observação: Esse exemplo proposto desenvolve o raciocínio lógico tanto ao desenhar o grafo pedido quanto na análise do desenho já feito. Também é uma maneira diferente de exercitar um das dificuldades dos alunos que é a comparação entre frações.

- **Exemplo 6)**

  Definindo as cores de um grafo.

  - Atividade 1: Analisando a figura a seguir, verifique qual a quantidade mínima de cores que são necessárias para a colorir, respeitando a seguinte regras: regiões adjacentes (que possuem lados em comum) devem ter cores diferentes:

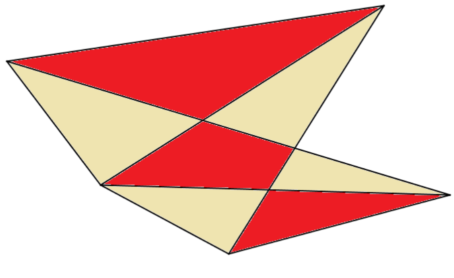
Figura 68 – Exemplo 6.



Fonte: Da autora, 2015.

  - Atividade 2: Transforme a Figura 68 em um grafo.
  - Orientações: *Deixe os alunos resolverem a atividade 1, verificando se estão respeitando a regra pedida. Já para resolverem a atividade 2, deixe inicialmente que os alunos proponham como representar a figura em um grafo. Caso ache necessário, sugira que as regiões fechadas na figura serão os vértices e a adjacência entre regiões serão representadas pelas arestas ligando os vértices.*
  - Uma solução: Na atividade 1 proposta, é possível colorir a Figura 68 usando apenas duas cores conforme Figura 69.

Figura 69 – Solução da atividade 1 - Exemplo 6.



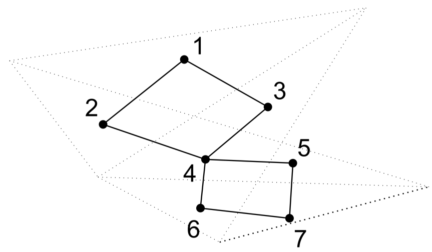
Fonte: Da autora, 2015.

Já a solução para a atividade 2, transforma a figura em grafo e faz uma correspondência direta:

Número de regiões = Número de vértices

Ligação entre os vértices (arestas) = Regiões adjacentes

Figura 70 – Solução da proposta para o exemplo 6.



Fonte: Da autora, 2015.

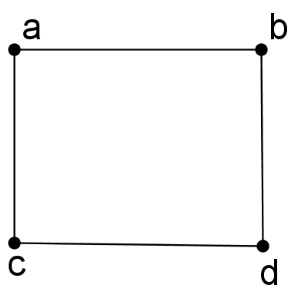
Observação: Esse exemplo pode ser explorado com o uso de mapas, tanto na questão da quantidade de cores mínimas para se colorir o mapa, quanto na representação do mapa em forma de grafo. Pode-se mostrar alguns mapas e alguns grafos e pedir aos alunos que identifiquem qual grafo representa qual mapa. Uma atividade interdisciplinar.

- **Exemplo 7)**

  Construindo matrizes.

  - Atividade 1: Analise o grafo a seguir e veja a matriz criada:

Figura 71 – Exemplo 7 - Grafo para determinação de uma matriz.



Fonte: Da autora, 2015.

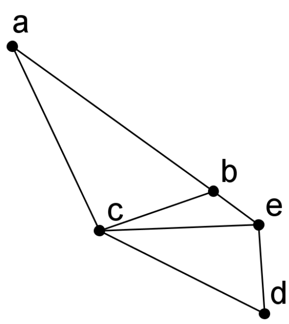
Figura 72 – Matriz correspondente ao Grafo do exemplo 7.

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & a & b & c & d \\
\hline
a & 0 & 1 & 1 & 0 \\
b & 1 & 0 & 0 & 1 \\
c & 1 & 0 & 0 & 1 \\
d & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Fonte: Da autora, 2015.

Seguindo o mesmo raciocínio, faça a matriz correspondente ao próximo grafo:

Figura 73 – Exemplo 7 - Grafo para encontrar uma matriz associada.



Fonte: Da autora, 2015.

– Orientações: *Essa atividade pode ser feita inicialmente sem explicar matriz de incidência e matriz de adjacência. Verifique se os alunos entenderam a relação entre o grafo e a matriz. Se sim, deixe que resolvam o exercício e após a correção apresenta-se esse conteúdo. Se não, antes deles resolverem o exercício proposto, explicasse esse conteúdo e eles resolvem a seguir. Mas é necessário fazer o aluno associar os valores e a relação deles com as arestas e vértices.*

– Uma solução: A matriz associada ao grafo da Figura 73 será:

Figura 74 – Solução da atividade proposta - Exemplo 7.

$$\begin{array}{c|ccccc|} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Fonte: Da autora, 2015.

– Observações: Uma outra proposta para esse exemplo é a partir da matriz pedir para se construir o grafo. Deve-se ter o cuidado na correção da atividade pois os alunos possivelmente vão representar os grafos com disposições geométricas diferentes. Mas isso não significaria que os grafos são distintos pois não estamos interessados na posição geométrica e sim nas relações entre os vértices.

4.2 PCM utilizando recursos computacionais

Uma proposta de utilização da teoria de grafos é a resolução de exercícios utilizando ferramentas computacionais. Conforme indicado em vários trabalhos, o ensino dessa teoria é não só viável, mas muito propício para incentivar os alunos na melhoria do raciocínio lógico, além de unir vários conteúdos já aprendidos: matrizes, combinatória, funções.

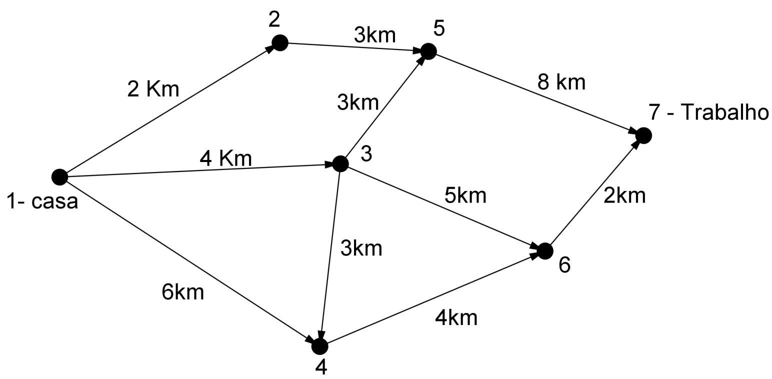
Neste contexto, propomos a resolução do PCM utilizando duas formas distintas: utilizando o Algoritmo de Dijkstra e utilizando o aplicativo Solver presente no software Excel da Microsoft.

O Excel é um software de criação de planilhas eletrônicas e através dele podemos realizar desde cálculos simples a mais complexos, criar base de dados, elaborar relatórios e gráficos, analisar dados estatísticos e financeiros, entre outros. Nós utilizaremos uma de suas ferramentas computacionais: o Solver. Sua utilização está diretamente relacionada a resolução de problemas de vários tipos, lineares e não lineares. Nosso foco será na resolução de problemas através da formulação de equações lineares e raciocínio lógico. Além do Excel, temos o Calc do LibreOffice que também possui a ferramenta Solver. Uma grande vantagem é que o LibreOffice é um software de uso livre. Isso pode permitir o uso dessa ferramenta tanto pelas escolas que não possuam o pacote da Microsoft Office, como pelos alunos que possuam computador em casa. Apresentaremos a configuração pelo Calc após o passo a passo da implementação pelo Excel, uma vez que as diferenças estão apenas na configuração do Solver. Os procedimentos de entrada de dados são os mesmos.

Primeiro vamos resolver um exemplo simples para aprender a utilizar a ferramenta Solver. E depois apresentamos alguns exercícios que podem ser resolvidos com os alunos. Nosso exemplo será executado passo a passo para que os alunos possam entender a utilização da ferramenta computacional na sua resolução.

Problema proposto: Com o aumento do preço da gasolina, José quer buscar o caminho mais curto entre a sua casa e o trabalho de modo a economizar no gasto com combustível.

Figura 75 – Percurso entre casa e trabalho.



Fonte: Da autora, 2015.

Como sugestão, os alunos podem resolver o PCM proposto primeiramente utilizando o Algoritmo de Dijkstra (capítulo 2) de modo a já terem os resultados das distância do ponto inicial, casa, a cada um dos outros vértices do grafo. E, em seguida, passa-se para o uso do Excel e do seu aplicativo Solver. As distâncias que devem ser encontradas são:

Até o vértice 2 = 2km;

Até o vértice 3 = 4km;

Até o vértice 4 = 6km;

Até o vértice 5 = 5km;

Até o vértice 6 = 9km;

Até o vértice 7 - Trabalho = 11km.

Para resolver o problema proposto através do Solver, devemos transformar as informações que temos no grafo em dados que possam ser usado por esse aplicativo, uma vez que ele utiliza programação linear para obter a solução desejada.

A **Programação Linear** é um método que busca otimizar um problema através da maximização ou minimização de uma função linear que satisfaz certas restrições através da definição de um modelo matemático linear. O modelo matemático representa de forma simplificada uma situação real, transformando as grandezas envolvidas em variáveis e as relações entre elas em expressões matemáticas.

Os elementos envolvidos na modelagem por programação linear são:

Variáveis de decisão: são todas as variáveis envolvidas no processo e que representam as possíveis decisões que se podem tomar durante a resolução do problema. São do tipo numéricas.

Função Objetivo: é a função que busca maximizar ou minimizar o resultado, dependendo do objetivo do problema. Ela é definida utilizando as variáveis de decisão de modo a obter o que se deseja otimizar .

Restrições: São as condições impostas as variáveis de decisão (representadas por equações ou inequações lineares) de forma a se atingir o objetivo desejado.

A definição desses elementos permitirá a criação do modelo matemático a ser usado na programação linear. Essa definição se baseia em quatro etapas:

– Definição das variáveis do problema;

– Definição da função objetivo;

– Definição das restrições lineares;

– Utilização de um programa/método para calcular o que deseja.

Nesse contexto, queremos calcular a distância mínima entre dois vértices definidos (queremos uma solução que minimize o caminho entre os vértices 1 e 7).

A primeira etapa será a definição das variáveis do problema. Cada arco do grafo passa a ser representado pela variável Xij, onde o i e j são os vértices aos quais o arco está ligado. Para calcular o caminho mínimo, precisamos determinar por quais vértices devemos passar de modo a termos no final o menor valor possível de trajeto.

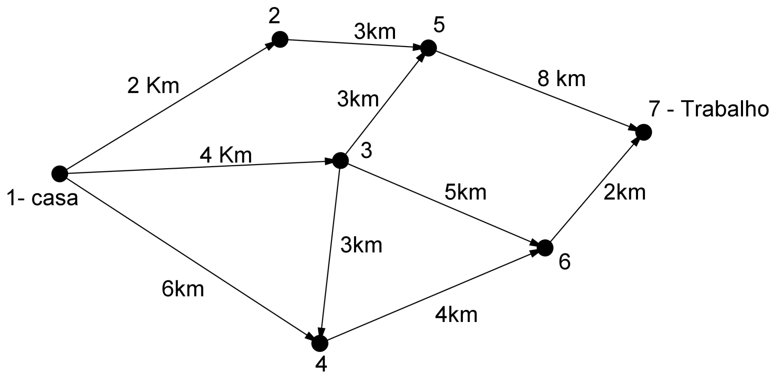
Em seguida, devemos definir a função objetivo, nossa segunda etapa. Neste exemplo, a função objetivo é encontrar um trajeto com menor quilometragem. Chamaremos de Z esse trajeto. Como não se sabe qual será o menor caminho, ou melhor dizendo, quais arcos serão escolhidos para minimizar o percurso, escrevemos todos as variáveis do problema, lembrando que cada arco (Xij) será multiplicado pelo seu tamanho (neste caso, sua kilometragem). Logo, a função objetivo pode ser escrita como:

$$Z = 2X_{12} + 4X_{13} + 6X_{14} + 2X_{25} + 3X_{35} + 3X_{34} + 4X_{46} + 5X_{36} + 8X_{57} + 2X_{67}$$

O Solver substituirá, quando calcular a função objetivo Z, cada arco Xij por 1, quando o mesmo for utilizado no percurso e 0 (zero) quando não for. Isso ocorre por que na configuração padrão do Solver, no modo LP Simplex, ele assume "Resolvendo com Restrições de Números Inteiros". Assim, as variáveis apesar de reais, serão números inteiros. E com as restrições definidas adiante, as opções para solução do problema serão apenas 1 ou 0. Mas não sabemos se em outras versões do Excel (estamos utilizando a 2013) o Solver possui essa configuração padrão.

O próximo passo, terceira etapa é definir as restrições. Nos grafos, as restrições são as possibilidades de ir de um vértice ao outro e quais escolhas podem ser feitas. Devem ser analisados todos os vértices individualmente, definindo as restrições para o percurso por aquele vértice em questão. Conforme Figura 76, temos:

Figura 76 – Analise do Percurso entre casa e trabalho utilizando equações lineares.



Fonte: Da autora, 2015.

Para o vértice 1 que só possui arcos saindo, temos de definir por qual deles iniciaremos o percurso. Além disso, só podemos escolher um caminho entre os três possíveis: vértices 2, 3 e 4.

Logo $X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$. Supondo que foi escolhido o X_{12}. Não poderemos escolher as outras duas opções ao mesmo tempo. Então o X_{12} recebe 1 e os outros dois, não escolhidos, recebem zero. A soma das possibilidades dará 1, garantindo assim a escolha de um único arco a partir do vértice inicial.

O mesmo raciocínio se aplica para a chegada ao vértice final, o vértice 7. Nesse vértice só chegam arcos. Podemos garantir que apenas um dos arcos será escolhido entre todos que chegam. Logo, o arco escolhido receberá 1 e os outros 0 (zero). A soma dos arcos que entram será 1. Para o vértice 7 teremos então a seguinte equação $X_{57} + X_{67} = 1$.

Para analisar os vértices que possuem arcos entrando e saindo devemos raciocinar da seguinte forma: Ao escolher um percurso que passará por um determinado vértice, deveremos necessariamente escolher um percurso que sai desse vértice, pois teremos de manter o fluxo do percurso iniciado. Não pode quebrar a rota e mudar de vértice no meio do percurso sem o uso de uma aresta que os conecta. Assim sendo, basta admitir que "tudo o que chega é igual ao que saí". Isto é, em cada vértice que chegam e saem arcos, temos uma restrição: a soma dos arcos que chegam ao vértice deve ser igual a soma dos arcos que saem. Podemos ver isso melhor analisando as duas possibilidades para o vértice 2: ser escolhido ou não para a definição do percurso procurado.

Chega até ele o arco X_{12} e sai dele o arco X_{25}. Se não escolher o vértice 2 para dar andamento ao percurso procurado, o arco X_{12} receberá 0 (zero) pois, pelo passo anterior, não foi o escolhido. Logo, o arco X_{25} que sai do vértice 2 também receberá 0 (zero) pois não será escolhido. Logo $X_{12} = X_{25}$ (a soma dos arcos que chegam é igual a soma dos arcos que saem), ou seja, $X_{12} - X_{25} = 0$. Se escolher esse vértice, o arco que chega (X_{12} foi o escolhido) recebe 1. Logo, o arco de saída, que também será escolhido, pois é a única opção, receberá 1.

Como $X_{12} = X_{25}$ (a soma dos arcos que chegam é igual a soma dos arcos que saem), logo $X_{12} - X_{25} = 0$ pois $1 - 1 = 0$.

Seguindo esse raciocínio para todos os outros vértices que possuem entrada e saída de arcos temos:

Vértice 3: $X_{13} = X_{35} + X_{36} + X_{34}$. Logo, $X_{13} - X_{35} - X_{36} - X_{34} = 0$

Vértice 4: $X_{14} + X_{34} = X_{46}$. Logo $X_{14} + X_{34} - X_{46} = 0$

Vértice 5: $X_{25} + X_{35} = X_{57}$. Logo $X_{25} + X_{35} - X_{57} = 0$

Vértice 6: $X_{36} + X_{46} = X_{67}$. Logo $X_{36} + X_{46} - X_{67} = 0$

Além disso, todas as variáveis de decisão devem ser binárias, uma vez que o Solver deverá retornar apenas 0 ou 1 como valores possíveis para elas.

Assim, seguindo as etapas apresentadas anteriormente, outros PCM podem ser resolvidos da mesma forma. Após essas três etapas, passamos para a última: uso de um programa para resolver o problema. Todos as definições feitas nas etapas anteriores serão inseridas no Excel (as variáveis, a função objetivo e as restrições) seguindo o roteiro explicativo a seguir e o aplicativo Solver calculará o trajeto procurado.

Vamos ao passo a passo da implementação e resolução do problema.

Primeiro passo: Escrever em cada coluna as variáveis do problema, neste caso, os arcos do grafo analisado:

Figura 77 – Excel: primeiro passo.

X12	X13	X14	X25	X35	X34	X36	X46	X57	X67

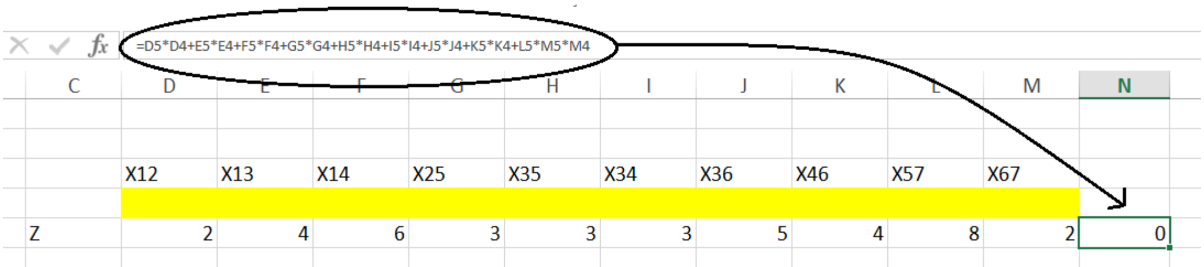
Fonte: Da autora, 2015.

As células abaixo dos nomes das variáveis serão reservadas para o solver informar os valores das variáveis na resolução do problema. Será nessa linha que o Solver retornará a resposta procurada. Vamos destacá-la com um sombreado.

Segundo passo: Inserir a função objetivo. Colocamos, duas linhas abaixo da linha das variáveis, na mesma coluna de cada uma, o valor de comprimento do arco e, após a coluna da última variável, colocamos a função objetivo. Ver Figura 78.

Deve-se seguir as regras do uso de fórmulas conforme é permitido no Excel. Deixamos aqui uma sugestão, pois caso os alunos não saibam usar os comandos básicos do Excel, seria aconselhável uma aula ensinando as operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) e como utilizar os conteúdos nas células de uma planilha no Excel antes de se trabalhar com o PCM. Mas como as explicações estão sendo feitas em detalhe, mesmo sem um conhecimento prévio do Excel, acreditamos ser possível realizar a atividade proposta.

Figura 78 – Excel: segundo passo.

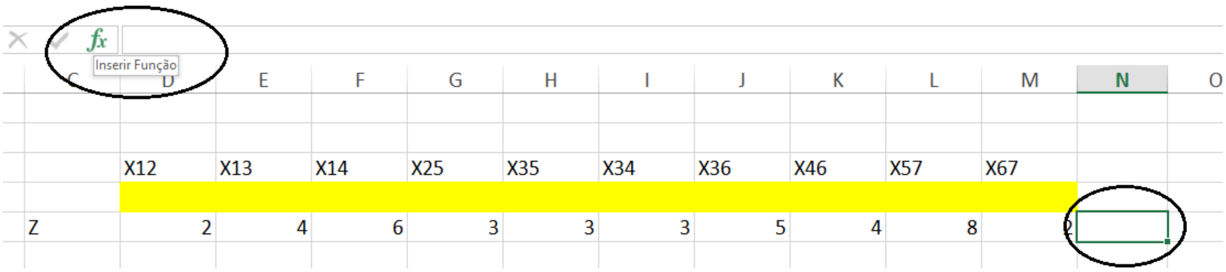


Fonte: Da autora, 2015.

Veja que a formula apresentada na Figura 78 é a função objetivo escrita conforme as regras do Excel. Essa fórmula representa a soma dos produtos entre as distâncias e os valores das variáveis (que neste caso será zero ou um).

Uma forma mais fácil de criar essa fórmula é usar a opção Inserir Função. Para isso, primeiro selecione a célula onde a função será inserida (veja Figura 79 abaixo) e depois clique no símbolo Inserir Função.

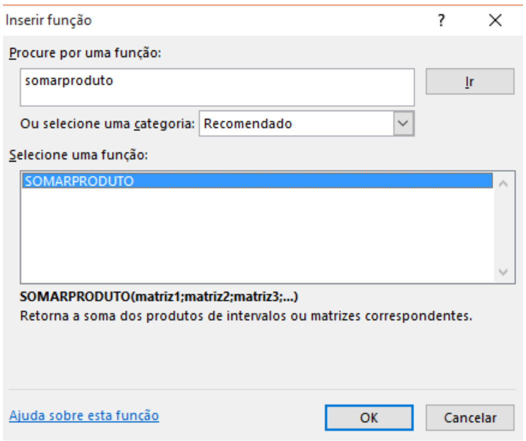
Figura 79 – Inserir função.



Fonte: Da autora, 2015.

Será aberta a seguinte caixa de diálogo:

Figura 80 – Caixa de diálogo: Inserir função.

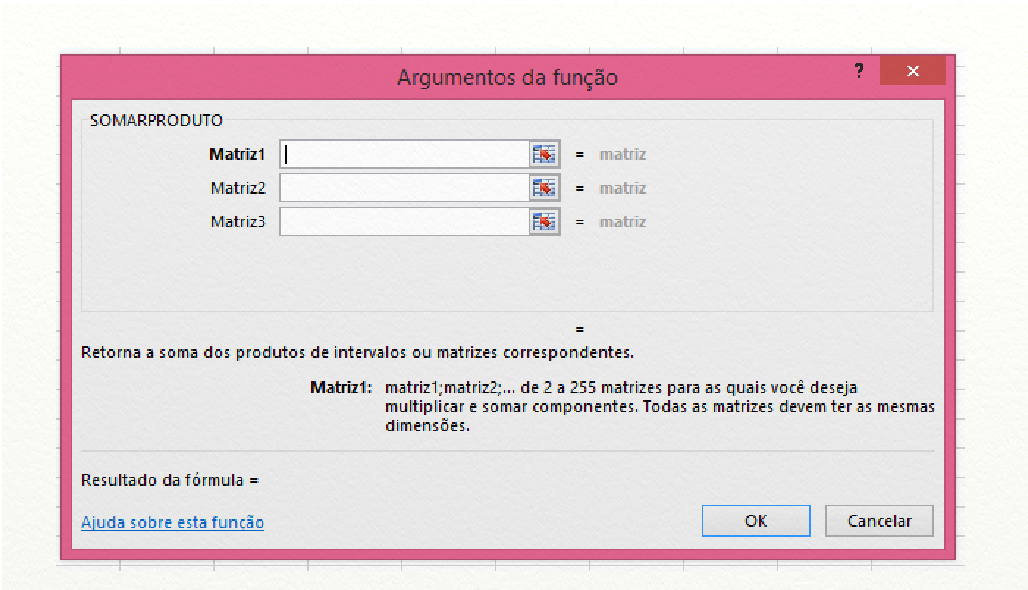


Fonte: Da autora, 2015.

Escolha a função SOMARPRODUTO e clique em Ok. Essa função executa a soma dos produtos entre células de uma mesma coluna.

Será aberta a seguinte caixa de diálogo:

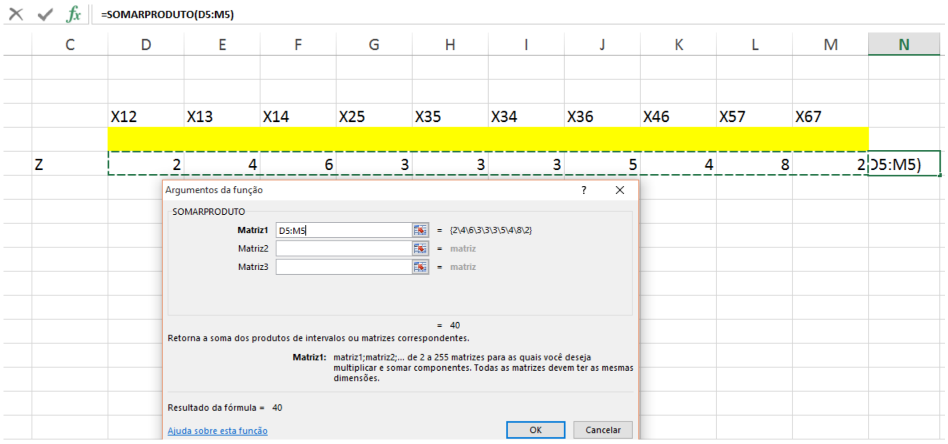
Figura 81 – Caixa de diálogo: Argumentos da função.



Fonte: Da autora, 2015.

No campo Matriz 1, selecionamos as células da linha correspondente ao valores referentes aos arcos conforme Figura 82:

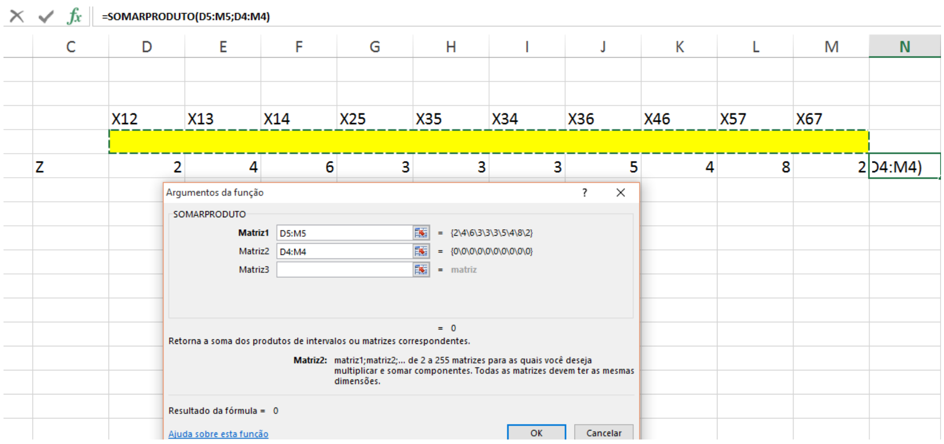
Figura 82 – Seleção das células referentes aos valores dos arcos.



Fonte: Da autora, 2015.

No campo Matriz 2, selecionamos as células da linha correspondente ao valores que serão retornados pelo Solver conforme Figura 83:

Figura 83 – Seleção das células referentes aos valores que o Solver retornará.



Fonte: Da autora, 2015.

Clicar em Ok e está criada a fórmula. A fórmula SOMARPRODUTO = (D5:M5; D4:M4) corresponde a mesma apresentada anteriormente, ou seja: serão multiplicadas e somadas as células no intervalo das colunas D à M, linhas 4 e 5: $(D4 * D5 + E4 * E5 + F4 * F5 + G4 * G5 + H4 * H5 + I4 * I5 * J4 * J5 + K4 * K5 + L4 * L5 + M4 * M5)$. Veja que a fórmula representa a mesma definida para função objetivo:

$Z = 2X_{12} + 4X_{13} + 6X_{14} + 2X_{25} + 3X_{35} + 3X_{34} + 4X_{46} + 5X_{36} + 8X_{57} + 2X_{67}$. Multiplicação do valor de cada variável (as arestas) presentes nas células D5 à M5, pela células que receberão o resultado procurado após a execução do Solver, D4 à M4.

Terceiro passo: Incluir as restrições. Serão inseridas sete linhas onde em cada uma delas teremos as restrições já definidas anteriormente para cada vértice:

Primeira linha: $X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$ (vértice 1)

Segunda linha: $X_{12} - X_{25} = 0$ (vértice 2)

Terceira linha: $X_{13} - X_{35} - X_{36} - X_{34} = 0$ (vértice 3)

Quarta linha: $X_{14} + X_{34} - X_{46} = 0$ (vértice 4)

Quinta linha: $X_{25} + X_{35} - X_{57} = 0$ (vértice 5)

Sexta linha: $X_{46} + X_{36} - X_{67} = 0$ (vértice 6)

Sétima linha: $X_{57} + X_{67} = 1$ (vértice 7)

No Excel, essas restrições serão inseridas da seguinte forma: abaixo de cada identificação do arco coloca-se 1 ou -1 de acordo com os índices que estão multiplicando esses arcos quando presentes nas restrições definidas e 0 para os arcos que não estão presente, ou seja, não estão na restrição. E, ao final da linha, na primeira coluna após a coluna do último arco (coluna N neste exemplo), fazemos o somatório, conforme foi feito no passo anterior. Esse somatório será da linha da restrição com a linha de retorno do Solver (veja a fórmula na parte superior da Figura 84.

Para a primeira restrição teríamos:

Figura 84 – Excel: Terceiro passo - apresentando a primeira restrição.

=SOMARPRODUTO(D7:M7;D4:M4)

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
		X12	X13	X14	X25	X35	X34	X36	X46	X57	X67				
	Z	2	4	6	3	3	3	5	4	8	2	0			
Restrição 1		1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0			referente ao vértice 1

Fonte: Da autora, 2015.

Observe os arcos X_{12}, X_{13} e X_{14}. Conforme definimos nas restrições, $X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$. Ou seja, na interseção da linha da primeira restrição com a coluna onde se encontram os arcos X_{12}, X_{13} e X_{14} temos o número 1 multiplicando as variáveis. Os outros arcos não aparecem na restrição, logo possuem 0 (zero) multiplicando cada uma das colunas relacionadas. A coluna N receberá a SOMAPRODUTO dessa linha de restrição (linha 7) com a do retorno do Solver (linha 4). Ou seja, na célula N7 aparecerá o resultado da multiplicação de $1 * D4 + 1 * E4 + 1 * F4$. Esse resultado deverá ser igual a 1 conforme a restrição informa. Isso implica que apenas uma das células D4, E4 ou F4 receberá 1 quando o solver for executado. O que corresponde a análise já feita: apenas uma das arestas X_{12}, X_{13}

ou X_{14} pode ser escolhida. Isso ficará mais claro no resultado final apresentado mais a frente.

Deve-se fazer o mesmo para todas as restrições (identificamos na esquerda as restrições e na direita o vértice ao qual ela se refere apenas por uma questão didática).

Figura 85 – Excel: Terceiro passo - apresentando todas as restrições.

		X12	X13	X14	X25	X35	X34	X36	X46	X57	X67		
	Z	2	4	6	3	3	3	5	4	8	2	0	
Restrição 1		1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	referente ao vértice 1
Restrição 2		1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	referente ao vértice 2
Restrição 3		0	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	referente ao vértice 3
Restrição 4		0	0	1	0	0	1	0	-1	0	0	0	referente ao vértice 4
Restrição 5		0	0	0	1	1	0	0	0	-1	0	0	referente ao vértice 5
Restrição 6		0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	referente ao vértice 6
Restrição 7		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	referente ao vértice 7

Fonte: Da autora, 2015.

Ainda nesse passo, devemos informar qual o valor que deverá ter o somatório dos arcos que compõem cada uma das restrições. As equações relativas as restrições 1 e 7 somam 1 e todas as outras 0. Esses valores deverão ser colocados na coluna ao lado da que recebeu a função SOMARPRODUTO. Na Figura 86 a seguir corresponde a última coluna preenchida na planilha:

Figura 86 – Excel: Terceiro passo - somatório dos arcos de cada restrição definida.

		X12	X13	X14	X25	X35	X34	X36	X46	X57	X67		valor das restrições	
	Z	2	4	6	3	3	3	5	4	8	2	0		
Restrição 1		1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	referente ao vértice 1
Restrição 2		1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	referente ao vértice 2
Restrição 3		0	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	referente ao vértice 3
Restrição 4		0	0	1	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	referente ao vértice 4
Restrição 5		0	0	0	1	1	0	0	0	-1	0	0	0	referente ao vértice 5
Restrição 6		0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	referente ao vértice 6
Restrição 7		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	referente ao vértice 7

Fonte: Da autora, 2015.

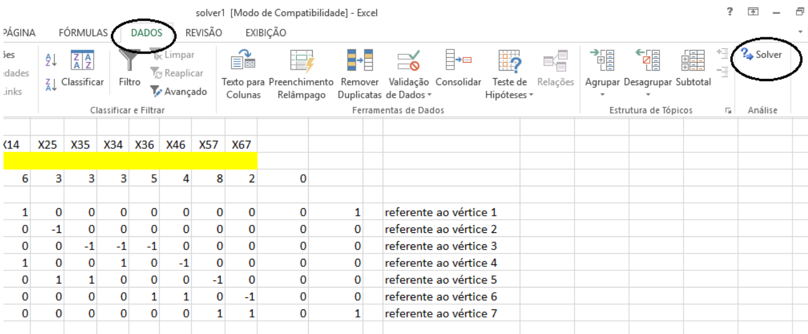
A configuração das variáveis de decisão como binárias será feita na próxima etapa.

Terminada a entrada de todas as informações, o quarto passo é configurar o Solver. Utilizamos a versão 2013 do Excel. Em outras versões podem haver diferenças nos passos apresentados aqui para a configuração do Solver. Sugerimos consultar o manual do software caso ocorra isso.

Sugerimos o link https://support.office.com (acessado em 25/05/2015), opção Carregar o Solver para ver o passo a passo de como habilitar o Solver no Excel. Caso não funcione ou não esteja mais disponível esse link, uma "busca" na internet informando *Como habilitar o solver do Excel* deve resolver o problema.

Selecionamos o menu Dados e em seguida o ícone do Solver (canto direito da tela).

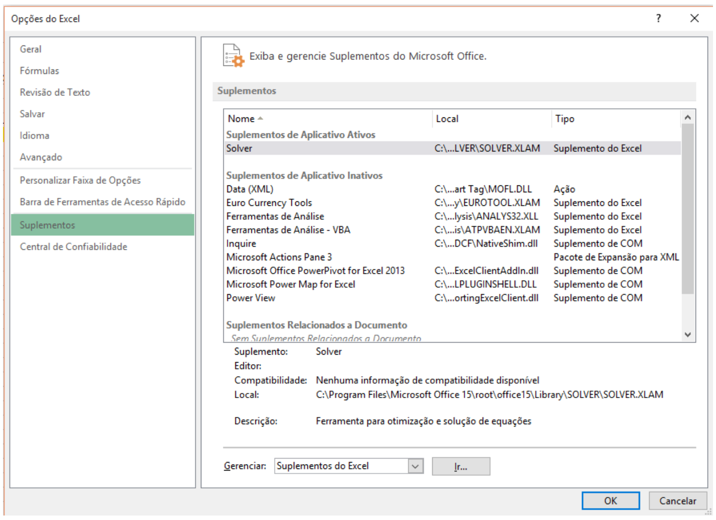
Figura 87 – Excel: quarto passo - configurando o Solver.



Fonte: Da autora, 2015.

Isso será possível caso o Solver já esteja habilitado. Se não estiver, selecionamos o menu Arquivo, Opções, Suplementos:

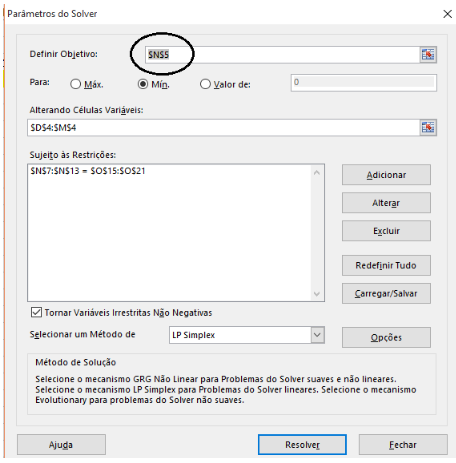
Figura 88 – Habilitando o Solver.



Fonte: Da autora, 2015.

Escolhemos o suplemento Solver. Em seguida, selecionamos Ir (localizado na parte de baixo da tela) e Ok. O Solver estará habilitado. Basta ativá-lo conforme explicado anteriormente (Figura 87). Será então aberta a janela do aplicativo:

Figura 89 – Excel: décimo primeiro passo.



Fonte: Da autora, 2015.

Basta agora preencher o que se deseja calcular: No campo Definir Objetivo, deve-se informar a célula que receberá o resultado procurado, ou seja o Z.

Na planilha que estamos preenchendo, corresponde a célula N5 (coluna N, linha 5). Basta clicar nesta célula ou escrever conforme está na figura. Lembrando que essa definição é aleatória. Poderia ser outra célula.

O próximo passo é definir o tipo de cálculo desejado. Neste caso, o percurso mínimo. Selecionamos a opção Mín.

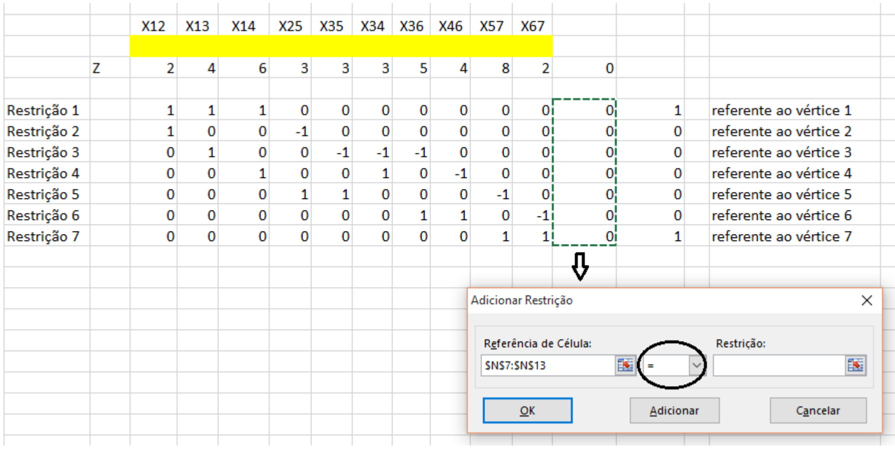
No item Alterando Células Variáveis selecione as células que ficaram reservadas para os valores das variáveis (células sombreadas). Lembrando que no final da resolução o Solver irá substituir o que estiver escrito nessas células pelo valores ótimos do problema, quando encontrados.

O item Sujeito às Restrições consiste na etapa em que definiremos a comparação a ser feita para cada restrição. No nosso problema, essa comparação é uma igualdade (todas as restrições definidas são iguais a 1 ou 0).

Exemplificando: para a restrição 1 já informada na linha 7, a coluna $N7$ receberá o resultado da multiplicação de $1 * D4 + 1 * E4 + 1 * F4$. Esse resultado deverá ser igual a 1 conforme a restrição foi definida, ou seja, $X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$. Isso significa que apenas uma das células D4, E4 ou F4 receberá 1 quando o Solver for executado. Essas células estão relacionadas com as arestas presentes na restrição 1. A célula $D4$ corresponde a aresta X_{12}. Se ela receber 1, significa que o percurso escolhido passa por essa aresta. O mesmo se aplica para as células $E4$ (corresponde a aresta X_{13}) e $F4$ (corresponde a aresta X_{14}). O raciocínio é o mesmo para as outras restrições apresentadas.

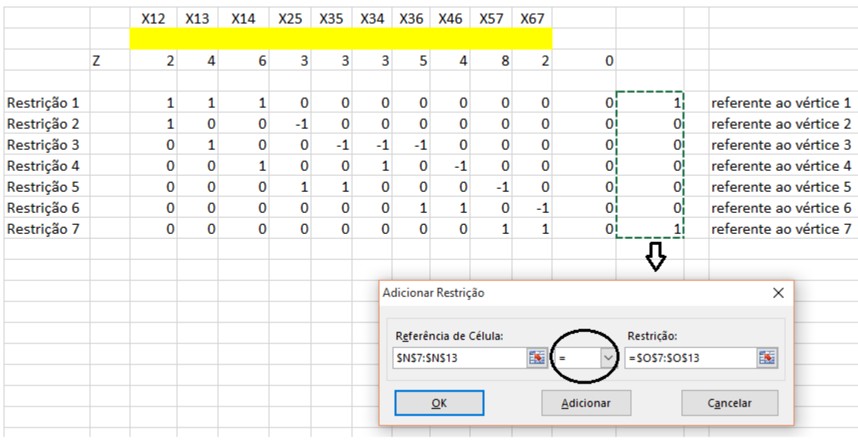
As colunas onde se encontram os resultados a serem comparados são a dos somatórios das decisões (neste caso a coluna N, da linha 7 à 13) com a coluna do resultado esperado em cada restrição (coluna M, linha 7 à 13). Clique no botão Adicionar e preencha os campos Referência de Célula e Restrições conforme Figuras 90 e 92 a seguir.

Figura 90 – Sujeito às restrições - passo 1.



Fonte: Da autora, 2015.

Figura 91 – Sujeito às restrições - passo 2.

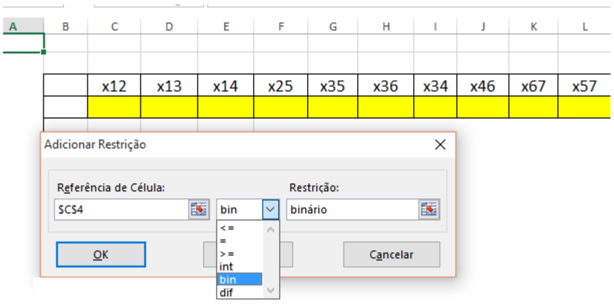


Fonte: Da autora, 2015.

Observe que selecionamos a igualdade entre os campos Referência de células e Restrições pois as equações referentes as restrições são igualdades. Após os preenchimentos, clicamos no botão vAdicionar. Na versão que estamos utilizando para realizar essa atividade foi possível selecionar todas as restrições de uma única vez. Outras versões do Excel podem não permitir isso. Então deve-se fazer uma restrição por vez.

Em seguida vamos configurar todas as variáveis como binárias. Para isso no campo *Referência de células* selecione a célula que representa a variável de decisão e em seguida a opção binária conforme próxima figura.

Figura 92 – Sujeito às restrições - passo 3: variáveis binárias.

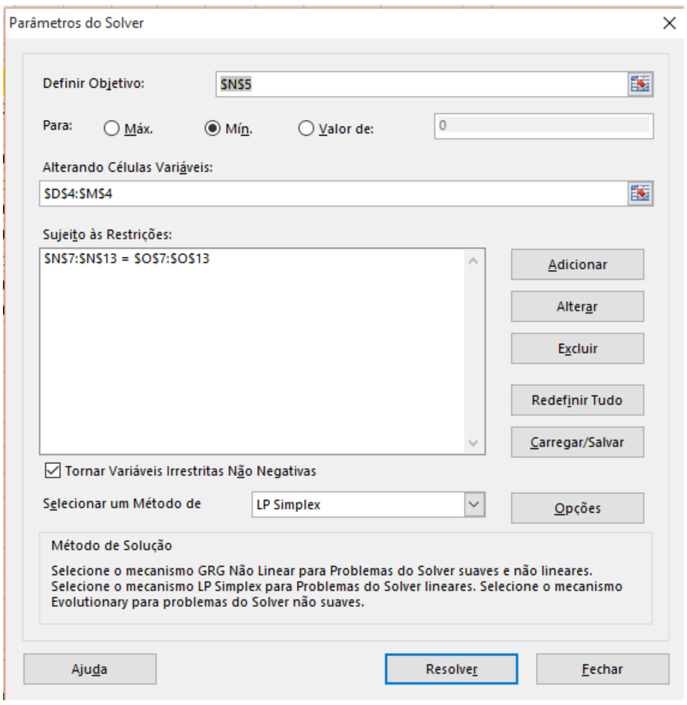


Fonte: Da autora, 2015.

Selecionar a opção Adicionar e repetimos essa etapa para todas as variáveis de decisão. Após definir que todas são binárias, selecionamos Ok.

Depois basta selecionar o método LP Simplex dentre as opções de Selecionar um Método de solução. Os parâmetros do Solver ficarão preenchidos da seguinte forma:

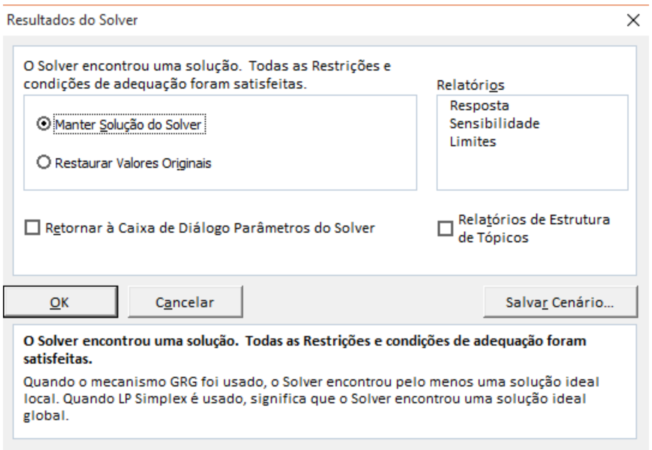
Figura 93 – Parâmetros do Solver.



Fonte: Da autora, 2015.

Basta agora clicar no botão Resolver. Em seguida se abrirá a caixa de diálogo Resultados do Solver:

Figura 94 – Resultados do Solver.



Fonte: Da autora, 2015.

Selecione o botão Ok.

Temos assim a planilha final, com o resultado procurado.

Figura 95 – Resultado procurado.

		X12	X13	X14	X25	X35	X34	X36	X46	X57	X67			
		0	1	0	0	0	0	1	0	0	1			
	Z	2	4	6	3	3	3	5	4	8	2	11		
Restrição 1		1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	referente ao vértice 1
Restrição 2		1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	referente ao vértice 2
Restrição 3		0	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	referente ao vértice 3
Restrição 4		0	0	1	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	referente ao vértice 4
Restrição 5		0	0	0	1	1	0	0	0	-1	0	0	0	referente ao vértice 5
Restrição 6		0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	referente ao vértice 6
Restrição 7		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	referente ao vértice 7

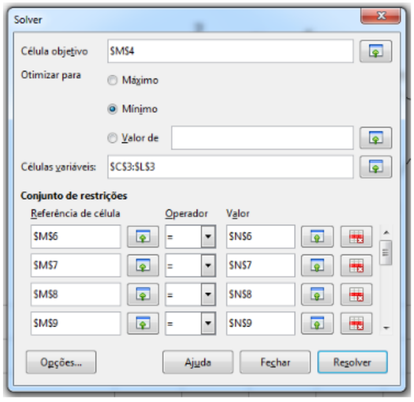
Fonte: Da autora, 2015.

Veja que na linha sombreada temos a indicação das arestas utilizadas no menor percurso (são as arestas que possuem o número 1) e no final da linha do Z o resultado procurado (11km). O resultado encontrado foi o mesmo encontrado pelo algoritmo de Dijkstra.

Configurando o Solver no Calc do LibreOffice (a versão utilizada é a 4.4.5.2), lembrando que a entrada dos dados (variáveis de decisão, função objetivo e restrições) é feita da mesma forma que na planilha do Excel, selecionamos o menu Ferramenta e a opção Solver.

Abrirá a seguinte caixa de texto conforme próxima figura:

Figura 96 – Configurando o Solver do Calc

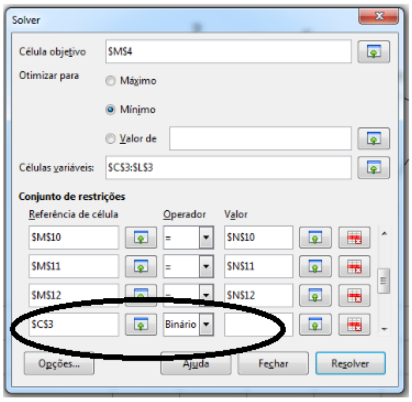


Fonte: Da autora, 2015.

Da mesma forma que no Solver do Excel, no item Célula Objetivo deverá ser indicada a célula que contém a função objetivo. Como utilizamos a mesma planilha criada no Excel, a célula será a mesma. Em seguida selecionar o que se deseja otimizar. No nosso problema é minimizar a função objetivo (selecionamos mínimo). Em seguida, indicar as Células Variáveis. Basta clicar nas células que representam as variáveis de decisão nas quais o solver retornará a resposta do problema. Em seguida passamos para as restrições, preenchendo o item Conjunto de Restrições. Da mesma forma que no Solver do Excel, selecionamos a célula que contém o lado esquerdo da restrição e inserimos no campo Referência de Células. Como são igualdades, selecionamos o sinal de igual e no campo Valor selecionamos a célula que contém o lado direito da restrição. É feito o mesmo procedimento para todas as restrições.

Em seguida, inserimos as restrições referentes as variáveis de decisão serem binárias conforme próxima figura.

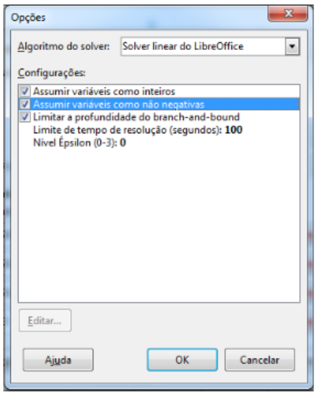
Figura 97 – Configurando o Solver do Calc - variáveis binárias.



Fonte: Da autora, 2015.

Selecionamos a célula na planilha que corresponde a variável de decisão (na figura corresponde a variável X_{12}) e inserimos no campo Referência de Células. Em seguida selecionamos a opção Binário. Esse processo deverá ser repetido para todas as outras variáveis de decisão. Finalizada a entrada de dados, clicamos em Opções. Será aberta a seguinte caixa de diálogo:

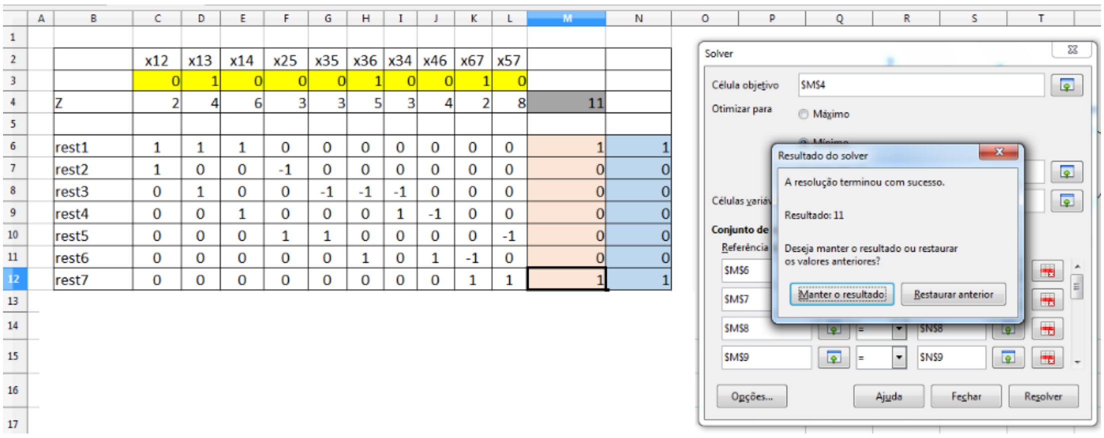
Figura 98 – Configurando o Solver do Calc - configurando opções.



Fonte: Da autora, 2015.

Escolher a opção Solver Linear do LibreOffice para o Algoritmo do Solver. Em seguida selecionar as opções Assumir Variáveis Como Inteiros e Assumir Variáveis Como Não Negativas. A terceira opção já está selecionada e pode continuar assim. Clicar em Ok e em seguida no botão Resolver. O Solver do Calc retornará o resultado conforme figura a seguir.

Figura 99 – Configurando o Solver do Calc - Resultado.



	x12	x13	x14	x25	x35	x36	x34	x46	x67	x57		
	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0		
Z	2	4	6	3	3	5	3	4	2	8	11	
rest1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
rest2	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
rest3	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0
rest4	0	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
rest5	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0
rest6	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	0	0
rest7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Fonte: Da autora, 2015.

Veja que a planilha de entrada de dados é a mesma feita no Excel e que o Solver do Calc retornou o mesmo valor. Para fechar a caixa de diálogo Resultado do Solver basta clicar em Manter o resultado.

Assim, concluímos as configurações de ambos os Solver, do Excel e do Calc.

A proposta apresentada permitirá mostrar aos alunos uma resolução de diversos problemas presentes no dia a dia de todos nós. Ele aplicará conceitos e ideias matemáticas já aprendidas, juntamente com uma ferramenta computacional.

Outros exemplos para serem realizados em sala de aula são propostos a seguir. Os problemas podem ser feitos diretamente no Excel, seguindo o passo a passo apresentado. Sugerimos, por questões didáticas, analisar primeiramente o Grafo, anotando as variáveis envolvidas, a função objetivo e as restrições. Depois passa-se para o Excel.

Lembrando que, mesmo se não houver a possibilidade de aplicar esses exercícios utilizando o Solver, os problemas propostos podem ser manipulados pelos alunos da seguinte forma:

Divide-se a turma em dois grupos, onde cada grupo recebe um grafo para analisar.

Cada grupo faz o levantamento da função objetivo, das variáveis (anotando o valor de cada uma) e das restrições do seu grafo.

Em seguida, troca-se entre os grupos o levantamento feito e eles devem apresentar o grafo correspondente.

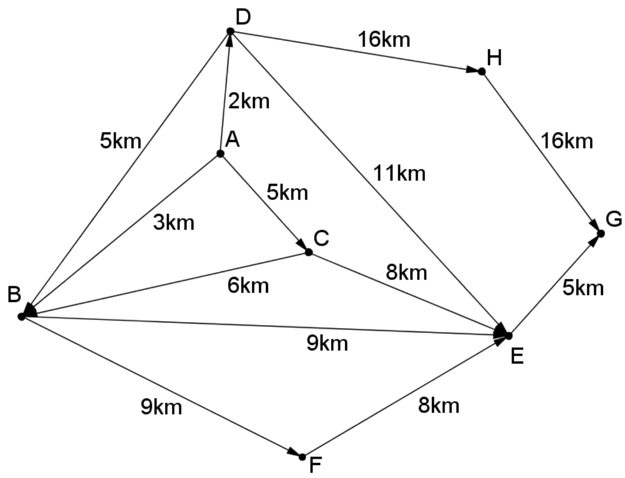
Uma pequena observação: o problema resolvido, bem como os propostos a seguir utilizam grafos orientados. É possível resolver problemas com grafos não orientados, mas isso exige uma análise mais detalhada dos vértices.

Como as aresta são bidirecionais, ao analisar os vértices, nem sempre o já definido ”tudo o que chega é igual ao que sai” é verdadeiro. É necessário analisar a situação como um todo, pois alguns vértices deverão ser analisados como se as arestas estivessem apenas saindo, outros como se elas estivessem apenas chegando (mesmo sendo elas bidirecionais). E ainda em outros, de forma realmente bidirecional (e nesse caso é construída uma aresta paralela). Pela complexidade não apresentaremos exemplos desse tipo. A resolução apenas com grafos orientados já permite atingir o objetivo da proposta. Mas nada impede, no desenvolvimento das atividades, que o professor proponha e resolva problemas com grafos não orientados. É possível ver mais detalhadamente essa questão em (HILLIER, 2006).

Utilizando o Solver, resolva os problemas:

Exercício 1) Calcule o caminho mais curto entre os vértices A e G para os grafo a seguir:

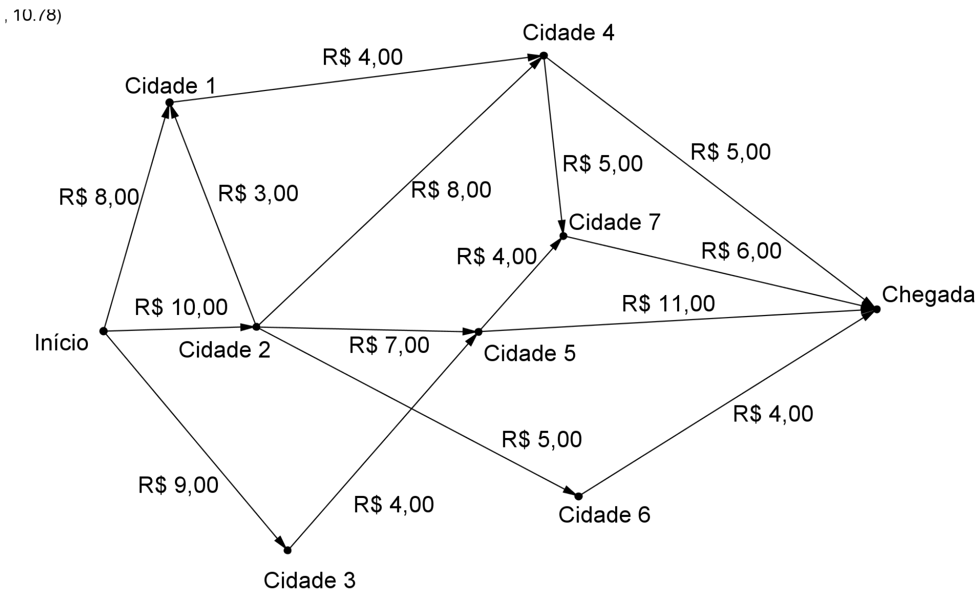
Figura 100 – Exercício 1 - PCM.



Fonte: Da autora, 2015.

Exercício 2) O grafo a seguir representa as rodovias que se podem percorrer para fazer o trajeto entre o ponto Início até o ponto Chegada. Cada arco possui o valor de pedágio cobrado na respectiva rodovia. Utilizando o Solver ache o caminho entre o Início e a Chegada com o menor custo de pedágio.

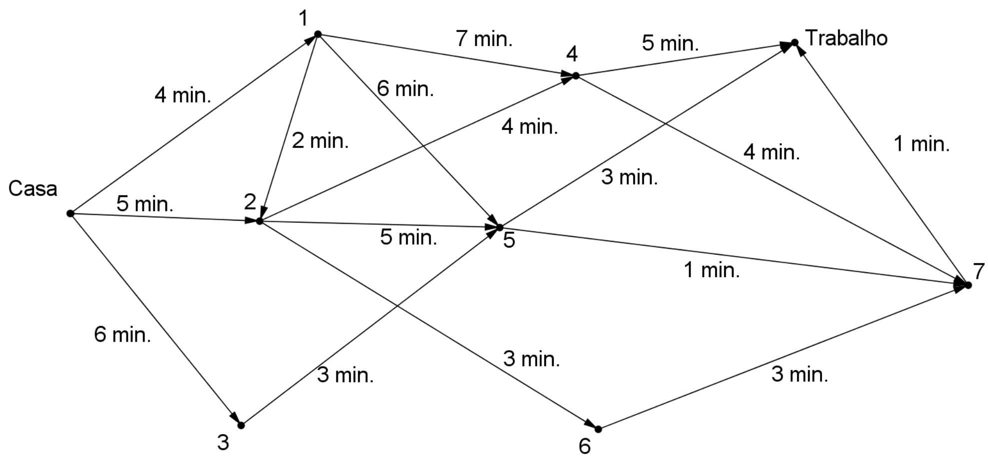
Figura 101 – Exercício 2 - PCM.



Fonte: Da autora, 2015.

Exercício 3) Encontre o caminho mais rápido para ir da sua casa ao trabalho. Assuma que os valores de cada arco corresponde ao tempo normalmente gasto em cada trecho.

Figura 102 – Exercício 3 - PCM.



Fonte: Da autora, 2015.

Outros exemplos de exercícios para serem resolvidos no Solver, podem ser encontrados em (BOAVENTURA NETTO; JURKIEWICZ, 2009).

Uma outra possibilidade de atividade para os alunos é que eles resolvam os exemplos propostos também através do Algoritmo de Dijkstra.

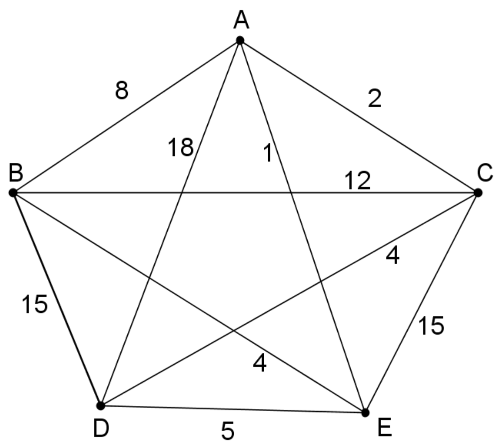
4.3 PCV utilizando Heurística

Possibilitando que os alunos façam uso da heurística na resolução de problemas, propomos algumas situações para que eles resolvam utilizando as heurísticas apresentadas. Os problemas propostos são simples de modo que possam ser resolvidos de forma a se chegar no resultado exato. Mas nossa ideia é que os alunos sejam orientados a ver que, dependo do problema, não é viável uma solução exata e apenas uma solução aproximada. Assim, sugerimos que primeiramente o professor apresente o problema e verifique com os alunos quantas seriam as soluções possíveis de caminho. Aqui se usa analise combinatória. Serão 24 soluções a serem encontradas. O professor pode então questionar se fossem ao invés de 5 locais, 8. Quantas respostas teriam? Quanto tempo demoraria para resolver o problema proposto? O que fazer então em uma situação assim? Esses questionamentos devem ser feitos aos alunos. Isso permitirá uma reflexão de outras formas de solução. Após essas questões iniciais, o professor pode apresentar as heurísticas gulosa e da inserção mais próxima e pedir então que eles resolvam por elas.

Exercício 1)

Utilizando a heurística gulosa e a heurística da inserção mais próxima, encontre o menor caminho possível saindo de A e que percorra todos os vértices passando uma única vez por cada um deles no grafo a seguir, retornando para A:

Figura 103 – Exercício 1 - PCV.



Fonte: Da autora, 2015.

Exercício 2)

Faça o que foi pedido no exercício 1, mudando apenas o vértice inicial para B.

Outros exercícios podem ser propostos, inclusive com um número maior de vértices. Cabe ao professor verificar se a aplicação desses exercícios mais complexos é viável e produtiva no contexto do desenvolvimento da matéria.

Além das sugestões e problemas propostos nesse capítulo, apresentaremos no final da dissertação, como anexo, um exemplo de atividade, passo a passo, para auxiliar os professores na implementação da modelagem matemática utilizando o PCM.

5 Considerações Finais

A Teoria dos grafos não é uma proposta nova para o ensino médio, mas é uma proposta ainda não implementada explicitamente nos currículos.

A dissertação apresenta o conteúdo básico da teoria para consulta e uso dos professores e alunos do ensino médio. Buscou-se abordar os principais conceitos utilizando uma linguagem simples, de fácil compreensão e que mostrasse todo o potencial de utilização desse conhecimento.

Assim, os docentes podem utilizar o material como uma apostila básica para tratar desse assunto em um primeiro momento, sem um aprofundamento muito teórico, o que não é o objetivo para alunos do ensino médio.

Baseamos nossa proposta em dois temas amplamente discutidos e pesquisados: importância da resolução de exercícios e da modelagem matemática no aprendizado da matemática. No processo da evolução do ensino dessa disciplina tem sido defendido incluir resolução de problemas e modelagem principalmente por considerar que essas formas de atuação fornecem aos estudantes condições para entender e interpretar a própria matemática de uma forma muito mais simples e proveitosa, uma vez que permite uma melhor compreensão dos argumentos matemáticos, bem como os conceitos e resultados.

Pesquisas mostram que ao utilizar problemas que remetem a situações presentes no cotidiano das pessoas há um maior interesse em resolvê-los. Nesse ponto, a teoria dos grafos é altamente recomendada como uma ferramenta de motivação e desafio, pois há vários níveis de dificuldades que podem ser abordados.

Os exemplos propostos na seção 4.1 trazem uma alternativa de inserção da teoria de forma a estimular os estudantes a aprimorar sua capacidade de interpretação de texto, interligação entre diversos conteúdos já aprendidos e raciocínio lógico.

Já os exercícios baseados no PCM podem ser resolvidos utilizando ferramenta computacional. O que faz dessa uma proposta inovadora e baseada em modelagem matemática. Ou seja, transforma-se um problema real em um problema matemático e busca-se uma solução com possibilidade do auxílio computacional.

Segundo (BASSANEZI, 2010)

> No caso específico da matemática, é necessário buscar estratégias alternativas de ensino-aprendizado. A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la.

Na área educacional, o uso da modelagem na aprendizagem facilita a relação entre os aspectos lúdicos da matemática com seu potencial prático no uso em aplicações diversas.

Além disso, o uso de ferramentas computacionais é sempre um estímulo aos alunos pois saem da rotina das aulas apenas teóricas para uma aplicação prática. A proposta apresenta uma situação do cotidiano que é transformada em um problema matemático envolvendo raciocínio lógico e resolvido com equações lineares.

Nos exemplos propostos como exercícios, ainda sugerimos uma opção de resolução caso não haja a possibilidade do uso do computador. A sugestão é bastante interessante pois incentiva a resolução do problema em grupo e, mesmo que de forma individual, estimula tanto o raciocínio como a visualização espacial.

Nos exemplos propostos para o PCV buscamos apresentar uma situação de desafio aos alunos. Ao se levantar a questão de ser um problema de difícil resolução, cria-se um estímulo, assim esperamos, para a busca de alternativas de solução. Essas alternativas propostas como solução, nem sempre ótimas, mas possíveis, são utilizadas pelos alunos sem muitas vezes conhecerem a definição dessa forma de resolução de problemas: heurísticas. Conforme (BALIEIRO, 2004) em sua tese de doutorado "Como atesta a história, o homem desde eras remotas é levado a resolver seus problemas, e o progresso da humanidade pode ser atribuído a essa capacidade do ser humano de resolver problemas de situações diárias. Muitas vezes, em tais situações, a solução não é imediata". E ainda "Então, num processo psíquico, cria, elabora, descobre um método que até então era desconhecido, útil à resolução do problema; a esse esquema psíquico, dá-se o nome de atividade heurística."

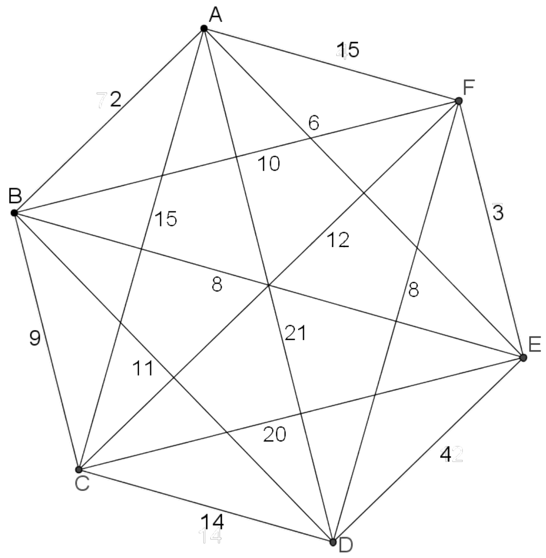
A heurística é inerente ao ser humano e diretamente presente na prática da resolução de problemas. Ver mais detalhes em (BALIEIRO, 2004).

Mostramos alguns exemplos de heurísticas. Mas nada impede de serem propostas novas formas de resolução.

Os problemas apresentados possuem solução. São simples, mas demandam uma análise por existir várias opções quando resolvidos pela heurística da inserção mais próxima. O objetivo é que após a análise deles e com o interesse despertado, sejam propostos PCV em grafos Hamiltonianos com um número maior de vértices. Com seis vértices já tem-se um exemplo complexo e desafiador.

Veja a Figura 104 a seguir.

Figura 104 – Exemplo de PCV com seis vértices



Fonte: Da autora, 2015.

Como um novo conteúdo ou apenas como uma complementação aos conteúdos já ensinados, a teoria de grafos abre a possibilidade de criar situações que despertem mais interesse dos alunos pelas aulas de matemática, além de novas propostas de ensino com o uso de ferramentas computacionais.

Além disso, ao usar grafos para modelar uma situação, há um ganho na compreensão da mesma por permitir uma visualização mais nítida da questão como também uma melhor organização das informações para resolução do problema. Sem contar em novas possibilidades de soluções, até então ocultas.

A teoria dos grafos vem também de encontro a aprendizagem por adaptação, que é uma das novas exigências da educação pois busca sair da simples memorização e repetição para uma postura de buscar a solução.

Esse tipo de aprendizagem ocorre quando o aluno é desafiado a adaptar os conteúdos aprendidos anteriormente na solução de um novo problema. A adaptação está na forma como o aluno usará seus conhecimentos anteriores para resolver uma situação nova. Nessa concepção de aprendizagem o aluno precisa processar informações e não apenas ter as informações memorizadas.

O aprendizado se mostra de forma criativa pois, para resolver o problema, o aluno precisará não só ter o conhecimento, mas saber utilizá-lo e adaptá-lo a nova situação.

Conforme VILA e CALLEJO (2006)

> Polya (1965) considera que um professor de matemática tem em suas mãos uma grande oportunidade: se utiliza seu tempo exercitando seus alunos em operações rotineiras, matará neles o interesse, impedirá seu desenvolvimento intelectual; porém, se estimula neles a curiosidade, poderá despertar o gosto pelo pensamento independente.

Esperamos que essa dissertação possa ser utilizada para o desenvolvimento de outras propostas visando a melhoria do ensino básico e um interesse maior dos alunos pela matemática. Como sugestões para outros estudos temos os temas planaridade e isomorfismo em grafos e problemas de pesquisa operacional com duas variáveis.

Grafos planares (grafos que, ao serem representados no plano, não possuem nenhuma aresta se sobrepondo) e **Grafos isomorfos** (grafos que possuem a mesma forma, são iguais mesmo que estejam representados de formas diferentes) são dois temas não explorados aqui, mas que envolvem além de raciocínio matemático a visão espacial. Os conteúdos poderiam ser trabalhados juntamente com o software GEOGEBRA. Veja um exemplo na Figura 105 onde ambos os grafos são planares e isomorfos.

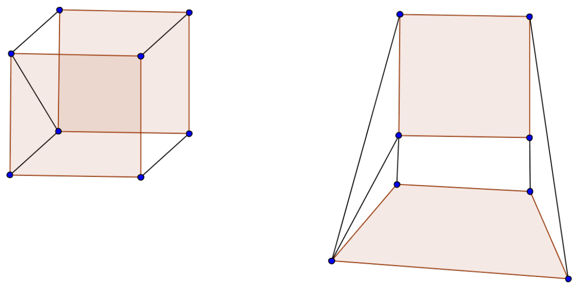


Figura 105 – Grafos iguais: esquerda não planar e da direita planar

Outro ponto que poderia ser estudado e relacionado com conteúdo aprendido no ensino médio é a relação de Euler (um grafo será planar se respeitar a fórmula $n - m + f = 2$, onde n é o número de vértices, m é o número de arestas e f as faces - regiões fechadas).

Outra sugestão seria a modelagem matemática com programação linear em problemas de pesquisa operacional com duas variáveis. O aplicativo Solver, apresentado na nossa proposta, pode ser usando também na resoluções desses tipos de problema. Uma outra opção seria a resolução através da análise dos gráficos gerados a partir das equações modeladas.

Inúmeras situações do cotidiano poderiam ser trabalhadas com os alunos, estimulado o raciocínio e a interpretação de texto. Apenas a título de sugestão, segue um exemplo desses tipos de problema:

Uma costureira produz blusas e saias. Ela ganha 40 reais por blusa e 15 reais por saia e gasta 2 hora para fazer uma blusa e 1 hora para fazer uma saia. A costureira dispõe de 8 horas diárias de trabalho. Como ela deve produzir suas blusas e saias de modo a conseguir o maior lucro possível por dia de trabalho?

A análise do texto, a modelagem do problema, o cálculo pelo Solver e a construção do gráfico para visualização da resposta seriam atividades diferentes e estimulantes para os alunos.

A modelagem proposta é semelhante a utilizada no PCM, onde definimos as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições. Neste exemplo, as variáveis de decisão seriam:

Quantidade de blusa produzidas = X_1

Quantidade de saias produzidas = X_2

A função objetivo será o maior lucro (L) possível. Neste caso:

$L = 40\ (X_1)$ (lucro por blusa produzida) $+$ 15 (X_2) (lucro por saia produzida).

As restrições estão relacionadas com o que produzir no tempo disponível pela costureira:

Restrição 1: $2\ (X_1) + 1\ (X_2) \leq 8$

Restrição 2: $X_1 \geq 0$

Restrição 2: $X_2 \geq 0$

Temos que 2 horas vezes a quantidade de blusa produzida mais 1 hora vezes a quantidade de saias produzidas não podem ultrapassar 8 horas diárias que corresponde ao tempo disponível pela costureira. Além disso, a quantidade produzida de blusas e saias deve ser maior ou iguais a zero.

Graficamente esse problema seria resolvido definindo as retas referentes as restrições e a reta referente ao lucro.

Onde ocorre a interseção entre elas se encontra a melhor solução. Na Figura 106, podemos ver que a melhor solução entre as opções A, B, C e D é o ponto B que corresponde a fabricação de 4 blusas dando um lucro de $160,00$ reais por dia.

As outras opções são A e C (produzir 8 saias por dia, faturando $120,00$) ou D (produzir 3 blusas e 2 saias que dariam um lucro de $150,00$ reais).

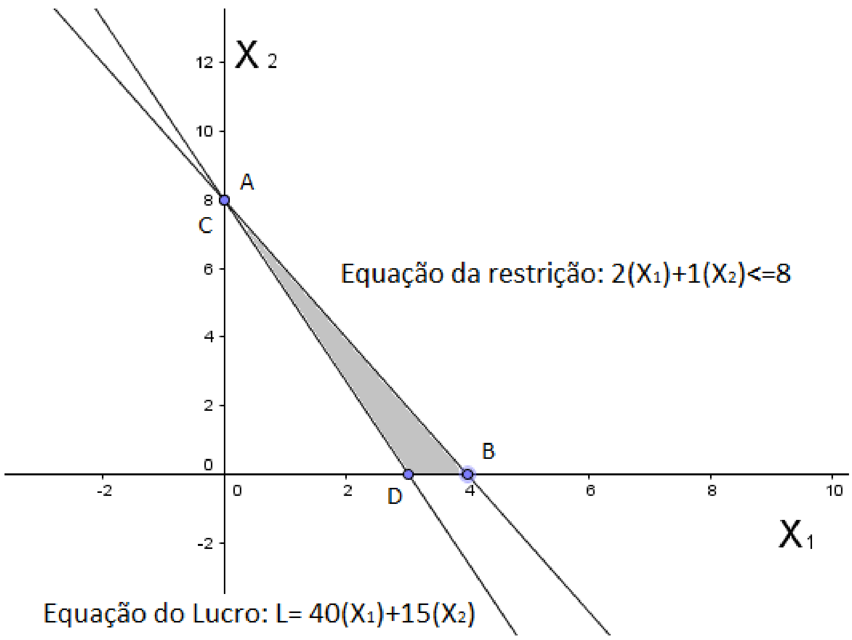


Figura 106 – Gráfico para resolução de problemas modelados.

Essas sugestões podem ser desenvolvidas tendo como ponto de partida essa dissertação, uma vez que tanto o conteúdo de grafos como a utilização do Solver estão descritos aqui.

Finalizamos com a expectativa de que a nossa proposta possa ser implementada de forma global, com a resolução de problemas que contemplem toda a teoria de grafos apresentada aqui. Mas, nada impede que sejam utilizados apenas alguns dos conteúdos, dando prioridade a um tema específico, uma vez que a teoria é muito rica e são várias as formas de utilização da mesma no contexto escolar.

Índice Remissivo

Referências

______. *PCN + Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/ensino/pcn.shtml. Acessado em 24/05/2015>.

______. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio*. Ministério da Educação (MEC), Secretaria da Educação. Brasília: [s.n.], 2000. Disponível em: <http://www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/cencian.pdf. Acessado em 11/05/2015>.

______. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica. Brasília: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acessado em 31/08/2015, 2006.

ARENALES, M. *Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia.* Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

BALIEIRO, I. F. *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya - Quatro Episódios da História da Heurística*. 2004. 217 f. Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos). Rio Claro: [s.n.], 2004. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br-/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/tese_balieiro_heuristicas.pdf. Acessado em 06/09/2015>.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.* 3ª. ed. São Paulo: Contexto, 2010.

BELINE, W. (Org); COSTA, N. M. L. O. *Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: Algumas Reflexões.* Campo Mourão: Editora de Fecilcom, 2010.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. 4ª. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BOAVENTURA NETTO, P. O. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 4ª. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BOAVENTURA NETTO, P. O.; JURKIEWICZ, S. *Grafos: Introdução e Prática*. 1ª. ed. [S.l.]: Blucher, 2009.

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph Theory*. [S.l.]: Springer, 2008.

D AMBROSIO, U. *Da Realidade à Ação: Reflexões sobre a Educação e Matemática.* 2ª. ed. São Paulo: Editora da Universidade de Campinas, 1986.

D AMORE, B. *Elementos de Didática da Matemática*. São Paulo: [s.n.], 2002.

FEOFILOFF, P.; YOSHIHARU, K; YOSHIKO, W. *Uma Introdução Sucinta a Teoria dos Grafos*. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/˜pf/teoriadosgrafos/>.

FIORENTINI, D. *Formação de Professores de Matemática: Explorando Novos Caminhos com Outros Olhares.* Campinas: Mercado das Letras, 2008.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. *Otimização Combinatória e Programação Linear*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

GOLDBARG, M. C.; GOLDBARG, E. *Grafos: Conceitos, Algoritmos e Aplicações*. Elsevier. Rio de Janeiro: [s.n.], 2012.

GUALANDI, J. H. *Investigações Matemáticas com Grafos no Ensino Médio*. 2012. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Pontíficia Univercidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte: 2012. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_gualandiJH_1.pdf.pdf. Acessado em 31/08/2015>.

HILLIER, F. *Introdução à Pesquisa Operacional*. 8ª. ed. Porto Alegre: McGraw Hill, 2006.

JURKIEWICZ, S. *Grafos - Uma Introdução.* Apostila 5 do estágio de treinamento dos alunos premiados da OBMEP: [s.n.]. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/dosc/apostila5.pdf. Acessado em 31/08/2015>.

LEITE LOPES, M. L. M. *Grafos: Jogos e Desafios*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2010.

LIMA, E. L. *Matemática e Ensino*. 3ª. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 2001.

LOESCH, C.; HEIN, N. *Pesquisa Operacional: Fundamentos e Modelo*. São Paulo: Saraiva, 2009.

LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. *Matemática Discreta*. 1ª. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 2005.

LOZANO, D. *Modelagem Matemática e Aplicações do Problema de Coloração em Grafos*. 2007. 79 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista: [s.n.], 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/95823. Acessado em 31/08/2015>.

MATOS, I. M. D. *Teoria dos Grafos no Ensino Básico e Secundário*. 2013. 69 F. Dissertação (Mestrado em Matemáticca para Professor) - Universidade de Aveiro: [s.n.], 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10773/12083. Acessado em 31/08/2015>.

MENDES, I. A. *Tendências Metodológicas no Ensino da Matemática*. Belém: EdUFPA. Disponível em: <http://iranmendes.com/livro-tendencias-metodologicas/. Acessado em 31/08/2015>.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática: Uma Análise da Influência Francesa*. 3ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Interciências, 2006.

PRESTES, A. N. *Uma Análise Experimental de Abordagens Heurísticas Aplicadas ao Problema do Caixeiro Viajante*. 2006. 85 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal: [s.n.], 2006. Disponível em: <http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/handle-/123456789/17962. Acessado em 31/08/2015>.

RIBEIRO, F. D. *Jogos e Modelagem na Educação Matemática*. Curitiba: Ibpex, 2008.

SADOVSKY, P. *O Ensino de Matemática Hoje - Enfoques, Sentidos e Desafios*. 1ª. ed. São Paulo: Ática, 2007.

SCHEINERMAN, E. R. *Matemática Discreta: Uma Introdução*. 2ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

SILVA, E. M. et al. *Pesquisa Operacional para Cursos de Administração e Engenharia: Programação Linear, Simulação*. 4ª. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

TAHA, H. A. *Pesquisa Operacional*. 8ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. *Matemática para Aprender a Pensar*. 1ª. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006.

ZIVIANI, N. *Projeto de Algorítmos com Implementação em Pascal e C*. 2ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2004.

Anexo

Um exemplo de PCM usando Modelagem Matemática – Passo a Passo

Seguindo os passos apresentados no capítulo 4 para resolver um problema através de modelagem matemática, vamos propor um exemplo de forma mais detalhada (passo a passo) para implementação do PCM utilizando essa abordagem.

- Primeiro passo: Escolha do tema ou modelo matemático

  Precisamos sugerir uma situação que desperte nos alunos o desejo de buscar soluções. Nossa sugestão é propor a eles um passeio em algum local próximo a escola (em torno de 500 a 800 m) e que possa ser feito a pé. Pode ser ir tomar um lanche numa lanchonete, uma sorveteria, etc. O problema está no tempo disponível para ir e voltar a esse local uma vez que se pretende realizar esse passeio utilizando um horário de aula, ou seja, 50 minutos.

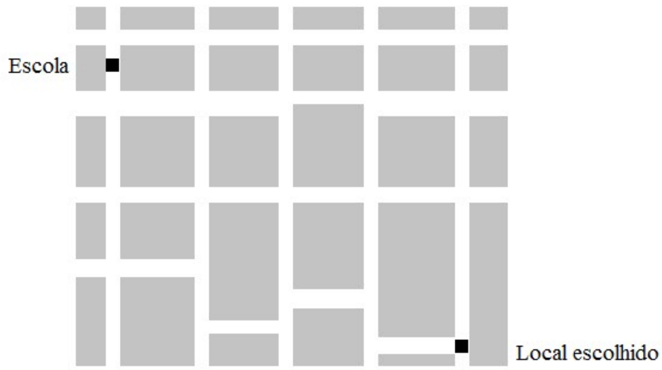
- Segundo passo: Interação com o tema

  Primeiramente os alunos precisam se entusiasmar com o passeio e quererem ir. Conseguindo a atenção dos alunos, levanta-se a questão do tempo que se terá para realizar o passeio. Veja a opinião dos alunos com relação a essa questão. Quanto tempo eles acham que vão gastar no percurso de ida e volta? Quanto tempo deverá ser gasto no local para tomar um lanche ou um sorvete? Como eles podem ter certeza dos valores sugeridos? Como poderia ser calculado de forma mais precisa esse percurso? Peça que anotem as sugestões dadas.

  Essa etapa deverá levantar as possibilidades de modo a se conseguir fazer o passeio no tempo disponível.

  Peça a todos os alunos que, em casa, verifique mapas da cidade e desenhem as ruas entre a escola e o local escolhido. Esse desenho deverá ser trago na próxima aula para continuação dos trabalhos. Segue uma sugestão de desenho representativo de um mapa:

Figura 107 - Sugestão de um desenho representando ruas.



Fonte: Da autora, 2015.

- Terceiro passo: Planejamento do trabalho a ser desenvolvido

  O professor deverá trazer para a próxima aula juntamente com os alunos o desenho que mostra as ruas entre a escola e o local a ser visitado, de modo que se algum aluno não fez o levantamento poderá acompanhar os debates pelo desenho do professor.

  Num primeiro momento o professor deverá apresentar seu desenho e pedir que os alunos confiram com os que eles fizeram para ver se está correto.

  Nesse ponto é interesse verificar se os alunos conseguiram conferir os desenhos e se estão todos certos. Caso algum esteja errado, o professor deve mostrar uma representação oficial (por exemplo um catálogo telefônico com a representação das ruas da cidade) para que o aluno verifique onde errou e corrija seu desenho.

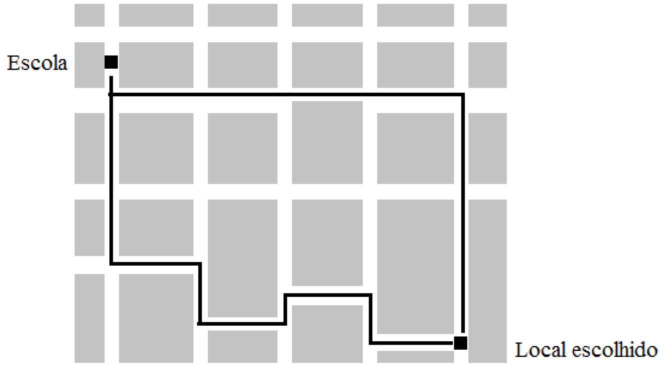
  Após todos os desenhos estarem corretos, o professor deverá dividir a turma em grupos de 4 à 6 alunos e pedir que eles indiquem todas as rotas possíveis e a distância de cada rota. Esse cálculo será uma previsão. É importante deixar os alunos proporem como será calculado esse valor. Se contando o número de quarteirões e fazendo uma estimativa por quarteirão. Buscando essa informação na internet através de programas que calculam a distância entre dois pontos, etc. (caso algum grupo sugira essa possibilidade verificar a disponibilidade de acesso à internet para implementação dessa sugestão).

  Acreditamos que essa atividade será realizada em duas aulas de 50 minutos cada.

  Caso essa atividade não seja concluída nesse dia, peça que os alunos a tragam pronta para a próxima aula.

Na próxima aula pedir que cada grupo apresente o número de rotas encontradas e a distância de cada uma. Segue um modelo de exemplos de rotas.

Figura 108 - Exemplos de rotas possíveis.



Fonte: Da autora, 2015.

Verifique se os alunos usaram análise combinatória na definição de todas as rotas possíveis e como eles chegaram nos valores encontrados. Finalize estabelecendo todas as rotas possíveis e a distância estimada em cada uma. Este trabalho pode ser feito em no máximo mais duas aulas.

Com todas as distâncias das rotas definidas é possível então questionar os alunos como prever o tempo que será gasto no percurso de ida e volta pela rota de menor distância. Como calcular? Deixe os alunos sugerirem soluções.

Pode-se apresentar nesse momento alguma reportagem ou texto científico que explique ou fale sobre a questão de tempo versus distância percorrida. Segue uma sugestão de reportagem: http://g1.globo.com/jornal-hoje/noticia/2010/11/especialistas-recomendam-dez-mil-passos-por-dia-para-sair-do-sedentarismo.html (acesso em 08/11/2015).

Nessa reportagem são apresentadas algumas informações que podem auxiliar no cálculo do tempo tais como:

"Segundo a Sociedade Brasileira de Medicina do Esporte, um adulto dá em média 110 passos por minuto, num ritmo mais acelerado".

"Dez mil passos equivalem a oito quilômetros. É o mesmo que percorrer uma distância do tamanho de 40 quarteirões".

Os grupos deverão finalizar o trabalho apresentando o tempo que se gastará no percurso de ida e volta ao local a ser visitado.

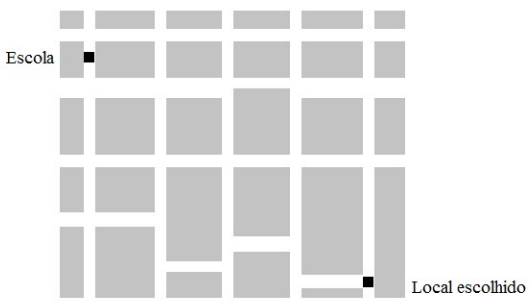
Verificar se os resultados apresentados torna viável o passeio no tempo disponível. Sendo viável, realizar o passeio com os alunos. Não sendo viável, realizar o passeio em um dia que houver duas aulas de matemática ao invés de uma. Anotar durante o passeio o tempo gasto no percurso.

- Conteúdo matemático: Os modelos apresentados para a solução do problema devem estar baseados nos conteúdos já estudados. Nesse exemplo acreditamos que os alunos irão utilizar análise combinatória para achar todas as rotas possíveis.

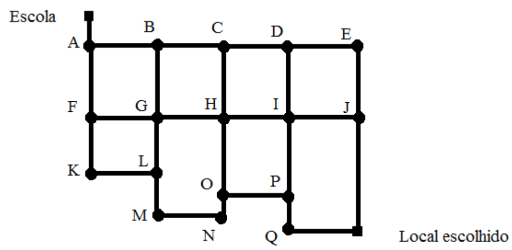
  Após a finalização dos cálculos e antes do passeio ser realizado, o professor poderá inserir o conteúdo de grafos na resolução do PCM, mostrando como poderia ter sido calculado o percurso procurado através de grafos.

  Mostrar aos alunos a teoria de grafos necessária ao entendimento do PCM, representando as esquinas com vértices e as ruas como ligações, conforme figuras abaixo.

Figura 109 - (a) Desenho ilustrativo das ruas e (b) Representado através de grafo.



(a)



(b)

Fonte: Da autora, 2015.

Anotar os pesos nas ligações de acordo com os valores estimados e ensinar a resolver esse problema através do algoritmo de Dijkstra (ver capítulo 3). Em seguida resolver também utilizando a programação linear e a utilização do Solver (ver capítulo 4). Analisar com os alunos essas modos de resolver o problema proposto. Se foi mais simples achar o percurso mais curto dessas formas? Quais as vantagens e desvantagens se comparadas com o uso de análise combinatória?

- Validação e extensão dos trabalhos desenvolvidos: Após a realização do passeio e tendo anotado o tempo efetivamente gasto no percurso de ida e volta, comparar com os cálculos feitos.

  O tempo gasto no passeio foi o mesmo que o calculado?

  Se sim, confirmados os cálculos feitos e o modelo matemático usado para isso.

Se não, qual a diferença entre o real e o previsto? Qual a opinião dos alunos para o erro encontrado? Como poderia ser corrigido esse erro? Em termo de estimativa, qual o tamanho do erro (em porcentagem)? Perguntar também sobre outros exemplos práticos onde o PCM se aplica? Estes questionamentos e debate podem ser feitos em uma aula ou menos (em torno de 20 a 30 minutos)dependendo do entendimento e desenvolvimento da atividade.

Após a realização dessa atividade podem ser apresentados outros exemplos de PCM para cálculo através do Algoritmo de Dijkstra e programação linear (utilizando o Solver).