

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/267160570>

# Melhorar o ensino da matemática com ferramentas do século XXI

Article · August 2010

CITATIONS

0

READS

1,146

1 author:



[Nuno Crato](#)

University of Lisbon

129 PUBLICATIONS 2,056 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Raising Public Awareness in Mathematics [View project](#)

**Melhorar o ensino da matemática  
com ferramentas do século XXI**

**Nuno Crato**

**Prof. de Matemática e Estatística no Instituto Superior de Economia e Gestão**

**Pró-reitor para a Cultura Científica da Universidade Técnica de Lisboa**

**Presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática**

**Coordenador científico do centro de investigação Cemapre**

O ensino da matemática e os fracos resultados obtidos por alunos de vários países merecem a atenção dos responsáveis e dos professores e justificam a urgência na procura de soluções. Vários estudos internacionais mostram que há países muito desenvolvidos com dificuldades semelhantes às de alguns países menos avançados e que o atraso económico ou cultural não explica todas as falhas do sistema de ensino. Apesar de todas as condicionantes sociais e culturais, é possível melhorar a educação e as práticas pedagógicas em todos os países.

Nos últimos anos, em resultado de um debate muito alargado e em consequência de enormes progressos das ciências cognitivas e da psicopedagogia, começam a emergir algumas soluções e alguns consensos. Sabe-se melhor como a nossa mente forma a noção de número. Reconhecem-se vantagens nos automatismos e na memorização. Percebe-se que o raciocínio e a memória não são realidades mentais opostas. Questiona-se o papel ubíquo dos exemplos e reabilita-se a importância da abstracção. Conhecem-se as vantagens de um ensino activo, mas sabe-se que não se pode abandonar a transmissão estruturada de conhecimentos.

Neste artigo apresentam-se algumas das conclusões que começam a emergir dos estudos científicos da psicologia e da didáctica da matemática. Dá-se especial destaque às conclusões do painel federal norte-americano sobre o ensino da matemática (NMAP) e expõem-se algumas das conclusões e interrogações da psicologia cognitiva sobre a prática da aritmética e a iniciação à geometria e à álgebra.

## **1. A importância da matemática e do seu ensino**

A matemática não é só um auxiliar útil nas compras diárias nem apenas uma matéria necessária a engenheiros ou profissionais de formação avançada. A matemática permeia a nossa vida moderna e é um requisito necessário a jovens e a futuros profissionais.

Quem quiser trabalhar numa linha de montagem de automóveis ou ser caixeiro de uma loja, quem quiser manter registos comerciais de uma empresa, ler gráficos de produção ou perceber cálculos elementares de juros precisa de ter conhecimentos matemáticos mais avançados que os que se exigiam há algumas décadas a muitos profissionais superiores. A partir do momento em que os computadores e microprocessadores dominam a nossa vida diária e produtiva, os cálculos matemáticos tornaram-se mais fáceis, mas exige-se um maior domínio de conceitos aritméticos, geométricos, algébricos e estatísticos.

Nas profissões técnicas, como sejam as de mecânico, de fiscal de obras ou de contabilista, cada vez é maior a diferença entre profissionais que têm dificuldades em ler uma matriz ou em entender os valores de um histograma e os que estão à vontade com essas matérias. Nas profissões que vão fazer mexer a economia, os empregos exigem uma formação em matemática cada vez mais exigente.

No ensino fundamental, as disciplinas de matemática têm sido as que se defrontam com mais dificuldades. Em outras disciplinas essenciais, como o português ou a geografia, os jovens, mesmo que tenham impedimentos igualmente graves, conseguem em geral ultrapassar os seus problemas ou, pelo menos, progredir nos estudos. Mas em matemática as deficiências são mais difíceis de ultrapassar sem um esforço concentrado. Arrastam-se por vezes ao longo de anos, sendo um dos principais factores de retenção dos alunos.

As dificuldades em matemática são em grande parte responsáveis por que muitos jovens não prossigam carreiras técnicas, como a de contabilista ou engenheiro. Isso pode acontecer por os jovens não prolongarem os estudos além do ensino obrigatório ou por não ficarem preparados para estudos técnicos e serem forçados a escolher especializações ou cursos onde a base quantitativa não é tão importante. Sem menosprezar o relevo de cursos de letras, artes e matérias similares, a verdade é que a falta de informáticos, engenheiros, economistas e outros técnicos tem prejudicado o desenvolvimento de muitos países.

Finalmente, o domínio de conceitos, técnicas e algoritmos matemáticos é um dos principais factores de exercício de uma vida activa e plena. Não estão só em causa as capacidades que são directamente derivadas do treino matemático. Estão

também em causa as capacidades de raciocínio lógico rigoroso, de quantificação de resultados e de distinção entre certeza e probabilidade. O treino na percepção da diferença entre condição necessária e suficiente, tão clara em matemática, ajudado pelo treino na quantificação, são capacidades que têm uso durante toda a vida e que a matemática escolar ajuda a desenvolver.

### **1.1. A importância do ensino**

Diversos estudos têm revelado que os alunos entram na escola com conhecimentos e práticas muito desiguais e que isso é um factor de diferenciação que tende a manter-se ao longo dos anos (ver, e.g., *U.S. Department of Education, NCES 2001*). Assim, é cada vez mais importante começar cedo e fornecer programas de preparação para a escola, de forma que os alunos provenientes de meios menos favorecidos, quando chegam às matérias decisivas do primeiro e segundo anos de escolaridade, possam não estar em grande desvantagem perante os seus colegas que, por origem social e cultural, estão habitualmente mais bem preparados.

Igualmente importante, e aqui o professor dos primeiros anos pode actuar positivamente se a isso se decidir e se lhe forem dadas condições, é que as insuficiências não se arrastem ano atrás ano e que haja uma intervenção imediata perante as primeiras dificuldades. Tem-se detectado em diversos países e diversos contextos que muitos professores, face a progressos rápidos de alguns alunos da sua classe, tendem a concluir que as matérias em causa estão adquiridas e que os alunos estão preparados para progredir. Os alunos que revelam dificuldades nestas fases podem tender a ser vistos como excepções, quando não é disso que se trata. A conclusão é que o professor, talvez sobretudo nos primeiros anos de escolaridade, mas também nas transições de ciclo, deve dar especial atenção a todos os alunos, ajudando aqueles que têm mais dificuldades, e nunca assumir que as matérias estão dominadas só porque alguns alunos manifestam que as dominam.

Em matemática tudo isto ainda é mais importante dado o carácter especialmente cumulativo desta disciplina, aspecto de que à frente falaremos com mais pormenor. Inícios deficientes condicionam todo o percurso escolar dos alunos.

A aprendizagem da matemática condiciona também a aprendizagem de outras matérias. Isso é evidente em Física, Desenho Técnico e muitas outras disciplinas de pendor quantitativo ou geométrico. Começa a ser também evidente em disciplinas e cursos em que anteriormente se refugiavam os estudantes com dificuldades em matemática. Em sociologia ou linguística, por exemplo, os jovens vão encontrar conceitos e técnicas de probabilidades, estatística, álgebra abstracta e lógica com que não se esperavam defrontar e para que não estão muitas vezes preparados.

Mas em matemática, mais que outras disciplinas, é também possível amortecer ou inverter as desvantagens derivadas de factores sociais.

É verdade que os conhecimentos e vivências que os alunos trazem do meio familiar e social têm uma influência grande na maneira como enquadram a actividade escolar, como iniciam as práticas de aprendizagem e como recebem os conhecimentos que lhes são transmitidos. Em matemática, todavia, esses conhecimentos e vivências são habitualmente menos determinantes. As famílias de classes culturalmente mais favorecidas usam em casa um português mais rico e correcto, que ajuda a aprendizagem da língua. Nas conversas surgem também alusões cultas a temas que ajudam os jovens a terem referências históricas, geográficas ou de cultura geral. Mas já é menos habitual que as crianças de famílias mais cultas assistam a discussões de tópicos matemáticos ao jantar.

Repetidamente, os estudos internacionais mostram que as dificuldades no ensino, em particular na matemática, podem ser ultrapassadas com um ensino sistemático, coerente e atento aos progressos dos alunos. Não há fatalidades sociais que remetam os jovens de meios mais desfavorecidos à ignorância.

Não há também uma fatalidade de sexo ou de ansiedade matemática. Os estudos psicológicos mais rigorosos têm também mostrado que as variações devidas ao sexo ou a ansiedade raramente são um problema central (Geary, 1996; Gallagher e Kaufman, 2005). São antes um problema derivado de deficiências na aprendizagem. Em vez de dispersar a atenção com o tratamento de sintomas, os educadores deverão tentar assegurar que todos os alunos acompanhem a evolução das matérias, desenvolvam estratégias de auto-controlo das suas aprendizagens e tenham consciência do esforço crescente que é necessário na escola.

Finalmente, é importante sublinhar que os resultados dos alunos dependem mais do trabalho organizado e do seu esforço de compreensão do que da sua inteligência ou aptidão para a matemática. A ideia de que a inteligência e a aptidão são qualidades fixadas à partida e que não são susceptíveis de evolução tem-se mostrado altamente prejudicial. Tem-se observado que os alunos dominados por esta ideia tendem a desistir mais facilmente e a ter um pior desempenho do que aqueles que acreditam que a inteligência é, em grande parte, desenvolvida pelos seus esforços (Dweck, 1999). Esforços para mudar esta atitude têm tido efeitos positivos nos estudantes, em particular nos que começam a ter resultados negativos a matemática (Blackwell, Trzesniewski, & Dweck, 2007). Esta é uma área em que todos, pais, professores, políticos, comunicação social e cidadãos em geral, podem ter um papel positivo mudando as mentalidades dos alunos.

## **1.2. O ensino é uma arte apoiada na experiência e na ciência**

O ensino de qualquer matéria, mesmo das matérias mais científicas e rigorosas, é uma actividade humana que não pode basear-se exclusivamente em prescrições rigorosas. É algo que tem mais semelhanças com a engenharia ou a arquitectura do que com a ciência fundamental. Muitas vezes, há vários processos de ensinar a mesma matéria, há prioridades que podem ser diferentes em escolas

distintas, há professores com diferentes estilos que conseguem ser eficazes nessa diversidade.

Isto não significa, contudo, que não haja orientações melhores que outras, nem métodos melhores que outros. Sabe-se hoje que há algumas orientações gerais que permitem aos professores, mesmo aplicando estilos diferentes, ensinar com maior eficácia. O bom professor é conhecedor, organizado, sistemático, acompanha os alunos, trata-os com justiça, promove uma avaliação fiável e progride por etapas bem estruturadas, adoptando uma sequência pedagogicamente sólida. Qualquer ser humano que não tenha problemas graves consegue, enquadrando-se dentro destes princípios, ser um professor razoável.

O professor deve pois estar atento às recomendações comprovadas pela experiência e análise científica, de forma a melhorar a sua eficácia pedagógica. Essas recomendações andam em torno de meia dúzia de ideias fortes fáceis de perceber, embora tenham durante muito tempo sido obscurecidas por discussões ideológicas vazias, provindas de muitos ditos «especialistas em educação» que, na realidade, baseiam todas as suas exortações em princípios fortemente ideológicos, que podem reflectir algumas intenções libertadoras da ignorância, mas que não têm qualquer fundamentação científica.

O professor deve, por isso, usar o seu espírito crítico e a sua experiência perante muitas recomendações românticas e irrealistas que lhe chegam de diversos sectores (Kauffman, 2002). Deve, por exemplo, aplicar algum cuidado na leitura de muitas «pesquisas em educação» que são apenas regurgitações de crenças ideológicas ou que se limitam a ser estudos enviesados, feitos com pequenas amostras e sem os cuidados estatísticos e científicos que estes estudos necessitam. É frequente encontrar estudos «para provar que», atitude que é completamente oposta ao espírito científico, assim como é frequente encontrar estudos com amostras de pequena dimensão da qual não se podem tirar conclusões gerais. Ainda mais frequente é defrontarmo-nos com estudos que não têm os cuidados de controlo estatístico elementares, estudos, por exemplo, em que o professor ou orientador empenhado em determinado método é ao mesmo tempo o observador. Encontram-se também análises em que não há grupo de controlo e não se conseguem isolar as variáveis (Hirsh 2002; Stanovitch & Stanovich 2003). Finalmente, é habitual encontrar práticas ditas de investigação em que não se discutem interpretações alternativas dos dados e se apresentam como conclusões únicas as teorias de que o autor parte.

Em numerosos dos ditos «estudos de educação» há uma atitude ideológica que se pode designar de «*intencionalismo*», e que consiste em assumir que, por se tomar como ponto de partida uma intenção generosa, as conclusões estão à partida justificadas (Crato, 2006b). Nos nossos países, Brasil e Portugal, mas também em Espanha e noutros países de cultura latina, está muito difundida essa atitude ideológica, que se mistura com um estilo palavroso e grandiloquente, totalmente oposto à prática científica. É bom saber distinguir conclusões científicas sólidas de

simples recomendações ideológicas. Os ensaios e as discussões ideológicas têm o seu papel, mas não podem confundir-se com estudos de natureza científica.

Exemplos deste *intencionalismo* são tão abundantes que qualquer leitor interessado em educação os conhece. O estilo é repetitivo. Começa-se por fazer uma declaração de intenções: o autor diz-se do lado dos desfavorecidos, afirma militar pela promoção da cidadania dos alunos, declara-se partidário do ensino activo e descreve o seu ponto de partida, habitualmente inspirado em Freire ou noutra autor do século passado, usualmente ensaístas e não experimentalistas. Em seguida descreve um experimento, quase sempre mal delineado, com amostras minúsculas e sem grupos de controlo. Desse experimento cita reacções de alunos, que dizem ter ficado «motivados». E conclui a favor da sua tese.

Em Portugal, por exemplo, são inúmeros os trabalhos deste tipo favorecendo o uso da máquina de calcular e de outros meios, por exemplo, computadores e quadros interactivos. Muitas vezes as coisas são tão mal fundamentadas que se poderia escrever praticamente o mesmo texto substituindo as frases a favor da máquina de calcular por frases contra, que o artigo seria lido da mesma maneira e as conclusões seriam contrárias. O que quase nunca se pergunta nem testa é se a introdução generalizada da calculadora e do computador melhoraram as aprendizagens, ou seja, se os alunos aprenderam mais e melhor.

Num dos raros estudos que fizeram e testaram essa questão fundamental, a autora concluiu que os estudantes declararam ter sido motivados, mas que os resultados não melhoraram (Dias, 2009).

Seria fundamental que os professores, mas sobretudo os formadores de professores e os responsáveis de políticas educativas, desenvolvessem um sentido crítico sobre a literatura de educação, de forma a encararem com as necessárias reticências as últimas modas educativas e as teorias dogmáticas e unilaterais que são muitas vezes apresentadas como conclusões definitivas. Sabemos, no entanto, como é muitas vezes difícil aos profissionais encontrarem tempo para ler a literatura sobre educação e destringer nela o trigo do joio.

Uma primeira atitude crítica que todos os profissionais de educação podem ter face a novas recomendações que lhes sejam apresentadas é simplesmente confrontá-las com a sua experiência: «Será que essa nova ideia funciona? Será que, pelo que conheço, é viável seguir este novo método?» Esta atitude crítica, no entanto, não chega. Há certamente ideias novas que são válidas e que não são à partida bem interpretadas pela maioria das pessoas. Em educação, contudo, este simples filtro serve para afastar muitas teorias e recomendações românticas e lunáticas com que os professores frequentemente se defrontam.

Algumas regras mais rigorosas de apreciação da actividade científica serão úteis a quem pretender ler a literatura educativa. Em primeiro lugar, convém ter presente que as publicações científicas de qualidade aparecem nas revistas internacionais de qualidade, depois de passarem por um processo de crítica pelos

pares, a chamada arbitragem (*referee*). Se as conclusões ditas científicas não são publicadas em locais reputados que seguem esse crivo, as garantias da sua qualidade são inexistentes. Com a Internet, tornou-se mais fácil apreciar esse aspecto. Bases de dados como o *Eric* ([www.eric.ed.gov](http://www.eric.ed.gov)) e o *ISI* ([isiwebofknowledge.com](http://isiwebofknowledge.com)), ou motores de busca como o *Google Scholar* ([scholar.google.com](http://scholar.google.com)) permitem rapidamente perceber se um determinado autor e artigo foi ou não publicado em local respeitável e se o seu trabalho foi ou não citado e apreciado.

Em segundo lugar, apenas é ciência aquilo que se pode confrontar com os factos, ou seja, aquilo que é passível de replicação e de crítica destrutiva. Afirmações demasiadamente vagas e que não apresentam dados de suporte não podem merecer à partida credibilidade.

Em terceiro lugar, os estudos empíricos fiáveis apresentam amostras aleatórias controladas e de dimensão razoável. Quem põe em prática o método testado não é a mesma pessoa que o investigador nem a mesma que o avaliador (Kirk, 1982; Kaufhold, 2007).

Finalmente, a investigação científica que tem autoridade para se transformar em recomendação sólida é aquela que reúne um consenso alargado ou, pelo menos, que foi confirmada independentemente por vários investigadores, em condições diversas, e que foi abonada tanto por uma fundamentação teórica como por uma prática repetida. Em educação isto significa que esta *convergência* de vários estudos deve incluir modelos testados da psicologia cognitiva, estudos laboratoriais com variáveis isoladas e estudos de campo (Stanovich & Stanovich, 2003).

Em ciência, contudo, a convergência é algo muito diferente da uniformidade repetitiva de menções e da espiral de citações a partir de outras citações não comprovadas. A autoridade científica não pode surgir das referências aos nomes citados. Não é por citar Paulo Freire que uma recomendação ganha autoridade, nem é por confessar aderência ao construtivismo de Lev Vigotski ou a outra determinada corrente de pensamento que uma ideia ganha solidez científica.

Para se ter uma noção da gravidade do problema refira-se o crivo brutal que o painel norte-americano sobre o ensino da matemática teve de fazer antes de iniciar uma síntese dos resultados comprovados cientificamente pela psicologia e pedagogia. Após analisar 16000 estudos publicados sobre o ensino da matemática, o painel rejeitou cerca de 85% destes, por considerar que não revelavam a solidez metodológica e a seriedade científica que são necessárias para servir de fundamentação a recomendações sobre o ensino.

A dificultar ainda as coisas, só alguns dos muitos estudos científicos sérios e rigorosos de psicologia e de ciências cognitivas se traduzem directamente em recomendações sobre a educação. Mais à frente referiremos alguns desses estudos e algumas conclusões de interesse directo para o professor.



## 2. O que se deve ensinar nos primeiros anos de escolaridade

Durante algum tempo, os educadores pensaram, com Piaget, que havia patamares de crescimento intransponíveis, com idades bem definidas e antes das quais não se deveriam ensinar certas matérias. Esta teoria de Piaget, se bem que tenha tido uma influência muito grande na elaboração de currículos e nas orientações de ensino, tem sido consistentemente refutada por estudos da psicologia cognitiva e da neurologia (Gelman & Williams, 1998; Bruer, 2002). Nos últimos anos, tem-se também verificado que muitos conceitos de geometria euclidiana aparecem de forma incompatível com a progressão imaginada por Piaget (Dehaene, Izard, Pica & Spelke, 2006).

A capacidade de assimilação pelas crianças de conceitos aritméticos, algébricos e geométricos depende da aprendizagem até à data obtida (Duschl et al., 1999). Assim, o essencial está em estruturar a aprendizagem de forma consistente, solidificada e progressiva.

Talvez a melhor maneira de começar a construir o currículo de matemática para o ensino fundamental seja partir de uma enumeração dos conhecimentos e capacidades que se pretende que um jovem na saída desse ensino e antes de ingressar na fase seguinte, seja profissional seja preparatória do ensino universitário, deve ter consolidados. No Brasil, tal como em Portugal, essa fase primeira corresponde ao ensino obrigatório (do 1.º ao 9.º anos de escolaridade). Nos Estados Unidos e outros países anglo-saxónicos, esse nove anos correspondem, com pequenas variações, ao ensino elementar e médio (*elementary and middle school*).

Seguimos aqui de perto o documento *Foundations for Success*, relatório final do painel norte-americano para o ensino da matemática, de ora em diante referido como NMAP (*National Mathematics Advisory Panel*, 2008). Esta listagem de conteúdos é relativamente pouco ambiciosa. O currículo francês, assim como o de Singapura, Coreia, Japão e de outros países são bastante mais avançados. Mas o aqui indicado inclui as matérias fundamentais. Se os nossos alunos dominassem competentemente estas matérias teriam obtido uma formação que lhes permitiria prosseguir os estudos ou, caso não o fizessem, enfrentar o mercado de trabalho com uma formação geral mínima.

Existem várias ordenações possíveis das matérias, mas não existem dados empíricos que permitam saber indubitavelmente qual a melhor ordenação, pondo-se mesmo em causa se tal conceito faz sentido. Assim, por exemplo, a estatística descritiva básica pode aparecer antes ou depois da álgebra de polinómios. É possível explicar e usar gráficos de barras e calcular médias antes de saber trabalhar com polinómios. No entanto, é claro que o trabalho com a álgebra facilita a compreensão do significado da média aritmética.

O que não faz sentido é construir o currículo sem coerência. Quando se está a aprender a trabalhar com polinómios, não é conducente a uma solidificação de conhecimentos saltar de monómios para a geometria e depois da geometria para polinómios.

## **2.1. Matérias de Álgebra de assimilação no Ensino Médio**

Há várias matérias consideradas necessárias para estudantes que concluem o ensino obrigatório. Aqui entram noções de perspectiva e de geometria no espaço tridimensional, por exemplo. Mas vários países têm chegado à conclusão que a Álgebra é uma matéria decisiva e um calcanhar de Aquiles a que deve ser dada especial atenção, pois é uma matéria cuja fraca assimilação tem prejudicado os jovens pela vida fora, seja na continuação dos estudos seja na vida profissional.

Sem quaisquer pretensões de ordenação sequencial ou hierárquica, apresentam-se de seguida os tópicos fundamentais destas matérias. Os pontos assinalados com asterisco (\*) correspondem a matérias mais avançadas, não prioritárias nestes níveis de escolaridade e, na realidade, usualmente leccionadas em graus posteriores.

### Expressões algébricas

- equações literais
- monómios e polinómios
- operações com polinómios
- fracções algébricas
- progressões aritméticas e geométricas (finitas)
- introdução às sucessões (\*)

### Equações lineares

- representação gráfica
- inequações lineares e seus gráficos
- sistemas de equações lineares a uma e duas incógnitas

### Equações quadráticas

- factorização
- “completar o quadrado” e fórmula resolvente de equações do 2.º grau

### Radicais e potências

- potências de expoente nulo, negativo e fraccionário
- operações com radicais

### Funções

- lineares, quadráticas e polinomiais
- estudo especial de algumas funções não lineares (raiz, valor absoluto, escada)
- exponencial e logaritmo (\*)
- seno, co-seno e tangente (\*)

## Álgebra de polinómios

- raízes e factorização
- coeficientes binomiais e o triângulo de Pascal (\*)

## Probabilidades e Estatística

- estatística descritiva básica (medidas de localização e dispersão, gráficos de barras e outros)
- diagrama de dispersão de duas variáveis e noção de associação (correlação)
- probabilidade combinatória, combinações e permutações (\*)

### **2.2. Fundamentos críticos nos patamares inferiores**

Nos últimos anos tem-se gerado um consenso sobre a necessidade de os alunos dominarem bem três áreas até ao 6.º (ou 7.º) ano de escolaridade. Essas três áreas são:

- as quatro operações aritméticas
- o trabalho de fracções
- conceitos base de geometria elementar

Estas três áreas aparecem por vezes em paralelo com outras, tais como a estimação de números, a leitura de gráficos, de tabelas e de outras fontes usuais de dados. Mas merecem especial atenção pois deficiências nelas repercutem-se por toda a vida escolar e pós-escolar. A estimação, por exemplo, pode ser desenvolvida mais tarde se houver fluência nos números e facilidade nas operações. A leitura de tabelas e dados pode ser desenvolvida em idade mais avançada, embora isso não seja recomendado.

Apesar de poder ser integrado na aritmética, o trabalho de fracções é aqui autonomizado dada a sua importância específica no estudo de proporções e funções, que são tópicos constantemente revisitados, e pelo facto de ser um tópico em que se têm revelado dificuldades persistentes e generalizadas.

O que há de decisivo nestas três áreas é que a falha em qualquer uma delas tem repercussões muito negativas, ou mesmo cruciais, nas aprendizagens posteriores.

Novamente sem quaisquer pretensões de ordenação sequencial ou hierárquica, apresentam-se de seguida tópicos fundamentais destas matérias elementares. Entre parêntesis indica-se o ano de escolaridade em que se assume que a matéria deve estar dominada, assumindo a entrada na escola aos 5 ou 6 anos. Os pontos assinalados com asterisco (\*) correspondem a matérias mais avançadas, não prioritárias nestes níveis de escolaridade e, na realidade, muitas vezes leccionadas em graus posteriores.

#### Números e operações aritméticas

- ordenação de naturais (1-2)
- sistema posicional (2)
- adição e subtracção com números de mais de um dígito (1-2)
- fluência nos algoritmos da soma e subtracção com números com vários dígitos (3)
- tabuada ou tabela da multiplicação até 10x10 (2-3)
- fluência no algoritmo da multiplicação (3-4)
- fluência no algoritmo da divisão (4)

#### Trabalho de fracções

- representação fraccionária (2-3)
- conversão de fracções, incluindo a representação decimal (4-5)
- fluência nas operações com fracções (4-5)
- compreensão das proporções e equivalência de fracções (\*)
- dízimas finitas, infinitas, periódicas e não periódicas (4-5)
- noção de número irracional (\*)

#### Geometria

- compreensão genérica de medidas na recta e no plano (3-4)
- medidas de perímetros e áreas de triângulos e quadriláteros (4-5)
- $\pi$ , perímetro da circunferência e área do círculo (4)
- semelhança de triângulos (5-6)
- cálculo de áreas e volumes de alguns poliedros e da esfera
- representação gráfica da recta e noção de declive com triângulos semelhantes (5-7)

Há um relativo consenso nos conteúdos genéricos de aprendizagem. As discussões mais recentes têm centrado em alguns outros aspectos, nomeadamente a importância relativa das matérias e as opções a fazer no sentido de *concentrar ou diversificar* os conteúdos.

### 3. Como se aprende

A pedagogia da matemática encontra-se muito dividida, mas os estudos sérios e fundamentados de psicologia e didáctica apontam em algumas direcções claras, que aliam métodos activos com o ensino dirigido e que fazem apelo aos diversos aspectos da aprendizagem, da memorização de factos e treino de procedimentos à conceptualização, à resolução de problemas e ao raciocínio independente.

### 3.1. Processos cognitivos

A cognição ou, em geral, o conhecimento, compreende a atenção, a aprendizagem, a memorização, a automatização de procedimentos, a compreensão de conceitos, o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e várias outras actividades mentais. O ensino pretende induzir a aprendizagem, ou seja, o desenvolvimento da cognição dos alunos, conceito em que se incluem todas estas vertentes.

O professor tenta que o aluno compreenda e assimile o que lhe é transmitido, incluindo aí a capacidade de desenvolver procedimentos e de adoptar atitudes conducentes à resolução de problemas. Um dos erros mais comuns em algum pensamento pedagógico das últimas décadas consistiu em concentrar esforços nos processos mentais mais exigentes, como a capacidade de resolução de problemas não rotineiros e o desenvolvimento de pensamento crítico, esquecendo ou menosprezando os conhecimentos e capacidades mais básicas. No pensamento de algumas recomendações curriculares chegou a ser expressa a ideia de que a memorização de factos aritméticos, como a tabuada, ou a automatização de algoritmos, como o da divisão, ou ainda a mecanização de procedimentos, como a regra da proporcionalidade dita de três simples, seriam entraves à compreensão dos princípios matemáticos mais importantes.

Os estudos modernos da cognição têm mostrado, pelo contrário, que o alcance dos objectivos educativos mais ambiciosos depende criticamente da sequência de actividades de aprendizagem em que os processos básicos têm necessariamente precedência (NMAT-4).

O sucesso na aprendizagem não depende unicamente de factores cognitivos. A ansiedade, a má nutrição ou a pressão das distrações externas são também factores que podem afectar criticamente a aprendizagem. Mas são factores que actuam por intermédio da cognição. Tem sido verificado, em particular, que a dita ansiedade matemática prejudica a aprendizagem interpondo-se no processo de atenção e treino pois retira capacidade à memória de trabalho, que controla simultaneamente os dados do problema, impedindo a resolução de problemas (Ashcraft & Krause, 2007).

Mais importante ainda, as intrusões de factores de ansiedade em momentos de pressão em teste de conhecimentos não actuam ou actuam apenas moderadamente quando os procedimentos matemáticos em teste estão bem dominados (Beilock et al. 2004). Significa isso que a sobrevalorização dos problemas afectivos pode não ajudar a resolver as deficiências de aprendizagem, mas antes agudizá-las por não enfrentar os problemas cognitivos de base.

O ensino começa com a *atenção*, que não deve ser confundida com a motivação ou o desejo de aprender. Estes não são suficientes e por isso é necessário saber concentrar a atenção dos alunos nos aspectos que se pretende que eles retenham e não simplesmente despertar o seu interesse. Quando isso se obtém,

o passo seguinte é conseguir que os alunos codifiquem a informação na *memória de trabalho*, que é a capacidade de reter informação na mente enquanto se processam outras actividades mentais.

### 3.2. Aprende-se memorizando

Para desenvolver a capacidade de trabalho numérico e geométrico em que se envolve a memória de trabalho, é essencial que a informação mais importante, por exemplo, a tabuada, e os procedimentos que a princípio mais consomem memória de trabalho, nomeadamente os algoritmos, passem para a *memória de longo prazo* e se desenvolvam *automatismos* (Schneider & Shiffrin 1977 e Shiffrin & Schneider 1977).

Se um aluno tem dificuldade, por exemplo, em calcular  $3 + 8$ , se não consegue reter o facto  $3 + 8 = 11$  na memória de longo prazo e assim automatizar a sua recuperação para a memória de trabalho, terá então grande dificuldade em proceder a adições com vários dígitos e automatizar esse processo.

Por vezes, para conseguir que os alunos adquiram a noção de número, pode fazer sentido ajudá-lo a fazer as somas parciais:

$$3 + 8 = (1 + 2) + 8 = 1 + (2 + 8) = 1 + 10 = 11.$$

Mas esta fase deve ser rapidamente automatizada e o aluno deve ser ajudado a memorizar o resultado da adição. A capacidade para fazer somas parciais ou, em geral, a capacidade para fazer cálculos com algoritmos *ad hoc*, pode ser importante para somas que, de outra maneira, seriam trabalhosas, como a de  $1999 + 999$ , que os alunos devem também ser capazes de resolver por cálculo mental simplificado:

$$1999 + 999 = 1999 + (1000 - 1) = (1999 + 1000) - 1 = 2999 - 1 = 2998.$$

O problema de insistir nestas formas simplificadas de cálculo está exactamente no facto de serem algoritmos *ad hoc*, portanto de uso para casos específicos. Habituar o aluno a fazer todos os cálculos com estes recursos prejudica os automatismos dos algoritmos tradicionais.

O mesmo se passa com algoritmos alternativos sistemáticos, mas menos eficientes, como o da soma com somas parciais e o da divisão por subtracções parciais. Não existem estudos suficientes para mostrar as vantagens desses algoritmos na compreensão da estrutura das respectivas operações, mas é admissível que tenham aí algumas vantagens. O que parece errado é deixar que esses processos se sobreponham aos algoritmos eficientes, resultado de uma

evolução milenar e de cuja fluência depende em grande parte o ensino posterior da matemática.

A prática repetida com os factos base das operações, nomeadamente com as somas e multiplicações, seguida de uma prática repetida com os algoritmos das quatro operações, é fundamental para automatizar as operações algébricas. Estas deixarão progressivamente de ser um processo que obriga a uma actividade consciente e que consome recursos de memória de trabalho; transformar-se-ão num processo automático, que liberta recursos mentais para outras actividades de resolução de problemas. Tem-se verificado que a capacidade de recuperação eficiente dos factos aritméticos básicos é parte integrante do pensamento matemático mais complexo e conceptual e da actividade de resolução de problemas (Geary & Widaman, 1992).

### 3.3. Aprende-se adquirindo fluência

Para adquirir fluência nos conceitos e algoritmos e na capacidade de resolver problemas não basta fazer e saber fazer problemas elementares (Geary et al., 1996). Os exercícios que treinam e detectam a aquisição mínima dos conhecimentos e capacidades acabados de adquirir não são suficientes para adquirir fluência e domínio das matérias.

Para dar um exemplo, imaginemos que estamos a ensinar aos nossos alunos o processo de adição com números de vários dígitos. Eles devem ser obviamente treinados em somas elementares como:

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 21 \\ \hline 33 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ + 5 \\ \hline 21 \end{array}$$

Mas isso não basta. Para aprenderem devidamente o transporte devem fazer contas com transportes repetidos, como por exemplo:

$$\begin{array}{r} 998 \\ + 67 \\ \hline 1065 \end{array}$$

Os estudantes de Singapura, Finlândia e outros países são capazes de fazer muito mais rapidamente e muito mais eficientemente contas muito mais complicadas do que as conseguidas pelo aluno médio português, brasileiro ou norte-americano

(Geary, 2006). As crianças têm muito maior capacidade de aprendizagem matemática do que até à pouco se supunha (Gelman, 2003).

A aprendizagem, tanto nos aspectos mais básicos — é o caso da memorização de factos simples — como nos aspectos mais elevados de assimilação de procedimentos — é o caso da aquisição de estratégias de resolução de problemas — depende criticamente da prática repetida e espaçada.

É um facto intuitivamente conhecido de professores e estudantes e solidamente estabelecido pela psicologia experimental, que a *retenção de longo prazo* depende da repetição, mas de uma *repetição espaçada ao longo do tempo* e não concentrada (Roher & Taylor, 2006). Todos sabemos que estudar apressadamente nas vésperas de um exame não é o mesmo que estudar ao longo dos meses. Isso é válido para a memorização de factos e automatização de rotinas. Mas é também válido para processos de assimilação mais complexos. Sabemos que há matérias que precisam de um tempo de maturação e assimilação. Mesmo os processos cognitivos mais elevados necessitam de repetição e tempo (Bahrick & Hall, 1991; Pashler et al., 2007).

### **3.4. Aprende-se sobreaprendendo**

Uma das conclusões mais importantes da psicologia cognitiva moderna é que não basta aprender e adquirir algum à-vontade com as matérias. É necessário *sobreaprender*, isto é, é necessário aprender mais do que aquilo que é necessário de imediato, pois só com essa aprendizagem acrescida os factos se mantêm na memória de longo prazo, os procedimentos se mantêm automáticos e as capacidades de resolução de problemas não se desvanecem. Isto é particularmente importante ao longo do percurso matemático escolar de um jovem, pois o que se aprende em certa altura voltará a ser necessário anos depois.

Sobreaprender significa memorizar mais do que o necessário para uma recuperação no curto prazo, significa treinar os procedimentos mais do que o bastante para um desempenho razoável, significa ainda abordar problemas mais difíceis do que os minimamente necessários em cada etapa escolar.

A fluência e a retenção de longo prazo não se obtêm com elementos que são muito fáceis de aprender (Rohrer & Taylor, 2006). Esses elementos podem ajudar, e habitualmente ajudam, a aquisição inicial de conhecimentos, mas conduzem a uma retenção inferior à dos elementos que são mais difíceis de entender na fase inicial (Bjork, 1994).

### **3.5. Aprende-se abstraído**

A abstracção é o processo natural de toda a aprendizagem. Quando a criança aprende que duas laranjas mais três laranjas são cinco laranjas, está a adquirir um



conhecimento concreto, como é natural que tenha de ser o primeiro contacto com esta adição. Mas quando consegue perceber que  $2 + 3 = 5$  em todas as situações, ela adquire a capacidade de abstracção numérica que lhe permite usar um facto aritmético num número ilimitado de situações. É importante sublinhar este facto, pois a abstracção tem sido tratada por algumas correntes pedagógicas como um mal, quando ela é o resultado natural e desejável de todo o ensino.

Em todas as disciplinas o mesmo acontece, em graus diversos. Mas em matemática a abstracção é fundamental, de tal forma que se pode dizer que todo o ensino da matemática é uma progressão do concreto para o abstracto. Começa-se por generalizar a agregação e decomposição de conjuntos concretos para a aritmética dos números; da aritmética passa-se para a álgebra, que usa símbolos representando quantidades numéricas indefinidas; progride-se para funções, em que há relações entre conjuntos, e daí por diante. O domínio progressivo da abstracção é sinónimo de progresso e de capacidade de generalização. É um domínio que deve ser regenerado e recuperado, ultrapassado algumas recomendações pedagógicas infelizes que o menosprezam.

Vale a pena acrescentar algumas palavras sobre a orientação pela *aprendizagem em contexto*, que se tornou na negação moderna da abstracção com mais influência na teoria educativa. Trata-se de uma ideia que sobrevaloriza a «contextualização das aprendizagens». Constituiu uma moda nos Estados Unidos na década de 80 (*situated learning*) e actualmente ainda é muito difundida no Brasil, em Portugal e noutros países. Segundo essa tendência, a competência para a acção só se desenvolveria quando integrada num contexto, e o treino abstracto teria pouca utilidade, pois a verdadeira aprendizagem só ocorreria em situações reais (Collins et al., 1989 e Brown, et al., 1989). Após cerradas críticas, o movimento da contextualização das aprendizagens perdeu a sua grande influência internacional, pois verificou-se que o conhecimento fica mais limitado ao contexto em que é introduzido se não se derem aplicações variadas e se se recusar a sua formulação mais abstracta (Anderson et al., 1996, 2000).

Os dois exemplos clássicos das aprendizagens não formais eficientemente aprendidas em contexto — os cálculos relativamente complexos que as donas de casa californianas conseguem fazer sobre preços nos supermercados e as contas rápidas feitas pelas crianças da rua brasileiras nas vendas que realizam (Lave, 1988 e Carraher et al., 1985) — vieram-se a revelar, após estudos mais sistemáticos, que apenas reflectiam aprendizagens muito limitadas e restringidas a um contexto singular. O treino na abstracção e na capacidade de concretização do conhecimento em situações variadas continua a ser indispensável na preparação dos estudantes para enfrentarem contextos específicos diversos.

Na base da tendência de aprendizagem em contexto está a ideia de que as aprendizagens, tal como os conhecimentos não nega a decomposição do conhecimento em parcelas, antes estuda as suas interacções. A impossibilidade de

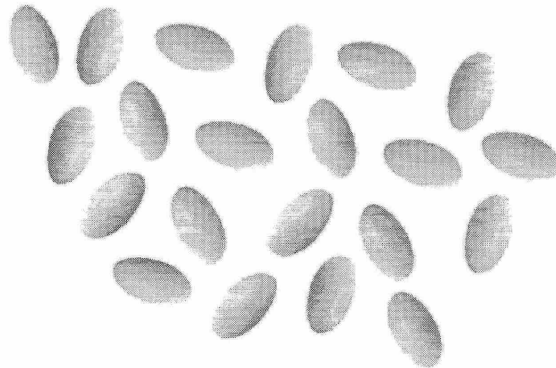
decomposição é evidentemente um mito, pois ela ocorre e tem sucesso nas mais diversas aprendizagens. Os estudantes de música não melhorariam a sua técnica praticando escalas e as crianças nada aprenderiam treinando somas elementares ou silabando palavras se essa decomposição fosse impossível. Talvez surpreendentemente para muitos, um contra-exemplo esclarecedor é fornecido pelo ensino lúdico: brincando com situações abstractas afastadas da realidade (que poderá existir mais removido de um contexto real do que um jogo?), as crianças podem treinar a descodificação de palavras, a aritmética e diversos conceitos matemáticos.

Afirma-se também que o ensino teórico descontextualizado não se traduz em aplicações práticas, ou seja, que os alunos não conseguem transferir as aprendizagens para situações diversas e que, portanto, todo o ensino teria de ter um significado. O problema da transferência é um problema real. Mas o ensino excessivamente contextualizado dificulta precisamente a transferência para situações práticas diversas. O conhecimento tende a ser mais limitado quando apresentado num contexto único. Dito por outras palavras, crianças que apenas aprenderam a somar usando laranjas têm mais dificuldade em calcular a soma de horas do que as crianças que aprenderam a somar usando laranjas, pauzinhos, desenhos e, finalmente, apenas números.

É também habitual ouvir a tese, complementar da anterior, de que o treino abstracto tem pouco significado e que não se traduz numa aprendizagem real, capaz de enfrentar situações concretas. Na realidade, o ensino teórico pode ser bastante ineficaz se o que se transmite nada tem a ver com as necessidades futuras do estudante. Mas esse problema é o da adequação do conteúdo do ensino às necessidades do ensinado, e não um problema geral do ensino teórico. Na realidade, o ensino abstracto pode ser bastante eficaz, como o mostram inúmeros estudos experimentais que comparam ensino prático não orientado com ensino teórico. Em pouco tempo, a instrução teórica pode levar o sujeito a adquirir um conhecimento que demoraria anos a adquirir se o fizesse apenas pela prática diária (Bierderman & Schiffrar, 1987). O mais eficaz, como se imagina, é uma aliança eclética entre o ensino teórico e o ensino aplicado, sendo este referido a contextos diversos e não demasiadamente restrito a aplicações particulares. O «aprender fazendo» tem sucesso quando há uma combinação entre a instrução abstracta e diversas ilustrações concretas que conseguem despertar o estudante e motivá-lo para perceber, imaginar e realizar aplicações. Mas o «aprender fazendo» não tem sucesso quando está confinado a aplicações muito limitadas e não é acompanhado de uma generalização pela abstracção.

Vale a pena mostrar pelo menos um exemplo dos exageros a que a aprendizagem em contexto pode conduzir. A figura seguinte reproduz uma pergunta de uma Prova de Aferição em Matemática feita em Portugal pelo Ministério da Educação em 2007 para alunos do 6.º ano de escolaridade.

3. O Gil comprou amêndoas da Páscoa, umas eram azuis e outras brancas. As amêndoas compradas pelo Gil estão representadas na figura.



**Dois terços** das amêndoas que comprou eram azuis.  
Quantas amêndoas azuis comprou o Gil?

Que se está a avaliar com esta pergunta? Para a maioria dos alunos, as principais dificuldades estão na leitura de um enunciado em que se fala de cores, mas que aparece a preto e branco, e na contagem correcta do número de elipses dispersas pela figura. Para um aluno razoável, a maior dificuldade está em acreditar que os examinadores lhe estão apenas a pedir o cálculo de  $\frac{2}{3}$  de 21.

Neste caso, como em muitos outros, o contexto desajuda e o conteúdo matemático é mínimo. Tudo isto é típico dos exageros da aprendizagem em contexto. Os objectivos são grandiosos — desenvolvimento da capacidade de leitura, aplicação de conceitos matemáticos, capacidade de transferência —, mas a prática é lamentável: o conteúdo matemático desaparece e o grau de exigência torna-se burlesco.

## 4. Como ensinar

Passamos a descrever algumas recomendações provenientes dos estudos modernos de psicologia cognitiva e de educação com implicações para a orientação curricular.

### 4.1. O acessório não deve obscurecer o essencial: ensinar matemática

Nos últimos anos, os currículos de vários países têm introduzido vários aspectos orientadores que vão além da simples estruturação de conteúdos, nomeadamente os seguintes:

- o desenvolvimento de «competências matemáticas», entendidas como capacidade de mobilização dos conhecimentos em contextos diversificados;
- a capacidade de formular problemas;
- a capacidade de modelar matematicamente problemas;
- a capacidade de comunicação;
- o desenvolvimento de atitudes positivas face à matemática;
- a capacidade de «fazer matemática»;
- o autoconhecimento e reconhecimento dos processos de aprendizagem (metacognição).

O currículo de Singapura (2006b), por exemplo, interliga cinco aspectos fundamentais — conceitos, capacidades, processos, atitudes e metacognição —, aspectos que estão interligados, mas sempre tendo como base os conhecimentos. O currículo português no Ensino Básico (anos 1 a 9), para dar outro exemplo, baseia-se num conceito genérico de desenvolvimento de «competências». A moda é infeliz e esse conceito e as correlativas recomendações começaram a ser abandonados, mesmo pelos seus introdutores, imagina-se que a contragosto dos próprios, pois foram muito criticados por introduzirem formulações muito vagas, com prejuízo dos conteúdos (Crato, 2006a).

A pedagogia moderna reconhece a importância de várias abordagens complementares e o exemplo de Singapura mostra que esses complementos podem ter resultados muito positivos. No entanto, tal como mostra de novo o exemplo de Singapura (Ginsburg et al., 2005), é decisivo que não se percam de atenção os aspectos essenciais, isto é, os conteúdos, e que estes se centrem nos aspectos essenciais.

Existe um debate muito aceso sobre a importância relativa das diversas abordagens acima referidas, desde a ideia de «competências» à metacognição. Depois de décadas em que se foram acrescentando aspectos e abordagens

adicionais para o ensino da matemática, sempre na ilusão de que o acrescento em causa iria resolver os problemas de insucesso, a investigação mais recente insiste na relativização desses aspectos adicionais (ver, por exemplo, NEMAT 2008). Assim, o desenvolvimento de «competências», visto como a necessidade de ajudar os alunos a aplicar as matérias que estudam e um incentivo a dar exemplos de aplicação, é uma ideia razoável desde que não obscureça os conteúdos matemáticos, como pretendido pelas versões mais radicais da teoria do ensino centrado em competências, desenvolvida em Perrenoud e outros (V. Crato, 2006a). Nestas versões radicais, as «competências» não representam algo a adicionar aos conhecimentos, mas sim um conceito que inclui em si os conhecimentos. As «competências» seriam os «conhecimentos em acção», ou englobariam «conhecimentos, atitudes e capacidades de aplicação de conhecimentos». Habitualmente, os conceitos não são bem definidos e propiciam confusões (Damião, 2004), mas há dois ou três aspectos centrais que caracterizam aquilo a que aqui chamaremos «teoria das competências»:

- o conhecimento por si não teria valor e só o teria quando se traduziria em capacidade de acção;
- em vez de adicionar conhecimentos aos alunos, dever-se-ia desenvolver neles competências;
- ao invés de elencar conteúdos como objectivos curriculares, dever-se-ia apontar para o desenvolvimento de competências globais, de atitudes e de capacidade de acção.

Nada disto tem fundamento na psico-pedagogia moderna nem mesmo no elementar bom senso. No que se refere ao primeiro ponto, é preciso sublinhar que o conhecimento em si tem valor, mesmo que apenas sirva para saber e mesmo que não se consiga traduzir em acção útil senão de forma muito indirecta e impossível de descrever à partida com objectividade. Tem valor, por exemplo, saber o que é o processo de indução finita em matemática, mesmo que o estudante nunca o venha a aplicar, tal como tem valor saber que Júlio César viveu antes de Cristo, mesmo que o jovem nunca venha na vida a transformar esse conhecimento numa capacidade de acção.

Em segundo lugar, sendo verdade que é útil para os alunos serem capazes de aplicar os seus conhecimentos em áreas diferentes daquelas em que os aprenderam, ou seja, serem capazes de proceder a *transferências*, isso não significa que não tenha valor adicionar conhecimentos. Os jovens podem, e habitualmente é assim que acontece, aprender um conjunto de ideias e técnicas de que não vêem a aplicabilidade imediata e, mais tarde, por vezes muitos anos mais tarde, aprenderem a usá-las.

Em terceiro lugar, as competências são, por natureza, muito difíceis ou mesmo impossíveis de avaliar. Ao desenvolver o ensino com base nas competências está-se a menosprezar os objectivos claros, precisos, mensuráveis e avaliáveis — determinar

raízes de polinómios, por exemplo — e substituí-los por objectivos vagos, difíceis de medir e, muitas vezes, impossíveis de avaliar — aplicar funções polinomiais na vida real, por exemplo.

Do referido, os erros pedagógicos centrais destas teorias de competências são dois: menosprezar o valor do conhecimento e eliminar programas, conteúdos e objectivos curriculares precisos e avaliáveis a favor de competências vagas.

As críticas ao ensino organizado por competências estendem-se aos outros tópicos acima indicados (comunicação matemática, por exemplo). Sendo verdade que referem aspectos importantes, estes tópicos não são centrais. O central é o conhecimento. Se aparecerem em detrimento do conhecimento e desligado deste, tanto a capacidade de comunicação matemática, como o desenvolvimento de atitudes positivas ou a capacidade para «fazer matemática», aparecem apenas formalmente e sem nenhuma profundidade. Não há comunicação matemática se não houver nada a comunicar, assim como de nada serve ter atitudes positivas se isso não se traduzir em conhecimento dos conteúdos. O que é característico da adição nas últimas décadas de todas estas vertentes da educação é representarem patamares que apenas fazem sentido se adicionadas dos conteúdos, mas terem sido destacadas autonomamente e em detrimento dos conteúdos. Apontar objectivos grandiosos é fácil, o necessário é que eles se construam em cima dos conhecimentos fundamentais. Esses não podem correr o risco de ser esquecidos.

Para perceber que o risco é real, atente-se, por exemplo, nas Provas de Aferição efectuadas pelo Ministério de Educação português, que tem um currículo baseado nas competências.<sup>1</sup> O exemplo abaixo mostra a que ponto se pode descer na exigência de conteúdo para ter fidelidade à visão dogmática das competências, nomeadamente à competência de «comunicação matemática». Trata-se de uma pergunta destinada a avaliar alunos no final do primeiro ciclo português, ou seja, no fim do 4.º ano de escolaridade. Esta pergunta apareceu na Prova de Aferição de 2002.

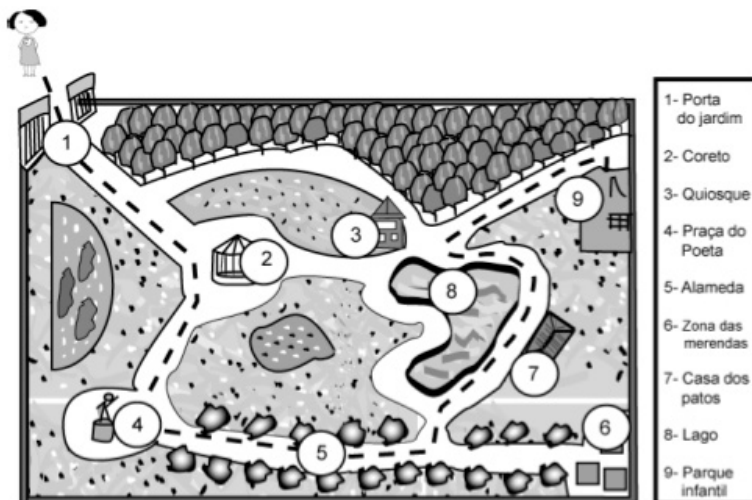
---

<sup>1</sup> Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica, *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*, 2001.

**Exemplo 3.1**

**Item de resposta aberta que avalia a capacidade de comunicação matemática.**

A figura representa a planta do jardim que fica perto da casa da Sara. A tracejado, está representado o caminho que a Sara seguiu, desde a porta do jardim até ao parque infantil.



**Completa o diálogo** entre a Sara e o seu irmão Frederico, de forma a descreveres o caminho que ela seguiu desde a porta do jardim até ao parque infantil.

Frederico: – Entrei depois de ti no jardim, mas cheguei primeiro ao parque infantil. Tu que caminho seguiste?

Sara: – Como era cedo, decidi dar um passeio. Da porta do jardim segui até ao coreto, depois virei à direita...

---

---

---

---

Esta abordagem reflecte um exagero na contextualização e um esquecimento dos conteúdos matemáticos num grau impossível de desculpar. A recomendação de fazer «comunicação matemática» é aplicada dogmaticamente e o grau de exigência no conhecimento é reduzido a zero.

Não se pense que é um erro inocente. A necessidade de prestar vassalagem ao objectivo magnífico de levar o aluno à «comunicação» origina esta dissolução do conhecimento. O objectivo pomposo de «desenvolver a capacidade de comunicação» e de formar a «competência» de criar «histórias matemáticas» aparece para desculpar a patente ignorância dos conteúdos. De uma forma ou de outra, não é um acaso. Vê-se que não é inútil sublinhar a recomendação de o acessório não obscurecer o essencial, que é o ensino da matemática.

#### 4.2. Focar o ensino nos tópicos essenciais: profundidade em vez de extensão

A experiência de uma série de países tem levado a que se recomende um currículo simplificado, com menos tópicos, mas tratados com maior profundidade. Em Singapura, por exemplo, os *standards* centram-se num número relativamente pequeno de aspectos, todos eles importantes. A necessidade de fornecer aos alunos vários tipos de «experiências matemáticas», aqui entendidas como actividades, projectos, apresentações e aplicações dos conteúdos, centra-se nesses tópicos e orienta-se para facilitar a sua melhor compreensão. Nos Estados Unidos, mesmo entre os anteriormente partidários de um currículo disperso, nomeadamente os porta-vozes do National Council of Teachers of Mathematics, surge o reconhecimento da necessidade de ênfase nos pontos centrais, os *Focal Points* (NCTM, 2006). Este documento recomenda uma atenção maior aos aspectos chave (*key aspects*), particularmente números e fracções e alguns aspectos da geometria e da mensuração. Trata-se de uma rectificação de política do NCTM que, no entanto, não vai tão longe como a prática com sucesso em alguns países (Schmidt & Houang, 2007).

A importância desta política confirma-se observando os resultados das comparações internacionais. Nos estudos TIMSS e PISA nota-se que os países com melhores resultados em matemática seguem a política de concentrar o currículo (Klein et al., 2005).

A política de concentração em tópicos fundamentais não significa, no entanto, simplificação de conteúdos. Pelo contrário, significa *profundidade em vez de extensão*. Nos primeiros quatro anos de escolaridade, essa concentração deve significar mais atenção aos tópicos fundamentais de aritmética (número, operações, relações de ordem) e de geometria (triângulos, espaço e medida) (Cross et al., 2009). Nos dois anos seguintes, aparece com destaque na aritmética o domínio de fracções e na geometria o raciocínio sobre triângulos semelhantes.

A concentração do currículo significa também *atenção primordial aos tópicos matemáticos*. Um estudo muito recente promovido pela direcção de pesquisa nacional dos Estados Unidos (*National Research Council*) corrobora esta ideia e destaca que «as experiências de aprendizagem em que a matemática é uma actividade suplementar em vez de ser o foco primordial são menos eficientes em promover a aprendizagem da matemática do que as experiências em que a matemática é o objectivo primário» (Cross et al., 2009). O recente estudo de reformulação de ensino matemático elementar israelita chegou às mesmas conclusões (Aharoni, 2008).

A concentração do ensino nos tópicos essenciais pode parecer uma verdade de *La Palisse*, se for transformada numa afirmação circular: se analisarmos *a posteriori* as matérias ensinadas podemos concluir que são todas essenciais. Mas se traçarmos à partida objectivos, as coisas são habitualmente diferentes. Pergunte-se:



destinou-se 90% do tempo de aula ao ensino dos tópicos fundamentais? Reforçaram-se os conceitos centrais quando se discutiram tópicos laterais com eles relacionados? Regressou-se frequentemente aos tópicos importantes?

Perguntas semelhantes devem ser feitas sempre que se usam aspectos auxiliares de ensino, nomeadamente materiais manipuláveis, no ensino mais elementar, jogos, no ensino médio, ou computadores, em todos os graus de ensino. É necessária alguma precaução no abuso de exemplos complexos e de contextos para explicar as matérias. Vários estudos experimentais têm mostrado a importância de concentrar a atenção do aluno e de o descentrar de aspectos irrelevantes para a compreensão dos conceitos matemáticos (Rittle-Johnson et al., 2001).

### **4.3. Seguir uma progressão coerente**

Outra recomendação constante nos estudos recentes é a aplicação de um currículo que siga um alinhamento lógico e consequente das matérias, para que os estudantes vejam uma continuidade nos seus estudos.

A progressão coerente é fundamental para que os estudantes possam visitar as matérias num nível mais elevado em vez de as revisitarem constantemente sem progressão razoável, como tem acontecido nos países que têm aplicado exageradamente as recomendações do chamado «currículo em espiral». Esse desejado progresso reforça o conhecimento das matérias elementares, em vez de as esquecer.

Não seguir esta progressão coerente traz problemas graves aos alunos:

- não lhes permite consolidar conhecimentos, parecendo que voltam sempre ao mesmo nível;
- cria-lhes a noção de que a aprendizagem da matemática é a aquisição de uma colecção de truques desconexos;
- não lhes permite desenvolver os rudimentos de um raciocínio hipotético-dedutivo.

As conclusões do grupo de trabalho do NEMAT «*On conceptual knowledge and skills*» (NEMAT-3, 2008) são muito claras nesta ideia. Vários estudos empíricos têm mostrado estes e outros inconvenientes dos exageros no currículo em espiral (V. Schmidt et al., 2002, e trabalhos aí citados).

Dê-se um exemplo no trabalho em fracções. Ao estudar a multiplicação e a divisão os alunos deverão ter presente na memória, por exemplo, que  $2 \times 7 = 14$ , que  $3 \times 7 = 21$  e que  $5 \times 7 = 35$ , o que poderiam adquirir facilmente nos dois primeiros anos de escolaridade. Ao se estudar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição pode-se certamente relacionar a igualdade  $5 \times 7 = 35$  com as duas

anteriores e não usar apenas números muito elevados que os estudantes não consigam verificar automaticamente. Ou seja, inicialmente é preferível dizer:

$$(2 \times 7) + (3 \times 7) = (2 + 3) \times 7 = 5 \times 7,$$

e não ficar apenas por exemplos como:

$$(1 \times 5) + (1 \times 5) = 2 \times 5$$

nem:

$$(127 \times 345) + (21 \times 345) = 148 \times 345.$$

Ao se chegar às fracções, é mais educativo pedir aos alunos para compararem  $4/14$  com  $5/21$  e dizer-lhes para o fazerem com base no que sabem da propriedade distributiva do que compararem  $127/345$  com  $215/756$  usando a máquina de calcular. Da primeira forma, o progresso baseia-se no que se conhece e relembra-o, reforçando-o; da segunda forma, a comparação de fracções aparece como um tópico novo, desligado do que se conhece.

Um outro obstáculo à progressão coerente é o exagero nas actividades e projectos de carácter aplicado. Atente-se no exemplo seguinte retirado de um livro didáctico norte-americano.

**SUM OF MEASURES OF EXTERIOR ANGLES** The Interior Angle Sum Theorem relates the interior angles of a convex polygon to the number of sides. Is there a relationship among the exterior angles of a convex polygon?

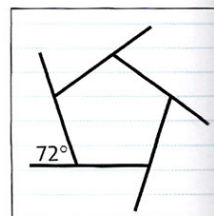


### Geometry Activity

#### Sum of the Exterior Angles of a Polygon

##### Collect Data

- Draw a triangle, a convex quadrilateral, a convex pentagon, a convex hexagon, and a convex heptagon.
- Extend the sides of each polygon to form exactly one exterior angle at each vertex.
- Use a protractor to measure each exterior angle of each polygon and record it on your drawing.



##### Analyze the Data

1. Copy and complete the table.

Polygon	triangle	quadrilateral	pentagon	hexagon	heptagon
number of exterior angles					
sum of measure of exterior angles					

2. What conjecture can you make?

Pede-se aos alunos para medirem ângulos externos de vários polígonos convexos usando o transferidor sobre desenhos. A ideia, obviamente, é induzir nos jovens o facto de que essa soma é sempre  $360^\circ$ . Nas idades em que este facto geométrico é ensinado e a que se aplica este livro (*highschool*) não faz nenhum sentido desenvolver essa actividade. Primeiramente, nunca a soma das medidas feitas com transferidor dá exactamente  $360^\circ$ , a não ser que o aluno se habitue a mentir, atitude a que por vezes estes projectos induzem. Em segundo lugar, esta actividade encoraja o desenvolvimento da ideia de que as conclusões geométricas são alcançadas medindo desenhos, quando a regra em geometria é a dedução rigorosa, actividade a que se devem habituar progressivamente os jovens. Em terceiro lugar, está-se a perder uma excelente oportunidade para desenvolver a intuição demonstrativa geométrica — basta olhar para o desenho para conjecturar que os ângulos «rodam» e perfazem uma volta completa. Finalmente, está-se a criar a ideia de que a matemática é uma colecção de factos desconexos.

A completar estes vícios pedagógicos, alguns livros didáticos apresentam (em seguida ou anteriormente) a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono sem a relacionar com a soma dos ângulos externos. Tudo isto reforça no aluno a ideia de que a matemática se resume a uma colecção de casos e truques, que é necessário decorar. Ora esta disciplina, e em particular a geometria, constitui uma oportunidade única para desenvolver o espírito dedutivo e o raciocínio organizado a partir de meia dúzia de factos dos quais é possível deduzir uma infinidade de resultados muito ricos.

Este exemplo mostra como a recomendação de seguir uma progressão coerente das matérias é contrariada pelo exagero nas actividades e aplicações. Quando se fala em progressão coerente está-se a falar de um avanço na disciplina seguindo a sua própria lógica. Tal como não faria sentido ensinar História com base nas suas aplicações à vida real ou com base em projectos com conteúdos históricos, por maior razão em Matemática a coerência é dada pela própria disciplina, que é altamente cumulativa, como anteriormente explicámos, e que tem um carácter hipotético-dedutivo marcado.

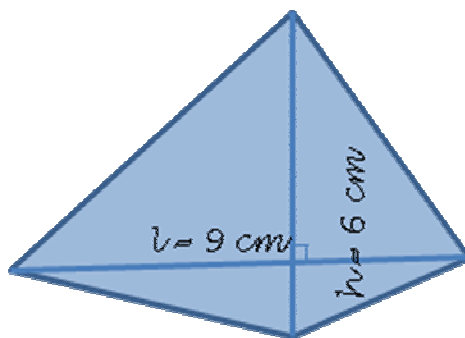
Assim, as aplicações, os contextos, as actividades e os projectos devem ser colocados ao serviço da progressão coerente da disciplina e não dominá-la. Podem contribuir positivamente para o ensino, mas apenas se desempenharem um papel de estratégia pedagógica e tiverem o lugar secundário que podem ter. Os exageros do chamado «ensino em contexto» (*situated learning*), que desenvolve as ideias a partir de contextos relacionados, e do ensino por projectos, em que não é a matéria que domina a sequência do estudo, mas sim o tópico central e multidisciplinar, podem ser muito prejudiciais ao ensino da matemática. Será bom aprender algo com as técnicas da divulgação científica, que usam sistematicamente contextos interessantes e se desenvolvem de forma dispersa (Crato, 2009). Mas não se pode transformar o ensino em divulgação. Esta é episódica, enquanto o ensino deve ser sistemático.

#### **4.4. Variar em torno de temas centrais, em vez de adicionar conceitos dispersos**

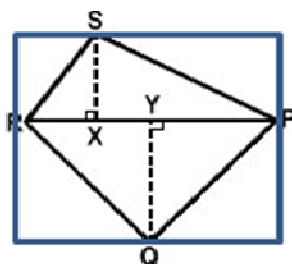
A progressão coerente das matérias facilita também a aprendizagem dos conceitos essenciais. A matemática é, pela sua natureza, um desenvolvimento de ideias e procedimentos que se baseia num número reduzido de ideias-base. Quando ela se desenvolve como uma progressão de conceitos em que as ideias base originam uma multiplicidade de outras ideias, revela-se a beleza da construção matemática e reforça-se também o conhecimento matemático. Sintetizamos esta afirmação no preceito de *desenvolver variações em torno dos temas*.

Para dar um exemplo, considere-se a fórmula da área de um triângulo, que se desenvolve naturalmente a partir da fórmula da área de um rectângulo, sendo esta muito mais do que uma fórmula, pois pode ser tomada como a própria definição de área. De qualquer maneira, a fórmula da área de um triângulo pode ser tomada como base para o cálculo de qualquer polígono.

Quando se calcula a área de quadriláteros não regulares, certos manuais preocupam-se em fornecer uma nova fórmula: metade do produto de uma diagonal pela altura que lhe é ortogonal. O exemplo seguinte mostra de onde pode vir esta fórmula:



Vale a pena introduzir a nova fórmula ou será mais lógico decompor esta área na de dois triângulos? Se chamarmos  $a$  à altura de um dos triângulos teremos:  $(9 \times a)/2 + (9 \times (6 - a))/2 = (9a + 54 - 9a)/2 = 27$ . Exemplos como o da gravura acima, contudo, podem ser enganadores, podem levar à conclusão errônea de que basta fazer o semi-produto das suas diagonais. Devem ser completados com exemplos que mostrem que essa regra (que nem sequer deve ser enunciada!) apenas é válida quando as duas diagonais são perpendiculares. É o que o exemplo abaixo mostra.



#### 4.5. Promover a transferência de conhecimentos e capacidades

Em psicologia cognitiva, o termo *transferência* refere-se à capacidade de aplicar conhecimentos correctamente e para lá dos exemplos e situações estudados e trabalhados, estendendo o conhecimento a problemas aparentemente semelhantes (transferência próxima) e não semelhantes (transferência longínqua). A capacidade de transferência é de enorme importância em matemática, pois o que se pretende não é apenas que os estudantes saibam resolver os problemas que praticam. Pretende-se que usem essa prática para resolver problemas diferentes e para o estudo de outras disciplinas ou para aplicações na modelação de situações reais.

Tornou-se lugar comum lamentar que os estudantes não sejam capazes de usar os conhecimentos que estudam — e a teoria das competências levou esse lamento ao extremo. Tornou-se também lugar comum dizer que essa dificuldade de transferência deriva de um ensino demasiado abstracto e que seria pois preferível desenvolver toda a *aprendizagem em contexto (situated learning)*. Há um

fundamento real na preocupação de os alunos saberem aplicar os seus conhecimentos. É muitas vezes desanimador verificar que os estudantes conseguem fazer certos cálculos, seja por rotina seja por compreensão dos procedimentos envolvidos, mas não os sabem transferir para problemas ligeiramente diferentes. Surpreendentemente, é possível ver alunos capazes de calcular o volume de um paralelepípedo, mas incapazes de calcular o volume de água que enche uma piscina paralelepipedica.

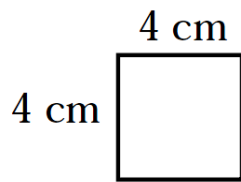
Por vezes, a limitação é puramente matemática. O aluno que calcula o volume de um sólido pode não saber que se trata de um paralelepípedo — ou seja, pode não perceber este conceito associando o nome apenas a uma fórmula. Nesses casos, o problema está apenas na má compreensão de um conceito matemático e essa deficiência agrava-se se, em vez de a enfrentar, o professor a rodeia com contextos pormenorizados. Outras vezes, o problema pode estar na incapacidade de relação do conceito com uma determinada realidade. O aluno não está habituado a usar conhecimentos de uma área para outra. Como se pode ultrapassar este obstáculo?

Uma primeira recomendação com vistas à promoção da transferência é não limitar a aprendizagem de determinado conceito ou procedimento a um ou a outro exemplo concreto. Devem ser dados exemplos, mas estes devem variar o mais possível, para que os estudantes consigam apreender o que é essencial e extensível a diferentes contextos.

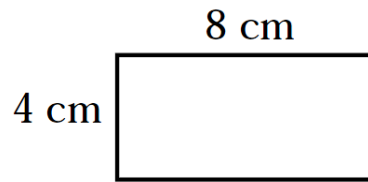
Além dos exemplos, para ajudar a transferência é necessário promover a abstracção. Em muitos casos, a investigação psico-pedagógica tem verificado que a instrução explícita dos conceitos abstractos favorece mais a transferência do que os exemplos, mesmo que variados (e.g., Sloutsky, Kaminski, & Heckler, 2005; Uttal, 2003). Estudos rigorosos têm mostrado a superioridade da abstracção para aprendizagens mais complexas (Kaminski, Sloutsky & Heckler, 2008).

Finalmente, é necessário um esforço consciente por parte do professor para escolher os exemplos e contra-exemplos de forma a promover a correcta transferência e impedir a transferência negativa. Um exemplo muito comum deste tipo nocivo de transferência é dado pela propriedade comutativa da multiplicação traduzida para a divisão: o aluno habituado a ver  $a \times b = b \times a$  pode tender a concluir que  $a/b = b/a$ .

Um outro exemplo, que Liping Ma (Ma, 2009) tornou clássico, é o de um estudante que julga ter descoberto um facto geométrico que induziu a partir de exemplos. Diz o estudante que sempre que o perímetro de um rectângulo aumenta, a sua área também aumenta. É o que se reproduz abaixo, retirado de Ma (2009).



Perimeter = 16 cm  
Area = 16 square cm



Perimeter = 24 cm  
Area = 32 square cm

Um professor experimentado verificará imediatamente uma fonte provável do erro do aluno. É natural que ele apenas tenha visto exemplos em que as alturas dos retângulos sejam iguais. Esta transferência negativa poderia ter sido contrariada se o professor tivesse o cuidado de apresentar exemplos em que todos os lados dos retângulos variam e discutir casos de retângulos com altura muito pequena e largura muito grande (perímetro elevado, área reduzida).

#### 4.6. Solidificar os conhecimentos por camadas

Outra recomendação fundamental é a de ter cuidado em verificar que os conhecimentos estão solidamente adquiridos pelos alunos antes de avançar para outros patamares. Enquanto outras disciplinas são menos cumulativas e se podem aprender de várias maneiras, a matemática baseia cada avanço em conhecimentos adquiridos anteriormente (mesmo o conceito de número e conceitos geométricos básicos falados à entrada na escola baseiam-se em experiências e conhecimentos anteriores dos alunos). Ao ensinar inglês, por exemplo, o aluno pode ter estado distraído na aula em que se fez a distinção entre «*few*» e «*little*», não sabendo pois que a primeira se aplica a quantidades numeráveis e a segunda a quantidades contínuas ou não quantificáveis. Mas ao ouvir essas palavras várias vezes e ao ler textos em que elas são referidas, o aluno pode perceber o sentido das frases e ir aprendendo outras palavras e expressões. Em matemática, esse progresso pela intuição e com falhas é muitíssimo mais difícil, para não dizer impossível.

A matemática é uma progressão de conceitos que parte dos simples e avança para os mais complexos. Do número e das operações passa-se às proporções e à álgebra, da álgebra passa-se às funções e por aí adiante. A frustração que se encontra frequentemente nos alunos perante a matemática é a frustração por não conseguirem perceber os conceitos nem aplicar os procedimentos, e essa incapacidade deriva frequentemente de falhas anteriores, em matérias antecedentes.

Diversos estudos têm apontado a necessidade de aprender e solidificar os conhecimentos, mostrando que o treino para além do estritamente necessário melhora a compreensão do necessário. O trabalho de Pashler et al. (2007) apresenta uma revisão dos estudos mais recentes.

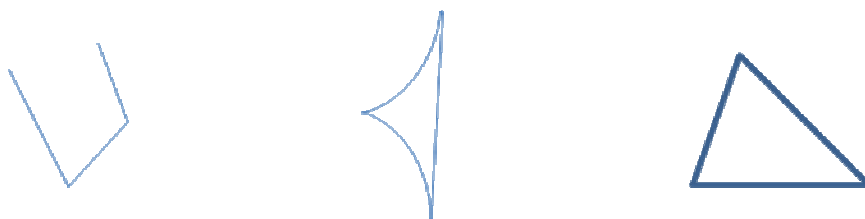
Como referimos anteriormente, em pedagogia fala-se em *sobreaprender* para referir o domínio das matérias ou procedimentos até que aquelas se tornem familiares e estes se tornem automáticos. A sobreaprendizagem não deve ser confundida com a prática de muitos estudantes que repetem exageradamente certos exercícios procurando automatizar o que não percebem, nem deve ser confundida com a tentativa de assimilação rápida e forçada de conhecimentos nas vésperas das avaliações. Pelo contrário, os estudos de psicologia cognitiva têm mostrado que a repetição espaçada é a que melhor provoca a retenção de longo prazo (*e.g.*, Cooper & Sweller, 1987). Neste sentido, é importante ir lembrando matérias anteriores à medida que se progride para matérias mais avançadas. A prática de usar a máquina de calcular logo após os alunos dominarem os algoritmos de papel e lápis é um exemplo de prática nefasta precisamente por essa razão. Transforma-se no caminho rápido para os alunos esquecerem os factos e procedimentos aritméticos básicos.

Revisitar conhecimentos anteriores em contextos diferentes e de forma espaçada e diferida é não só fundamental para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para a automatização de procedimentos, como também para a compreensão profunda das matérias (Rohrer & Taylor 2006).

#### 4.7. Usar definições claras

O professor israelita Ron Aharoni, que estudou o ensino da matemática elementar e se especializou em didáctica dos primeiros anos de escolaridade, tem insistido muito na necessidade de usar definições claras em todas as etapas do ensino da matemática (Aharoni, 2008). A sua experiência e a de outros educadores mostra que as actividades dispersas têm uma utilidade muito reduzida se não for feita uma clarificação dos conceitos.

As definições são a base do desenvolvimento de toda a matemática. Esta disciplina começa com conceitos precisos a partir do qual estabelece relações e obtém resultados. A generalidade de aplicação e a fiabilidade desses resultados assentam no rigor das definições iniciais e, claro, no rigor do raciocínio com que foram deduzidos. Para dar um exemplo, pense-se na definição de triângulo. Se se começar por dizer a uma criança que um triângulo é uma figura com três lados está-se a dar uma definição insuficiente. A certa altura é preciso ir mais longe. Olhe-se por exemplo, para primeira das três figuras seguintes; tem ou não três lados?





Pode então pensar-se que basta dizer que os três lados definem uma figura fechada. Mas não é fechada a segunda das figuras?

Há várias maneiras de definir um triângulo, mas é importante que a definição implique que um triângulo é uma figura plana, fechada, composta (ou delimitada) por três segmentos de recta que se unem dois a dois em pontos chamados vértices. Sem este mínimo de clareza, como se pode explicar a um estudante que a medida da soma de ângulos de um triângulo é 180 graus?

Sabemos que o rigor matemático foi sendo construído ao longo de séculos. Mesmo a geometria de Euclides, tida por muito tempo como um modelo de definição perfeita, teve de ser completada no início do século XX por David Hilbert, que encontrou, tal como outros antes dele, falhas nas formulações do matemático grego. Iguamente, o rigor que se ensina aos estudantes é um rigor progressivo. Há muitas falhas que não são logo colmatadas, voltando-se a elas mais tarde quando os conhecimentos e a maturidade matemática dos estudantes lhes permite encarar definições mais completas.

O problema central é o da procura do rigor possível em cada nível de escolaridade. De outra forma, a matemática aparecerá sempre como um conjunto de truques dispersos, uma série de conhecimentos fragmentados ou um agregado de procedimentos. Mais uma vez se vêm as limitações dos contextos e das aplicações no ensino da matemática: por si sós não permitem desenvolver o conhecimento matemático nesta sua vertente fundamental, a hipotético-dedutiva.

O desprezo pelo rigor matemático derivado da preocupação exagerada com os contextos tem permeado vários documentos oficiais em vários países. A imagem seguinte apresenta uma pergunta de uma Prova de Aferição portuguesa em Matemática.

---

O Manuel tem um *puzzle* com **125 peças**, e a Rosa tem um com **250 peças**. Quando estão montados, os *puzzles* formam rectângulos com a mesma área.

Na figura, estão representadas uma peça do *puzzle* do Manuel e uma peça do *puzzle* da Rosa.



Peça A



Peça B

Qual das peças, A ou B, pode pertencer ao *puzzle* da Rosa?  
Explica a tua resposta.

---

---

---

É óbvio para qualquer professor, e naturalmente também para qualquer aluno, que se pretende que o examinado faça o seguinte raciocínio: para os dois *puzzle* ocuparem a mesma área, o que tem menos peças deve ter peças maiores, portanto a peça A deve pertencer ao *puzzle* do Manuel.

Este raciocínio, contudo, tem dois pressupostos escondidos: as peças estão ambas representadas à escala e são iguais em cada *puzzle*. São pressupostos de algum realismo, mas são, sobretudo, pressupostos que o estudante obrigatoriamente tem de aceitar para responder à pergunta. Ora o estudante sabe, naturalmente, que os *puzzle* têm, em geral, peças de tamanhos diferentes. E deve ser habituado a perceber que as escalas de representação podem ser diferentes. O que se está a pedir ao examinado nesta prova é que finja que a prova está bem feita e que adivinhe o que o examinador pretende que se responda. Ou seja, o que se está a pedir ao estudante é que abandone o raciocínio rigoroso, que limite a sua capacidade de crítica e que aceite aquilo que é um inimigo fatal do raciocínio e da matemática: o pressuposto escondido.

#### 4.8. Avaliar frequentemente

Menos conhecido, mas estabelecido de forma sólida por estudos experimentais em ambiente quase escolar e em ambiente escolar (Roediger & Karpicke 2006a, 2006b e Karpicke & Roediger 2008), é o facto de os testes serem mais eficientes para a retenção de longo prazo do que a simples aprendizagem repetida. O facto é contra-intuitivo, mas explica-se pelo facto de os alunos terem uma fraca consciência do seu nível de aprendizagem, julgarem que sabem o que não sabem e, muitas vezes, não perceberem quais os tópicos que são chave da matéria. Assim, ao estudarem por si próprios, rapidamente se convencem de que não é necessário prosseguir a leitura e o treino. Em contraste, quando os alunos são repetida e apropriadamente testados, não só recuperam de memória os factos e conceitos, o que os ajuda a retê-los, não só tomam consciência das suas deficiências, como são obrigados a concentrar-se nos tópicos mais importantes.

É habitual, por exemplo, que os alunos julguem que dominam a propriedade comutativa da adição e a da multiplicação e a propriedade distributiva desta em relação aquela por saberem resolver problemas do tipo

$$2 \times (1 + 3),$$

e apenas repararem que o seu conhecimento é limitado quando confrontados com problemas como os seguintes, que, possivelmente, não sabem resolver,

$$3 + (23 \times 2 + 7) \quad \text{ou} \quad 3 \times (2 + 7) \times (3 + 17).$$

Defrontados com problemas destes, apropriadamente construídos de forma a testarem as dificuldades mais comuns, os alunos praticam e assimilam as propriedades comutativa e distributiva como não o fariam por si próprios.

Como norma geral, quanto mais frequente for a avaliação mais esta pode reforçar a aprendizagem. O aspecto a ressaltar é o da clara separação entre ensino e avaliação. Se esta demarcação não for bem estabelecida, como por vezes acontece nos exageros da dita «avaliação contínua», o aluno pode coibir-se de levantar questões e manifestar a sua ignorância como medo de revelar o seu desconhecimento. O professor deve fazer um esforço coerente para encorajar os alunos a perguntar o que desconhecem, nos momentos apropriados.

## **5. Algumas conclusões**

Algumas conclusões gerais podem ser tiradas a partir das investigações sobre os processos de aprendizagem. São conclusões prudentes, pois do que se sabe sobre o funcionamento da mente pouco se pode traduzir ainda em recomendações pedagógicas, e os estudos sobre experiências educativas têm frequentemente contextos diferentes, que podem justificar medidas particulares e não generalizáveis. O que até agora discutimos, contudo, são recomendações tão insistentemente validadas pela experiência educativa, pelos estudos rigorosos de psico-pedagogia e pelas análises de experimentos educativos, que se podem aceitar como solidamente confirmadas.

Talvez o traço geral mais saliente destas recomendações é o seu ecletismo. Quando se fala na necessidade de memorização não se menospreza a importância da compreensão; quando se sublinha a necessidade da abstracção não se pretende banir os exemplos e as experiências concretas, que são via para o progresso dos conceitos no aluno; quando se destaca o papel imprescindível do treino de procedimentos e da automatização de rotinas não se deprecia a necessidade da assimilação dos conceitos nem da compreensão dos fundamentos das rotinas.

O que a psico-pedagogia moderna sublinha, ao contrário de visões dogmáticas, parcelares, unilaterais e tendenciosas, é que os alunos progredem quando se trabalham aos mesmo tempo os diversos aspectos da aprendizagem. O mesmo é válido para outros aspectos da organização e do funcionamento da escola, tais como a disciplina, a motivação e a avaliação.

Depois de algumas teorias educativas radicais terem defendido que toda a disciplina deve vir da motivação, sabe-se hoje que a disciplina é um factor importante da aprendizagem e que constitui um exemplo de romantismo lunático esperar que ela seja adquirida apenas pela motivação e responsabilização dos alunos. A disciplina tem, em grande parte, de ser imposta. A pressão externa é um auxiliar da tomada de consciência do aluno. Não faz sentido tentar uma disciplina totalmente imposta tal

como não faz sentido pretender que os métodos de trabalho sejam todos voluntariamente adquiridos pelos alunos. Da mesma forma, o ensino tem de motivar os estudantes, mas tem também de exercer alguma pressão sobre eles para os levar à compreensão das matérias. A motivação leva à compreensão, mas a compreensão provoca também o movimento inverso: a motivação vem em grande parte de algum conhecimento prévio do que se estuda. Ninguém pode gostar do que desconhece.

A este respeito deve ouvir-se a experiência dos professores. Todos os que já exerceram a actividade educativa, mas talvez mais os que ensinaram ou ensinam matemática, sabem que os alunos se queixam frequentemente de estarem a fazer actividades sem sentido, de lhes estarem a explicar matérias de que não estão a ver a utilidade e de estarem sujeitos a exercícios repetitivos e fastidiosos. Algumas correntes educativas lêem erradamente estes sinais. Mas os professores experientes sabem entendê-los. Quando os alunos se queixam de determinada actividade, estão naturalmente a lamentar-se pelo insucesso, pela sua incapacidade para enfrentar as tarefas que lhes são atribuída. Os alunos que sabem fazer determinados exercícios não se costumam queixar do seu aspecto repetitivo ou trabalhoso. Pelo contrário. Muitos alunos gostam de actividades que conseguem fazer, mesmo que repetitivas, quando nelas têm êxito.

Lendo erradamente estes sinais, algumas correntes educativas fazem depender o progresso no ensino do interesse do aluno e da sua compreensão da utilidade das matérias, o que é novamente irrealista. É preciso dizer-se que a utilidade prática imediata não é critério de inclusão ou exclusão de tópicos de ensino e é preciso também afirmar-se frontalmente que não é o gosto do aluno que pode servir de critério do que este aprende.

A prudência das conclusões que modernamente se tiram e o seu carácter eclético não podem ser confundidos com uma conciliação de inconciliáveis. Quando se afirma que o desenvolvimento da memória é decisivo para a aprendizagem da matemática está-se a dizer, implícita ou explicitamente, que não estão correctas as correntes pedagógicas que, durante anos, defenderam que a memorização era inimiga da compreensão. Quando se afirma que a compreensão favorece a memorização e o automatismo dos procedimentos (Hecht et al., 2007), está-se a criticar a ideia antiquada de que a aprendizagem da matemática pode limitar-se à memorização de algoritmos sem necessidade de compreender o seu fundamento.

Igualmente, quando se afiança que os exemplos e aplicações devem ser usados para induzir conceitos abstractos, está-se a criticar a ideia de que o ensino pode ser uma progressão de conceitos que nada têm a ganhar do conhecimento de aplicações. Mas quando se afirma, igualmente, que é necessário caminhar dos exemplos para a abstracção, está-se a recusar os exageros do ensino em contexto. Mais, quando se defende que é necessário desenvolver o raciocínio hipotético-dedutivo essencial em matemática, está-se a criticar a ideia de que há um caminho

único, do concreto para o abstracto, e a sublinhar que também existe e deve ser desenvolvido o caminho inverso, da abstracção para o concreto.

As conclusões da investigação mais recente podem reduzir-se a meia dúzia de ideias essenciais, ideias temperadas de bom senso e com fundamento no que melhor se conhece sobre o ensino: respeitar os alunos, usar materiais bem estruturados e de progressão coerente, insistir tanto nos conceitos como na fluência dos procedimentos, despertar o raciocínio ao mesmo tempo que se desenvolve a memorização, ser-se organizado e exigente.

## Referências

- Aharoni, Ron (2008). *Aritmética para Pais*, Lisboa: SPM/Gradiva (trad. de *Arithmetic for Parents: A Book for Grownups about Children's Mathematics*, El Cerrito, CA, Sumizdat, 2007).
- Ashcraft, M.H. & Krause, J.A. (2007). Working memory, math performance, and math anxiety, *Psychonomic Bulletin and Review* 14, 243–248.
- Anderson, John R., Reder, Lynne M. & Simon, Herbert A. (1996). Situated learning and education, *Educational Researcher* 4, 5–11.
- Anderson, John R., Reder, Lynne M. & Simon, Herbert A. (2000). Applications and misapplications of cognitive psychology to mathematics education, <http://act-r.psy.cmu.edu/papers/misapplied.html>
- Bahrack, H.P., & Hall, L.K. (1991). Lifetime maintenance of high school mathematics content. *Journal of Experimental Psychology: General*, 120, 22–33.
- Beilock, S.L., Kilp, C.A., Holt, L.R. & Carr, T.H. (2004). More on fragility of performance: Choking under pressure in mathematical problem solving, *Journal of Experimental Psychology: General* 136, 256–276.
- Bierderman, I. & Schiffrar, M. (1987). Sexing day-old chicks: A case study and expert systems analysis of a difficult perceptual learning task, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition* 13, 640–645.
- Bjork, R.A. (1994). Memory and metamemory considerations in the training of human beings in J. Metcalfe & A. Shimamura (Eds.), *Metacognition: Knowing about knowing*, Cambridge, MA: MIT Press, pp. 185–205.
- Blackwell, L., Trzesniewski, K., & Dweck, C.S. (2007). Implicit theories of intelligence predict achievement across an adolescent transition: A longitudinal study and an intervention, *Child Development* 79, 246–263.
- Brown, John Seely Collins, Allan & Duguid, Paul (1989). Situated cognition and the culture of learning, *Educational Researcher* 18-1, 32–42.
- Bruer, J.T. (2002). Avoiding the pediatrician's error: How neuroscientists can help educators (and themselves), *Nature Neuroscience* 5, 1031–1033.
- Carraher, T.N., Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1985). Mathematics in the streets and in the schools, *British Journal of Development Psychology* 3, 21–29, 1985.
- Collins, Allan, Brown, John Seely & Newman, Susan E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching students the craft of reading, writing, and mathematics, in Lauren B. Resnick (ed.), *Knowing, Learning, and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser*, Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Cooper, G., & Sweller, J. (1987). Effects of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer, *Journal of Educational Psychology* 79, 347–362.

- Crato, Nuno (2006a). *O Eduquês em Discurso Directo: Uma Crítica da Pedagogia Romântica e Construtivista*, Lisboa: Gradiva.
- Crato, Nuno, org. (2006b). *Desastre no Ensino da Matemática: Como Recuperar o Tempo Perdido*, Lisboa: SPM/Gradiva.
- Crato, Nuno (2009). *Matemática das Coisas*, São Paulo: Livraria da Física (adaptação da edição portuguesa de 2008, Lisboa: SPM/Gradiva).
- Cross, Christopher C., Woods, Taneisha A., Schweingruber, Heidi, editors (2009). *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Towards Excellence and Equity*, Committee on Early Childhood Mathematics, National Research Council, Washington, D.C.: National Academies Press.
- Damião, Maria Helena (2004). (Ainda) sobre a noção de competência na educação escolar básica, *Gazeta de Física* 27–3, 31–33.
- Dehaene, S., Izard, V., Pica, P., & Spelke, E. (2006). Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group, *Science*, 311, 381–384.
- Dias, Vera S.E. (2009). A aprendizagem na disciplina de matemática com recurso a novas tecnologias, utilizando a plataforma Moodle, Dissertação elaborada com vista à obtenção do Grau de Mestre em Ciências da Educação na Especialidade de Tecnologia Educativa, Faculdade de Motricidade Humana, Universidade Técnica de Lisboa.
- Duschl, R.A., Schweingruber, H.A., Schouse, A.W., editors (2007). *Taking Science to School: Learning and teaching Sciences in Grades K-8*, Washington: National Academies Press.
- Dweck, C.S. (1999). *Self-Theories: Their Role in Motivation, Personality, and Development*, Philadelphia: Psychology Press.
- Gallagher, Ann M. & Kaufman, James C., editors (2005). *Gender Differences in Mathematics: An Integrative Psychological Approach*, Cambridge, UK, Cambridge University Press.
- Geary, David C. (1996). Sexual selection and sex differences in mathematical abilities, *Behavioral and Brain Sciences* 19-2 229–284.
- Geary, D.C. (2006). Development of mathematical understanding, in D. Kuhl & R.S. Siegler (Vol. Eds.), *Cognition, perception, and language*, Vol. 2 (pp. 777–810). W. Damon (Gen. Ed.), *Handbook of child psychology* (6th ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Geary, D.C., Bow-Thomas, C.C., Liu, F., & Siegler, R.S. (1996). Development of arithmetical competencies in Chinese and American children: Influence of age, language, and schooling. *Child Development* 67, 2022–2044.
- Geary, David C. & Widaman, K.F. (1992). Cognitive addition and multiplication: Evidence for a single memory network, *Memory & Cognition* 14, 478–487.
- Gelman, R., & Williams, E.M. (1998). Enabling constraints for cognitive development and learning: Domain-specificity and epigenesis. In D. Kuhl & R.S. Siegler (Vol. Eds.), *Cognition, perception, and language*, Vol. 2 (pp. 575–630). W. Damon

- (Gen. Ed.), *Handbook of child psychology* (Fifth Ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Gelman, S.A. (2003). *The Essential Child: Origins of Essentialism in Everyday Thought*, NY: Oxford University Press.
- Ginsburg, A., Cooke, G., Leinwand, S., Noell, J., & Pollock, E. (2005). *Reassessing U.S. International Mathematics Performance: New Findings from the 2003 TIMSS and PISA*, Washington, DC: American Institutes for Research.
- Hecht, S.A., Vagi, K.J., & Torgesen, J.K. (2007). Fraction skills and proportional reasoning, in D.B. Berch, & M.M.M. Mazzocco (Eds.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (pp. 121–132), Baltimore, MD: Paul H. Brookes Publishing Co.
- Hirsch, Jr., E. D. (2002). Classroom research and cargo cults. *Policy Review* 115. Palo Alto, CA: Hoover Institution, Stanford University.
- Kaminski, J.A., Sloutsky, V.M. & Heckler, A.F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math, *Science*, 320, 454–455.
- Karpicke, Jeffery D. & Roediger, Henry L. (2008). The critical importance of retrieval for learning, *Science*, 319, 966–968.
- Kauffman, James M. M. (2002). *Education Deform: Bright People Sometimes Say Stupid Things About Education*, Lanham, MD, Rowman & Littlefield.
- Kaufhold, John A. (2007). *Basic Statistics for Educational Research*, Lincoln, NE: iUniverse.
- Kirk, Roger E. (1994). *Experimental Design: Procedures for the Behavioral Sciences (Third edition)*, Pacific Grove, CA: Wadsworth Publishing.
- Klein, D., Braams, B.J., Parker, T., Quirk, W., Schmidt, W., & Wilson, W.S. (2005). *The State of State Math Standards 2005*. Thomas B. Fordham Institute.
- Lave, Jean (1988). *Cognition in Practice: Mind, Mathematics, and Culture in Everyday Life*, Nova Iorque: Cambridge University Press.
- Ma, Liping (2009). *Aprender e Ensinar Matemática Elementar*, Lisboa: SPM/Gradiva (trad. de *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, 1999, Filadélfia, PA: Lawrence Erlbaum).
- Ministère de l'Éducation Nationale (França) (2008). *Project de programmes de l'école primaire* (Versão online em [www.education.gouv.fr](http://www.education.gouv.fr), verificada em 5 de Julho de 2009).
- Ministério da Educação (Portugal) (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Versão online em [sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf](http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf), verificada em 5 de Junho de 2009).



- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- NMAP – National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success: Final Report*, U.S. Department of Education (Versão online em [www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel](http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel), verificada em 7 de Junho de 2009).
- NMAP3 – National Mathematics Advisory Panel (2008). Report of the Task Group on Conceptual Knowledge and Skills, U.S. Department of Education (Versão online em [www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel](http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel), verificada em 7 de Junho de 2009).
- NMAP4 – National Mathematics Advisory Panel (2008). Report of the Task Group on Learning Processes, U.S. Department of Education (Versão online em [www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel](http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel), verificada em 7 de Junho de 2009).
- Pashler, H., Rohrer, D., Cepeda, N.J., & Carpenter, S.K. (2007). Enhancing learning and retarding forgetting: Choices and consequences, *Psychonomic Bulletin & Review* 14, 187–193.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R.S., & Alibali, M.W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process, *Journal of Educational Psychology*, 93, 346–362.
- Roediger, Henry L. & Karpicke, Jeffrey D. (2006a). Test-enhanced learning: Taking memory tests improves long-term retention, *Psychological Science* 17, 249–255.
- Roediger, Henry L. & Karpicke, Jeffrey D. (2006a). The power of testing memory: Basic research and implications for educational practice, *Perspectives on Psychological Science* 1, 181–210.
- Rohrer, D., & Taylor, K. (2006). The effects of overlearning and distributed practice on the retention of mathematics knowledge, *Applied Cognitive Psychology* 20, 1209.
- Schmidt, W. & Houang, R. (2007). Lack of focus in mathematics: Symptom or cause? In T. Loveless (Ed.), *Lessons learned: What international assessments tell us about math achievement* (pp. 65–84). Washington, DC: Brookings Institution Press.
- Schmidt, W., Houang, R., & Cogan, L. (2002). A coherent curriculum: The case of mathematics. *American Educator*, Summer 2002 (Versão online em [www.aft.org/pubs-reports/american\\_educator/summer2002/curriculum.pdf](http://www.aft.org/pubs-reports/american_educator/summer2002/curriculum.pdf) verificada em 17 de Junho de 2009).
- Schneider, W. & Shiffrin, R.M. (1977). Controlled and automatic human information processing: I. Detection, search, and attention, *Psychological Review* 84, 1–66.

- Shiffrin, R.M. & Schneider, W. (1977). Controlled and automatic human information processing: II. Perceptual learning, automatic attending, and a general theory, *Psychological Review* 84, 127–190.
- Singapore Ministry of Education (2006a). *Elementary Mathematics Syllabuses* (Versão online em [www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences](http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences), verificada em 5 de Junho de 2009).
- Singapore Ministry of Education (2006b). *Secondary Mathematics Syllabuses* (Versão online em [www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences](http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences), verificada em 5 de Junho de 2009).
- Sloutsky, V.M., Kaminski, J.A., & Heckler, A.F. (2005). The advantage of simple symbols for learning and transfer, *Psychonomic Bulletin & Review*, 12, 508–513.
- Stanovich, Paula J. & Stanovich, Keith E. (2003). *Using Research and Reason in Education: How Teachers Can Use Scientifically Based Research to Make Curricular & Instructional Decisions*, Jessup, MD: National Institute for Literacy.
- U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics (2001). *Early childhood longitudinal study, kindergarten class of 1998–99: Base-year public-use data files* (NCES 2001–029). Washington DC.
- Uttal, D.H. (2003). On the relation between play and symbolic thought: The case of mathematics manipulatives, in O. Saracho & B. Spodek (Eds.), *Contemporary Perspectives on Play in Early Childhood Education*, Charlotte, NC: Information Age Press.