Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Algumas Aplicações de Física do Ensino Médio a partir do Cálculo Diferencial e Integral †

por

Lucas Cavalcanti Cruz

sob orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2013
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Algumas Aplicações de Física do Ensino Médio a partir do Cálculo Diferencial e Integral

por

Lucas Cavalcanti Cruz

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Cálculo Diferencial e Integral.

Aprovada por:

Prof. MSc. Gilmar Otávio Correia - UFPB (Co-orientador)

Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas - UFPB

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza - UFCG

Março/2013

"Hiram fez ainda o Mar, todo de metal fundido, com cinco metros de diâmetro. Era redondo, tinha dois metros e meio de altura, e sua circunferência tinha quinze metros."

1 Rs 7,23

"Só a fé explica o que a razão limita."

Lucas Cavalcanti Cruz

Agradecimentos

Para mim, sempre é difícil começar a escrever os agradecimentos pois tantas foram as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão desse mestrado, bem como para a finalização dessa dissertação. Seria injusto da minha parte agradecer a algumas pessoas e esquecer de outras, mas como, com certeza, não lembrarei todos os nomes, aqueles que não forem citados tenham certeza que também são muito importantes.

Começo agradecendo a toda minha turma do PROFMAT - UFPB. Pessoas que com as quais eu convivi durante cerca de dois anos, pessoas que batalharam comigo, me ajudando, quer seja estudando para as mais diversas disciplinas ou apenas conversas com ótimos conselhos. Quando começamos éramos aproximadamente cinquenta pessoas, de diversos estados, diferentes culturas e costumes, alguns percorriam distâncias enormes para chegar até a universidades, enfrentando verdadeiras batalhas todos os finais de semana. Mas mesmo com tudo isso, juntos batalhamos e superamos todas as dificuldades. Jamais me esquecerei dessa turma incrível.

Mas em particular gostaria de agradecer aos mestres: Ambrósio Elias, Antônio Geraldo, Aurílio Guedes, Cícero Demétrio, Ellen Patrícia, Fernando Viana, Hálisson Barreto, Marcelo Rodrigues e Sívio Cruz por formarem o grupo do qual estive mais próximo e convivi um pouco mais. Obrigado por todas nossas conversas, caronas, ajudas com exercícios, etc.

Agradeço imensamente ao amigo Luis Eduardo Wanderley Buarque de Barros, pois sem ele não sei como faria para continuar, pois ele foi a única pessoa que se preocupou e conseguiu resolver o problema da minha bolsa de estudos.

E, para terminar, agradecer ao grupo de Natal - RN, em nome do mestre Thiago Valentim, que articulou o contato com o professor Carlos Gomes, cuja ajuda foi inestimável na reta final para a preparação para o Exame de Qualificação.

Agradeço também aos outros amigos PROFMATIANOS que estiveram comigo no curso em Sèvres, na França. Pessoas que eram completamente estranhas no início, mas que com a convivência durante um mês mostraram-se pessoas sensacionais e tornaram-se verdadeiros amigos. Pessoas de vários estados do país, com sotaques diferentes, preferências gastronômicas diferentes, mas que durante um mês deixaram tudo isso de lado para formar laços de amizades. Agradeço a todos vocês por essa experiência incrível que me proporcionaram viver. Em especial agradeço ao amigo Aroldo Athias Rodrigues, que mesmo sem saber, me disse palavras importantíssimas para a minha decisão sobre que direção tomar para concluir essa dissertação.

Minha turma do Curso de Especialização para Professores de Matemática do Ensino Médio também teve grande importância durante esse período. Pois no primeiro ano do curso, em 2011, eu cursava tanto a especialização quanto o mestrado, além de morar longe de casa, em Campina Grande - PB. E todo o pessoal sempre me deu bastante força para continuar. Agradeço a todos, de coração.

Minhas turmas das mais diversas graduações, pois sem vocês eu não chegaria até aqui. Todo o pessoal da matemática e da física que sempre me incentivaram a continuar nos estudos dando forças para não desistir e dessa maneira eu consegui aliar, no meu trabalho de conclusão as duas disciplinas que mais me dedico a estudar.

Agradecimento especial ao professor Nilton Teruya, pelas enormes contribuições dadas ao trabalho, recebendo-me em sua casa até tarde para me explicar alguns conceitos que ainda pareciam confusos. Agradeço todas as sugestões e críticas que tornaram o trabalho mais rico.

Igualmente importante e que merece meu agradecimento é a professora Carolina de Andrade Amorim, que apesar do pouco tempo que convivemos juntos no curso de Medicina, ela pode abrir meus olhos para que eu conseguisse compreender aspectos da minha personalidade que foram importantes para algumas decisões e me fizeram crescer como ser humano.

Nesse mesmo contexto, durante a rápida passagem pelo curso de Medicina na Faculdade de Ciências Médicas, agradeço a toda turma, que me acompanhou nos momentos finais da dissertação e sempre compreenderam o esforço que eu fiz e assim, me apoiaram bastante. Em especial agradeço a Sheyla Rocha, que já era minha amiga, mas que graças as várias caronas durante o curso tivemos a oportunidade de conversar um pouco mais e estreitar nossa amizade. Suas palavras também foram importantes para eu concluir essa dissertação.

Agradeço imensamente a todos que fazem parte da Escola Internacional Cidade Viva, escola na qual trabalho atualmente. Pois desde 2012 me proporcionaram uma incrível experiência de conhecer não apenas novos companheiros de trabalho, mas encontrei uma nova família, conduzida por DEUS, verdadeiramente.

Da minha formação básica agradeço ao Colégio GEO, em nome do professor Alfredo Codevilla, pois através desse colégio iniciei com os primeiros passos essa longa caminhada.

A todos os amigos que estão presentes em minha vida e mesmo aqueles com os quais já não tenho tanto contato, quer seja dos movimentos da Igreja (Crisma, EJC, Catecumenato), quer seja da escola, da faculdade de Direito, da Argentina, da França ou simplesmente pessoas que apareceram em minha vida. Ao estar com qualquer um de vocês eu posso sentir a presença de Cristo e lembro que jamais devemos desistir. Obrigado.

Amigos de longas datas (Old School) que sabem que são extremamente importantes na minha vida. Que me acompanharam nesses dos últimos anos reclamando comigo todo final de semana pois eu já não saia mais com eles nas sextas-feiras, porque teria aula no sábado pela manhã, nem saia mais nos sábados pois estava cansado da semana muito atarefada. Mas esses grandes amigos sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e me ajudando quando precisei. Até no dia da defesa da dissertação estavam lá, mesmo sem entender o que eu estava falando. Meus eternos agradecimentos a todos: André Clementino, Bruno Carvalho, Danilo Leite, Davi Veloso, Diego Augusto, Glênio Leitão, Lincoln Pontes, Paulo Henrique Cavalcanti, Rafael Targino, Rafael Uchôa e Rodrigo Godoy.

Minha família merece todos os agradecimentos do mundo, são meu porto seguro, pessoas que sei que sempre posso contar e que me apoiaram em todos os momentos. Tios, tias, primos e primas, de perto ou de longe, do Brasil ou do exterior. Obrigado por me ajudarem a chegar até aqui.

Minha irmã Natália Ludmila, que mesmo com todo seu jeito, *carinhoso e delicado,* eu sei que me ama muito e sempre deseja o melhor para mim, mesmo quando não concordamos. Essa menina me dá muito trabalho, mas sem sua presença em minha vida, sem sua ajuda, sem nossas conversas, sem suas broncas e conselhos, eu não seria quem sou hoje. Irmãzinha, muito obrigado.

Meu cunhado Raphael Peixoto e minha irmã mais velha Bartyra Cruz. Poxa, o apoio que recebo de vocês não tem palavras que possam descrevê-lo nem instrumentos de medidas que possam mensurá-lo. Vocês sempre conseguem mostrar que tudo pode ser visto de uma maneira diferente, e assim, abro minha mente para novas possibilidades. E ainda falta falar de outro amor da minha vida, meu sobrinho Samuel Cruz. Os momentos de alegria que ele me proporciona quando estamos brincando, jogando vídeo-game, na piscina, etc. são essenciais para mim. Sinto muita falta de vocês por estarem tão longe.

Minha namorada Manuella Dias. Não tenho como agradecer tudo que ela fez e faz por mim. É a pessoa que me ajuda a ver que DEUS está presente e se manifesta na

minha vida sempre que eu pareço esquecer disso. Divide grandes momentos comigo, me suporta nos momentos em que entro em desespero por causa dos problemas, me aguenta quando estou chato, me escuta e me aconselha. E ainda se for agradecer pela ajuda direta nesse trabalho precisarei escrever muitas outras páginas. Só ela sabe o quanto foi complicado chegar até aqui, escrever vários outros capítulos, ela me ajudou nas correções, nas sugestões, na formatação, nas referências, enfim, esse trabalho, de certa maneira, também é dela. Muito obrigado por todo seu Amor, carinho, amizade e dedicação. Te amo muito.

Parece que quando chegamos mais próximos do final fica mais difícil agradecer. Minha mãe, Maria de Fátima. Não tenho como agradecê-la, pois teria que escrever sobre tudo o que ela fez nesses últimos vinte e sete anos. Se cheguei até aqui foi porque sempre tive todo o seu apoio, toda sua dedicação, todo seu Amor. Mas em especial para a conclusão de mais essa etapa na minha vida, e em particular sobre a elaboração desse trabalho, queria repetir uma lição que aprendi com ela, que também me ajudou a tomar algumas decisões: "Meu filho, não se preocupe, termine e entregue logo isso, do jeito que eles querem, porque um dia a roda grande vai rodar dentro da pequena". Ela sabe do que se trata, e eu tenho certeza que esse dia chegará. Mãe, muito obrigado por tudo.

Agradecer ao meu pai, José Marcílio Cruz, é igualmente difícil, pois é ele com quem eu desabafo, foi ele quem escutou todas as minhas reclamações, foi ele que sempre esteve ao meu lado me apoiando e comprando todas as batalhas que tive que disputar. É ele que fica sem dormir preocupado em como resolver meus problemas, é ele que com toda a paciência mostra-me que devo me acalmar e não decidir precipitadamente, foi ele quem, principalmente, me mostrou que abrir mão de um direito não significa, necessariamente, perder, mas isso pode tornar-se uma porta aberta para uma vitória maior a longo prazo. Vitória e derrota dependem de como enxergamos as situações. Pai, agora, podemos ter perdido, mas com sua ajuda alcançaremos uma grande vitória, em breve. Te amo muito. Muito obrigado.

Cada um de vocês foram e são essenciais em minha vida, e graças a vocês eu pude concluir mais essa etapa e torna-me mestre. Muito obrigado.

Muita coisa do que foi escrita aqui parece sem sentindo para queles que não conheceram toda a história para a conclusão desse trabalho, desde a escolha do tema até o dia da entrega da versão final. Se você leu até aqui, sentiu curiosidade e deseja saber o que aconteceu entre em contato comigo pelo e-mail: lucasjop@gmail.com ou acesse meu blog: http://lucasjop.blogspot.com.br/ para conhecer os detalhes.

O agradecimento mais importante que com o qual devo terminar é a DEUS. Esse DEUS que me abençoa e me unge para servi-lo. Permite e ajuda a alcançar todos meus objetivos. Esse DEUS que me mostra que a vida está muito além da matemática e da física, muito além de fazer contas ou ensinar, mas que a vida só vale a pena ser vivida quando se vive com Amor, ao lado dEle e das pessoas que amamos. Esse DEUS que me capacitou a chegar até aqui e que eu desejo, com todo meu coração, ser instrumento em Suas mãos, para levar a Sua palavra onde se fizer necessário, quer seja no Brasil ou fora dele, durante minhas aulas ou com uma dissertação. Mas que acima de tudo, que a minha vida testemunhe a grandeza do Amor de DEUS e como ele pode nos transformar. Não tenho palavras para agradecer-te, Senhor. Muito obrigado!

Dedicatória

A DEUS Todo-Amoroso: o Pai, o Filho e o Espírito Santo.

A todos os Educadores que fazem da Matemática muito mais que números, mas se preocupam em transmitir e criar novos conhecimentos.

Resumo

Este trabalho trata do ensino de tópicos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio. É feita uma breve análise histórica do seu desenvolvimento, mostrando algumas ideias que serviram para sua formalização conforme temos atualmente. São definidos alguns elementos do cálculo para compará-los com algumas noções intuitivas ou ideias geométricas. Para finalizar, será discutida a importância e a utilidade desses assuntos para outras disciplinas, em particular a Física e como, a partir de algumas aplicações, os estudantes poderiam compreender vários conceitos de maneira mais simples e não necessitariam memorizar uma quantidade enorme de fórmulas.

Abstract

This paper deals with the teaching of topics in Differential and Integral Calculus in high school. A brief historical analysis of its development, showing some ideas that served for its currently formalization. Some calculus' elements are also defined to compare them with some intuitive notions or geometric ideas. To finalize it will discuss the importance and usefulness of these issues to other disciplines, particularly physics and how, from some applications, students could understand various concepts in a more simple way and does not require to memorize a huge amount of formulas.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

"E pur se muove."
Galileu Galilei

Hiram, citado na epígrafe do trabalho, foi o mais hábil artesão fundidor de metais do tempo do Rei Salomão, o qual é considerado como o maior rei de todo o povo judeu por sua infinita sabedoria. Este mesmo versículo é repetido em 2 Cr 4, 2. E o que isso tem com o Cálculo? Tudo! Essa descrição narra para nós o início do famoso número π. Cinco metros de diâmetro e uma circunferência de quinze metros. Apesar de toda sua sabedoria, no tempo do Rei Salomão usava-se $\pi = 3$.

A importância e a relação do π com o Cálculo é muito grande, pois foram processos como os de determinar a área do círculo que deram origem às ideias utilizadas para o seu desenvolvimento. E uma das consequências deste cálculo é, exatamente, o número π.

O filósofo pré-socrático *Parmênides* (530-460 a.C) (Figura 1.1) acreditava que só seria possível obtermos o conhecimento verdadeiro daquilo que não muda, que é eterno e invariável, apesar das aparências. Porém um aforismo de *Heráclito* (535-475 a.C) (Figura 1.2) diz que "não é possível banhar-nos no mesmo rio duas vezes, quando voltamos ao rio, nem nós nem o rio são mais os mesmos". Ele acreditava na vida como uma mudança constante e eterna, é conhecido como o filósofo do *tudo flui*. Ou ainda, como já ouvi certa vez: "Na vida a única coisa que não muda, é a certeza da mudança".

Estas ideias contrapõem-se no pensamento humano há bastante tempo e esses filósofos representam posições antagônicas que sobrevivem ao longo dos séculos. Atualmente elas são muito bem representadas pela "Metamorfose Ambulante" referente à mudança constante ou ainda sobre a resignação de "Eu nasci assim, eu cresci assim, eu vou ser sempre assim...." da canção "Modinha Para Gabriela" dos famosos artistas soteropolitanos Raul Seixas e Gal Costa, respectivamente.

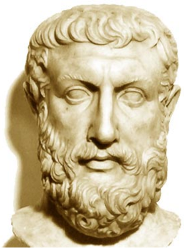


Figura 1.1: Parmênides (SIEMS, 2011)

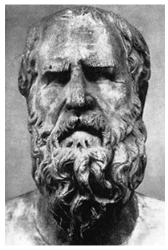


Figura 1.2: Heráclito (CABRAL, s.d.)

Mas, qual a relação desses pensamentos ou canções com o Cálculo?

Sempre que pensamos em grandezas que variam ao longo do tempo, ou grandezas que variam em função de outras grandezas, estão intrínsecas em nossos pensamentos as ideias do Cálculo. É exatamente sobre essa dialética entre variação e constância que reside a essência desse estudo. Considerar grandezas variáveis como constantes em pequenos intervalos ou ainda caracterizar de que forma essas grandezas variam. Tudo isso é Cálculo Diferencial e Integral, que será chamado apenas de Cálculo.

O estudo desses tópicos ocorreu ao longo de vários séculos e contou com a contribuição de várias pessoas. Nada apareceu pronto, mas a partir de necessidades humanas a matemática desenvolve-se de maneira extraordinária. Hoje, porém, esse assunto foi retirado da educação básica, e é deixado, principalmente, para os cursos de nível superior. Esse trabalho mostrará que as ideias fundamentais do Cálculo são muito importantes para todas as pessoas devido a sua grande aplicabilidade em diversas áreas, podendo e devendo ser incluído no Ensino Médio. Costumamos pensar a princípio apenas em áreas tecnológicas, mas sabemos que o Cálculo é uma ferramenta essencial em outras áreas, como saúde e ciências humanísticas. Os estudantes de nível médio também se beneficiarão com o estudo desses conteúdos uma vez que poderão utilizá-los não só em questões próprias da Matemática, mas em outras disciplinas, como Física, Química e até Biologia.

Fazendo uma retrospectiva histórica da educação no Brasil, vemos que, recentemente, por pelo menos 3 vezes, tópicos de Cálculo fizeram parte do currículo oficial das escolas secundárias, primeiro com a reforma *Benjamim Constant* (1890), ratificada na reforma *Francisco Campos* (1931) e depois com a reforma *Gustavo Ca-*

panema (1942). No final da década de 60 e início da década de 70, com a influência do Movimento da Matemática Moderna o ensino dessa disciplina foi bastante alterado, no Brasil e no mundo. Uma dessas alterações foi a exclusão dos conteúdo de Cálculo no ensino secundário.

> "O Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. [...] O Cálculo é moderno porque traz idéias novas, diferentes do que o aluno de 2º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas idéias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. Não se visa, com o ensino da Matemática no 2º grau, formar especialistas no assunto." (ÁVILA, 1991, p. 3)

Assim como afirma Ávila, os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN) propõem que o currículo do Ensino Médio garanta aos estudantes uma oportunidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental de maneira integrada entre as disciplinas preparando-os para o trabalho e exercício da cidadania bem como capacitando-os para continuar os estudos no nível superior.

Assim sendo, cabe ao Ensino Médio prover as ferramentas necessárias para garantir tudo o que é proposto nos PCN. Com isso, deve-se discutir como e quais conteúdos de Cálculo devem ser ministrados, uma vez que a prática mostra que o currículo de matemática já está bastante comprometido, com muitos assuntos, dificultando a inserção de mais conteúdo.

Esse estudo no Ensino Médio pode apresentar diversas vantagens, mas não deve ser feito de qualquer maneira. Uma ideia que deve ser considerada é o ensino articulado com outras disciplinas, por exemplo a Física. Pode-se ensinar o conceito de *derivada* a partir da mecânica, com exemplos de movimento uniforme, movimento uniformemente variado, pressão, densidade de carga elétrica, dentre outros. Ou ainda para uso interno na própria Matemática, com a ideia geométrica de inclinação da reta tangente à uma curva num dado ponto, contextualizando o conteúdo para estimular o interesse do estudante.

O reflexo da falta desses conteúdos é sentido nos curso iniciais de Cálculo no nível superior. Segundo estudos desenvolvidos pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), os cursos de cálculo estão com índices de reprovação altíssimos e isso nos remete novamente à questão de introduzir essas ideias no Ensino Médio.

Deve-se compreender o porquê da exclusão do ensino do Cálculo no nível médio, apesar de sua notória importância e o porquê de tanta dificuldade encontrada pelos estudantes. Uma hipótese, é a falta de conhecimento de sua história, de sua origem e desenvolvimento. E outra hipótese, é a dificuldade encontrada porque o Cálculo apresenta uma verdadeira revolução nas ideias às quais estávamos presos, introduzindo conceitos como os de limite que fazem apelo à intuição, à ideias abstratas e, talvez, a mais difícil ideia, que demorou muito tempo para chegar à compreensão do ser humano: a ideia de infinito.

1.1 Motivação

No Ensino Superior, poucos se interessam em compreender todas essas novas ideias e aprender a fundo o Cálculo. A maioria dos estudantes fica presa apenas às suas aplicações, sem se preocupar com um estudo mais abrangente e completo. Assim, o estudante esbarra nas dificuldades das operações e o estudo por esse conteúdo acaba tornando-se desprazeroso.

Esse problema poderia ser resolvido se já no Ensino Médio fossem apresentadas algumas dessas noções, como as de limite, mostrando quais tipos de problemas impulsionaram o desenvolvimento do Cálculo para que os estudantes se interessassem por esses assuntos e sentissem mais vontade para estudar. Poderiam ser apresentados os problemas das quadraturas, as ideias do Método da Exaustão ou mesmo as ideias por trás das integrais.

A proposta não é ensinar o Cálculo com todo seu rigor, isso também seria desnecessário, além de bastante enfadonho para os estudantes de nível médio, e historicamente, o Cálculo também não surgiu assim, mas começou com ideias simples e levou bastante tempo para receber o formalismo atual. Deve-se apresentá-lo aos estudantes como criação humana que nos ajuda a resolver diversos problemas.

Segundo Ávila (1991):

> "Ensina-se Matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento."

Por isso é importante privilegiar uma Matemática que seja capaz de modificar nossa visão de mundo e nos permitir aplicar os conhecimentos para as diversas atividades que formos realizar, não uma Matemática estática, de decorar fórmulas ou problemas prontos.

Então a ideia de apresentá-la no nível médio é importante para a formação dos estudantes, pois eles serão os novos engenheiros, médicos, tecnólogos, físicos, matemáticos, químicos, biólogos, etc. Mas como fazer isso tendo em vista que o currículo do Ensino Médio já é bastante denso, já tem assunto demais para trabalhar?

Sobre esse ponto Ávila (1991) afirma:

> "A idéia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do Cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados."

Ou seja, perde-se muito tempo no Ensino Médio ensinando formalismos, regras e nomenclaturas que não são essenciais. Poder-se-ia utilizar esse tempo de uma maneira melhor, estimulando a criatividade que é tão necessária para o desenvolvimento da própria Matemática. E essas novas ideias e um novo paradigma da "matemática do movimento" são desenvolvidas pelo Cálculo.

Ávila ressalta ainda que gasta-se muito tempo no estudo das funções com nomenclaturas como: domínio, contra-domínio, função injetora, função sobrejetora, função inversa. Um esforço que gera poucos resultados práticos, uma vez que esses conceitos não são solicitados pelo estudante ao longo do curso. E por outro lado, fica-se com pouco tempo para trabalhar as ideias inerentes às funções como de uma relação entre grandezas que variam, que mudam. Ou seja, nesse momento pode-se começar com uma pequena introdução das ideias do Cálculo: a ideia de variação.

Esse seria um bom momento para mostrar o problema da determinação da reta tangente a um ponto no gráfico de uma função, mas não seria preciso, necessariamente apresentar o conceito de contra-domínio. Não é que esses conceitos não sejam importantes, mas a forma como são ensinados, de maneira a fazer os estudantes decorar muitos novos nomes, não é adequada, e esquece-se do fundamental.

Zenão (490-430 a.C) (Figura 1.3), filósofo grego, propôs quatro problemas que nos foram deixados por *Aristóteles* (384-322 a.C) (Figura 1.4) e ficaram conhecidos como os *Paradoxos de Zenão*.

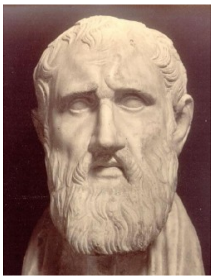


Figura 1.3: Zenão (ARAÚJO, 2010)

Figura 1.4: Aristóteles (GABA, 2011)

Segundo Stewart (2012) esses paradoxos sempre desafiavam o senso comum. O segundo paradoxo trata sobre uma corrida entre o herói grego *Aquiles* e uma tartaruga: Aquiles inicialmente em uma posição a_1 daria uma vantagem a tartaruga que largaria de uma posição t_1, à frente. Quando Aquiles chegasse na posição $a_2 = t_1$, a tartaruga já estaria em uma nova posição t_2. Depois Aquiles alcançaria a posição $a_3 = t_2$, a tartaruga, porém, já estaria na posição t_3, mais a frente e assim por diante. Dessa maneira o lendário herói Aquiles jamais venceria a corrida contra a tartaruga (Figura 1.5).

Figura 1.5: Aquiles X Tartaruga

Outro importante paradoxo conta que o movimento é impossível! Pois para que haja o deslocamento entre um ponto A (inicial) e B (final), deve-se antes passar pelo ponto médio entre A e B, digamos C. Mas antes de chegar ao ponto C, é necessário passar pelo ponto médio entre A e C, que seja D, porém antes de chegar ao ponto D, é necessário alcançar o ponto médio entre A e D, dito E. Com essa ideia repetidas vezes mostra-se que no final não seria possível sair do ponto A, não havendo, assim, o movimento!

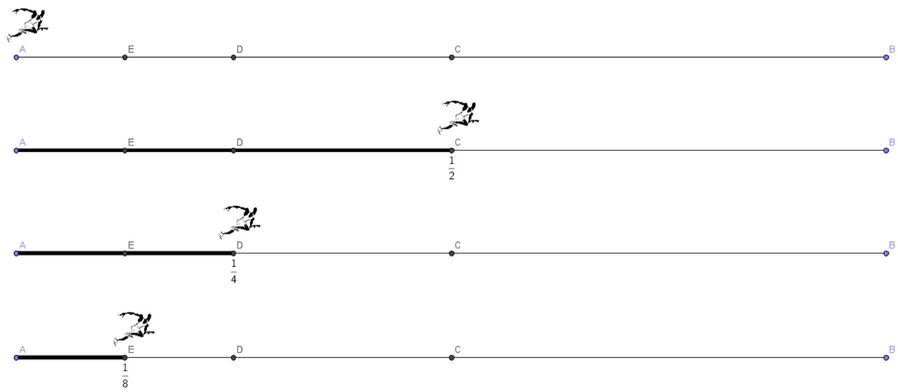


Figura 1.6: Paradoxo do Movimento

O que faltava nessa época para responder a esses paradoxos, afinal Aquiles venceu a tartaruga e é possível nos locomovermos entre o ponto A e B, era a ideia de *limite*, essencial ao Cálculo! E é precisamente o conceito de limite que vai extrapolar a barreira da matemática comum ou básica e dará nova vida à chamada *Matemática Superior*.

Essas ideias, podem ser trabalhadas de maneira muito prazerosa com estudantes de nível médio. Pode-se até iniciar esse estudo a partir desses paradoxos. Os conceitos precisos e suas definições $\epsilon - \delta$ ficarão melhor nos curso de nível superior, mas trabalhar ideias e mostrar como e para que o Cálculo foi criado é essencial a todos!

1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo apresentar, de maneira breve, um pouco da história do Cálculo Diferencial e Integral, sobre seu desenvolvimento e as principais ideias que motivaram seu estudo. Desenvolver alguns conceitos do Cálculo de maneira mais intuitiva para mostrar que é possível apresentar essa ferramenta matemática de forma compreensível para estudantes do Ensino Médio aliando esse conhecimento com aplicações da Física.

1.3 Estruturação do Trabalho

Este trabalho está estruturado em 4 capítulos, a saber:

- Capítulo 1 - Introdução:
  Neste capítulo são apresentadas algumas ideias que motivaram o desenvolvimento do Cálculo e breves comentários de sua relação no ensino brasileiro. São apresentadas, ainda, algumas informações sobre a interdisciplinaridade, em particular com a Física.

- Capítulo 2 - Um pouco de Cálculo:
  O Capítulo 2 contemplará tópicos de Cálculo para funções de uma única variável: limites, derivadas e integrais. Desta maneira serão mostrados alguns conceitos e definições e apresentada uma ligação com ideias intuitivas e construções geométricas a fim de mostrar que é possível trabalhar alguns desses tópicos de maneira simples sem muito rigor matemático.

- Capítulo 3 - O Cálculo e a Física:
  Serão discutidas algumas aplicações de Física que utilizam os conceitos do Cálculo, como apresentados no Capítulo 2. É feito ainda uma comparação com o conteúdo como trabalhado no Ensino Médio, sem a utilização do Cálculo, como muitas fórmulas que só podem ser memorizadas, dificultando a compreensão. Dessa maneira mostra-se que a utilização do Cálculo é indispensável para ajudar os estudantes, com ênfase na Física.

- Capítulo 4 - Considerações Finais:
  Neste Capítulo serão feitos alguns comentários gerais a respeito do que foi discutido ao longo do trabalho, ressaltando os pontos importantes da ligação do Cálculo com o Ensino Médio, mostrando que é possível o estudante desse nível compreender suas ideias e utilizá-las de maneira a auxiliá-lo como uma ferramenta útil em diversas disciplinas.

Capítulo 2

Um pouco de Cálculo

"Integre DEUS, pois dele tudo deriva."
Autor desconhecido

Neste capítulo será feito um estudo, simples, de conceitos do Cálculo: limites, derivadas e integrais. Serão demonstrados alguns teoremas importantes, algumas propriedades e exemplos de aplicação desse conteúdo. Este trabalho não pretende reproduzir esses assuntos como apresentados em livros didáticos, que são muito mais amplos, mas apenas tecer alguns comentários e apresentar elementos essenciais que podem ser ensinados no Ensino Médio. Serão usados como referências principais Stewart (2012) e Swokowski (1994).

2.1 Limites

O conceito de *limite* de uma função f é o que separa a matemática elementar da matemática superior, suas ideias são bastante diferentes da álgebra e da geometria. No início de seu desenvolvimento, durante o século XVIII, essas ideias foram utilizadas de forma bastante intuitivas, sem grandes formalismos matemáticos embora sejam fundamentais para o entendimento do Cálculo, sendo exatamente por isso que elas devem ser discutidas no Ensino Médio.

A ideia intuitiva de limite é a seguinte: Dados f uma função de valores reais definida em um subconjunto I de $\mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de I (ou seja, x_0 é tal que, qualquer intervalo da forma $(x_0 - r, x_0 + r)$, com $r > 0$, intersecta $I \setminus \{x_0\}$), dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é igual a um certo número $L \in \mathbb{R}$ se quanto mais próximo desse x_0 estiver x, mais próximo de L estará

$f(x)$. No entanto, há uma certa imprecisão no que representa o termo *próximo*. É necessário quantificá-lo, pois para um pesquisador o resultado de uma medida pode ser considerado próximo ao valor exato se o erro não for maior que 10^{-5} por exemplo, mas para outro, esse erro pode ser muito grande, e o valor próximo pode ser considerado a partir de 10^{-15}. Para resolver esse problema temos a definição a seguir:

Definição 1 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, x_0 um ponto de acumulação de I e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é igual a L se:*

$$\textit{para todo } \epsilon > 0 \textit{ existe } \delta > 0 \textit{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta, x \in I \Rightarrow |f(x) - L| < 0. \tag{2.1}$$

Notação: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Observe que a definição acima não nos dá uma forma prática de se calcular o limite de uma função em um dado ponto. De fato, devemos eleger um candidato a limite, L, e mostrarmos que a frase "para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta, x \in I \Rightarrow |f(x) - L| < 0$" é verdadeira. No entanto, para obter tal candidato a limite, muitas vezes recorremos a noção intuitiva de limite e, em seguida, mostramos que tal candidato é o limite da função.

É claro que, nem sempre o limite existe. Porém, quando o limite existe ele é único. De fato, suponha que $L_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ e $L_2 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Então dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $0 < |x - x_0| < \delta_i$, $x \in I$ então $|f(x) - L_i| < \epsilon$, $i = 1, 2$. Tomando-se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos que se $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in I$ então $|f(x) - L_1| < \epsilon$ e $|f(x) - L_2| < \epsilon$. Em particular, $|L_1 - L_2| < 2\epsilon$ e, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, $L_1 = L_2$.

Percebe-se que, em geral, as pessoas têm dificuldades de entender o significado preciso da definição 1, quando veem tal conceito pela primeira vez. Por isso, pode-se iniciar o ensino dos limites de várias maneiras, com histórias como as dos Paradoxos de Zenão ou ainda apresentando motivações históricas que serviram para seu desenvolvimento como o problema da determinação da reta tangente ou de velocidade instantânea. Mas esses problemas serão tratados na próxima Seção.

O importante é fazer com que os estudantes desenvolvam e usem suas intuições, embora nem sempre as conclusões intuitivas estejam corretas como será mostrado no Exemplo 2. A seguir, serão apresentados alguns exemplos, nos quais serão explorados a noção intuitiva para obter um candidato a limite.

Exemplo 1 *Dada a função f tal que* $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$*, sabendo que* $f(x)$ *não está definida para* $x = 3$ *pode-se questionar o que acontece com os valores de* x *próximos de* 3*. Estão representados na Tabela 2.1 alguns resultados:*

x	$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$
3,1	1,1
3,01	1,01
3,001	1,001
3,0001	1,0001

Tabela 2.1: Alguns valores de x e de $f(x)$ para x próximos de 3

Percebe-se que quanto mais próximo x estiver de 3, mais próximo o valor de $f(x)$ estará de 1. Mas será que isso é sempre verdade ou podemos ser induzidos a cometer um erro? Uma outra maneira de intuir que certamente o limite será realmente 1 é observar que $f(x)$ coincide com a função $g(x) = x - 2$ para $x \neq 3$ e que, portanto, $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$. Por outro lado, é fácil ver que $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 1$. Vejamos mais um exemplo, onde a intuição pode falhar:

Exemplo 2 *Existe* $\lim\limits_{x\to 0} sen(\dfrac{\pi}{x})$*?*

Na Tabela 2.2, está representado o que acontece com os valores de $sen(\frac{\pi}{x})$ *quando* x *aproxima-se de* 0 *por uma sequência do tipo:* $x_n = \frac{1}{n}$ *com* $n \in \mathbb{N}$*.*

x	$f(x) = sen(\frac{\pi}{x})$
1	0
1/2	0
1/3	0
1/4	0
1/10	0
1/100	0

Tabela 2.2: Alguns valores x e de $sen(\frac{\pi}{x})$ para x próximo de 0

Quantos exemplos numéricos são necessários calcular para que se perceba o valor para o qual $f(x)$ se aproxima? É possível afirmar que, de acordo com os valores apresentados na Tabela 2.2, o limite do Exemplo 2 é 0? A resposta a primeira pergunta é que qualquer quantidade finita de exemplos numéricos é insuficiente, o que também responde a segunda pergunta. Porém, intuitivamente, poderíamos pensar que tal limite fosse, de fato, 0. Mas, se considerarmos a sequência de pontos da forma $x_k = \frac{2}{4k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ vemos que x_k se aproxima de 0 quando k cresce, no entanto, $sen\frac{\pi}{x_k} = 1$ para todo k. Dessa forma temos um outro candidato a limite. Agora, não é difícil argumentar rigorosamente que tal limite não existe.

Exemplo 3 *E o que acontece para* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$*?*

Ao tornarmos x cada vez mais próximos a 0, quer seja pela direita ou pela esquerda, o denominador torna-se cada vez menor e positivo, portanto, esse quociente torna-se cada vez maior. Ou seja, os valores da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ não se aproximam de nenhum valor e o limite é do tipo *infinito*. Nesses casos em que o valor da função torna-se arbitrariamente grande, usa-se a notação:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Se os valores da função crescessem arbitrariamente em módulo, porém fossem negativos como no caso da função $f(x) = \frac{-1}{x^2}$ então tem-se:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty.$$

Deve-se ter cuidado ao utilizar o símbolo ∞, pois com a notação anterior não se quer dizer que ∞ seja um número, mas pode-se definir precisamente tal limite como segue:

Definição 2 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de I. Dizemos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se para cada $M > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $f(x) > M$.*

E, de maneira análoga define-se:

Definição 3 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de I. Dizemos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se para cada $K < 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $f(x) < K$.*

Outro conceito útil para o estudo de funções é o conceito de limites laterais.

Definição 4 *(Limite lateral à esquerda)*

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $(x_0 - r, x_0) \cap I \neq \emptyset$ *para todo* $r > 0$ *e* $L \in \mathbb{R}$. *Definimos* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ *se dado* $\epsilon > 0$ *houver um número correspondente* $\delta > 0$ *tal que se* $x_0 - \delta < x < x_0$, $x \in I$ *então* $|f(x) - L| < \epsilon$.

Analogamente, definimos

Definição 5 *(Limite lateral à direita)*

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $(x_0, x_0 + r) \cap I \neq \emptyset$ *para todo* $r > 0$ *e* $L \in \mathbb{R}$. *Definimos* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ *se dado* $\epsilon > 0$ *houver um número correspondente* $\delta > 0$ *tal que se* $x_0 < x < x_0 + \delta$, $x \in I$, *então* $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em muitas situações é mais fácil calcular os limites laterais de uma função do que o limite. Nesses casos torna-se útil a seguinte proposição.

Proposição 1 *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $(x_0 - r, x_0) \cap I \neq \emptyset$ *e* $(x_0, x_0 + r) \cap I \neq \emptyset$ *para todo* $r > 0$ *e* $L \in \mathbb{R}$. *Então* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Demonstração: Suponha que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in I$ então $|f(x) - L| < \epsilon$. Em particular, tem-se que:

i. se $x_0 - \delta < x < x_0$, $x \in I$ então $|f(x) - L| < \epsilon$;

ii. se $x_0 < x < x_0 + \delta$, $x \in I$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.

O que mostra que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Reciprocamente, suponha que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $x_0 - \delta < x < x_0$, $x \in I$ então $|f(x) - L| < \epsilon$ e se $x_0 < x < x_0 + \delta$, $x \in I$, então $|f(x) - L| < \epsilon$. Tomando-se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tem-se que se $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in I$ então $|f(x) - L| < \epsilon$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. ∎

O cálculo de certos limites torna-se mais fácil se utilizarmos algumas propriedades. A seguir, apresentamos algumas das propriedades dos limites.

Proposição 2 *Sejam* c *uma constante e* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *funções. Suponha que existam os limites* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ *então também existem os limites* $\lim\limits_{x \to x_0} cf(x) + g(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$ *e valem as igualdades:*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

2. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

3. *Se* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ *então* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *existe e* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

4. $\lim\limits_{x \to x_0} [cf(x)] = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Demonstração:

Suponhamos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$.

De acordo com a Definição 1, deve-se mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Se } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ então } |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon.$$

Utilizando a *desigualdade triangular*:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$, os números $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$ podem tornar-se arbitrariamente pequenos escolhendo-se x suficientemente próximos de x_0. Em particular, podem tornar-se menores que $\dfrac{\epsilon}{2}$. Dessa maneira, existem δ_1 e δ_2, tais que:

- Se $0 < |x - x_0| < \delta_1$ então $|f(x) - L| < \dfrac{\epsilon}{2}$;
- Se $0 < |x - x_0| < \delta_2$ então $|g(x) - M| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Assim, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$ os itens anteriores serão verdadeiros e tem-se:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

E isso conclui a demonstração do *item 1.*

Para mostrar o *item 2*, dado $< 0\epsilon < 1$, tome $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$ então:

- $|f(x) - L| < \dfrac{\epsilon}{|M| + 1}$;

- $|g(x) - M| < \dfrac{\epsilon}{|L| + 1}$

Isso é possível, graças a definição de limite. Assim, usando desigualdade triangular e as desigualdades acima, tem-se que se $0 < |x - x_0| < \delta$ então:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\
&= |g(x)(f(x) - L) + L(g(x) - M)| \\
&\leq |g(x)(f(x) - L)| + |L(g(x) - M)| \\
&= |g(x)||(f(x) - L)| + |L|(g(x) - M)| \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

E isso mostra que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = LM$.

Para provar o *item 3*, basta mostrar que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}$, porque, feito isto, o resultado desejado pode ser obtido a partir do produto $f(x)\dfrac{1}{g(x)}$. Note que:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M - g(x)}{g(x)M} \right| = \frac{1}{|M||g(x)|}|M - g(x)|.$$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ e $|M| > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta_1$, então $|g(x) - M| < \dfrac{|M|}{2}$. Consequentemente, para todos esses x,

$$|M| = |g(x) + (M - g(x))| \leq |g(x)| + |M - g(x)| < |g(x)| + \frac{|M|}{2}.$$

e portanto,

$$\frac{|M|}{2} < |g(x)| \quad \text{ou seja,} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}.$$

Assim, obtemos:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \frac{2}{|M|^2}|g(x) - M|,$$

desde que $0 < |x - x_0| < \delta_1$.

Novamente, como $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$, segue-se que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{Se } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \text{ então } |g(x) - M| < \frac{|M|^2}{2}\epsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então:

$$\text{Se } 0 < |x - x_0| < \delta_2, \text{ então } \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \epsilon.$$

O que mostra que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = M$ e conclui a prova do *item 3*.

O *item 4* é um caso particular do *item 2*. ■

Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 4 *Calcule, se possível,* $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

Solução: Sejam $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ e $g(x) = 5 - 3x$. Note que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -1$ e $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = 11$. E, portanto, usando a Proposição 2 concluímos que

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = -\frac{1}{11}$$

■

Teorema 6 (Teorema do Confronto) *Sejam $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ funções e x_0 um ponto de acumulação de I. Suponha que exista $r > 0$ tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap I$ e que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$. Então $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existe e*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

Demonstração: Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

i. $x \in I$, $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$;

ii. $x \in I$, $0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, usando *i.* e *ii.*,

$$\begin{aligned} x \in I,\ 0 < |x - x_0| < \delta &\Rightarrow L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon \\ &\Rightarrow L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$. ■

Exemplo 5 *Mostre que* $\lim_{x\to 0} x^2 sen\frac{1}{x} = 0$.

Solução: Observemos primeiramente que não se pode usar $\lim_{x\to 0} x^2 sen\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} sen\frac{1}{x}$, porque $\lim_{x\to 0} sen\frac{1}{x}$ não existe. Mas tem-se que:

$$-1 \leq sen\frac{1}{x} \leq 1$$

e, portanto

$$-x^2 \leq x^2 sen\frac{1}{x} \leq x^2$$

como

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$$

Pelo Teorema 6, tem-se:

$$\lim_{x\to 0} x^2 sen\frac{1}{x} = 0.$$

■

2.1.1 Continuidade

Definição 7 *Seja* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função e seja* $x_0 \in I$. *Dizemos que* f *é contínua em* x_0 *se acontece um dos dois casos:*

i. x_0 *é um ponto isolado de* I

ii. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Quando I é um intervalo ou uma união finita de intervalos não-degenerados então I não possui pontos isolados e, neste caso, a Definição 7 se restringe ao *item ii.*

Para simplificar a definição e a demonstração dos resultados, a partir de agora serão consideradas apenas funções definidas neste tipo de domínio, isto é, I será sempre um intervalo ou uma união finita de intervalos não degenerados. E, portanto, podemos reescrever a definição de continuidade neste contexto da seguinte forma:

Definição 8 *Uma função* $f : I \to \mathbb{R}$ *é contínua em um ponto* $x_0 \in I$ *se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

O conceito de continuidade é um conceito local, mas se uma função é contínua em todo o seu domínio ela será classificada como uma função *contínua*, caso contrário será dita *descontínua*. A ideia de continuidade está ligada ao fato de que uma pequena variação no x produz uma pequena variação em $f(x)$.

Vejamos o que acontece no seguinte exemplo:

Exemplo 6 *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & se\ x \neq 3, \\ 10, & se\ x = 3. \end{cases}$$

Verificamos que a função é descontínua em $x = 3$ pois $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1 \neq 10 = f(3)$. Isso significa que uma pequena variação em torno de $x = 3$ produz uma grande variação nos valores de $f(x)$.

A seguinte proposição traz algumas propriedades sobre a continuidade de funções. Tais propriedades são extremamente úteis para analisar a continuidade de funções que surgem a partir de outras. Em particular, na sequência utilizaremos tais propriedades para concluir que qualquer função polinomial é uma função contínua.

Proposição 3 *Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas num ponto $x_0 \in I$ então $cf + g$ e fg também são contínuas em x_0. Além disso, se $g(x_0) \neq 0$ então $\dfrac{f}{g}$ também é contínua em x_0.*

Demonstração: Segue imediatamente das propriedades de limites (Proposição 2). ■

Observação 1 *Segue por indução e da Proposição 3 que se $f_1, \dots, f_n$ são funções contínuas definidas em um mesmo domínio I, então a soma $f_1 + \cdots + f_n$ e o produto $f_1 \dots f_n$ dessas funções também são contínuas em I.*

Corolário 3.1 *Funções polinomiais são contínuas em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial. Então f é uma soma das $n + 1$ funções $f_i(x) = a_i x^i$ com $i = 0, 1, \dots, n$. Pela Observação 1 segue que basta mostrar que cada f_i é contínua. Mas, para mostrar que cada f_i é contínua, usando mais uma vez a Observação 1, é suficiente mostrar que a função identidade $g(x) = x$ é contínua. Porém, é claro que g é contínua e o resultado segue. ∎

O estudo do conceito de continuidade é perfeitamente adequado para ser introduzido no Ensino Médio, uma vez que nesse nível os estudantes já lidam com vários exemplos de funções contínuas. Além disso relacionando com a Física, sabe-se que os fenômenos físicos podem ser modelados de modo aproximado, usando-se funções contínuas. A variação de temperatura de um ambiente, a velocidade ou aceleração de um móvel, o deslocamento de um objeto em queda livre, todos esses fenômenos variam continuamente com o tempo.

Embora não seja dada aqui a demonstração do seguinte teorema, este é um resultado essencial para o estudo das funções vistas no ensino médio, porque nos diz, de certa forma, que o esboço dos gráficos dessas funções realmente são "curvas contínuas".

Teorema 9 *Os seguintes tipos de funções são contínuas em todos os pontos de seus domínios:*

- *funções polinomiais;*
- *funções trigonométricas;*
- *funções exponenciais;*
- *funções racionais;*
- *funções raízes;*
- *funções trigonométricas inversas;*
- *funções logarítmicas.*

2.2 Derivadas

Como foi apresentado no Capítulo 1, as derivadas surgem na mesma época que as integrais, para resolver problemas específicos. Mas por questões didáticas os livros seguem a sequência: limites, continuidade, derivadas e integrais. Essa também, foi a sequência adotada nesse trabalho.

O conceito de derivada de uma função tem aplicações em vários ramos do conhecimento, por exemplo: a economia, a estatística, a engenharia, a física, a biologia e a própria matemática.

Geometricamente a derivada pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente a uma curva em um determinado ponto. Essa foi uma das motivações para seu estudo, que dessa forma pode ser encarado como uma aplicação na própria matemática.

Podemos entender a derivada ainda como *taxa de variação*, que indica a maneira como uma função varia: aumentando, diminuindo ou permanecendo constante. Todas essas ideias de derivadas são casos de limites particulares. Por isso a necessidade do estudo prévio sobre limites.

2.2.1 Tangentes

Dada uma curva C, expressa por uma equação do tipo $y = f(x)$, queremos encontrar a reta que tangencia o gráfico no ponto $P = (x_0, f(x_0))$. Podemos começar escolhendo outro ponto $Q = (x, f(x))$ qualquer (com $x \neq x_0$) sobre o gráfico e traçar a reta secante que passa pelos pontos P e Q, conforme mostrado na Figura 2.1, cujo coeficiente angular vale

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Fazendo Q se aproximar de P sobre o gráfico tem-se que x se aproxima de x_0 e assim, a reta secante tende a uma posição limite (Figuras 2.2 e 2.3) de modo que se m_{PQ} tender a um número m, define-se a reta tangente à curva C no ponto P como a reta que tem inclinação m e que passa por $P = (x_0, f(x_0))$, conforme ilustrado na Figura 2.4.

Matematicamente:

Definição 10 *A reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ em um ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é a reta que passa por P com a inclinação*

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

desde que o limite exista.

Há outras maneiras de expressar essa definição, que podem ser mais convenientes.

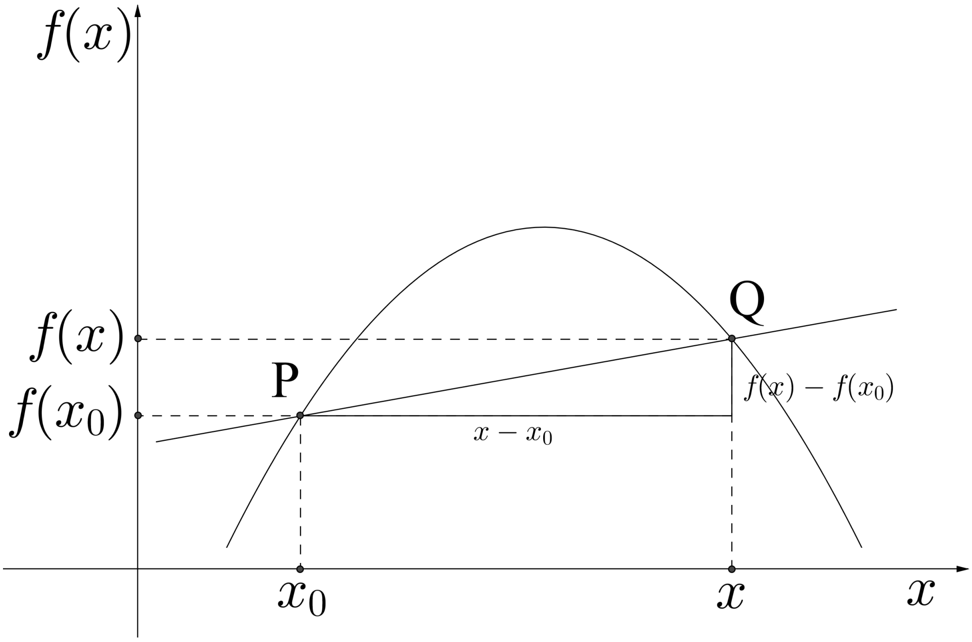


Figura 2.1: Reta Secante pelos pontos P e Q

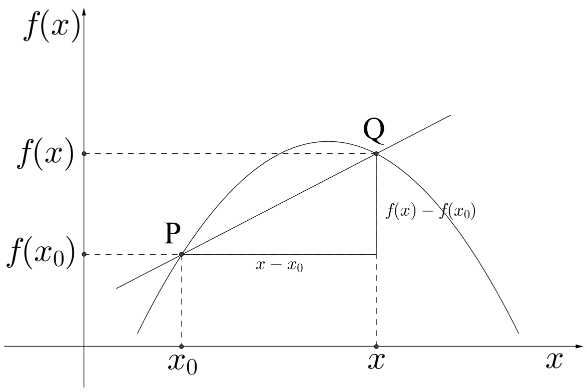


Figura 2.2: Q aproxima-se de P

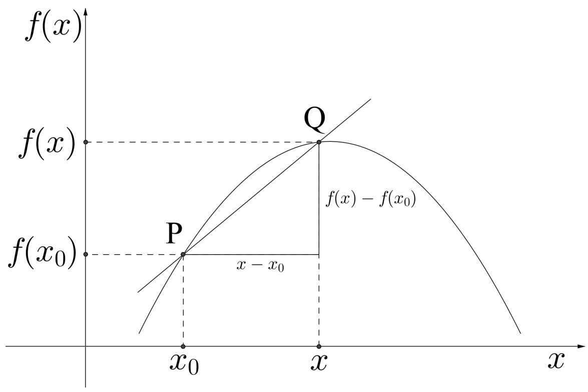


Figura 2.3: Q mais próximo de P

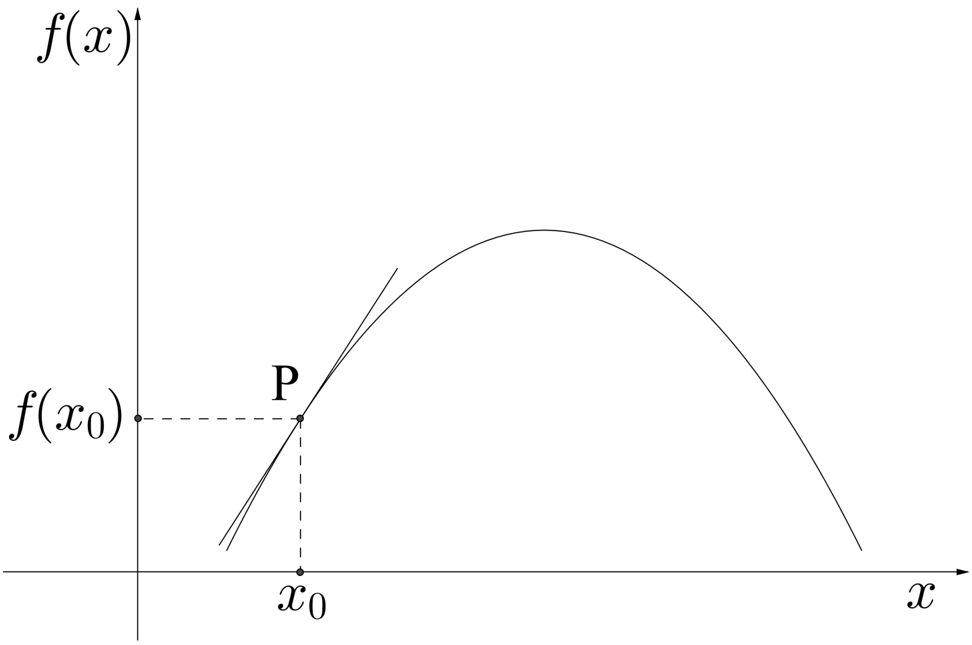


Figura 2.4: Reta Tangente no ponto $P = (x_0, f(x_0))$

Fazendo $x = a + h$ tem-se

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemplo 7 *Encontrar a equação da reta tangente à curva de equação* $y = x^2$ *no ponto* $P = (3, 9)$.

Calcula-se o coeficiente angular da reta tangente a partir da Definição 10, com $x_0 = 3$:

$$m = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2) - (3^2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3) \cdot (x-3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 6$$

.

Pode-se utilizar a equação *ponto-inclinação* de uma reta: $y = t(x - x_1) + y_1$. Como procuramos a reta tangente, temos $t = m$ e $y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$.

2.2.2 Velocidades

Outro problema fundamental no estudo das derivadas é a determinação da velocidade instantânea de uma partícula (ou objeto) em movimento. Seja $x = f(t)$ a equação que descreve o movimento dessa partícula, x é chamada de *função horária* da partícula. Define-se a velocidade média (v_m) do objeto entre os instantes $t_1 = t$ e $t_2 = t + \Delta t$ como: "Velocidade Média $= \frac{deslocamento}{tempo}$", sendo o deslocamento, nos instantes considerados, dado por $f(t)$ e $f(t + \Delta t)$, respectivamente, então:

$$v_m(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Esse quociente é o mesmo da Definição 10, com $x = t + \delta t$ e $x_0 = t$. Se desejarmos a velocidade instantânea basta calcular em um intervalo de tempo cada vez menor, ou seja $\Delta t \to 0$. Daí a velocidade instantânea é dada por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Exemplo 8 *Sabe-se que para um objeto em queda livre a equação que descreve seu movimento é $x = f(t) = 4,9t^2$. Calcule a velocidade do objeto após exatamente 10 segundos do início da queda. Suponha que a altura seja suficiente para ele cair por mais de 10 segundos.*

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4,9(t + \Delta t)^2 - 4,9t^2}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{4,9(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4,9(2t\Delta t + (\Delta t)^2)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} 4,9(2t + \Delta t) = 9,8t$$

Como $t = 10$ temos $v(10) = 98\ m/s$.

O quociente $\dfrac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ é conhecido como *Quociente de Newton* e o limite apresentado nos exemplos anteriores é muito recorrente, aparece sempre que se deseja calcular a taxa de variação. Aparece tanto na Matemática ou na Física como já apresentado, ou ainda, na Química como a taxa de uma reação química ou na Economia como custo marginal. Como esse limite é bastante importante, receberá um nome e uma notação especiais.

Definição 11 *A derivada de uma função f em um ponto x_0, denotada por $f'(x_0)$ é:*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se o limite existir.

Dadas duas grandezas, x e y, que se relacionam de tal forma que y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Quando x varia de x_1 para x_2 chamamos essa variação de incremento de x e indicamos por

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

A variação correspondente em y é dada por:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Temos então a definição de **Taxa média de variação de y em relação a x** no intervalo $[x_1, x_2]$ como o quociente: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Que é interpretada geometricamente como a inclinação da reta secante ao gráfico entre os pontos $P = (x_1, f(x_1))$ e $Q = (x_2, f(x_2))$.

Se quisermos a taxa de variação instantânea devemos fazer $x_2 \to x_1$, ou $\Delta x \to 0$. Que agora é interpretada como a inclinação da reta tangente ao gráfico e que passa pelo ponto $P = (x_1, f(x_1))$.

Portanto a taxa de variação instantânea é dada por $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. A relação entre reta tangente e taxa de variação pode ser entendida como: se a derivada em determinado ponto for grande, a reta tangente é bastante inclinada, isso significa que os valores de y mudarão rapidamente a partir daquele ponto.

2.2.3 Função Derivada

A Definição 11 é local, definindo a derivada em um ponto particular x_0. Pode-se generalizar a interpretação e pensar que se a definição vale para qualquer x_0 no domínio de f, fazendo esse x_0 variar e o substituindo por uma variável x, tem-se a expressão:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dado qualquer x tal que o limite exista, podemos atribuir a x o número $f'(x)$, dessa maneira considera-se f' como uma nova função que surgiu a partir da operação-limite sobre a função f, por isso seu nome de **função derivada de f**.

Exemplo 9 *Seja $f(x) = x^2 - x$ calcularemos $f'(x)$*

Pela Definição 11 temos que

$$\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x+h)-(x^2-x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x-h-x^2+x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0} 2x-1+h\\
&= 2x-1.
\end{aligned}$$

Leibniz foi o grande responsável pela criação das notações das derivadas, que até hoje são utilizadas. Tomando novamente duas grandezas, x e y, que se relacionam de maneira que y depende de x através da expressão $y = f(x)$, então podemos representar a derivada de y em relação a x das seguintes maneiras:

- $f'(x) = y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dx}(x) = Df(x) = D_x f(x)$.

Os símbolos D e $\frac{d}{dx}$ indicam a operação de **Diferenciação** que é o processo do cálculo de uma derivada. Por isso, são chamados de **Operadores Diferenciais**.

Um importante teorema sobre funções diferenciáveis é:

Teorema 12 *Se f for diferenciável em x_0, então f é contínua em x_0.*

Demonstração:

Como f é diferenciável em x_0 temos: $f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e queremos mostrar que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Dado que $x \neq x_0$ temos que $f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$. Aplicando o limite em ambos os lados temos:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right].$$

Aplicando as propriedades dos limites temos:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0.$$

Daí segue que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(a) = f(x_0).$$

■

De maneira análoga ao que foi feito para definirmos a função derivada de f, podemos fazer para definir a função derivada de f', se f' for diferenciável. A esta nova função damos o nome de *segunda derivada de f* ou *derivada de ordem 2* e utilizando a notação de Leibniz temos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Essas derivadas são particularmente interessantes para o Ensino Médio como uma aplicação na Física uma vez que se $x = f(t)$ for a função horária de uma partícula então sua velocidade instantânea $v = v(t)$ é a primeira derivada de x e a aceleração instantânea $a = a(t)$ é a segunda derivada:

$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$

De maneira análoga define-se a derivada de qualquer ordem, desde que os limites correspondentes existam.

O cálculo da derivada pode tornar-se muito trabalhoso dependendo da função dada, e não é a intenção desse trabalho fazer essas demonstrações. Para o estudante de Ensino Médio é interessante que entenda o conceito e algumas aplicações básicas, e para isso uma Tabela de derivadas pode ser facilmente encontrada em livros ou na internet. A Tabela a seguir reúne algumas regras de derivação:

$f(x)$	$f'(x)$
$c \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$sen(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-sen(x)$
e^x	e^x
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Tabela 2.3: Regras de derivação

No Ensino Médio essas são as funções mais utilizadas, com o avançar nos estudos essa tabela pode aumentar significativamente. A seguir, apresentamos algumas propriedades operatórias da derivação que são fundamentais para o cálculo de derivadas de um grande número de funções.

Proposição 4 *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis num ponto $x_0 \in I$ então $f+g$ e fg são funções deriváveis em x_0. E valem as seguintes regras de derivação:*

- *(Regra da soma)* $\dfrac{d}{dx}\left[f+g\right](x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) + \dfrac{dg}{dx}(x_0)$;
- *(Regra do Produto)* $\dfrac{d}{dx}\left[fg\right](x_0) = g(x_0)\dfrac{df}{dx}(x_0) + f(x_0)\dfrac{dg}{dx}(x_0)$;

Demonstração: Seja $F(x) = f(x) + g(x)$.

Para $h \neq 0$ tal que $x_0 + h \in I$, pode-se calcular o *Quociente de Newton*:

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h}\\ &= \frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]+g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\ &= \frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.\end{aligned}$$

Dessa forma, calculando o limite quando $h \to 0$ tem-se:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right].$$

Utilizando a Proposição 2, obtemos:

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.$$

Assim:

$$F'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

O que conclui a demonstração da primeira parte.

Agora, vamos demonstrar a Regra do Produto. Para isso, considere $F(x) = f(x)g(x)$.

Para $h \neq 0$ pode-se calcular o *Quociente de Newton*:

$$\begin{aligned}
\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]g(x_0+h)+f(x_0)[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h} \\
&= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, calculando o limite quando $h \to 0$ tem-se:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right]$$

Utilizando a Propriedade 2:

$$\begin{aligned}
F'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)\right]+\left[\lim_{h\to 0} f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\lim_{h\to 0} g(x_0+h)+\lim_{h\to 0} f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.
\end{aligned}$$

Assim:

$$F'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

O que conclui a demonstração. ∎

Corolário 4.1 *Se $c \in \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $x_0 \in I$ então cf é derivável e $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.*

Demonstração: Imediata, a partir da regra do produto e do fato de que a derivada de uma função constante é zero. ∎

Além das propriedades citadas anteriormente, uma das principais regras para o cálculo de derivadas é a *Regra da Cadeia* que nos permite calcular a derivada da composta de duas funções cujas derivadas são conhecidas. Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema 13 (Regra da Cadeia) *Sejam I e J intervalos abertos e seja $a \in I$. Suponha que $g : I \to J$ e $f : J \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis em a e $g(a)$, respectivamente. Então a função composta $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ é derivável em a e vale a regra da cadeia*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Demonstração: Vamos, primeiramente, dividir a demonstração em dois casos:

1. $g'(a) \neq 0$.

   Neste caso, existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq g(a)$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$. Além disso, como g é contínua em a, pois é derivável em a, segue que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = \lim\limits_{u \to g(a)} \dfrac{f(u) - f(g(a))}{u - g(a)} = f'(g(a))$. E, portanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(g(a))g'(a)$$

   Note que na segunda igualdade usamos que o limite do produto é o produto dos limites. O que mostra que $(f \circ g)'(a)$ existe e coincide com $f'(g(a))g'(a)$.

2. $g'(a) = 0$.

   Agora, temos que mostrar que $(f \circ g)'(a) = 0$. Vamos dividir novamente a prova em 3 subcasos, o que concluirá a prova do teorema:

   2.1. *Existe $\delta > 0$ tal que $g(x) = g(a)$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$.*

   Neste caso, $(f \circ g)$ é constante em $(a-\delta, a+\delta)$ e, portanto, $(f \circ g)'(a) = 0$.

   2.2. *Existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq g(a)$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$.*

   Análogo ao *Caso 1*.

   2.3. *Para todo $\delta > 0$, existem $x_1, x_2 \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ tais que $g(x_1) = g(a)$ e $g(x_2) \neq g(a)$.*

   Defina $A = \{x \in I : g(x) = g(a)\}$ e $B = \{x \in I : g(x) \neq g(a)\}$. Como, por hipótese, a é ponto de acumulação tanto de A quanto de B e I é a união disjunta de A e B, para mostrar que $(f \circ g)'(a)$ é igual a 0, é suficiente mostrar que $\lim\limits_{x \in A,\, x \to a} \dfrac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = 0$ e que $\lim\limits_{x \in B,\, x \to a} \dfrac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = 0$.

O primeiro limite é obviamente igual a 0, pois $f \circ g$ é constante igual a $f(g(a))$ em A e o segundo mostra-se da mesma forma que no *Caso 1* que ele coincide com $f'(g(a))g'(a) = 0$.

■

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis em a, a regra da cadeia se escreve como:

$$\frac{dy}{dx}(a) = \frac{dy}{du}(u(a))\frac{du}{dx}(a).$$

Agora, a partir das propriedades da Linearidade da Derivada, da Regra do Produto e da Regra da Cadeia, pode-se, facilmente, demonstrar a Regra do Quociente:

Corolário 4.2 (Regra do quociente) *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em um ponto $x_0 \in I$. Suponha que $g(x_0) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é derivável em x_0 e vale a* regra do quociente*:*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right](x_0) = \frac{g(x_0)\frac{df}{dx}(x_0) - f(x_0)\frac{dg}{dx}(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Demonstração: Seja $J = \{x \in I : g(x) \neq 0\}$. Observe que a função, definida em J por $\frac{1}{g}(x) = (g(x))^{-1}$ é a composta das funções $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$ e $g : J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, isto é, $\frac{1}{g} = h \circ g$. Como g é derivável em x_0 e $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$, seque da Regra da Cadeia (Teorema 13) que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{1}{g(x_0)^2}g'(x_0). \tag{2.2}$$

Como sabemos, agora, que a função $\frac{1}{g}$ é derivável em x_0 e que f também é derivável em x_0, segue da Regra do Produto (Proposição 4) que $\frac{f}{g}$ é derivável em x_0 e que:

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \tag{2.3}$$

Usando (2.2) e desenvolvendo o lado direito de (2.3), obtemos a Regra do Quociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

■

Vejamos um exemplo de como aplicar a Regra da Cadeia.

Exemplo 10 *Usar a regra da cadeia para derivar $y = sen(x^2)$.*

Seja $y = y(u) = sen(u)$ e $u = u(x) = x^2$ temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}[sen(u)] \cdot \frac{d}{dx}[x^2] = \cos(u) \cdot (2x) = 2x\cos(x^2)$$

Antes de finalizarmos essa Seção será enunciado o *Teorema de Rolle*, cuja demonstração pode ser encontrada em Swokowski (1994).

Teorema 14 (Rolle) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é diferenciável no intervalo aberto (a,b) e se $f(a) = f(b)$, então $f'(c) = 0$ para ao menos um número c em (a,b).*

Para a conclusão dessa Seção será apresentada a demonstração de outro importante teorema:

Teorema 15 (Teorema do Valor Médio) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é diferenciável no intervalo aberto (a,b), então existe um número $c \in (a,b)$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Demonstração:

Tomando x arbitrário em $[a,b]$ defina $g(x)$ como a diferença entre a coordenada $y(x)$ da secante l_{PQ}, que passa por $P = (a, f(a))$ e $Q = (b, f(b))$, e a coordenada $y(x)$ do gráfico de f, como mostrado na Figura 2.5.

Podemos encontrar uma equação para l_{PQ} como mostrado no Item 2.2.1:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

assim, tem-se

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

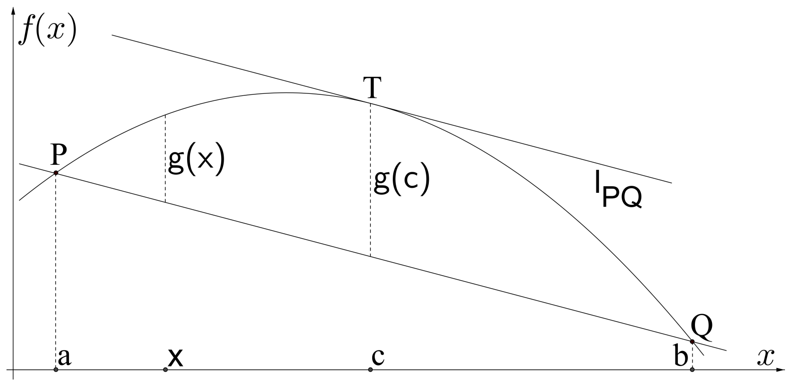


Figura 2.5: Secante l_{PQ}

E assim, pela definição de $g(x)$:

$$g(x) = f(x) - y = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right].$$

A função g assim definida mede exatamente a distância entre a função f e a reta secante. Calculando $g'(x)$ temos:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Verificamos que $g(a) = g(b) = 0$, então g satisfaz as hipóteses do *Teorema de Rolle*. Dessa maneira, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$ e isso nos dá:

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ou equivalentemente,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Em outras palavras: existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ cuja reta tangente em $T = (c, f(c))$ tem o mesmo coeficiente angular da reta secante que passa por P e Q. ∎

2.3 Integrais

Pode-se dizer que as ideias do Cálculo Integral surgiram com o Método da Exaustão de Eudóxio, como mostrado nos Capítulo 1. Porém esse método era aplicado de maneiras diferentes em cada caso particular. A grande ideia que permitiu a passagem do Método da Exaustão para o conceito de integral foi de que a área de uma região poderia ser calculada da mesma maneira, através de aproximações por retângulos, em uma grande quantidade de casos.

Embora essa grande ideia fosse muito importante, na prática não se configurava em um bom método para o cálculo de áreas. Nesse sentido as descobertas de Newton e Leibniz fizeram toda a diferença, uma vez que eles perceberam a relação entre as derivadas e as integrais. A possibilidade de poder expressar a integral de uma função em termos de uma primitiva (que se relacionam através da derivada), dá origem ao *Teorema Fundamental do Cálculo*, que facilita de maneira extraordinária o cálculo de integrais.

A partir de então tornou-se possível, a resolução da maioria das integrais que aparecem no cotidiano e, nessa mesma época, Johann Bernoulli desenvolveu um método para integrar funções racionais conhecido como *Método das Frações Parciais*, que é utilizado até hoje.

Para o estudante de nível médio esse conteúdo pode ser introduzido de várias maneiras, a partir de uma mesma ideia geométrica, mas diferenciando-se pelo rigor adotado, a partir do pensamento de que quanto menor o rigor ou formalismo utilizado para a conceituação de um objeto matemático mais simples será sua compreensão, porém torna-se inadequada tendo em vista as propriedades que decorrem do conceito utilizado.

Esta foi a construção histórica, inicialmente sem muito rigor por Newton e Leibniz, e muitos anos depois algumas melhorias por Cauchy e finalmente a formalização por Weierstrass.

Nesta Seção são apresentados alguns conceitos e definições utilizados, mas o mais importante são as ideias que podem ser discutidas com os estudantes para o cálculo de algumas integrais simples, relacionando-as com as derivadas.

2.3.1 Integrais indefinidas

Na Seção anterior definiu-se a função derivada. Dada um função f, f' é a função derivada de f dada por: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Agora o problema é semelhante, porém ao inverso. Dada um função f qualquer gostaríamos de determinar uma outra função F, com a seguinte propriedade: $F'(x) = f(x)$. Uma função F com essa característica chama-se *primitiva* ou *antiderivada* de f e o processo para sua determinação é chamado de **antidiferenciação**.

Vejamos alguns exemplos:

- $F(x) = x^3$ é uma antiderivada de $f(x) = 3x^2$ pois $F'(x) = f(x)$;
- $F(x) = x^3 + 5$ é uma antiderivada de $f(x) = 3x^2$ pois $F'(x) = f(x)$;
- $F(x) = x^3 - \sqrt{\pi}$ é uma antiderivada de $f(x) = 3x^2$ pois $F'(x) = f(x)$.

Com isso vemos que de uma forma geral: $F(x) = x^3 + C$ é uma antiderivada de $f(x) = 3x^2$ pois $F'(x) = f(x)$ com $C \in \mathbb{R}$. Então existem infinitas funções com essa propriedade, dessa maneira dizemos que há uma *família de antiderivadas* de uma função f. Fato demonstrado na seguinte proposição:

Proposição 5 *Se F e G são primitivas de f em um intervalo I então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$G(x) = F(x) + C \;\forall x \in I;\; C \in \mathbb{R}$$

Demonstração: Definindo-se $H : I \to \mathbb{R}$ por $H(x) = G(x) - F(x)$ temos que $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ para todo $x \in I$. Pelo Teorema do Valor Médio, H é uma função constante e o resultado segue. ■

Utiliza-se a seguinte notação:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

sendo $F'(x) = f(x)$ e C é uma constante arbitrária para denotar a família de todas as primitivas de f em um intervalo I.

Cada símbolo utilizado recebe um nome e tem um significado próprio, a saber:

- $\int$: sinal de integral;
- $\int f(x)dx$: integral indefinida de f;
- $f(x)$: integrando;
- C: Constante real;
- x: variável de integração.

Quando é dado $\int f(x)dx$ o processo de determinação de $F(x) + C$ é designado como **integração indefinida** ou **integrar** f. Chama-se de indefinida pois o resultado desse processo não é apenas uma função mas uma família de funções. No próximo item verificaremos a diferença entre integrais indefinidas e definidas, e concluiremos com a demonstração do *Teorema Fundamental do Cálculo*, que une esses dois conceitos.

Relaciona-se na Tabela 2.4 uma lista com as integrais indefinidas de funções comuns no Ensino Médio. Em seguida apresenta-se uma relação de propriedades das integrais indefinidas que são utilizadas para facilitar os cálculos. As demonstrações das integrais e das propriedades pode ser encontrada em Stewart (2012) e Swokowski (1994):

$f(x)$	$\int f(x)dx;\ C \in \mathbb{R}$
$a, a \in \mathbb{R}$	$ax + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$
$\cos(x)$	$sen(x) + C$
$sen(x)$	$-\cos(x) + C$
e^x	e^x+C
$\frac{1}{x}$	$ln(x) + C$

Tabela 2.4: Algumas Integrais Indefinidas

- $\int [D_x f(x)]dx = f(x) + C$;
- $D_x \left[\int f(x)dx\right] = f(x)$;
- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$;
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;
- $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

2.3.2 Integrais definidas

A ideia das Integrais Definidas surge com os problemas relacionados com áreas. Durante muito tempo foi utilizado o método da exaustão para esse cálculo. Esse método, porém, era muito trabalhoso e as necessidades eram crescentes.

Um método atual que permite esse cálculo é através das Integrais Definidas:

Definição 16 *Seja f uma função definida em $[a, b]$. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ as extremidades desses subintervalos. Escolhamos os* ***pontos amostrais*** *$x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a* ***integral definida de f de*** *a* ***até*** *b* ***é:***

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

desde que este limite exista e seja independente da escolha dos x_i^*. Se ele existir, dizemos que f é ***integrável*** *em $[a, b]$.*

Na Definição 16 foi utilizado o símbolo $\sum$ (lê-se *Sigma*) e a soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ é conhecida por **Soma de Riemann** em homenagem ao matemático Bernhard Riemann.

Essa definição, pode não ser muito útil ou de fácil compreensão para um estudante do nível médio, mas a proposta é fazer ele entender o que ela significa.

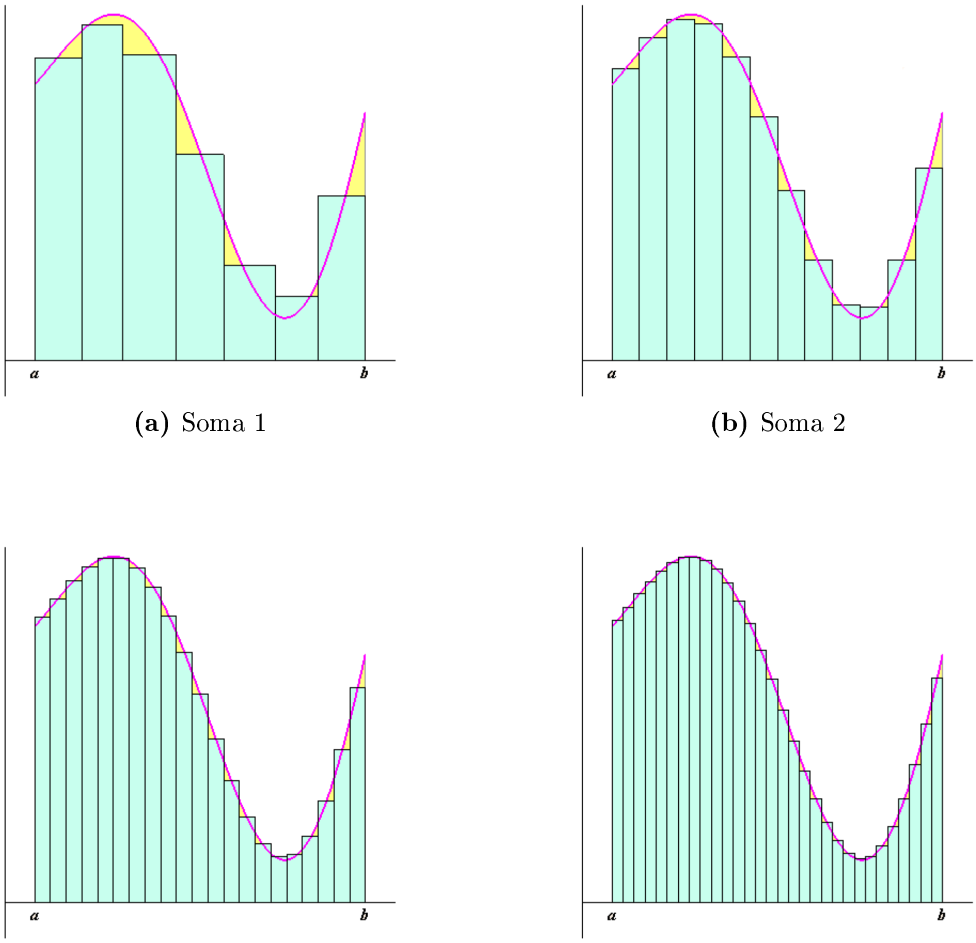
O intervalo no qual a função será estudada foi dividido em n partes de comprimento Δx, e em cada parte foi escolhido um ponto amostral x_i^*. Dessa maneira o produto $f(x_i^*)\Delta x$ representa área de um retângulo de base Δx e altura $f(x_i^*)$. Com isso, estamos usando a ideia do Método da Exaustão e aproximando a área sob a curva por áreas de retângulos.

Observando a Figura 2.6, a seguir, percebemos que quanto maior o número de retângulos, melhor será a aproximação, e para obtermos uma maior quantidade de retângulos é necessário dividir o intervalo em mais partes, ou seja n cada vez maior. Esse foi o grande avanço em relação ao método anterior, a noção de limite. Quando calculamos o somatório das áreas dos retângulos e fazemos $n \to \infty$ temos precisamente a área desejada, desde que o limite exista.

Então nesse caso, podemos a partir de uma ideia geométrica, compreender a Integral Definida como numericamente igual a área entre o gráfico de uma função e o eixo horizontal entre os pontos $x_0 = a$ e $x_n = b$ (observadas certas condições).

Pode-se notar uma diferença entre as integrais indefinidas e as integrais definidas: enquanto aquelas representam uma família de antiderivadas, estas tem como resultado um número.

Para o estudo das integrais é importante que se conheça alguma classe interessante de funções que sejam integráveis. O seguinte teorema nos dá um classe ampla



(a) Soma 1

(b) Soma 2

(c) Soma 3

(d) Soma 4

Figura 2.6: Somas de Riemann

de funções integráveis, a saber, temos:

Teorema 17 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então ela é integrável.*

A demonstração será omitida, mas pode ser encontrada, por exemplo, em LIMA (2004).

A seguir, vamos calcular várias integrais de funções contínuas usando a definição. Note que, o fato de saber que tais funções são integráveis, nos permite escolher para x_i^* qualquer ponto no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Necessitaremos também das seguintes fórmulas:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \tag{2.6}$$

Exemplo 11 *Seja $f(x) = x^2$, determine a área sob o gráfico de f de $x = 0$ a $x = b$, para $b > 0$ arbitrário.*

Solução: Subdividiremos o intervalo $[0, b]$ em n subintervalos $[x_k, x_{k+1}]$ de comprimentos iguais a $\Delta x = \dfrac{(b-0)}{n} = \dfrac{b}{n}$, sendo $x_k = k\Delta x = k\dfrac{b}{n} = \dfrac{bk}{n}$, com $k = 0, 1, \cdots, n$. Tomaremos como pontos amostrais $x_k^* = x_k$ com $k = 1, 2, \cdots, n$. Assim, os retângulos tem área: $A(k) = f(x_k)\Delta x = \left(\dfrac{bk}{n}\right)^2 \dfrac{b}{n}$. Calculando a soma de todas essas áreas e usando (2.5), temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{bk}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{b^3}{6} \frac{(n+1)}{n} \frac{(2n+1)}{n} \\
&= \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Tomando-se limite quando n tende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{b^3}{3}.$$

Concluímos que a integral de f no intervalo $[0, b]$ é igual a $\dfrac{b^3}{3}$. ∎

Exemplo 12 *Seja $f(x) = x^3 + 6x$, calcule a área da região do plano xy limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = 2$, $x = 4$ e pelo eixo dos x.*

Solução: Percebemos inicialmente que $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [2, 4]$. Subdividiremos o intervalo $[2, 4]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \dfrac{(4-2)}{n} = \dfrac{2}{n}$. Sejam $x_0 = 2$ e $x_n = 4$. Temos $x_k = 2 + k\Delta x = 2 + k\frac{2}{n} = \frac{2(n+k)}{n}$, com $k = 0, 1, \cdots, n$. Tomaremos como pontos amostrais $x_i^* = x_k$ com $k = i = 1, 2, \cdots, n$. Assim, os retângulos tem área: $A_r(k) = f(x_k)\Delta x = x_k^3 + 6x_k$. Calculando a soma de todas essas áreas temos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x &= \sum_{k=1}^{n}(x_k^3 + 6x_k)\Delta x \\
&= \Delta x \sum_{k=1}^{n}(x_k^3 + 6x_k) \\
&= \Delta x \sum_{k=1}^{n} x_k^3 + \Delta x \sum_{k=1}^{n} 6x_k \\
&= \Delta x \sum_{k=1}^{n} x_k^3 + 6\Delta x \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{n}(n+k)\right)^3 + 6\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}(n+k) \\
&= \frac{16}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(n+k)^3 + \frac{24}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \\
&= \frac{16}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(n^3 + 3n^2k + 3nk^2 + k^3) + \frac{24}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} n + \sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \frac{16}{n^4}\left(\sum_{k=1}^{n} n^3 + \sum_{k=1}^{n} 3n^2k + \sum_{k=1}^{n} 3nk^2 + \sum_{k=1}^{n} k^3\right) + 24 + \frac{24}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{16}{n^4}\left(n^4 + 3n^2\sum_{k=1}^{n} k + 3n\sum_{k=1}^{n} k^2 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\right) + 24 + \frac{12}{n}(n+1) \\
&= 16 + \frac{48}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{48}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{16}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 24 + \frac{12}{n}(n+1) \\
&= 40 + \frac{48n(n+1)}{2n^2} + \frac{48n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \frac{16n^2(n+1)^2}{4n^4} + \frac{12(n+1)}{n} \\
&= 40 + \frac{24(n+1)}{n} + \frac{8(n+1)(2n+1)}{n^2} + \frac{4(n+1)^2}{n^2} + \frac{12(n+1)}{n}.
\end{aligned}
$$

Aumentando-se infinitamente a quantidade de retângulos (ou seja, tomando-se limite quando n tende a $+\infty$) temos:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = 40 + 8(2) + 4 + 24 + 12 = 96.$$

■

Observação 2 *Salientamos que se f é uma função integrável num intervalo $[a, b]$,* *definimos*

1. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ *e*
2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

Apresentamos a seguir algumas propriedades básicas das integrais definidas.

Teorema 18 *Sejam f e g funções integráveis no intervalo $[a, b]$. Então:*

1. *Para todo* $c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c dx = c(b - a)$;
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx\ \forall c \in \mathbb{R}$
4. *Para todo* $d \in [a, b]$, f *é integrável em* $[a, d]$ *e em* $[d, b]$ *e*
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$

2.3.3 Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta Seção é demonstrado o *Teorema Fundamental do Cálculo* (TFC). Não busca-se com isso apresentá-lo como um objeto matemático de difícil compreensão ou que exige muitas contas. Ao contrário, pretende-se fazer uma demonstração simples, pois o objetivo é mostrar sua importância à medida que consegue fazer a ligação entre as Integrais Definidas e Indefinidas.

O nome do teorema é bastante apropriado pois através dele se faz a relação entre dois mundos aparentemente distintos: as integrais e as derivadas. O Cálculo Diferencial surge por causa do problema da tangente, enquanto o Cálculo Integral por causa do problema de áreas. Isaac Barrow, entretanto, descobre que esses problemas não são completamente distintos e consegue compreender que derivação e integração são processos inversos. Newton e Leibniz exploram essas ideias e contribuem enormemente para o desenvolvimento do Cálculo.

O TFC é apresentado, normalmente, em duas partes. A primeira trata sobre funções definidas por uma equação do tipo:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{2.7}$$

e a segunda parte fornece um método mais simples capaz de calcular o limite das somas de Riemann para o cálculo das integrais definidas.

Observe que, pelo item 4 do Teorema 18, G está bem definida em todo intervalo $[a, b]$, desde que f seja uma função integrável neste intervalo. Em particular, se f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema 17, a função G está bem definida.

Teorema 19 (Teorema Fundamental do Cálculo - *Parte 1*) *Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Então G definida por (2.7) é derivável em $[a, b]$ e $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, ou seja, G é uma primitiva de f em $[a, b]$.*

Demonstração: Dado $x \in (a, b)$ temos que provar que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$, o que equivale a mostrar que

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{G(x+h) - G(x)}{h} - f(x) \right| = 0$$

Note que

$$\begin{aligned} G(x+h) - G(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt \\ &= \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, por continuidade de f, existe $\delta > 0$ tal que se $|t - x| < \delta$ então $|f(t) - f(x)| < \epsilon$. Portanto, se $0 < h < \delta$, então:

$$\begin{aligned} \left| \frac{G(x+h) - G(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \\ &= \frac{1}{h} \epsilon h = \epsilon. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$\lim_{h\to 0^+}\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-f(x)\right|=0.$$

Analogamente se raciocina com $h<0$, obtendo-se

$$\lim_{h\to 0^-}\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-f(x)\right|=0.$$

O caso $x=a$ e $x=b$ é provado da mesma forma, porém considerando apenas um dos limites laterais em cada caso. Com isso, a prova do teorema está completa. ■

Note que a função G dada no Teorema 19 satisfaz $G(b)=\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, $G(a)=0$ e, portanto,

$$G(b)-G(a)=\int_a^b f(t)dt. \tag{2.8}$$

Veremos que a fórmula (2.8) é verdadeira para qualquer primitiva de f. Esse é o conteúdo do nosso próximo teorema.

Teorema 20 (Teorema Fundamental do Cálculo - *Parte 2*) *Se f é contínua em $[a,b]$ e F é uma primitiva de f, então*

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

Demonstração: Seja F uma primitiva de f em $[a,b]$. Como, pelo Teorema 19, $G(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ também é uma primitiva de f, a Proposição 5 nos dá que $F(x)=G(x)+C$ para algum $C\in\mathbb{R}$.

Em particular, $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)=\displaystyle\int_a^b f(t)dt$. E o teorema está demonstrado. ■

À primeira vista, o resultado talvez não seja muito significativo, mas esse Teorema mostra a relação entre as integrais definidas, integrais indefinidas e derivadas. Pois calcula-se uma integral definida a partir de uma primitiva, que pode ser obtido pelo processo de antidiferenciação (integrais indefinidas), e para isso é necessário o uso das derivadas. E através dele, pode-se calcular integrais definidas de maneira muito mais conveniente que calcular os limites das Somas de Riemann. Para essa análise, vejamos como podemos calcular novamente as integrais dos Exemplos 12 e 11 de maneira muito mais simples:

Exemplo 13 *Seja* $f(x) = x^3 + 6x$*, determine a área sob o gráfico de* f *de* $x = 2$ *à* $x = 4$*, a partir do TFC.*

Queremos calcular $\int_2^4 (x^3 + 6x)dx$. Precisamos encontrar G tal que $G'(x) = x^3 + 6x$. Utilizando a Tabela 2.4 temos $G(x) = \frac{x^4}{4} + 3x^2$ uma primitiva de $f(x)$. De fato, $G'(x) = x^3 + 6x = f(x)$.

Dessa maneira $\int_2^4 (x^3 + 6x)dx = G(4) - G(2) = \left[\frac{x^4}{4} + 3x^2\right]_2^4 = 96.$

Exemplo 14 *Seja* $f(x) = x^2$*, determine a área sob o gráfico de* f *de* 0 *a* b*, para* $b > 0$ *arbitrário, utilizando o TFC.*

Queremos calcular $\int_0^b x^2 dx$. Precisamos encontrar H tal que $H'(x) = x^2$. Utilizando a Tabela 2.4 temos $H(x) = \frac{x^3}{3}$ uma primitiva de $f(x)$, de fato $H'(x) = x^2 = f(x)$. Dessa maneira $\int_0^b x^2 dx = [H(x)]_0^b = H(b) - H(0) = \frac{b^3}{3}$.

Capítulo 3

O Cálculo e a Física

"O objetivo da ciência não é o de abrir portas para a sabedoria infinita, mas o de estabelecer limites para o erro infinito."
Bertolt Brecht

Nesse Capítulo são apresentadas algumas aplicações do Cálculo em problemas da Física, ressaltando a maneira como elas aparecem nos livros didáticos do Ensino Médio. Algumas fórmulas utilizadas nos livros didáticos são aqui deduzidas, evitando a memorização e a consequente dificuldade de compreensão de suas interpretações físicas. Por fim são resolvidos alguns exercícios com os procedimentos tradicionalmente adotados no Ensino Médio. Esses procedimentos, em geral, utilizam várias fórmulas com grande quantidade de operações matemáticas. Ressalta-se, nessa oportunidade, a maneira que poderiam ser resolvidos se fossem utilizadas as ferramentas matemáticas apresentadas.

Nesse estudo faz-se referência às grandezas escalares e vetoriais. Sempre que possível, o estudo será feito da maneira mais simplificada, tendo em vista que as aplicações devem ser desenvolvidas para estudantes de nível médio. A fim de possibilitar maior atenção ao essencial, são omitidas as unidades, ficando subentendido, entretanto, a utilização das unidades padrões, salvo quando explicitamente indicado.

3.1 O Movimento

A atual Seção constitui-se da discussão sobre os casos do Movimento Retilíneo e do Movimento Harmônico Simples, assuntos que fazem parte da Mecânica e do estudo sobre Oscilações. Então, são estudadas, dentre outras, grandezas como: posição, velocidade, aceleração e frequência.

Para marcarmos a posição de um objeto, temos que fazê-lo em relação a um dado referencial, e sua trajetória é formada pela sucessão de suas posições que podem variar ao longo do tempo. Consideremos que o objeto se move ao longo de um eixo (x) e em um determinado instante (t_1) o objeto ocupa uma posição (x_1) e em um instante posterior (t_2) ocupará uma posição (x_2).

O **deslocamento** (Δx) do objeto indica a mudança em sua posição, nesse caso: $\Delta x = x_2 - x_1$. (O símbolo Δ, a letra grega maiúscula Delta, representa a variação de uma grandeza, e é igual ao valor final dessa grandeza menos o valor inicial.)

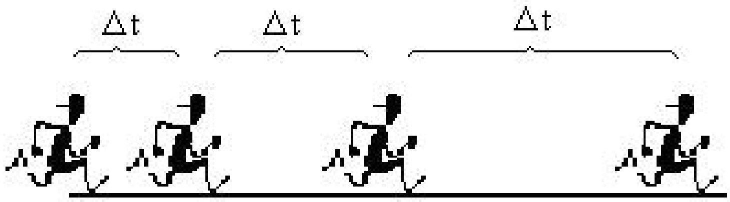
Quando se fala em velocidade, corre-se o risco de se cometer alguns erros. Pode-se pensar na velocidade média (v_m) que representa a velocidade que se mantida constante seria percorrida a determinada distância em um unidade de tempo. Por exemplo, uma velocidade média de 80 km/h significa que um objeto percorreria uma distância de 80 km em uma hora. Porém, quase nunca o movimento acontece de maneira constante. Durante um movimento o objeto aumenta e diminui sua velocidade, nesse caso estaríamos interessados em saber a velocidade instantânea (v) do objeto. Essa velocidade pode ser obtida quando o intervalo de tempo é infinitamente pequeno. Tem-se então que a velocidade média mede a variação das posições, matematicamente: $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ e a velocidade instantânea é o limite da velocidade média quando o intervalo de tempo tende a zero: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$.

O termo aceleração também é bastante usado, e sua definição também é simples, assim como a velocidade mede a variação das posições, ou seja, o quão "rápido" o objeto muda de posição, a aceleração mede a variação da velocidade, o quão "rápido" um objeto muda de velocidade, aumentando-a ou diminuindo-a. Usam-se as mesmas ideias: aceleração média (a_m) e aceleração instantânea (a). Matematicamente: $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ e $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$.

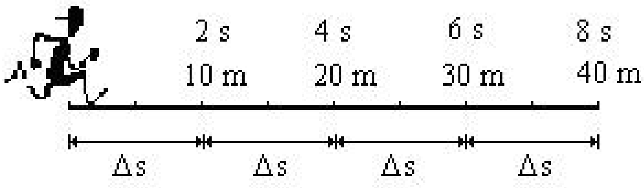
3.1.1 Movimento Retilíneo

De acordo com Ramalho Júnior (1999, vol 1), o Movimento Retilíneo pode ser dividido em Uniforme (MRU) ou Uniformemente Variado (MRUV). O caso mais geral é o MRUV, no qual o móvel sofre variações de velocidade iguais em tempos iguais, ou seja, a aceleração é constante (Figura 3.1a). O MRU é um caso particular em que a aceleração é constante e $a = 0$, logo a velocidade também será constante e isso significa que o móvel percorre distancias iguais em intervalos de tempo iguais (Figura 3.1b).

Sabendo que um móvel varia sua posição ao longo do tempo, chamaremos a equação que permite obter sua posição em cada instante de **função horária**. Para o MRUV essa equação é dada por $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, sendo x_0 a posição inicial do movimento, v_0 a velocidade inicial e a a aceleração do móvel.



(a) MRUV



(b) MRU

Figura 3.1: Tipos de movimento retilíneo

No Ensino Médio, sem a utilização do Cálculo, essa fórmula é apenas apresentada, sem demonstração e os estudantes são obrigados a memorizá-la. Uma vez conhecido o processo de integração e os conceitos físicos, sabendo que a aceleração é constante (MRUV) chega-se à função velocidade e à função horária facilmente:

No MRUV a aceleração é constante: seja $a \in \mathbb{R}$ e consideremos um instante inicial $t_1 = 0$ e um instante final $t_2 = t$. Tem-se:

- $a = \dfrac{dv}{dt}$, integrando em relação ao tempo tem-se $dv = adt \Rightarrow \displaystyle\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt$. Do Teorema Fundamental do Cálculo segue que

$$\Delta v = at \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow v(t) = v_0 + at.$$

- $v = \dfrac{dx}{dt}$, integrando em relação ao tempo tem-se $dx = vdt \Rightarrow \displaystyle\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t vdt = \int_0^t (at + v_0)dt$. Do Teorema Fundamental do Cálculo segue que

$$\Delta x = x - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Com a função horária, o Cálculo e os conhecimentos dos conceitos físicos o estudante não precisa decorar nenhuma outra equação, basta utilizá-los, em conjunto, obtendo facilmente:

- Função velocidade: $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = v_0 + at$;
- Função aceleração: $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = a$.

Para o caso do MRU, tem-se $a = 0$ e suas equações tornam-se mais simples:

- Função horária: $x(t) = x_0 + v_0 t$;
- Função velocidade: $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = v_0$.

Sem o uso do Cálculo é necessário recorrer às mais diversas artimanhas para fazer os estudantes memorizarem muitas fórmulas. Algumas muito utilizadas são:

- Fórmula do "Sorvete", para a função horária: $s(t) = s_0 + v_0 t$;
- Fórmula do "Vovô atleta", para a função velocidade: $v(t) = v_0 + at$.

Nesse aspecto o uso do Cálculo possibilita ao estudante derivar (em ambos os sentidos) as fórmulas que necessita desde que compreenda o sentido físico.

Exemplo 15 *Seja a função horária de um objeto dada por* $x(t) = 3 + 5t + 10t^2$. *Expresse a função velocidade e a função aceleração do objeto e determine sua posição e aceleração nos instantes* $t = 0, t = 3$ *e* $t = 5$.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 5 + 20t.$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 20.$$

Daí segue: $v(0) = 5$, $v(3) = 65$ e $v(5) = 105$. Como a aceleração é constante: $a(0) = a(3) = a(5) = 20$.

Esse é um exemplo bem simples, pois a função horária é um polinômio de grau 2 na variável t, já que a aceleração é constante. Essa é a particularidade do Ensino Médio. Porém se utilizarmos o conceito de velocidade e aceleração, não precisamos prender-nos a movimentos do tipo MRUV, nos quais a aceleração é constante. Poderíamos ter:

Exemplo 16 *A posição de um corpo é dada pela expressão* $x(t) = 2t^3 - 3t^2 + 8$. *Qual a aceleração e velocidade do corpo nos instantes* $t = 0, t = 3$ *e* $t = 5$*?*

Um estudante do Ensino Médio que não está muito seguro com os conceitos provavelmente não conseguiria responder esse problema, e um bom estudante certamente teria bastante trabalho desenvolvendo as fórmulas.

Porém usando os conhecimentos de Cálculo a solução do problema é bastante trivial:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6t,$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 6.$$

Daí segue que: $v(0) = 0$, $v(3) = 36$, $v(5) = 120$, $a(0) = -6$, $a(3) = 30$ e $a(5) = 54$.

O Exemplo 16 mostra que não é necessário estudar apenas casos particulares, limitando o estudante que muitas vezes não compreende o que estuda pois não vê uma ligação direta com os fatos da realidade e muitas vezes ao questionar o professor recebe como resposta: “A demonstração é muito complicada, é mais fácil decorar mesmo”.

3.1.2 Movimento Harmônico Simples

No Movimento Harmônico Simples (MHS) o ponto material descreve uma trajetória retilínea de forma oscilante periodicamente em torno da posição de equilíbrio devido a uma força (chamada *Força Restauradora*) que sempre é orientada para a posição de equilíbrio e intensidade proporcional à distância entre o ponto material e essa posição, conforme a Figura 3.2.

Utilizando os mesmos termos do Movimento Retilíneo, a função horária para o MHS é dada por: $x(t) = x_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$, onde x_m, que é o deslocamento máximo ao longo do eixo em que ele ocorre, é chamado de *amplitude*, ω é uma constante chamada de *frequência angular*, ϕ é outra constante, *constante (ou ângulo) de fase* e a grandeza $\omega t + \phi$ é variável no tempo t recebe o nome de *fase*.

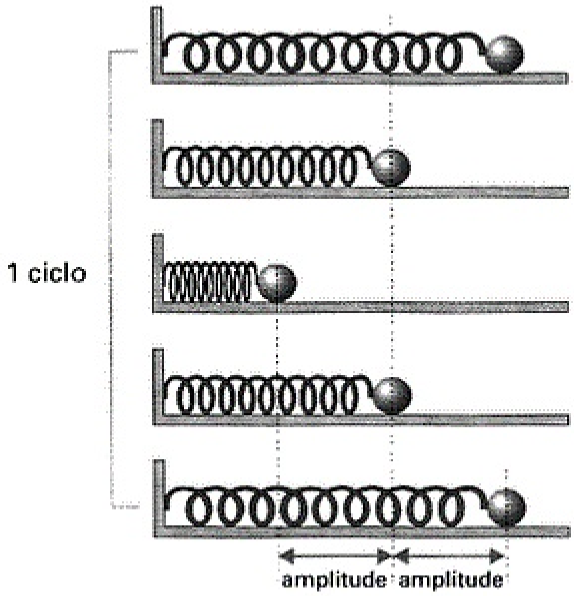


Figura 3.2: Representação de 1 ciclo

O MHS também pode ser descrito como a projeção de um movimento circular uniforme sobre o diâmetro do círculo no qual ocorre o movimento. E é a partir dessa relação com o movimento circular que os livros didáticos do Ensino Médio constroem todas as equações do MHS. Isso não está errado, porém como a construção é feita de maneira geométrica, perde-se um pouco dos conceitos envolvidos. A construção geométrica não passa a ideia da velocidade como variação da posição, nem a aceleração como variação da velocidade.

Esses são os artifícios encontrados para fazer a demonstração das equações, uma vez que os livros do Ensino Médio não poderiam utilizar o Cálculo.

Utilizando a proposta do trabalho, a partir das ferramentas do Cálculo, é possível deduzir as equações para as funções velocidade e aceleração de maneira bastante simples, uma vez conhecida a função horária:

- Função velocidade:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[x_m \cdot \cos(\omega t + \phi)]$$
$$= -\omega \cdot x_m \cdot sen(\omega t + \phi).$$

- Função aceleração:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}[-\omega x_m sen(\omega t + \phi)]$$
$$= -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 \cdot x(t).$$

O processo inverso, de obter-se a função horária a partir da aceleração também não seria muito complicado, pois como ω, x_m e ϕ são constantes o processo de integração torna-se simples, apenas com a integração das funções trigonométricas.

- Função velocidade:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

Integrando em ambos os lados:

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} adt$$

Daí segue que:

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \int_{t_1}^{t_2} -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) dt \\
&= -\omega^2 x_m \int_{t_1}^{t_2} \cos(\omega t + \phi) dt \\
&= -\omega^2 x_m \left[\frac{sen(\omega t + \phi)}{w} \right]_{t_1}^{t_2} \\
&= -\omega x_m sen(\omega t_2 + \phi) + \omega x_m sen(\omega t_1 + \phi).
\end{aligned}$$

Assim tem-se que: $v(t) = -\omega x_m sen(\omega t + \phi)$.

- Função horária:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt$$

Integrando em ambos os lados:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} vdt$$

Daí, segue que:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \int_{t_1}^{t_2} -\omega x_m sen(\omega t + \phi) dt \\
&= -\omega x_m \int_{t_1}^{t_2} sen(\omega t + \phi) dt \\
&= \omega x_m \left[\frac{(\cos(\omega t + \phi))}{w} \right]_{t_1}^{t_2} \\
&= x_m \cos(\omega t_2 + \phi) - x_m \cos(\omega t_1 + \phi).
\end{aligned}$$

Assim, tem-se que: $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$.

Uma aplicação muito enfatizada no Ensino Médio são os sistemas massa-mola. São modelos físicos construídos a partir de massas presas em molas. Quando o sistema está em repouso diz-se em equilíbrio estático, porém quando a massa é deslocada de sua posição de equilíbrio, surge a força restauradora que tenta trazê-la novamente para essa posição, essa força é conhecida por *Força Elástica* (F_{el}) e é regida pela *Lei de Hooke*, cujo módulo vale $F_{el} = kx$, sendo k a constante elástica da mola, valor que depende de cada mola.

Sabe-se, pela 2ª Lei de Newton que $F = m \cdot a$, daí temos que: $kx = m\omega^2 x$. Logo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Como o período do movimento é dado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$ temos que: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Vejamos um exemplo de Halliday (2003, vol 2).

Exemplo 17 *Um bloco com uma massa m de 680 g é preso a uma mola cuja constante elástica $k = 65$ N/m. O bloco é puxado de uma distância de 11 cm da posição de equilíbrio e depois é solto. Determine a frequência angular, o período, a velocidade e acelerações máximas.*

A frequência angular é dada por: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65}{0,68}} \approx 9,78\ rad/s$.

O período é dado por: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,68}{65}} \approx 0,64\ s$.

A velocidade é dada por $v = -\omega x_m sen(\omega t + \phi)$ e como a função seno assume valores entre 1 e -1, então tem-se a velocidade máxima quando $sen(\omega t + \phi) = -1$. Logo $v_{max} = \omega x_m \approx 9,78 \cdot 0,11 \approx 1,08\ m/s$.

O mesmo ocorre com a aceleração, $a = -\omega^2 x(t)$, o maior valor em módulo de $x(t) < 0$ ocorre quando o cosseno é igual -1, ou seja $x(t) = |x_m|$. Daí a aceleração tem como valor máximo: $a_{max} = \omega^2 x_m = (9,78)^2(0,11) \approx 10,52 m/s^2$.

3.2 Energia e Trabalho

Energia é um dos conceitos mais difíceis de se definir. Entretanto é uma grandeza com a qual lidamos a todo instante, e de maneira informal o termo é bastante utilizado em diversas situações completamente diferentes.

Mas cientificamente, temos a energia como uma grandeza escalar associada a um estado (ou condição) de um ou mais objetos. Essa energia associada pode ser alterada de diversas maneiras, dentre elas pela ação de forças.

Etimologicamente, **energia** origina-se grego, *ergos*, que significa **trabalho**. Uma ideia de senso comum, mas que não foge completamente do âmbito científico, é a energia como *a capacidade de um determinado sistema realizar trabalho*, e esse trabalho pode ser feito ao mudar de posição ou de velocidade, de temperatura, de forma (sendo comprimido ou tracionado), etc.

Portanto, existem diversas formas de energia:

- Solar: energia que tem como origem o Sol. Representada, em sua maioria pela energia radiante emitida por ele. É a fonte primária e essencial para a vida em nosso Planeta.

- Eólica: energia associada aos ventos, utilizada, por exemplo, em barcos a velas, ou mesmo moinhos de vento. Recebe esse nome devido ao Deus Grego *Éolo*, o Deus do Vento.

- Hidrelétrica: está associada ao movimento das águas, em mares, rios, etc. Em todo o mundo é bastante utilizada para conversão em energia elétrica.

- Cinética: tipo de energia associada ao movimento de um sistema. Quanto maior a velocidade do sistema, maior será a energia cinética associada a ela, se em repouso, sua energia cinética é nula.

- Potencial: energia que um sistema possui devido a sua posição. Quando levantamos um objeto, comprimimos uma mola ou esticamos uma corda, esses sistemas aumentarão sua energia potencial.

- Nuclear: forma de energia armazenada nos elementos internos do núcleo, graças suas interações nucleares fortes. Reações nucleares muito conhecidas são as reações de fissão e fusão nuclear. A fonte de energia solar deve-se às reações de fusão nuclear, nas quais átomos de hidrogênio (H) fundem-se formando Hélio (He).

- Elétrica: tipo de energia mais utilizado pela humanidade atualmente em fábricas, casas, escolas, usinas, etc. Na verdade é um tipo de energia potencial associada às cargas elétricas.

- Bioquímica: energia que nos permite viver. Energia associada aos sistemas biológicos, a partir de reações químicas.

- Térmica: pode ser classificada como um tipo de energia cinética, mas em uma escala menor. Está associada ao movimento das moléculas constituintes da matéria. Quando essa forma de energia flui de um corpo para outro recebe o nome de **calor**.

Define-se ainda a Energia Mecânica (E) de um sistema como a soma das energias cinéticas (K) e potenciais (U), e na ausência de forças dissipativas essa energia mecânica é conservada.

Em linguagem coloquial costuma-se ouvir o termo *trabalho* associado à atividades físicas ou mentais, como: "Fulano trabalha todos os dias" ou "Tive que estudar muito para aquela prova, foi um trabalho muito difícil". Na Física, o **Trabalho** está associado às forças. Portanto o correto é dizer: "Trabalho de uma força".

Quando aplica-se uma força em um objeto, fazendo-o acelerar ou na intenção de pará-lo, modifica-se seu estado de movimento, e portanto, sua energia cinética. Essa energia cinética pode ser transferida pelo objeto ou para o objeto. Tal transferência se dá por meio da força aplicada, e diz-se que a força realizou **trabalho**. Portanto, pode-se compreender o trabalho como o ato de transferir energia.

Definição 21 (Trabalho de uma Força) *O Trabalho de uma Força é calculado como:*

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{F(x)} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\cos\phi dr,$$

onde $\boldsymbol{F(x)}$ *é o vetor da força que atua no corpo,* $\boldsymbol{dr}$ *é o diferencial do vetor deslocamento e* ϕ *o ângulo entre os vetores força e deslocamento.* $F(x)$ *e* dr *são os módulos dos vetores* $\boldsymbol{F(x)}$ *e* $\boldsymbol{dr}$*, respectivamente.*

Definição 22 (Energia Cinética) *A Energia Cinética de um sistema é uma grandeza associada ao seus estado de movimento, e é calculada como:*

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Sendo m *e* v *a massa e a velocidade do sistema, respectivamente.*

Assim, enunciamos o teorema *Trabalho-Energia Cinética*:

Teorema 23 *O trabalho da força resultante em um objeto mede a variação da energia cinética desse objeto.*

Demonstração: Faremos a demonstração em um caso mais simples, admitindo que a força age no mesmo sentido do deslocamento com módulo variável e o deslocamento se dá ao longo do eixo Ox. Neste caso temos: $W = \int_{x_0}^{x} F dx$.

Sabemos ainda que:

- $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dv}{dx}v = v\dfrac{dv}{dx}$;
- $F = ma = mv\dfrac{dv}{dx}$.

Dessa maneira, substituindo F em $W = \int_{x_0}^{x} F dx$, temos:

$$W = \int_{x_0}^{x} F dx = \int_{x_0}^{x} mv\frac{dv}{dx}dx = \int_{v_0}^{v} mvdv = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

■

Então, para que uma força realize trabalho são necessárias duas condições:

1. Haver deslocamento;
2. Haver força ou componente de força na direção do deslocamento.

Como o trabalho mede a variação da energia cinética, ele também é uma grandeza escalar e possui a mesma unidade da energia.

Dessa maneira o trabalho pode ser classificado como:

- Nulo: quando não há variação de energia cinética;
- Motor: quando a variação de energia cinética é positiva, ou seja o objeto aumenta sua velocidade. Nesse caso, o deslocamento e a força têm o mesmo sentido.
- Resistor: quando a variação de energia cinética é negativa, ou seja, o objeto diminui sua velocidade. Tem-se então, o deslocamento e a força em sentidos contrários.

Uma força é dita conservativa, em oposição à dissipativa, quando seu trabalho independe da trajetória. As forças Gravitacional, Elástica e Elétrica são exemplos de Forças Conservativas. O conceito de energia potencial está associado a forças conservativas.

3.2.1 Casos Particulares

Nesta Seção são apresentados conceitos sobre energia e trabalho, a partir dos casos mais comuns tratados nos livros didáticos do Ensino Médio. O que acontece nesse nível de ensino, é que novamente, sem o auxílio do Cálculo, esse estudo é feito apenas para alguns casos particulares de forças. Mas se o conceito for aplicado corretamente e forem utilizadas as ideias de Integral e Derivada, pode-se calcular para quaisquer tipos de forças

Força Gravitacional

A Força Gravitacional, ao contrário do que muitos pensam, não é associada exclusivamente à força que a Terra exerce em nós ou em objetos que nela se apoiam, mas é uma força de campo (o *Campo Gravitacional*) que atua à distância (não necessita de contato entre os corpos) e entre quaisquer dois corpos que possuam massa. Conforme enunciada por Newton, pode ser traduzida, matematicamente como: $F_g = G\dfrac{m_1 m_2}{x^2}$, onde m_1 e m_2 são as massas dos corpos, x é a distância entre eles, e G é uma constante chamada de *Constante de Gravitação Universal*.

Ao lançar um objeto verticalmente para cima com velocidade inicial v_0 observa-se que o objeto diminui de velocidade até parar e retornar. Isso significa que durante a subida a Força Gravitacional realiza um trabalho resistor sobre esse objeto, fazendo-o diminuir de velocidade até parar. Nesse instante haverá inversão no sentido do movimento e o objeto começará a retornar aumentando a velocidade, assim o trabalho da Força Gravitacional será um trabalho motor, conforme ilustrado na Figura 3.3.

Sem usar o Cálculo, a aprendizagem no Ensino Médio fica muito limitada e tem-se que fazer muitas considerações, dentre elas, a de que o corpo continua muito próximo à superfície da Terra neste caso pode-se considerar a aceleração da gravidade constante, e assim a força gravitacional que atrai o corpo também será constante. Pela 2ª Lei de Newton: $F_g = G\dfrac{Mm}{x^2} = m \cdot a_g$. Daí, $a_g = G\dfrac{M}{x^2}$, sendo a_g a aceleração da gravidade gerada pela massa M da Terra e x o seu raio. Utilizando os dados conhecidos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\dfrac{m^3}{s^2 Kg}$, $M = 5,98 \cdot 10^{24}\ Kg$ e $x = 6,37 \cdot 10^6\ m$ calcula-se o valor aproximado utilizado nos livros didáticos: $a_g \approx 9,8\ m/s^2$ que ainda é aproximado, na maioria dos exercícios para: $a_g = 10\ m/s^2$.

Dessa maneira, ao lançar um objeto para cima de uma posição x_1 até atingir uma posição x_2 tem-se a força no sentido contrário ao deslocamento portanto $\phi = 180°$ e

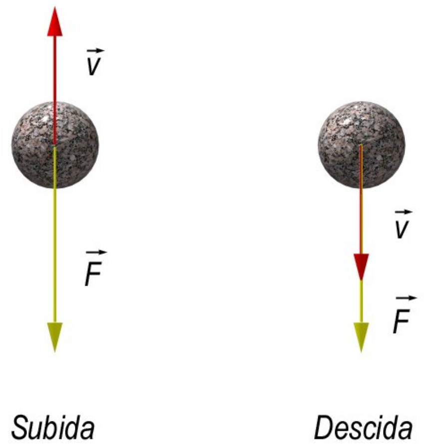


Figura 3.3: Lançamento Vertical

nesse caso: $W = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx \cdot \cos\phi = -F \int_{x_1}^{x_2} dx = -F\,[x]_{x_1}^{x_2} = -F\Delta x.$

Assim, a fórmula que é dada nos livro de Ensino Médio, de acordo com Ramalho Júnior (1999, vol 1) é:

$$W = -F\Delta x = -mg\Delta x.$$

Ora, mas utilizando o Cálculo não precisaríamos fazer nenhuma restrição. Conforme Halliday (2003, vol 1) Sabendo que F_g é uma força que varia com a posição, poderíamos calcular seu trabalho de maneira simples com a integral:

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx \cdot \cos\phi \\ &= -\int_{x_1}^{x_2} G\frac{Mm}{x^2}dx \\ &= -GMm\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} \\ &= GMm\left[\frac{1}{x}\right]_{x_1}^{x_2} \\ &= GMm\left[\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right]. \end{aligned}$$

Existe também uma forma de energia associada a sistemas que se atraem por meio da força gravitacional, essa energia é a *Energia Potencial Gravitacional*.

Como calcular a Energia Potencial Gravitacional?

Mais uma vez, nos livros de Ensino Médio as fórmulas já aparecem prontas, o que dificulta a compreensão de seu significado, o que poderia ser resolvido facilmente.

Sabendo que em um dado sistema no qual só atuam forças conservativas a Energia Mecânica (E) se conserva. Assim, a soma das energias Cinética (K) e Potencial (U) é constante, o que matematicamente se traduz na equação: $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$. Assim $\Delta U = -\Delta K$. Como o trabalho da força resultante mede a variação de energia cinética (ΔK), tem-se que: $\Delta U = -W = -\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \cdot \cos\phi$.

Nos arredores da Terra, considerando a Força Gravitacional constante tem-se que: $\Delta U = -\int_{y_1}^{y_2}(-mg)dy = mg\int_{y_1}^{y_2} dy = mg\Delta y$, em que a integral foi calculada entre as posições y_1 e y_2 pois considerou-se a partícula lançada verticalmente para cima. Então adotando a posição $y_1 = 0$ como posição de referência, tem-se $U_1 = 0$, e daí segue que: $U_2 = mgy_2$. Assim, para uma posição vertical qualquer, com y arbitrário, pode-se escrever $U(y) = mgy$.

Dessa maneira, a Energia Potencial Gravitacional associada a um sistema partícula-Terra depende apenas da posição vertical y (altura) da partícula, em relação à posição de referencia $y = 0$, e não da posição horizontal.

No caso geral, em que a Força Gravitacional não é constante e não deseja-se saber, necessariamente a Energia Potencial associada com um sistema que inclui a Terra, as contas devem ser refeitas. Sabe-se que quanto maior a distância entre os corpos maior será a Energia Potencial associada ao sistema. Deve-se ainda, escolher a configuração padrão onde será adotado o potencial nulo.

Dada uma situação entre dois objetos de massas m e M, e x a distância entre eles. Considera-se $U \to 0$ quando $x \to +\infty$. Como a Energia Potencial aumenta com o aumento da distância, e $U \to 0$ quando $x \to \infty$, tem-se $U < 0$, para qualquer valor finito de x. E agora, como deduzir uma expressão para U?

Podemos proceder da seguinte maneira: os corpos estão inicialmente afastados de uma distância x_1, e serão afastados "até o infinito". Portanto, como mostrado

$$W = \int_{x_1}^{\infty} F(x)dx\cos\phi = -\int_{x_1}^{\infty} G\frac{Mm}{x^2}dx.$$

Utilizando o fato $\Delta U = -W$ e sabendo que $U_\infty = 0$, temos que

$$U_\infty - U_{x_1} = -W$$

então

$$\begin{aligned} U_{x_1} &= W \\ &= -GMm \int_{x_1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \\ &= GMm \left[\frac{1}{x}\right]_{x_1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Daí segue $U_{x_1} = -\dfrac{GMm}{x_1}$, que pode ser reescrito como $U_x = -\dfrac{GMm}{x}$ o que é condizente com o fato já analisado. Para qualquer distância finita, tem-se $U(x) < 0$.

Força Elástica

No Ensino Médio, estuda-se a Força Elástica em problemas com molas, mas percebe-se na natureza muitas outras forças com a mesma forma matemática, com isso, a compreensão dessa força é útil em diversos casos.

Considera-se uma mola presa por uma de suas extremidades, suponha a esquerda, em um apoio fixo, ligada pela outra extremidade (direita) a um bloco de massa m, podendo essa mola mover-se ao longo do eixo x horizontalmente. Chama-se de estado *indeformado* aquele no qual a mola não está comprimida nem tracionada. Porém ao tracioná-la puxando o bloco para a direita, surge uma força para a esquerda, que a mola exerce no bloco, no sentido de trazê-lo para a posição original. Se, por outro lado, comprime-se a mola empurrando o bloco para a esquerda, a força surge para direita empurrando o bloco para a posição original. Em qualquer caso a força tende a restaurar a posição indeformada da mola e por isso recebe o nome de *Força Restauradora*, essas situações são representadas na Figura 3.4.

Assim como a Força Gravitacional foi estudada e enunciada por Newton, a força da mola tem seu módulo dado por

$$F_{el}(x) = kx,$$

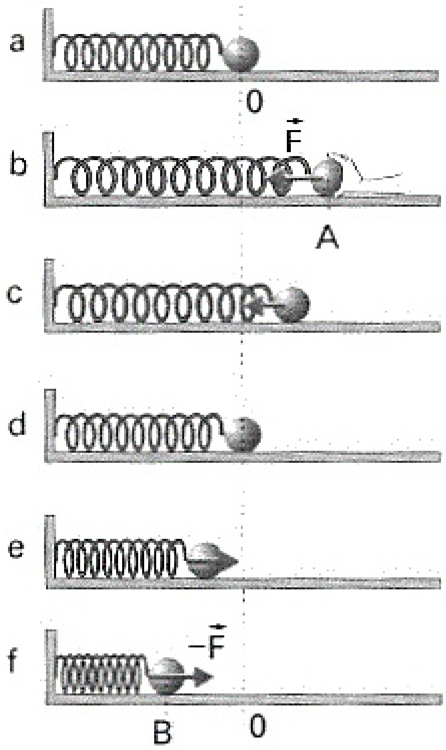


Figura 3.4: Sistema Massa-mola

na qual, x representa a posição em relação ao repouso.

Essa relação é conhecida como *Lei de Hooke* em homenagem ao cientista inglês *Robert Hooke* (1635-1703). Por ser uma força restauradora, sempre terá sentido oposto ao deslocamento sendo k uma constante chamada de constante de rigidez (ou constante de mola) que mede a rigidez de cada mola. Ou seja, quanto maior o valor de k maior deve ser a força aplicada para conseguir um deslocamento. Nesse caso, a força é diretamente proporcional ao deslocamento, i.e., uma força variável. Por isso, não é possível calcular o trabalho (W) da força ou a energia potencial associada sem a utilização das ferramentas do Cálculo. Razão pela qual nos livros do Ensino Médio tanto o Trabalho como a Energia Potencial aparecem sem muitas explicações, apenas uma fórmula que o estudante é obrigado a memorizar. Mas será mostrado que isso não é necessário.

Utilizando a definição de trabalho $W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx \cdot \cos\phi$ de uma força e lembrando que a força é restauradora, ou seja, sempre é oposta ao deslocamento, tem-se $\phi = 180°$, e assim

$$W = -\int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx = -\int_{x_1}^{x_2} kxdx = -k\int_{x_1}^{x_2} xdx = \frac{-k}{2}\left[x^2\right]_{x_1}^{x_2}$$

Segue então que $W = \dfrac{-1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$. Considerando $x_1 = 0$ como o estado indeformado da mola e representando x_2 simplesmente por x, tem-se: $W = \dfrac{-1}{2}kx^2$.

Como já foi dito, a força elástica também é uma força conservativa e com isso pode-se associar ao sistema massa-mola uma energia, chamada de *Energia Potencial Elástica*. Uma vez calculado o trabalho da força, pode-se utilizar novamente o Teorema 23, e utilizando o fato: $\Delta U = -W$ tem-se a equação para o cálculo da energia potencial associada ao sistema em relação à deformação da mola:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

A energia cinética de um sistema é dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$ e utilizando as expressões para $x(t)$ e $v(t)$ no MHS deduzidas anteriormente tem-se:

$$U(x) = \frac{1}{2}k \cdot x_m^2 \cdot \cos^2(\omega t + \phi)$$

e

$$K(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot x_m^2 \cdot sen^2(\omega t + \phi),$$

Substituindo $\omega^2 = k/m$ tem-se que

$$K(x) = \frac{1}{2}k \cdot x_m^2 \cdot sen^2(\omega t + \phi)$$

Sabendo que a energia mecânica de um sistema conservativo é constante dada por $E = U + K$, tem-se:

$$E = \frac{1}{2}k \cdot x_m^2 \cdot \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}k \cdot x_m^2 \cdot sen^2(\omega t + \phi),$$

ou

$$E = \frac{1}{2}k \cdot x_m^2 \cdot (\cos^2(\omega t + \phi) + sen^2(\omega t + \phi)).$$

Como $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$ tem-se

$$E = \frac{1}{2}k \cdot x_m^2.$$

Demonstrando que a energia total do sistema depende apenas de x_m.

Força Elétrica

A eletricidade é um fenômeno estudado há muito tempo, já percebido pelos primeiros filósofos que ao esfregar um pedaço de âmbar ele atraia pequenos pedaços de palha. Atualmente sabe-se que essa propriedade é devida aos *elétrons*, palavra derivada do grego, que significa âmbar. Experimentalmente foi verificado que alguns tipos de materiais ao serem atritados repelem-se ou atraem-se. Para explicar essa característica foi atribuída uma propriedade intrínseca da matéria: *a carga elétrica.*

A partir dela, muitas analogias serão feitas em relação as massas (outra propriedade da matéria). Porém, para explicar a dualidade entre atração e repulsão das cargas, estabeleceu-se dois tipos de cargas, positivas e negativas. O cientista francês *Charles François de Cisternay du Fay* (1698-1739), estabeleceu que: cargas com mesmo sinal elétrico se repelem e cargas com sinal elétrico contrários se atraem. O que ficou conhecido como *Lei de du Fay.*

Outro cientista francês, *Charles Augustin de Coulomb* (1736-1806), enunciou a relação entre as cargas elétricas, o que ficou conhecido como *Lei de Coulomb.* Ele mediu analiticamente o valor dessa força de interação, e obteve como resultado, como apresentado em Halliday (2003, vol 3)

$$F_q = k_0\frac{|Q||q|}{x^2},$$

em que Q e q são os valores das cargas que interagem, k_0 é a constante eletrostática (que depende do meio no qual as cargas estão imersas) e x é a distância que as separam. A força age na direção da linha que une as duas cargas e seu sentido, que será de repulsão ou de atração, é dado pela Lei de du Fay, de acordo com as cargas em questão.

A força elétrica tem a mesma forma matemática da força gravitacional, a diferença reside no fato de usar os valores das cargas em módulo, uma vez que existem dois tipos de valores. No caso da força gravitacional isso não é necessário, pois só existe um tipo de massa e a força é sempre de atração.

Portanto os aspectos gerais do que foi discutido para a Força Gravitacional também são válidos para a Força Elétrica. Ela também é uma força conservativa e dado um sistema de partículas que interagem por meio dela também é possível associar a esse sistema uma quantidade de energia, chamada de *Energia Potencial Elétrica*.

Com isso, se o sistema muda de configuração, significa que a força realizou trabalho sobre as partículas. A configuração de referência adotada é um sistema de partículas em que todas estão infinitamente afastadas umas das outras. Nesse situação a energia potencial é nula. Partindo dessa configuração as partículas serão agrupadas em distâncias finitas.

Assim, representa-se por W_∞ o trabalho da força elétrica para aproximar essas cargas. Sabemos que $\Delta U = U - U_\infty = -W$. Daí $U = -W_\infty$.

No Ensino Médio o estudo de eletricidade torna-se muito extenso e trabalhoso, pois sem o auxílio do Cálculo devem ser memorizadas muitas expressões de acordo com cada situação, e alguns novos conceitos são introduzidos, como o de *Potencial Elétrico*.

Para os casos mais simples, algumas analogias são feitas em relação a Força Gravitacional. No caso da gravitação, como já foi dito, a força é sempre atrativa, e cada massa gera ao seu redor um campo (grandeza vetorial) que aponta para ela própria. No caso da eletricidade o campo gerado por uma carga pode aproximar-se ou afastar-se da carga, dependendo de seu sinal. Mas, matematicamente as expressões são parecidas, e considerando o campo uniforme tem-se, segundo Ramalho Júnior (1999, vol 3):

$$F_g = ma_g = G\frac{Mm}{x^2}, \text{ fornecendo } a_g = G\frac{M}{x^2}.$$

$$F_q = |q|E = k_0\frac{|Q||q|}{x^2}, \text{ fornecendo } E = k_0\frac{|Q|}{x^2}.$$

Então o trabalho da força elétrica será $W_q = \pm F_q d = \pm qEd$.

Cálculo Analítico da Força

Para concluir esse breve estudo, será mostrado mais um resultado interessante que não é discutido no Ensino Médio por falta das ferramentas de Cálculo

Como foi apresentado no estudo sobre o movimento, pode-se encontrar a função velocidade e a função aceleração de maneiras simples, uma vez conhecida a função horária, através da Derivada. Mostrou-se que o processo inverso também é possível, ou seja, pode-se determinar a função horária a partir da função aceleração, utilizando-se a Integral. Mas para isso era necessário o conhecimento dos conceitos físicos.

Na Seção anterior calculou-se o trabalho realizado pelas Forças Gravitacional, Elástica e Elétrica e a Energia Potencial associada a sistemas que interagem por meio delas. Para esse cálculo foi utilizada a Integral.

Agora será feito o processo inverso, dada a Energia Potencial, será calculada a respectiva força.

Foi mostrado que $\Delta U = -\Delta E = -W$, e nos casos considerados, com o movimento unidimensional, considerando o deslocamento de uma partícula ao longo de um eixo (x), pode-se reescrever a equação anterior como $\Delta U = -F(x)\Delta x$. Dessa maneira, segue que: $F(x) = -\dfrac{\Delta U}{\Delta x}$. Passando para o limite com $\Delta x \to 0$ chega-se a expressão desejada:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

Com esse resultado, pode-se calcular as forças de maneira bastante simples, desde que se conheça a Energia Potencial associada ao sistema:

- Força Gravitacional, no caso geral: dada a energia potencial gravitacional $U_g(x) = -\dfrac{GMm}{x}$, calcula-se a força como: $F_g(x) = -\dfrac{dU(x)}{dx} = \dfrac{GMm}{x^2}$.
- Força Gravitacional na superfície da Terra: $U_g(y) = mgy$, daí calcula-se a força gravitacional: $F_g(y) = -\dfrac{dU(y)}{dx} = -mg$ que é a tão conhecida força peso, como calculada no Ensino Médio.
- Força Elástica: dada a energia potencial elástica $U_{el}(x) = \dfrac{1}{2}kx^2$, obtém-se a força: $F_{el}(x) = -\dfrac{dU(x)}{dx} = -kx$.

A aparente inconsistência com os resultados apresentados anteriormente $F_{el} = kx$ e $F_g = mg$ (conforme aparecem nos livros didáticos) deve-se ao fato de que tratou-se apenas do módulo dessas forças. O sinal negativo agora apresentado é consistente com o fato da Força Elástica ser uma força restauradora, ou seja, sempre apresentada sentido oposto ao deslocamento, e a força gravitacional considerando um sistema Terra-partícula, sendo a partícula lançada verticalmente para cima, próxima a superfície da Terra, a Força Gravitacional que age na partícula, será sempre vertical para baixo, ou seja, também terá o sentido oposto ao movimento.

Capítulo 4

Considerações Finais

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta."
Carl Friedrich Gauss

A motivação para esse trabalho é consequência da constatação da falta de interesse de grande parte dos estudantes de cursos de graduação pelos conteúdos de Cálculo, situação muito preocupante, pois ao nosso ver, trata-se de um conteúdo com muitas aplicações e enorme importância em diversas áreas do conhecimento humano.

A história do desenvolvimento do Cálculo nos mostra que para chegar a formulação atual foram necessários muito tempo e esforço desde os antigos egípcios ou os grandes geômetras gregos passando por Eudóxio, Arquimedes, Kepler, Cavalieri, os Bernoulli, até Newton, Leibniz, Cauchy e Weierstrass.

O Cálculo não surgiu pronto, mas seu desenvolvimento se deu a partir de várias ideias, de tentativas e erros, dessa maneira, novos conceitos foram necessários e assim, surgiram. Segundo Ávila (1991):

> "À medida que vamos avançando com a apresentação de idéias, com o desenvolvimento de métodos relevantes no tratamento de problemas significativos, aí sim, vão surgindo, a cada passo, *gradativamente*, a necessidade de definições novas..."

A partir da história do ensino do Cálculo no Brasil, sabe-se que esse conteúdo já fez parte, durante vários anos, das escolas brasileiras, não restrito aos cursos superiores. Fiéis aos pensamentos do Movimento da Matemática Moderna, na década de 1960, os reformistas valorizaram tópicos que consideraram mais modernos, e dessa maneira, o ensino tanto da Geometria quanto do Cálculo foram bastante prejudicados. A excessiva axiomatização, rigor e formalismo, associado ao ensino da *Teoria dos Conjuntos* exigiriam um estudo muito completo e detalhado sobre os números reais, para o qual seria necessário, no mínimo, um semestre, o que inviabilizava o ensino do Cálculo. (Ávila, 1991)

Consequentemente, o ensino de Cálculo é retirado do Ensino Médio e postergado para o Ensino Superior. Acontece que ao ingressarem nos cursos superiores, os estudantes encontram algo completamente diferente do que estudaram no Ensino Médio. Esse novos conteúdos lhes são apresentados de maneira puramente mecânica, com muitos teoremas a serem memorizados e muitas contas a serem feitas.

A proposta não é ensinar o Cálculo com todo o rigor e formalismo que levaram tanto tempo para serem desenvolvidos, esses sim, devem ser deixados para os cursos superiores. Mas mostrou-se com esse trabalho, que o estudante de Ensino Médio deve conhecer as noções iniciais e a importância do Cálculo onde quer que ele vá atuar.

É possível fazer esse trabalho de ensino do Cálculo no nível médio, uma vez que se dispõe de bons livros que contemplam esse conteúdo, tornando o Cálculo acessível a esses estudantes. E se o professor souber organizar suas aulas de maneira a concentrar seus esforços valorizando o que é mais importante, não seria necessário aumentar a carga horária destinada à matemática. O problema é uma questão de reformulação dos programas atuais. (Ávila, 1991).

Esse trabalho, porém, não deve ser feito de qualquer maneira, mas articulado com outras disciplinas, mostrando aos estudantes que o conhecimento não é desconexo mas há uma relação entre aquilo que ele aprende, por exemplo, em Matemática e a Física ou a Química, ou mesmo a Biologia.

Isso porém, exige mais conhecimento e planejamento do professor, que muitas vezes sente-se despreparado para ensinar esse conteúdo, uma vez que em sua formação, o Cálculo também lhe foi ensinado de maneira puramente mecânica e desconexa de sua história e de seu desenvolvimento, bem como de suas aplicações.

O Cálculo não é importante apenas para a Matemática, mas também para a Física, uma vez que vários dos seus conceitos surgem das ideias de Integral e Derivadas, que no final das contas, são casos particulares de limites (limites de Somas de Riemann e limites do Quociente de Newton).

A partir de algumas aplicações, mostrou-se que o Cálculo está inserido em muitos ramos da Física: na cinemática, na dinâmica, nas oscilações, na gravitação, na eletricidade, e tudo isso é importante pois estes são conteúdos que fazem parte do cotidiano de qualquer pessoa. E para a compreensão desses assuntos, a Matemática é uma ferramenta essencial.

Como demonstrado, muito do que é estudado na Física do Ensino Médio, deve limitar-se a casos particulares, pois para os casos gerais a demonstração de suas equações não seria possível, uma vez que necessitam das ferramentas do Cálculo.

Conceitos de velocidade, aceleração, trabalho, energia, dentre outros surgiram e desenvolveram-se historicamente associados ao Cálculo, mas isso não é passado ao estudante quando a ele é ensinado que deve memorizar, por exemplo, que o trabalho da Força Gravitacional, é $W_g = -mg\Delta x$ ou que a Energia Potencial Elástica vale $U = \frac{kx^2}{2}$.

Assim como muitos países, o Brasil busca aperfeiçoar a educação gratuita fazendo com que cada vez mais brasileiros sejam instruídos, através da oferta de mais vagas e da capacitação de professores ou pelo planejamento e adequação de políticas públicas voltadas para o ensino. Tenta-se desse modo melhorar a qualidade da formação integral do ser humano de forma que desenvolva suas habilidades e competências para o exercício de sua profissão, mas além disso, o exercício da cidadania.

Todo esse processo de formação integral depende da educação e essa das disciplinas lecionadas, bem como do entendimento da interligação entre elas. Infelizmente esse entendimento ainda não foi alcançado pois atualmente as disciplinas são estudadas de maneira isoladas não permitindo uma compreensão integral do conteúdo, dessa maneira a tão almejada formação integral do ser humano é bastante prejudicada.

A Matemática, pode ser esse elemento de integração, uma vez que seus conhecimentos aplicam-se nas mais diversas disciplinas. Portanto, deixar para o Ensino Superior um conhecimento extremamente importante é o mesmo que tolher a possibilidade da formação integral de diversas pessoas pois o acesso ao Ensino Superior de qualidade, não é para todos, apesar das propostas do governo.

Portanto, concluímos que para modificar a situação atual de nosso país e formar não apenas leitores e operadores de contas matemáticas, mas formar verdadeiros cidadãos, com capacidade crítico-reflexiva, é necessário que o conteúdo do Cálculo retorne aos currículos do Ensino Médio. E assim, proporcione a uma grande quantidade de jovens a oportunidade de conhecer uma das maiores realizações do ser humano, que indubitavelmente foi indispensável para o desenvolvimento e progresso da sociedade moderna.

E uma boa maneira de retornar com esses conteúdos ao Ensino Médio de modo a tornar a aprendizagem dos estudantes eficiente é que, em seus primeiros contatos, o ensino deve ser feito com explicações intuitivas, com apelo à geometria, mas sem deixar de lado as definições de maneira correta e rigorosa. Com isso, não queremos dizer que elas devam ser memorizadas em seus mínimos detalhes, mas devem ser analisadas e compreendidas a partir da intuição e da geometria.

De acordo com o discutido no Capítulo 2, os conceitos de limites, derivadas e integrais, podem ser desenvolvidos de várias maneiras: matematicamente, utilizando suas definições, ou a partir da ideia de aproximação, retas tangentes e cálculo de áreas, respectivamente. E essa é apenas uma proposta possível.

Deve-se sempre buscar maneiras alternativas, que facilitem a compreensão dos estudantes, e por isso, esse campo de estudo continua em aberto, para muitos outros possíveis trabalhos que venham complementar essa pesquisa.

Referências

ARAÚJO, F. Zenão. 1 gravura. Altura: 328 pixels. Largura: 250 pixels. Formato JPEG. Info Escola, [S.l.], 2010. Disponível em: <http://www.infoescola.com/filosofos/zenao/>. Acesso em: 2 fev. 2013.

ÁVILA, G. O ensino de Cálculo no 2º Grau. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 18. 1991.

CABRAL, J. F. P. Heráclito. Brasil Escola, [S.l.], s.d. Disponível em: <http://www.brasilescola.com/filosofia/heraclito.htm>. Acesso em: 1 fev. 2013.

GABA, E. Aristoteles_Louvre. 1 gravura. Altura: 600 pixels. Largura: 450 pixels. Formato JPEG. Disponível em: <http://www.stpeterslist.com/wp-content/uploads/2011/09/Aristoteles_Louvre.jpeg>. Acesso em: 2 fev. 2013.

HALLIDAY, D. RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos da Física: Mecânica. 6ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científica Editora S.A., 2003. v. 1.

HALLIDAY, D. RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos da Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica. 6ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científica Editora S.A., 2003. v. 2.

HALLIDAY, D. RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos da Física: Eletromagnetismo. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científica Editora S.A., 2003. v. 3.

LIMA, E. L.; Análise Real. 8ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. v. 1.

RAMALHO JUNIOR, F.; FERRARO, N. G.; SOARES, A. T. Os Fundamentos da Física: Mecânica. 6ª edição. São Paulo: Moderna, 1993. v. 1.

RAMALHO JUNIOR, F.; FERRARO, N. G.; SOARES, A. T. Os Fundamentos da Física: Termologia, óptica geométrica e ondas. 7ª edição. São Paulo: Moderna, 1999. v. 2.

RAMALHO JUNIOR, F.; FERRARO, N. G.; SOARES, A. T. Os Fundamentos da Física: Eletricidade. 7ª edição. São Paulo: Moderna, 1999. v. 3.

SIEMS, M. Parmênides. 1 gravura. Altura: 780 pixels. Largura: 1280 pixels. Formato JPEG. Top 100 Western Philosophers. Your Best 100, [S.l.], 2011.

STEWART, J. Cálculo. São Paulo: Cengage Learning, 2012. v. 1.

SWOKOVISKI, E. W. Cálculo com geometria analítica. 2ª edição. São Paulo: Makron Books, 1994. v. 1.