RELATÓRIO | MAIO 2023

DESENHO E IMPLEMENTAÇÃO DE UM MODELO DE AVALIAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

CEnPE

Apoio: INSTITUTO UNIBANCO

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O objetivo deste relatório é levar, para o debate público, algumas proposições e contribuições para a qualificação das avaliações em Matemática no ensino básico, de forma a aproximar, efetivamente, a avaliação das necessidades prementes e notórias de superar os gargalos históricos no aprendizado de Matemática Básica e, ao mesmo tempo, de implementar e acompanhar a gestão de currículos relevantes e significativos.

Seguimos, neste esboço das ideias e práticas que desenvolvemos, o princípio estrutural de expor os alicerces teóricos e metodológicos em que o modelo de avaliação deve ser baseado. Ao adotarmos esse princípio, percebemos a necessidade de formação de professores e equipes técnicas, disseminando e compartilhando literatura e tecnologias que não são, ainda, acessíveis a esses públicos, responsáveis, de fato, pela implementação de uma cultura avaliativa nas redes e escolas.

As principais referências em que nos baseamos são internacionalmente difundidas e aplicadas na constituição de sistemas de avaliação robustos. Embora muitos desses referenciais já façam parte do *mainstream* internacional em avaliação educacional (como se depreende das datas das publicações e do número de citações de muitas das obras mencionadas), constatamos, empiricamente, que são virtualmente desconhecidos ou ignorados em centros de formação de professores; nos núcleos de avaliação, currículo e formação nas secretarias; e mesmo nos documentos oficiais e notas técnicas que pautam nossos sistemas de avaliação de larga escala.

Ao que tudo indica, estamos por fazer o dever de casa de estudar, crítica e profundamente, referências centrais sobre Psicologia Cognitiva na aprendizagem de Matemática, teoria e prática avaliativas e aspectos do conhecimento pedagógico do conteúdo relevantes para o uso instrucional da avaliação nessa disciplina. Portanto, esperamos que o relatório possa indicar que existe uma lacuna considerável em bases científicas na urgente discussão nacional sobre avaliação educacional. Por certo, estamos longe de pretender suprir essa lacuna: nosso intento é avivar o interesse dos especialistas em fazê-lo.

Nos anos que seguem, em que ainda serão sentidos os impactos educacionais da Pandemia, aumenta o risco de que baixas expectativas curriculares e avaliativas, embasadas em esquemas apressados de priorização, gerem mais exclusão. O ensino profundo e exigente da

Matemática Básica, muito mais necessário no presente momento, deve vir acompanhado de um desenho de avaliação que realmente monitore a aprendizagem significativa da Matemática, em termos de aquisição e mobilização do repertório, via processos cognitivos que envolvam a resolução de problemas, a modelagem matemática e a possibilidade da descoberta e da transferência desse conhecimento em diversos contextos.

O Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa) tem produzido dados alarmantes quanto ao desempenho em Matemática de nossos jovens na transição do Ensino Fundamental para o Médio, os quais **não são meras comprovações** das evidências, também problemáticas, geradas pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e pelo sem-número de avaliações somativas em curso nos estados há vários anos. De fato, o Pisa dispara alertas de uma **gravidade ainda maior,** dadas a pertinência e a profundidade de sua definição de literacia matemática.

Embora nossas avaliações de larga escala contem com instrumentos de aplicação, coleta e mensuração bem calibrados, essas condições necessárias não são suficientes para prospectar as camadas mais profundas da cognição no aprendizado de Matemática. De fato, dois ou três instantâneos em testes, coletados, muito espaçadamente, ao longo da trajetória acadêmica do aluno, não detectam os desvios de equidade, que vão se acumulando até que se tornem fissuras irremediáveis, especialmente ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental. As especificações condensadas e arbitradas nas matrizes de referência desses testes não possibilitam uma anamnese das lacunas de aprendizagem que aponte, tempestivamente, as falhas estruturais no percurso espiral do currículo. Ademais, as tarefas apresentadas aos alunos não os colocam em situações em que mobilizem conhecimentos para modelar problemas, formular estratégias quantitativas, analisar criticamente modelos e respostas e, possivelmente, atualizar, expandir ou generalizar conceitos e técnicas matemáticas.

Em suma, apontamos aqui a demanda inadiável por avaliações de caráter genuinamente formativo, que ajudem a identificar e recompor aprendizagens não consolidadas, por instrumentos que possam minerar o que está devidamente consolidado e conectado na arqueologia cognitiva do estudante, em termos de repertório e de habilidades matemáticas. Trata-se de garantir que esse conhecimento possa emergir quando, na escola e na vida, esses alunos se defrontarem com problemas para os quais a Matemática trará clareza e discernimento.

ESTRUTURA DO RELATÓRIO

Neste relatório, descrevemos esforços iniciais em seguir as diretrizes do triângulo avaliativo de James Pellegrino e o *evidence-centered design*, desenvolvido por Robert Mislevy e colaboradores, na concepção e no desenvolvimento de modelos de avaliação alinhados a especificações curriculares e mapas de progresso para a Matemática Básica no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Dado esse objetivo geral, reunimos, na seção 1, alguns apontamentos sobre aspectos cognitivos prevalentes na aquisição e mobilização de conhecimentos, habilidades e atitudes relevantes no domínio da Matemática. Essas indicações são marcos iniciais para formular as hipóteses sobre a análise de domínio e os fundamentos dos modelos cognitivo e de tarefas que lastreiam nossa proposta preliminar de avaliações para a aprendizagem da Matemática Básica.

Examinados alguns referenciais a respeito do currículo de Matemática Básica e dos aspectos cognitivos na mobilização e na transferência desse *corpus* de conhecimentos, passamos, na seção 2, à descrição esquemática das camadas do *evidence-centered design* (ECD) relativas aos modelos cognitivos, de tarefas e de evidências. Especial atenção é dada, nessa seção, aos papéis desempenhados pela análise e modelagem do domínio na arquitetura do ECD: resumimos, esquematicamente, o modelo de argumento que sustenta inferências sobre aprendizado a partir da interpretação de dados expressos nos resultados de testes e tarefas.

Nas seções 3 a 6, apresentamos a principal contribuição de nossa pesquisa: os avanços iniciais que obtivemos na análise de domínio da Matemática Básica, a partir da qual pretendemos estruturar um *framework* de avaliações com finalidades diagnósticas e formativas baseado nos princípios de conteúdo, ensino e equidade elaborados por Hyman Bass e colaboradores e que são diretrizes para os projetos que temos estruturado e cujos relatos apresentamos neste documento.

Partimos, na seção 3, de uma discussão sobre a complexidade intrínseca das competências específicas e habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), demonstrando a necessidade de especificação dos objetivos de aprendizagem e da proposição de mapas de progresso nas etapas curriculares e cognitivas no ensino básico de Matemática. Com este propósito, detalhamos, na seção 4, alguns elementos conceituais e estruturais da Matriz dos Saberes, construção em que organizamos conhecimentos e habilidades da Matemática fundamental em uma estrutura conectada de nós e *links* que espelham relações lógicas e cognitivas entre *clusters* do conhecimento matemático e suas representações.

As seções 4 e 5 aprofundam essa organização do domínio, avançando na descrição de metas de aprendizagem e aspectos da competência matemática, estabelecendo as relações dessas metas e aspectos aos domínios de conteúdos sistematizados na Matriz dos Saberes. Essa investigação inicial na direção da análise e modelagem do domínio da Matemática Básica culmina, na seção 6, com a descrição dos domínios de processos cognitivos.

Na seção 7, discutimos a estrutura de tarefas que completam um esboço integrado da análise do domínio.

A seção 8 enfoca a camada dos modelos de evidências na arquitetura do ECD. Apresentamos exemplos de aplicações de modelos diagnóstico-cognitivos (CDM) em avaliações diagnósticas realizadas, com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental na rede municipal de Sobral (CE). Discutimos, nessa parte do relatório, tarefas que foram apresentadas no teste e as evidências que pudemos produzir com base no desenho dessas tarefas e na utilização dos modelos CDM.

Por fim, na seção 9, expomos alguns apontamentos sobre o uso das evidências geradas por avaliações formativas na prática docente. Ressaltamos a necessidade de desenhar formações continuadas para promover a "imersão" da avaliação formativa na instrução e, com isso, também desenvolver determinadas competências profissionais para a docência, centrais para o aprimoramento do **conhecimento pedagógico do conteúdo**. Esboçamos, brevemente, a arquitetura de formações continuadas a serem ofertadas a redes municipais no estado do Ceará, desdobramento futuro das ações descritas neste documento.

EQUIPE

Centro de Excelência em Políticas Educacionais (CEnPE)

Coordenação
Jorge Herbert Soares de Lira
Joaquim Bento Cavalcante Neto
George Allan Menezes Gomes
Ernesto Trajano de Lima Neto

Ciência de Dados Educacionais
Esdras Soares de Medeiros Filho
Caio Lucidius Naberezny Azevedo
Juvêncio Santos Nobre
José Roberto Silva dos Santos
Pedro Alexandre Santos Veloso

Processamento de Sinais & IA em Educação
Charles Casimiro Cavalcante
Guilherme de Alencar Barreto
José Gilvan Rodrigues Maia
João Paulo Pordeus
Amauri Holanda de Souza Júnior

Plataformas Educacionais
Henrique Sérgio Lima Pequeno
Rafael Moreira Albuquerque
Jander Nunes Soares

Núcleo de Educação Matemática e Científica
Jorge Herbert Soares de Lira
Annelise Maymone
Madeline Gurgel Maia
Cristina Moreira

Alexmay Soares Nunes
Ulisses Lima Parente
Francisco Bruno de Lima Holanda
Emiliano Augusto Chagas

INSTITUIÇÕES PARCEIRAS

Instituto Unibanco
Ricardo Henriques
João Marcelo Borges
Djana Contier Fares
Carolina Carvalho Fernandes
Valquiria Allis Nantes Parlagreco

Secretaria da Educação do Estado do Ceará
Eliana Estrela
Jucineide Fernandes
Vagna Brito de Lima
Edite Maria Lopes Lourenço
Joyce Cristiany de Aguiar Vieira
Maria Marcigleide Araújo Soares
Pauliane Ibiapina Girão
Kelem Carla Santos de Freitas
Ana Paula Pequeno Dantas
Ideigiane Terceiro Nobre
Rodolfo Sena da Penha
Gezenira Rodrigues da Silva

Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação 1 – SEDUC/CE
Ana Geovanda Mourão Cavalcante
Maricélia Damasceno Rocha Parente

Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap)
Tarcísio Haroldo Cavalcante Pequeno
Jorge Barbosa Soares
Denise Sá Maia Casselli

Secretaria de Educação de Sobral
Francisco Herbert Lima Vasconcelos
Franciso Vilar Vasconcelos
Amaury Gomes da Silva
Lucia Balica
Maiara Melo Alves

Secretaria de Educação de Caucaia
Sergio Kobayashi
Aparecida Pacobahyba
Maricélia Damasceno Rocha Parente

AGRADECIMENTOS

A execução deste projeto se tornou possível graças a uma confluência de propósitos, oportunidades e trocas entre várias instituições, equipes e, em um nível ainda mais importante, entre aspirações comuns de pessoas com o firme propósito de contribuir para que a aprendizado seja garantido, sobretudo entre crianças e jovens dos estratos sociais historicamente desassistidos em nosso país. Essa garantia passa pela qualificação da avaliação e do currículo e alicerça a equidade e a democracia.

Agradecemos, expressamente, a Ricardo Henriques, que tem, à frente do Instituto Unibanco (IU), contribuído com as dicussões sobre avaliação educacional e apoiou, desde seu conceito inicial, este projeto como mais um fórum para esse debate estratégico. Essa aproximação ao IU tornou-se possível pela mediação e parceria (para não dizer, de fato, orientação e mentoria) do professor Chico Soares, a quem, efusivamente, agradecemos pelos profundos questionamentos em cada passo desse projeto. Sua inquietação intelectual e cívica motivou toda equipe a aprofundar-se na busca pelas razões de um de nossos mais graves problemas educacionais: os parcos resultados de aprendizagem de nossos jovens em Matemática. Agradecemos, ainda, a Cesar Nunes, nosso interlocutor na fase inicial do projeto.

Na condução de todos os ciclos do projeto, contamos com o firme apoio, obstinada confiança e indispensável monitoramento de Djana Fares, auxiliada por Valquíria Parlagreco. Em nome das duas, agradecemos a todo o cordialíssimo e inteligentíssimo *staff* do Instituto Unibanco (Mirela de Carvalho, Maria Júlia Azevedo, Carolina Fernandes e outros tantos quadros preciosos para esta construção coletiva).

Agradecemos fortemente a todos os parceiros na Secretaria da Educação do Estado do Ceará e nas secretarias municipais de Educação de Sobral e Caucaia, os ambientes reais em que a inovação descrita neste projeto ocorre e é realmente validada. Fundamental reconhecer a contribuição inestimável de todos os professores da rede estatual cearense e das redes municipais de Fortaleza e de Sobral que participaram do Programa de Qualificação do Ensino de Matemática no Estado do Ceará, de onde surgiram os primeiros desenhos do projeto.

Enfim, agradecemos a todas as equipes envolvidas mencionadas: são, de fato, os reais artífices das ideias e ações que descrevemos neste longo documento. Esperamos que cada um tome essa menção como um abraço de profundo agradecimento!

INTRODUÇÃO: MODELOS DE AVALIAÇÃO INTEGRADOS AO CURRÍCULO E À INSTRUÇÃO

As discussões e experimentos que descrevemos neste estudo fundamentam-se no princípio de que um modelo de avaliação da aprendizagem em Matemática no ensino básico deve explicitar **premissas, conceituais e metodológicas**, de modo que possam ser expostas à análise crítica de especialistas das áreas envolvidas e ao crivo das evidências.

Outro princípio em que nos baseamos é o de que evidências válidas, tempestivas e legíveis, geradas pelas avaliações, sejam integradas ao cotidiano da instrução, tendo em vista objetivos de aprendizagem especificados, em princípio, no currículo. Na formulação de Dylan Wiliam:

> *Any assessment system should be designed to support the curriculum in place in a school, rather than having the curriculum designed to fit the assessment system. Or to put it another way, assessment should be the servant, not the master, of the learning.* (WILIAM, 2014, p. 2).

Essa centralidade do currículo implica que um dos fundamentos na base do modelo de avaliação é a definição de consensos, ainda que dinâmicos e ajustáveis, sobre quais objetivos de aprendizagem básica em Matemática devem e podem ser mensurados. Essa delimitação, por sua vez, depende da clareza e precisão com que expectativas de aprendizagem são apresentadas no currículo.

Cabe pontuar que currículo, em nossa acepção, não se restringe à especificação de objetivos de aprendizado ou de *standards*: antes, envolve, ao menos, mapear as relações entre os conteúdos, tanto no domínio do conhecimento estruturado quanto no domínio do desenvolvimento cognitivo dos aprendizes. Além disso, entendemos que uma arquitetura curricular pressupõe e prescreve escolhas sobre os meios instrucionais para que se atinjam esses objetivos, como abordagens, sequenciamentos e tarefas recomendadas que ilustrem a progressão ao longo de suas linhas estruturais.

A falta de alinhamento entre currículo, avaliação e instrução causa efeitos deletérios em termos tanto de aprendizagem como de equidade. Um fato, reconhecido na literatura e em nosso meio educacional, é o uso e interpretação equivocados dos dados gerados pelas avaliações, especialmente as de larga escala, com finalidade somativa, que acabam por restringir, efetivamente, o currículo seguido nas escolas ao recorte de tópicos listados nas matrizes de referências dessas avaliações.

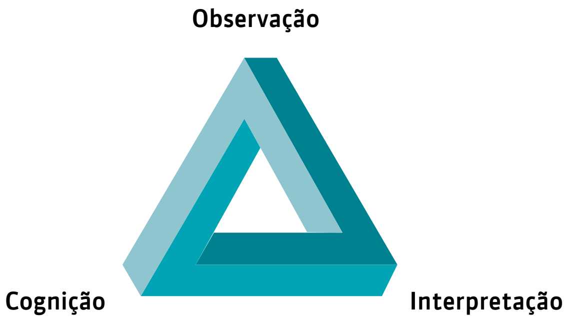
Em nossa exposição, acompanhamos matemáticos e educadores como Hyman Bass ao defendermos que a avaliação deve considerar um núcleo curricular exigente, ao mesmo tempo que deve produzir evidências que indiquem rotas para sua implementação e permanente revisão, a partir de seus desdobramentos na prática docente:

> *Any assessment of mathematics learning should first and foremost be anchored in important mathematics. Assessment should do much more than test discrete procedural skills so typical of today's topic-by-process frameworks for formal assessments. Many current assessments distort mathematical reality by presenting mathematics as a set of isolated, disconnected fragments, facts and procedures. The goal ought to be assessment tasks that elicit student work on the meaning, process, and uses of mathematics.* (NATIONAL RESEARCH COUNCIL,1993, p. 5).

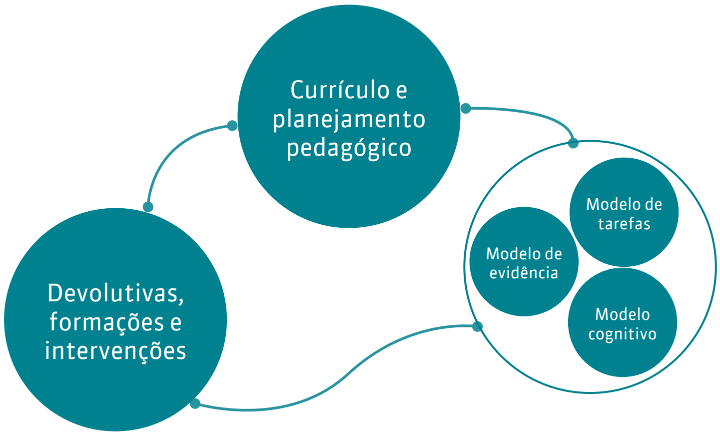
Quanto às bases conceituais e metodológicas da avaliação, ressaltamos que, para estruturar ou aprimorar um sistema de avaliação educacional, os princípios e crenças a respeito de seus elementos fundamentais e de suas relações recíprocas devem ser explicitados, atendendo, com isso, aos requerimentos de rigor do método científico. A propósito disso, citamos o painel da National Academy of Sciences, intitulado *Knowing what students know*, coordenado por James Pellegrino junto com Robert Glaser, onde lemos, em tradução livre, que:

> *Toda avaliação educacional, quando usada seja no contexto da sala de aula ou de larga escala, é baseada em um conjunto de princípios científicos e hipóteses filosóficas, ou fundamentos, como denominados neste relatório. Primeiro, toda avaliação é baseada em uma concepção ou teoria de como as pessoas aprendem, do que elas conhecem e de como o conhecimento e a compreensão progridem no tempo. Segundo, cada avaliação incorpora hipóteses dadas sobre quais tipos de observações, ou tarefas, mais provavelmente elicitam demonstrações de conhecimentos e habilidades relevantes dos estudantes. Terceiro, toda avaliação tem por premissas hipóteses definidas a respeito de como interpretar as evidências da melhor forma possível de modo a estabelecer inferências, que tenham significado, sobre o que os estudantes sabem e sobre o que estão aptos a fazer. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2001, p. 20).*

Esta citação foi tomada de empréstimo do relatório original por introduzir um triângulo avaliativo cujos vértices são **cognição**, **observação** e **interpretação**, um marco referencial que seguimos como modelo conceitual em nosso trabalho.



Cada um dos três pilares desse triângulo avaliativo tem, por sua vez, uma estrutura interna que também deve ser modelada e verificada. As múltiplas relações de dependência entre esses vértices envolvem aspectos metodológicos complexos, necessários à validação dos modelos de evidência, dos modelos cognitivos, dos modelos de tarefas e, em especial, do uso pedagógico das interpretações das evidências.



Além disso, como enfatizado no relatório de Pellegrino e Glaser (2001), os vértices e suas relações bidirecionais exigem a definição rigorosa de conceitos e a formulação explícita de hipóteses do modelo. Em particular, vocábulos como "conhecimentos", "habilidades" (aqui, como tradução de "*skills*", no original) e "tarefas" devem ter acepções claras, com significados compartilhados e inequívocos entre os que realizam a avaliação e, sobretudo, entre os que, na escola, farão uso das medidas e de suas interpretações quantitativas, cognitivas e pedagógicas. Por exemplo, Pellegrino menciona que:

> *Curriculum consists of the knowledge and skills in subject matter areas that teachers teach and students are supposed to learn. The curriculum generally consists of a scope or breadth of content in a given subject area and a sequence for learning. Content standards in a subject matter area typically outline the goals of learning, whereas curriculum sets forth the more specific means to be used to achieve those ends.* (PELLEGRINO, 2010, p. 4).

Nesse sentido, o aparato conceitual e metodológico do *evidence-centered assessment design* (ECD), proposto por Mislevy e colaboradores, sistematiza as conexões entre os elementos e processos que definem um modelo apoiado nos vértices do triângulo avaliativo. De fato, o ECD detalha camadas interdependentes na estrutura de um modelo de avaliação, em que as mais basilares podem ser correspondidas a aspectos da cognição, da observação e da interpretação. Essas camadas são esquematicamente representadas na figura a seguir.

Algumas partes dessa estrutura e de suas relações recíprocas serão explicadas brevemente nas seções a seguir.

Em relação ao tema das bases curriculares da avaliação, enfatizamos que um dos alicerces do ECD é a **análise do domínio** de conhecimento observado em uma dada avaliação. Essa é uma etapa da construção conceitual e tecnológica do ECD que abrange os elementos a seguir, entre outros (MISLEVY; RICONSCENTE, 2005, p. 7).

- Conteúdos, conceitos, fatos, terminologias, métodos, técnicas, ferramentas e representações utilizadas por pessoas atuando nesse domínio de conhecimento.
- Situações em que as pessoas usam conhecimentos declarativos, procedimentais, estratégicos e sociais: a análise de domínio inclui estudar as demandas de conhecimentos mais importantes ou frequentes nesses contextos.
- Análise cognitiva de como as pessoas usam seu conhecimento no domínio quando defrontadas com essas situações.

A descrição detalhada desses elementos permite extrair as principais características de tarefas, representativas de situações reais, que mobilizam diferentes qualidades de conhecimentos, habilidades e atitudes relativas ao domínio analisado. Esse é um **critério de validade** para que as tarefas propostas em um teste possam produzir evidências válidas sobre a proficiência em aspectos desse domínio de conhecimento.

Portanto, a análise de domínio inclui informações sobre a natureza do conhecimento em uma dada área bem como descrições de como é adquirido e utilizado. Além disso, mostra quais são as competências na área e como são desenvolvidas, de acordo com teorias da cognição que embasam essa análise. De acordo com Mislevy e Riconscente (2005, p. 7), esses aspectos de proficiência precisam ser definidos e organizados em termos de estruturas de avaliação: “*Domain analy-*

sis is concerned with gathering substantive information about the domain of interest that will have implications for assessment".

Parte considerável deste relatório é dedicada a sugerir de que modos podemos tomar bases curriculares como ponto de partida para realizar a análise de domínio em Matemática Básica e, por conseguinte, para desenvolver sistemas de avaliação formativas que adotem aspectos importantes do ECD.

1. CONHECIMENTOS E HABILIDADES MATEMÁTICAS NA TRÍADE CURRÍCULO-INSTRUÇÃO-AVALIAÇÃO

Ao adotar o *evidence-centered assessment design* (ECD) como referencial na elaboração de um modelo de avaliação em Matemática, realçamos a necessidade de mapear o domínio de conhecimentos nessa área que são mobilizados pelos sujeitos avaliados em resposta a diversos contextos e tarefas. Em particular, na elaboração da análise de domínio do conhecimento básico de Matemática, devemos buscar relatos de como os matemáticos veem seu próprio campo de atuação, não apenas quanto a conteúdos e técnicas, mas, também, no que diz respeito à formulação e resolução de problemas, ao reconhecimento de padrões, estruturas e conexões e aos processos de investigação, criação e descoberta no âmago do desenvolvimento da Matemática e de suas aplicações. Nas palavras de Bass e colaboradores:

> *I will argue that the knowledge, practices, and habits of mind of research mathematicians are not only relevant to school mathematics education, but that this mathematical sensibility and perspective is essential for maintaining the mathematical balance and integrity of the educational process—in curriculum development, teacher education, assessment, etc. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL,1993).*

Inevitavelmente, a análise de domínio na base do *framework* da avaliação conduz à discussão sobre se as expectativas de aprendizagem da Matemática pontuadas no currículo correspondem, efetivamente, a aspectos essenciais do pensamento matemático: baixas expectativas curriculares induzem testes que não produzem evidências válidas sobre aprendizagens de fato significativas. Nessa direção, os autores do relatório *Measuring what counts* advertem que:

> *A narrow focus on technical criteria – validity and reliability – also worked against good assessment. For too long, reliability meant that examinations composed of a small number of complex problems were devaluated in favor of tests made up of many short items. Students were asked to perform large numbers of smaller tasks, each eliciting information on one facet of their understanding, rather than to engage in complex problem solving or modelling, the mathematics that is most important. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL,1993, p. 4).*

Nesse ponto, cabe mencionar o **critério de validade** da avaliação, o qual deve abranger bem mais do que o teste em si ou o mero aparato técnico para gerar as medidas. Autores como Messick, Wiliam e Koretz ampliam o escopo desse conceito, enfatizando a validade das inferências derivadas das medidas. De acordo com Messick (1989), por exemplo: "*Validity is an integrated evaluative judgement of the degree to which empirical evidence and theoretical rationales support the adequacy and appropriateness of interpretations and actions based on test scores or other modes of assessment*".

As recomendações em *Measuring what counts* estão em consonância com esse critério ampliado, quando enfatizam que a validade das avaliações depende do já aludido alinhamento a um currículo de elevadas expectativas e à instrução exigente, garantindo equilíbrio entre os aspectos pedagógicos e aos critérios de rigor das medidas. De fato, os autores do relatório afirmam que:

> *Today we recognize that students must learn to reason, create models, prove theorems, and argue points of view. (...) You cannot get at this kind of deep understanding and use of Mathematics by examining little pieces of learning. Assessments that are appropriately rich in breadth and depth provide opportunities for students to demonstrate their deep mathematical understanding.* (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993, p. 5).

Assim como currículos reduzidos a listas de tópicos isolados, considerados "prioritários", condicionam avaliações baseadas em habilidades pontuais e estanques, testes padronizados com ênfase em itens de múltipla escolha **de baixa complexidade**, que pretendem mobilizar habilidades isoladamente, reforçam uma prática curricular que não trabalha as conexões entre os conceitos matemáticos e seus diferentes significados e aplicações.

Ainda de acordo com o trabalho de Bass e colaboradores (1993), um dos princípios norteadores de uma avaliação em Matemática é o **princípio do conteúdo**, segundo o qual os testes devem enfatizar a Matemática considerada relevante por matemáticos e educadores, tanto na estrutura interna da área quanto no escopo de suas aplicações. Essa definição de relevância é, certamente, uma atribuição do currículo. Isso expressa a necessidade de que currículo e avaliação digam respeito à Matemática tal como praticada por matemáticos e cientistas ao desenvolverem conceitos, proporem conjecturas, deduzirem teoremas, elaborarem técnicas e aplicarem métodos que ampliam as fronteiras da linguagem e o escopo vastíssimo de suas aplicações em, virtualmente, todas as ciências e tecnologias.

Grandes ideias matemáticas, estruturais em áreas como Economia, Computação e Ciência de Dados, para mencionar algumas especialmente influentes em nosso cotidiano, podem deixar de ser prenunciadas no currículo básico quando temas essenciais da composição matemática ficam em segundo plano. A visão sistêmica das ideias essenciais pode ser desfocada em favor de uma abordagem que enfatiza tópicos ou procedimentos isolados, separados do contexto dos problemas que motivaram seu desenvolvimento orgânico. Em particular, a tônica na priorização de conhecimentos e habilidades traz o risco de promover uma visão compartimentalizada da Matemática, mutilando, precisamente, as conexões internas que tanto sustentam sua estrutura lógica quanto sua aquisição cognitiva.

Outro fator que distorce a percepção da real estrutura interna da linguagem matemática é o entendimento superficial da ideia de contextualização, com respostas simplistas à necessidade natural de aproximar a Matemática escolar de contextos cotidianos e aplicações práticas. Contextualizar não significa deixar de cultivar o pensamento matemático em si mesmo, juntamente com as faculdades de abstração, generalização, indução, dedução e outras categorias que definem sua especificidade. Essas são, na verdade, algumas das características da Matemática que a tornam inexplicavelmente fecunda em aplicações aos mais diversos setores da vida cotidiana e do conhecimento científico: é exatamente adentrando nas camadas mais profundas da linguagem matemática que os alunos têm acesso ao potencial da área em descrever e explicar fenômenos na natureza e na sociedade.

Portanto, o currículo e a avaliação, se baseados em priorizações arbitrárias ou em pretensas contextualizações práticas, restritas a situações forçadamente cotidianas, acabam por vedar aos estudantes o acesso a uma ferramenta de transformação de suas vidas. Além de garantir a passagem, de uma geração a outra, do conhecimento matemático adquirido e em permanente expansão, a aquisição da linguagem e dos métodos da Matemática é necessária para garantir acesso à cidadania e ao mundo do trabalho, por serem pervasivos em todas as esferas da vida, do orçamento das famílias à economia das nações, passando pela "destruição criativa" das novas tecnologias de informação e de comunicação.

A preocupação, aqui, por óbvio, não é de que o currículo escolar contemple, necessariamente, teorias e métodos matemáticos formais e refinados, mas que garanta bases conceituais, desenvolva habilidades e promova atitudes que preparem os estudantes para sua imersão criativa e crítica como cidadãos e como profissionais, o que exige, a cada dia, o domínio de categorias do pensamento abstrato, relacional, e a leitura profunda de dados e informações que são próprios da Matemática. Essas facetas da atividade matemática são, certamente, fundamentais para o desenvolvimento, nos aprendizes, das chamadas competências do século 21, dentre as quais mencionamos o pensamento crítico e criativo, a comunicabilidade e o pensamento estratégico na resolução de problemas.

Por outro lado, essas competências não são *skills* em si mesmos, ou seja, não podem ser desenvolvidas de modo genérico, fora de um dado domínio de conhecimento, como enfatizado por Wiliam:

> *These twenty-first century skills should be included in our standards. But the fact that these skills do not transfer easily from one context to another does have implications for our curriculum. Each of the twenty-first-century skills has to be taught in each subject. (...) Do our standards for math require students to communicate about mathematics, to work effectively in teams on math problems, to be creative in mathematics, to think critically when doing math, and to solve problems? (...) The twenty-first-century skills provide a way of looking at our standards, to ensure their breadth. They are not, however, skills that can be learned in one subject and applied to another. (WILIAM, 2018, p. 125).*

Christodoulou (2017), fazendo menção aos famosos experimentos de Simon sobre as habilidades de enxadristas, noviços ou *experts*, argumenta que "*one of the reasons why skill does not transfer in this way is because it is domain specific. Complex skills depend on very specific mental models, not generic ones which can be applied to very different areas*". Esses modelos, internalizados na memória de longo prazo, resultam de prática deliberada, não necessariamente dirigida ao desenvolvimento dos *skills* complexos em si, mas exercitando tarefas muito mais específicas, relacionadas ao domínio de conhecimento, que promovem, conjuntamente, os conhecimentos e habilidades necessários para as competências mais complexas. Nessa mesma direção, Willingham (2012, p. 48) pondera que: "*Thinking critically requires background knowledge. Critical thinking is not a set of procedures that can be practiced and perfected while divorced from background knowledge*".

O autor observa, ainda, que a transferência de *skills* de uma situação para outra é mais fácil entre *experts* do que entre noviços, uma vez que aqueles conseguem ignorar detalhes irrelevantes, produzir soluções com razoabilidade e transferir seu conhecimento para domínios similares. *Experts* dispõem de representações de problemas e de situações em suas memórias de longo prazo, desenvolvidas com a prática. **Professores proficientes** comunicam, no processo de instrução, algumas dessas representações, o que torna ainda mais central seu papel na condução das tarefas apresentadas aos alunos.

Portanto, a relevância de um núcleo curricular para a consolidação do aprendizado é ressaltada por Willingham:

> *Knowledge comes into play mainly because if we want our students to learn how to think critically, they must have something to think about. It's true that knowledge gives students something to think about, but a reading of the research literature from cognitive science shows that knowledge does much more than just help students hone their thinking skills: It actually makes learning easier. Knowledge is not only cumulative, it grows exponentially. Those with a rich base of factual knowledge find it easier to learn more—the rich get richer. In addition, factual knowledge enhances cognitive processes like problem solving and reasoning. The richer the knowledge base, the more smoothly and effectively these cognitive processes—the very ones that teachers target—operate. So, the more knowledge students accumulate, the smarter they become.* (WILLINGHAM, 2006).

A explicitação dos objetivos curriculares é apontada por Hirsch como elemento de garantia da aprendizagem, que o autor assimila à aquisição de um capital intelectual como direito civil, com repercussões sobre a equidade educacional. Em vários escritos, esse autor expressa a importância de um repertório básico para o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

> *Relevant background knowledge can be conceived as a stock of potential analogies that enable new ideas to be assimilated. Experts in any field learn new things faster than novices do, because their rich, highly accessible background knowledge gives them a greater variety of means for capturing the new ideas. This enabling function of relevant prior knowledge is essential at every stage of learning.* (HIRSCH, 1996, p. 23).

A referência de Hirsch a um "conhecimento altamente acessível" coaduna com os achados da Psicologia Cognitiva sobre a constituição de *chunks* na memória de longo prazo, criados pela prática persistente, e a formação de estruturas complexas de conexões entre conhecimentos e habilidades adquiridos pelo esforço de aprendizagem, conforme discutimos na sequência.

Concluímos que os objetivos de aprendizagem no currículo básico de Matemática, que nortearão o desenho de avaliações na área, devem considerar a aquisição, juntamente com usos e significados, dos conhecimentos matemáticos básicos, articulados entre si e estruturados ao longo de grandes eixos espirais de conceitos, fatos, representações, métodos, teoremas e técnicas. Além disso, esse repertório deve ser mobilizado, ampliado e reorganizado no trabalho com tarefas significativas, que indiquem marcos relevantes de aprendizagem. Esses percursos curriculares, ilustrados pelas tarefas executadas ao longo deles, incidem no desenvolvimento gradual das competências complexas associadas a processos cognitivos de ordem superior.

Ressaltamos que a análise de domínio considera tanto os elementos fundamentais do repertório de conhecimentos e habilidades matemáticos quanto as expectativas de aprendizagem, entre os quais está a constituição, nos estudantes, das competências ditas complexas.

PROCESSOS COGNITIVOS E HABILIDADES MATEMÁTICAS

Os próprios matemáticos observaram, *avant la lettre*, antecipando as descobertas da Psicologia Cognitiva, como a resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento criativo em Matemática dependem fortemente da aquisição e organização de conhecimentos prévios.

Além de óbvias contribuições para definir os conteúdos relevantes que figuram no domínio de conhecimento, as reflexões dos matemáticos sobre seu próprio ofício trazem *insights* fecundos para tentar descrever os **processos cognitivos** que podem ser conduzidos na mente em ação diante de problemas em Matemática ou em outros domínios, e que também possam ser transpostos, por um esforço de modelagem, para a linguagem matemática.

A plasticidade e o poderio da Matemática, em suas aplicações a diferentes campos da ciência e da vida em sociedade, se deve em parte à singular combinação, apontada por Henri Poincaré (1952) em *Hipótese e Intuição*, de dois elementos estruturais do pensamento matemático: o aspecto lógico-dedutivo, que torna a Matemática uma construção encadeada de conceitos e teoremas – algo que retomaremos quando explorarmos a análise do domínio da Matemática Básica –; e o papel da intuição e da descoberta associadas aos processos cognitivos deflagrados na investigação das estruturas matemáticas.

A análise de Poincaré sobre a descoberta em Matemática foi ainda mais aprofundada por Jacques Hadamard em seu clássico livro *Essai* *sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique* (1945), em que descreve o processo de descoberta matemática, em suas etapas iniciais, a partir de uma combinação de ideias, inicialmente ao acaso, em um nível não inteiramente consciente, seguida da seleção das combinações mais promissoras que vêm à mente consciente. Esse mecanismo de seleção, descrito por Hadamard, parece envolver mecanismos emocionais (também descritos por poetas como Paul Valery) deflagrados por um senso estético.

Hadamard prossegue em seu estudo da descoberta matemática mostrando como esse trabalho, com processos conscientes e subconscientes, requer um esforço prévio de **preparação** consciente. As combinações, aparentemente randômicas, de ideias no nível subconsciente são efeito de uma mobilização gerada pelo esforço consciente de resolver o problema: a metáfora usada por Poincaré e retomada por Hadamard é de que esses esforços disparam projéteis, em direções deliberadamente pensadas, para impulsionar esse entrechocar de ideias. Não se trata de disparos a esmo, mas de tentativas de um caçador bem treinado: o alvo, por ser difuso, não possibilita um único tiro, como disparado por um franco-atirador, mas enviar bólidos em direções que sejam familiares e potencialmente úteis: "*(...) as in a kind of lottery, that disorder can be highly valuable, because the few meetings which are useful, being of an exceptional nature and between seemingly very remote ideas, will probably be the most important ones*". (HADAMARD, 1954).

Essa descrição por meio de metáforas antecipa a linguagem da Psicologia Cognitiva a respeito da memória de trabalho na busca ativa por *chunks* na memória de longo prazo, evocando os conhecimentos e habilidades que possam ser mobilizados na tarefa que ocupa a mente consciente. Hadamard (1954), citando Souriau ("*in order to invent, one must think aside*"), adverte sobre o equilíbrio entre uma atenção muito difusa no trabalho de preparação e, no outro extremo, um foco muito estreito, limitando em demasiado o espaço de busca por conceitos, técnicas e fatos.

Todas essas considerações remetem para a necessidade de um repertório sem o qual o espaço de busca na memória de longo prazo é virtualmente esvaziado de elementos. Como temos insistido, resolver problemas e desenvolver as demais competências complexas exigem a estruturação desse repertório. De fato, matemáticos como Poincaré e Hadamard anteciparam, de modo intuitivo, algumas descobertas da Psicologia Cognitiva, como o fato de que a resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento criativo em Matemática dependem fortemente de um *background* de conhecimentos prévios, organizado na memória de longo prazo na forma de *chunks*, *schemata* e representações.

Esses poderosos *insights* levam, naturalmente, à questão de como aplicá-los ao ensino de Matemática nas escolas. O nome emblemático, a esse propósito, é o de Polya, matemático húngaro e professor da Universidade de Stanford (EUA) nos anos 1940, cujas contribuições à heurística em Matemática foram coligidas em livros universalmente utilizados como o famoso *How to solve it?* (1945). No livro *Mathematics and Plausible Reasoning* (1954), Polya descreve processos cognitivos na resolução de problemas (matemáticos, em princípio), articulados no diagrama a seguir.

No centro desse ciclo, a **previsão** pode ser entendida como um esboço, inicialmente difuso e, progressivamente, com contornos mais nítidos, a cada avanço aproximativo na estratégia de resolução do problema. Essas aproximações sucessivas, segundo Polya (1954, vol. 2, p. 65), envolvem delimitar o espaço de busca de soluções. Em suas próprias palavras: "*We do not look for a solution just anywhere in the world, but for a solution within a certain limited region of search*".

A frase remonta à descrição, por Hadamard, do processo de descoberta matemática: prospectar ideias mantendo um *range* nem demasiado estreito nem muito difuso. De acordo com Polya, um importante tipo de decisão é, eventualmente, o de ampliar o espaço de busca, evitando ficar preso a tentativas demasiado limitadas em uma direção que pode ser contraproducente e impede de ver conexões, relações, analogias e padrões que podem ser decisivas para avançar na resolução. Polya afirma, com respeito ao esboço (*outline*) inicial com que iniciamos a resolução do problema, que:

> *We may try various solutions, but they are all alike; they are all within that preconceived, but perhaps not consciously preconceived, outline. When none of the solutions tried fits the problem, we feel lost, nothing else comes to mind; we cannot step outside that preconceived outline.* (POLYA, 1954).

Essa intuição condiz com a teoria cognitiva recente: o espaço de busca com a qual começamos a resolver o problema e em que vamos prospectando repertório pertinente a ele pode ser visto como uma metáfora dos *chunks* na memória de longo prazo. A inexistência de conhecimentos prévios, devidamente estruturados, juntamente com usos e significados atribuídos a eles pela prática, acarreta essa impressão, no aprendiz, de ficar paralisado diante do problema. De acordo com Silver:

> *A popular view of the problem-solving process holds that solvers construct an initial mental representation of the problem while reading the problem or shortly afterwards. This representation then changes as it interacts with further information from the task environment or with knowledge retrieved from long term memory, resulting in the construction of a more elaborated representation of the problem.* (SILVER, 1987, p. 43).

O processo de **mobilização** envolve resgatar conceitos, teoremas, estruturas, relações e soluções dadas a problemas afins, que são recuperados do conhecimento previamente adquirido armazenado e estruturado na memória de longo prazo. Segundo Polya (1954, vol. 2, p. 66): "*Where do all these materials, auxiliary elements, theorems, etc. come from? The problem solver has collected them; he had to extract them from his memory and* ***purposefully*** *connect them with his problem*". (grifo nosso).

Esse arranjo **ativo** e intencional dos conhecimentos mobilizados de modo que passem a ser insumos relevantes para a resolução do problema é o que Polya denomina de **organização**: trata-se de agrupar esses conhecimentos e adaptá-los ao problema, estabelecendo conexões entre seus elementos e a informação recuperada da memória. A organização produz representações e esquemas dos conhecimentos e procedimentos selecionados como relevantes para o problema. Assim, as informações do problema e os elementos provenientes da memória de longo prazo são organizadas em um todo sintético, a que Polya se refere como *Gestalt* ou *vue d'ensemble*. Nas próprias palavras do autor (POLYA, 1954, vol. 2, p. 69): "*Mobilization is extracting relevants items from our memory, organization is connecting such items purposefully*.

Como vimos, a Teoria da Carga Cognitiva diz que trabalhar diretamente o *skill* de resolver problemas não é efetivo, o que também suscita questionamentos sobre o "aprender a aprender": o esforço de buscar ativamente elementos que ainda não estejam disponíveis na memória de longo prazo, ao mesmo tempo que a atenção consciente está focada nos dados e no contexto do problema, ocupa inteiramente a capacidade limitada da memória de trabalho. É algo análogo a manter a atenção a quem enuncia o problema em sala de aula ao mesmo tempo que se dedica a entender os conceitos. No contexto da compreensão leitora, trata-se de uma carga análoga a de compreender um texto sem repertório e sem conhecimentos prévios ou situacionais.

Portanto, a mobilização e organização são efetivos quando envolvem o *retrieval* de conhecimentos já estruturados em *chunks* na memória de longo prazo. Além disso, o processo ativo de organização é mais bem-sucedido na medida em que quem resolve o problema é familiarizado com arranjos e rearranjos do repertório mobilizado na resolução de problemas com algum grau de similaridade ao atual. De acordo com Pellegrino:

> *What distinguishes high from low performers is not simply general mental abilities or general problem-solving strategies. High performers have acquired extensive stores of knowledge and skill in a particular domain. But perhaps most significant, their minds have organized this knowledge in ways that a make it highly retrievable and useful. Because their knowledge has*

> *been encoded in a way that closely links it with the contexts and conditions for its use, high achievers do not have to search through the vast repertoire of everything they know when confronted with a task or problem. Instead, they can readily activate and retrieve the subset of their knowledge that is relevant to the task at hand.* (PELLEGRINO, 2010, p. 7).

Mobilização e organização formam, na visão de Polya, um par complementar e indissociável de atividades no quadrilátero, enquanto o **isolamento** e a **combinação** determinam o segundo par de atividades em direções opostas e complementares. Isolar é realçar elementos do problema que podem ser relevantes para sua resolução. No processo de isolamento, segundo Polya (1954), "*we concentrate on a certain detail, we focus on it, we emphasize it, we single it out, we distinguish it from its surroundings, in one word, we isolate it. Then the spotlight shifts to another detail, we isolate still another detail, and so on*".

O exame desses elementos, isoladamente, pode motivar que o aprendiz os **combine** de outra forma, alterando, com isso, sua configuração global na chamada *Gestalt*. De acordo com Polya:

> *The combined effect of our reassessment of certain details may result in a new mental picture of the whole situation, in a new, more harmonious combination of all the details. (...) Isolation leads to decomposing the whole into its parts, a subsequent combination reassembles the parts into a more or less different whole.* (POLYA, 1954).

Por exemplo, ao examinar uma longa equação algébrica, o aluno pode perceber termos passíveis de serem agrupados de modo que a expressão seja fatorada na forma de produto, o que abre caminho para usar fatos sobre raízes de equações lineares ou quadráticas, entre outras.

Os processos que conectam os quatro vértices, quando sequenciados no sentido horário do diagrama, correspondem a **reconhecer**, entre os conhecimentos mobilizados, aqueles que devem ser enfatizados, ou seja, isolados; uma vez distinguidos esses elementos do repertório, passamos ao processo ativo de **reagrupar** esses conhecimentos em uma organização adequada aos termos do problema. Esse reagrupamento/reorganização tanto altera a compreensão do problema quanto dá maior nitidez ao esboço inicial de solução. Logo, a *Gestalt* formada pelas representações do conteúdo e pela modelagem do problema, nesse estágio, pode ser **suplementada** com a adição de novos conceitos e fatos e de novos detalhes ao desenho inicial da solução esboçada. Essa combinação de novos elementos à tentativa de resolução do problema, com uma nova configuração de elementos mobilizados, pode ser **relembrada**, para uso na sequência ou diante de outros problemas similares.

Para ilustrar esses pontos, consideremos o exemplo hipotético de um aluno que, diante de um problema geométrico, **reconhece** um triângulo em meio a uma figura, o qual lhe parece que pode ter um papel relevante na solução do problema. Ao reconhecer o triângulo, **relembra** ou traz à tona conhecimentos estruturados sobre desigualdades triangulares, relações entre medidas de lados e ângulos e procedimentos que tenha empregado em situações que julga similares à atual, **mobilizando** esses conhecimentos. Segundo Polya (1954), *"we establish contact with an extensive layer of our formerly acquired knowledge, some streak of which might be useful now"*. A fim de conectar esses conhecimentos (conceitos, fatos, técnicas, procedimentos) do problema em tela, é preciso **suplementar** os dados, adicionando a eles elementos que permitam usar os conhecimentos **isolados** que foram considerados relevantes.

Por exemplo, traçando linhas sobre figura já existente do triângulo de modo que fatos sobre medianas ou outras linhas notáveis possam ser usados no contexto do problema. Esses suplementos ou adições podem mudar a estratégia de solução esboçada inicialmente ao trazer novas informações ou possibilidades de ação e iluminar aspectos do problema que ainda não haviam sido observados. Outro processo é o de reagrupar ou reestruturar os elementos do problema (sejam os originais apenas ou também os que foram suplementados a esses): no exemplo, o aprendiz pode perceber que o triângulo inicialmente desenhado, por sua disposição na figura, tem simetria e, portanto, pode ser isósceles. Nesse caso, nada foi adicionado aos dados iniciais, exceto uma nova compreensão do que já estava posto, a qual aprofunda o entendimento da estrutura geométrica e sugere próximos passos na resolução. De acordo com Polya (1954), *"regrouping may involve a chance in emphasis. Elements and relations which were in the foreground may now surrender their privileged place and recede into the background"*, e vice-versa.

Ao analisarmos, no que segue, os referenciais de sistema de avaliação como o Pisa em Matemática, perceberemos o alinhamento de seus fundamentos aos avanços da Psicologia Cognitiva que resumimos esquematicamente. Por sua vez, esses achados endossam, como vimos, as descrições pormenorizadas que matemáticos criativos realizaram do próprio processo de aprendizado e de descoberta das estruturas matemáticas.

Neste ponto, remetemos o leitor aos textos de Schoenfeld (1985, 1992) e Tall (2014) para aprofundamento sobre o tema da resolução de problemas em conexão com a aprendizagem de Matemática. As limitações naturais de espaço em um relatório não nos permitem expor as contribuições importantes desses autores.

2. BASES DO MODELO DE AVALIAÇÃO

Nos anos 2000, um conjunto de painéis deu ampla divulgação à necessidade de alinhar os sistemas de avaliação aos avanços das Ciências Cognitivas. Em *Knowing what students know* (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2001), os autores situam dois problemas a serem considerados na concepção e implementação de um modelo de avaliação: primeiro, que a avaliação seja integrada ao currículo e à instrução, sendo esses três eixos orientados por pesquisa sobre ensino e aprendizagem nos domínios específicos de conteúdo; segundo, que o modelo de evidências a partir do qual são estabelecidas inferências sobre o desenvolvimento cognitivo e aprendizagem do estudante derive de um processo rigoroso e cuidadosamente estruturado, com pressupostos e conceitos precisos e explícitos, cientificamente lastreados em uma teoria da cognição e da aprendizagem. Reforçando essa constatacão, Pellegrino menciona que

> *The first issue is that assessment should never be the tail that wags the educational dog. Rather, assessment should be integrated with curriculum and instruction, with all three guided by theories and research on the nature of learning and knowing in academic content domains. A second fundamental issue is that we can never really know what a student knows. Thus, assessment is best conceptualized as a rigorous and carefully structured process of reasoning from evidence that should be driven by theories and data on student cognition and learning.* (PELLEGRINO, 2010).

A articulação entre os eixos do currículo, da avaliação e da instrução requer uma base teórica sobre os processos de ensino e aprendizagem, assentada em evidências da Psicologia Cognitiva, como enfatiza Pellegrino na seguinte passagem.

> *Alignment among curriculum, instruction, and assessment could be better achieved if all three are derived from a scientifically credible and shared knowledge base about cognition and learning in subject matter domains. The model of learning would provide the central bonding principle, serving as a nucleus around which the three functions would revolve.* (PELLEGRINO, 2010).

Essa base cognitiva é um dos pilares para o **modelo de evidências**, ou seja, para todo a complexa cadeia de estabelecer inferências válidas sobre o aprendizado a partir das observações indiretas dos processos cognitivos na realização de tarefas. O desenho dessas tarefas, ancorado tanto nas premissas do modelo cognitivo quanto em um detalhado entendimento da estrutura do domínio de conhecimentos e habilidades avaliados, é elemento crucial na avaliação em si mesma e na sua integração à instrução. A decodificação dos sinais produzidos pelo trabalho dos estudantes com as tarefas em uma avaliação requer instrumentos analíticos precisos e robustos, que definam métricas de *shared meaning* ao mesmo tempo que produzam resultados pedagogicamente legíveis e cientificamente legítimos, os quais possam ser apropriados nas tomadas de decisão sobre o currículo e a prática docente.

Nesse nível da arquitetura do modelo de avaliação, temos, portanto, uma tríade articulada de componentes interdependentes: como vimos, o triângulo avaliativo, exposto por Pellegrino (2001, 2010), tem os vértices da cognição, da observação e da interpretação. Demasiada ênfase em um dos vértices desloca o centro de gravidade do triângulo, comprometendo a relevância pedagógica da avaliação e de seus resultados. O vértice cognitivo diz respeito, justamente, aos pressupostos sobre o aprendizado em um dado domínio do conhecimento, em termos das representações mentais; da constituição da memória de longo prazo; da dinâmica entre os *layers* da memória de trabalho e da memória de longo prazo; das estratégias de resolução de problemas, entre outros aspectos do modelo científico de cognição e de aprendizagem.

O vértice das observações contém as premissas e princípios sobre os tipos de situações ou tarefas aos quais os estudantes serão expostos de modo que os resultados do que dizem, fazem ou criam permitam gerar evidências, validadas pelo modelo cognitivo, sobre os conhecimentos e as habilidades de interesse, segundo a análise do domínio de conhecimento em que estão sendo avaliados. De acordo com Pellegrino:

> *The tasks to which students are asked to respond on an assessment are not arbitrary. They must be carefully designed to provide evidence that is linked to the cognitive model of learning and to support the kinds of inferences and decisions that will be made on the basis of the assessment results.* (PELLEGRINO, 2010, p. 7).

As respostas a tarefas elaboradas de acordo com o modelo geram evidências que, uma vez validadas, devem ser interpretadas com base nos princípios e premissas sobre o domínio de conhecimento e sobre os processos cognitivos mobilizados nessas tarefas. O vértice da interpretação estabelece de que modos as observações realizadas podem, efetivamente, sustentar inferências sobre conhecimentos e habilidades adquiridos pelos estudantes no domínio de conhecimento avaliado. A interpretação envolve, ainda, validar as tarefas propostas, permitindo julgar se, realmente, condizem com o modelo cognitivo adotado e com as especificações de conhecimentos e *skills* que pretendiam mobilizar.

Pellegrino (2010) enfatiza que os três vértices do triângulo devem estar em perfeita sincronia e ter, como centro de gravidade, teorias e dados sobre como os estudantes aprendem e sobre o que devem saber para que desenvolvam competências relevantes determinadas no currículo.

Entre os princípios da teoria da cognição e do aprendizado, Pellegrino (2010) coloca ênfase na aquisição de conhecimentos e habilidades por meio da prática deliberada em recuperar informações e executar procedimentos, fazendo menção à lei de potência, segundo a qual "*speed and accuracy of performing a simple or complex cognitive operation increase in a systematic non-linear fashion over successive attempts*". O autor (PELLEGRINO, 2010, p. 9) aponta também para o papel da devolutiva na instrução, à qual se refere como conhecimento dos resultados: "*(...) Individuals acquire knowledge much more rapidly and appropriately if they receive feedback about the correctness of what they have done. If incorrect, they need to know the nature of their mistake*".

Essas duas premissas condizem com o que expusemos nas seções anteriores e são consideradas adiante na discussão sobre aspectos da proficiência matemática como a compreensão conceitual, a fluência procedimental, a competência estratégica e o raciocínio adaptativo. Também em consonância com os pressupostos apontados por Pellegrino, destacamos, nas seções seguintes, o papel central que deve ser conferido aos desenhos da tarefa e da devolutiva para que a avaliação tenha, de fato, propósito e utilidade formativas.

Pellegrino (2010) enumera as características necessárias a um modelo cognitivo da aprendizagem que deve estar entre os fundamentos da avaliação em um dado domínio do conhecimento, delimitando quais tipos de tarefas permitem gerar evidências que validem inferências a partir dos resultados obtidos pelos aprendizes no trabalho com essas tarefas. Entre essas características, as que são mais extensamente discutidas neste relatório são:

a) basear-se em estudos empíricos de aprendizes no domínio de conhecimento de interesse;
b) identificar padrões que diferenciam desempenhos de noviços e de *experts* em tarefas nesse domínio;
c) apresentar progressões típicas de níveis de proficiência no domínio, desde os níveis esperados para noviços a níveis de competência e expertise, fixando marcos de desempenho ao longo da progressão;
d) descrever aspectos do que se conhece sobre como os estudantes pensam e aprendem a respeito do domínio do conhecimento: fundamentado em uma teoria de como as pessoas aprendem o assunto, o desenho de avaliação deve selecionar um recorte ou subconjunto do domínio sobre o qual se deseja produzir inferências;
e) prestar-se a ser usado em avaliações com diferentes granularidades e propósitos, desde diagnósticos de resolução bastante fina a resumos agregados, somativos e menos refinados em termos de granularidade.

A característica progressiva presente em b) e c), por exemplo, pode ser concretizada em termos de **trajetórias ou mapas de progressão**, que correspondem, no marco conceitual elaborado pelo Consortium for Policy Research in Education (CPRE), citado por Pellegrino, ao conceito de *learning progression*. De acordo com o relatório do CPRE (CORCORAN, 2009), uma trajetória de progressão deve ter os elementos a seguir.

a) Metas de aprendizagem ou de desempenho que indicam os pontos terminais de um progressão de aprendizagem, definidas por expectativas compartilhadas sobre o que significa competência no domínio de conhecimento, incluindo as condições necessárias para ingresso nos níveis seguintes de formação educacional.

b) Variáveis de progresso nas dimensões da compreensão conceitual e proficiência prática (e.g., fluência procedimental), desenvolvidas e monitoradas ao longo do tempo: essas variáveis abrangem os conceitos fundamentais no domínio do conhecimento e as práticas centrais para lidar com situações ou tarefas nesse domínio.

c) Níveis de progressão no alcance das metas de aprendizagem: esses níveis podem refletir estágios comuns ou níveis de integração característicos do desenvolvimento cognitivo no domínio de conhecimento, sendo etapas intermediárias que alicerçam conceitos, fatos e procedimentos estruturais do domínio.

d) Padrões de desempenho na execução de tarefas que aprendizes em um determinado nível de progressão devem ser capazes de realizar: esse padrões definem especificações para a elaboração de tarefas e, portanto, de avaliações nas quais os aprendizes devem demonstrar proficiência quanto ao uso de conhecimentos e habilidades no domínio.

e) Instrumentos de avaliação que geram medidas específicas para monitorar a aprendizagem e a proficiência dos estudantes ao longo da sua trajetória: os mapas de progressão devem incluir descrições de abordagens adequadas das avaliações, as quais também são úteis para validar as hipóteses subjacentes ao modelo de progressão.

Trajetórias ou mapas de progressão na aprendizagem em um dado domínio de conhecimento são construções baseadas em hipóteses que devem ser empiricamente validadas e assentadas nas Ciências Cognitivas e na análise do domínio. Pellegrino (2010) ressalta que essas trajetórias não se resumem a um sequenciamento de tópicos, juntamente com suas descrições, baseado apenas nas relações de dependência lógica internas ao domínio. Da mesma forma, não se baseiam unicamente na visão pessoal de especialistas ou professores sobre como o domínio é organizado. Os pressupostos teóricos devem ser hipóteses, fundamentadas cientificamente e verificáveis, sobre como os aprendizes entendem e utilizam conceitos e procedimentos de forma gradualmente mais refinada com o tempo, passando de noviços a *experts* em termos de competências que denotam plena proficiência no domínio de conhecimento.

> *These hypotheses describe the pathways students are likely to follow to the mastery of core concepts. They are based on research about how students' learning actually progresses. The hypothesized learning trajectories are tested empirically to ensure their construct validity (does the hypothesized sequence describe a path most students actually experience given appropriate instruction?) and ultimately to assess their consequential validity (does instruction based on the learning progression pro-*

> *duce better results for most students?). The reliance on empirical evidence differentiates learning trajectories from traditional topical scope and sequence specification*. (PELLEGRINO, 2010, p. 16).

A progressão em uma trajetória pode ser monitorada (e mensurada) utilizando-se as variáveis e os níveis que refletem graus de compreensão conceitual, fluência procedimental e de raciocínio matemático relativos a entendimento, uso e aplicação de conceitos, fatos e procedimentos matemáticos ao longo da formação do estudante. As diversas variáveis de progressão não são independentes: suas relações de dependência refletem a estrutura interna do domínio e a forma como a trajetória é percorrida no processo de instrução e de acordo com as prescrições curriculares. Por exemplo, níveis de progressão observados por variáveis que digam respeito à aquisição da linguagem algébrica dependerão da forma como propriedades algébricas presentes nas operações aritméticas sejam consideradas, no currículo ou na instrução, como conhecimentos prévios. Em suma, "*there may be multiple possible paths and progress is not necessarily linear. It may be more like ecological succession. A learning progression proposes and clarifies one or more possible paths and does not represent a complete list of all possible paths*". (PELLEGRINO, 2010, p. 12).

Nossas principais contribuições neste estudo dizem respeito aos elementos b), c) e d) enumerados por Pellegrino, relativos à especificação de padrões de desempenho e a trajetórias de progressão da proficiência em um dado domínio de conhecimento, não necessariamente lineares nem tampouco unicamente definidas. No que concerne a trajetórias ou mapas de progressão, apresentamos, nas seções seguintes, alguns elementos de uma proposta de organização do domínio de conhecimentos da Matemática Básica, abrangendo metas de aprendizagem, características da proficiência matemática e mapas de progressão derivados da sistematização lógico-cognitiva de conhecimentos e habilidades matemáticos na chamada Matriz dos Saberes.

A validação empírica dessa proposta é um objetivo de longo prazo em termos de pesquisa e desenvolvimento e extrapola o escopo mais limitado do atual projeto e deste relatório. De todo modo, pontuamos alguns esforços iniciais realizados com o uso de modelos diagnóstico-cognitivos para a produção e interpretação de evidências a partir dos resultados de testes conduzidos em ambientes escolares em redes públicas de ensino básico. Um dos objetivos almejados, em desdobramentos do presente projeto, é o de trazer verificações empíricas para alguns dos pressupostos sobre o encadeamento das habilidades componentes dos saberes na constituição de proficiência no domínio de conhecimento da Matemática Básica.

ALGUMAS LINHAS GERAIS DO *EVIDENCE-CENTERED DESIGN*

O *evidence-centered design*, proposto por Mislevy e colaboradores (2003), define referenciais conceituais e metodológicos que integram componentes e etapas de um sistema de avaliação, assimilando, com isso, as inovações trazidas pelos avanços das Ciências

Cognitivas, de um lado, e pela expansão do poderio computacional à disposição da pesquisa nas áreas da cognição e da avaliação, de outro. O objetivo, comum a todos os *frameworks* de avaliação, é o de estabelecer inferências sobre o que estudantes sabem ou podem fazer, a partir de "peças de evidências" – em geral, observações de atitudes ou respostas em testes.

Como modelo conceitual, o ECD estabelece conexões entre o propósito da avaliação, as concepções sobre proficiência no domínio do conhecimento, a validação das inferências com base nas evidências (*evidentiary reasoning*), o desenho dos instrumentos avaliativos e os processos operacionais da avaliação.

Em particular, as afirmações ou inferências feitas sobre a proficiência dos estudantes devem ser amparadas em fundamentos ou garantias conceituais e metodológicas de que: a) elementos relevantes dessa proficiência, de acordo com o modelo cognitivo e a análise e modelagem do domínio do conhecimento, sejam efetivamente mobilizados nas tarefas apresentadas nos instrumentos avaliativos; b) haja uma cadeia de raciocínio que parte das evidências produzidas pela observação dos resultados dos alunos na execução das tarefas até sua interpretação, com a produção das inferências sobre as competências avaliadas. Portanto, o ECD integra os vértices do triângulo avaliativo formulado por Pellegrino e colaboradores (2001).

Mesmo considerando expectativas de conhecimentos e habilidades significativos e complexos (validados pelos especialistas da área de conhecimento, em particular) e utilizando instrumentos mais elaborados possibilitados pelo desenvolvimento tecnológico, perdura a questão de estabelecer evidências válidas, lastreadas em uma modelagem estatística que leve em conta as premissas dos modelos cognitivos sobre a aquisição e a mobilização de conhecimentos na base de hipóteses do sistema.

> *One cannot simply construct "good tasks" in isolation, however, and hope that someone down the line will figure out "how to score it". One must design a complex assessment from the very start around the inferences one wants to make, the observations one needs to ground them, the situations that will evoke those observations, and the chain of reasoning that connects them.* (MISLEVY et al., 2003, p. 2).

Descrevemos, a seguir, alguns dos componentes estruturais de um modelo que segue os princípios gerais do ECD, a Estrutura Conceitual de Avaliação (do inglês *Conceptual Assessment Framework*, ou CAF). Enfatizamos os elementos desse *framework* que são mais diretamente relacionados com: i) os modelos cognitivos de como os estudantes adquirem, estruturam e mobilizam conhecimentos em atividades significativas no domínio avaliado; ii) os modelos de tarefas que correspondem a atividades relevantes no domínio e que permitam mobilizar os conhecimentos, habilidades e atitudes indicadores de proficiência nesse domínio; e iii) o modelo de evidências, geradas a partir das observações realizadas nos testes, com critérios de validade bem definidos para os propósitos da avaliação, em aderência aos pontos i) e ii). Nas palavras de Mislevy e colaboradores:

> *All of the characteristics of tasks have been selected to provide*

the opportunity to get evidence about the targeted knowledge and skill; all of the scoring procedures are designed to capture, in terms of observable variables, the features of student work that are relevant as evidence to that end; and the characteristics of students reflected as student model variables summarize evidence about the relevant knowledge and skills from a perspective and at a grain size that suits the purpose of the assessment. (MISLEVY et al., 2003, p. 5).

O **modelo de estudante**, ou seja, dos processos cognitivos, conhecimentos e habilidades que devem ser mobilizados na execução das tarefas, é descrito por variáveis não diretamente observáveis e que precisam ser estimadas a partir da observação de suas respostas a essas tarefas. Na Teoria da Resposta ao Item (TRI), por exemplo, modela-se uma distribuição de probabilidade dessa variável – o traço latente, descrito como um número real em uma escala ordinal (no caso, unidimensional) –, a ser estimada uma vez conhecidas as respostas/comportamentos do estudante quando exposto a itens com parâmetros previamente conhecidos. A interpretação do traço latente, ou proficiência do aluno, é dada em termos da proporção de itens que o estudante responderia corretamente, caso tivesse um determinado nível de proficiência.

Em modelos diagnóstico-cognitivos, como DINA ou DINO, o modelo fixa uma lista de processos/habilidades e define, para cada item, quais desses atributos cognitivos é mobilizado para respondê-lo. Para cada estudante, há parâmetros de "*guessing*" e "*slip*", que são estimados, uma vez conhecidas as respostas/comportamentos do estudante frente aos itens do teste.

Portanto, o modelo probabilístico de proficiência, seja descrito pelo traço latente unidimensional, seja pela classe latente (que corresponde às diferentes configurações de domínio/não domínio dos atributos), requer que essas variáveis sejam estimadas (ou atualizadas, caso pensemos em iterações para aproximar sucessivamente esse valor). Para tanto, é preciso definir-se um **modelo de evidência**, que consiste em duas partes, descritas a seguir.

- **Regras de evidência:** de que forma podemos extrair informações (mais precisamente, codificar, elaborar sínteses, registrar variáveis, entre outros processos) dos resultados do trabalho dos estudantes com as tarefas/itens apresentados? Esses resultados – que podem ter as mais diversas formas –, uma vez observados, devem ser codificados em dados sobre as variáveis observáveis (por exemplo, escores, créditos parciais, entre outras) do modelo de estudante. Esses valores podem, em uma pré-testagem, tanto fornecer parâmetros para os itens, quanto, se já conhecidos esses parâmetros da tarefa, permitir estimar as variáveis latentes, não diretamente observáveis, como proficiência ou domínio de atributos cognitivos.

- **Modelo de medida:** uma vez que as regras de evidência definiram como gerar informações a partir dos dados de respostas/comportamentos observados na execução das tarefas/itens/atividades do teste, aplica-se o modelo de medida, ou seja, um modelo psicométrico que conecta as variáveis observáveis (obtidas dos dados a partir das regras de evidência) e o modelo de estudante (descrito como um traço latente, na TRI, ou um conjunto de atributos cognitivos, nos modelos diagnóstico-cognitivos).

No modelo de mensuração, portanto, um estudante j é modelado em termos de uma variável (uni ou multidimensional) θ_j, que identifica aspectos cognitivos, tais como a proficiência no uso de conhecimentos e habilidades ou a capacidade de mobilização de processos cognitivos de diferentes graus de complexidade, entre outras características que são latentes e só podem ser indiretamente observadas a partir dos resultados do trabalho com a tarefa ou situação i propostas ao estudante em uma avaliação. Esses resultados observáveis são os dados X_{ij} (desempenho do estudante j na tarefa i), relevantes para o modelo. Tipicamente, lidamos com modelos probabilísticos (ou seja, não determinísticos), cujo principal ingrediente é a modelagem matemática da distribuição de probabilidades de possíveis resultados, uma vez conhecida a proficiência do estudante:

$$p(X_{ij}|\theta_j)$$

As atualizações das crenças sobre a proficiência do estudante (expressas matematicamente ao supormos que a variável θ é conhecida) ocorrem, claro, com a observação dos produtos do trabalho efetuados por ele nas tarefas e a consequente codificação desses produtos em termos de variáveis que possam alimentar o modelo quantitativo que descreve sua proficiência. Em termos matemáticos, essas atualizações usam a chamada Regra de Bayes,

$$p(\theta|X) \propto p(X|\theta)p(\theta),$$

em que o símbolo $\propto$ significa igualdade a menos de um fator constante, ou seja, proporcionalidade. O modelo de proficiência $p(\theta)$ adotado antes da informação sobre os resultados X (que permitem comparar as proporções observadas de resultados com a predição teórica $p(X|\theta)$) é atualizado para o modelo $p(\theta|X)$, o termo do lado esquerdo da identidade acima. Essa formulação matemática formaliza a ideia de que o modelo de estudante p é a ponte entre a evidência acumulada (representada por X) e as afirmações sobre o desempenho do estudante, derivadas da interpretação de θ.

Essa potente regra é a base do modelo de rede bayesiana proposto por Mislevy e colaboradores (1996, 2015) e que, combinado com a nossa proposição de análise do domínio via Matriz dos Saberes, pretendemos aplicar em desenvolvimentos futuros deste projeto. A propósito de redes bayesianas em avaliações, também mencionamos, para os leitores interessados, a exposição bastante esclarecedora feita por Pellegrino e colaboradores (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2001).

Em toda essa dinâmica, a **tarefa** é o estímulo que gera variáveis observáveis e mobiliza os aspectos cognitivos latentes que se pretende estimar, o que torna óbvio o papel central de uma engenharia muito bem executada de tarefas/itens que, de um lado, produzam evidências válidas e, de outro, realmente requisitem os conhecimentos, habilidades e atitudes sobre as quais se espera obter informações e elaborar inferências.

As tarefas e evidências geradas com base na síntese dos resultados observados devem permitir inferências válidas, a partir de aspectos do que os alunos criam, fazem ou dizem nas situações do teste, sobre a real mobilização e transferência dos conhecimentos, habilidades e atitudes em contextos significativos que envolvam o domínio de conhecimentos e competências de interesse reproduzidos nos testes.

> *In assessment, the data are the particular things students say, do, or create in a handful of particular situations, such as essays, diagrams, marks on answer sheets, oral presentations, and utterances in conversations. Usually our interest lays not so much in these particulars, but in the clues they hold about what students know or can do as cast in more general terms. These are the claims we'd like to be able to make about students, on the basis of observations in an assessment setting.* (MISLEVY; STEINBERG; ALMOND, 2003, p. 11).

O ECD é baseado no conceito de *evidentiary reasoning*, isto é, *claims* ou inferências sobre a proficiência do estudante na mobilização de dados conhecimentos ou habilidades devem ser estabelecidas segundo uma cadeia de argumentos explícitos e sujeitos à verificação, a partir da observação das respostas às tarefas. Esse argumento indutivo, do particular para o geral, é baseado na inversão de premissa e conclusão em um argumento lógico-dedutivo, elaborado na direção do geral para o particular. Esse argumento lógico, considerado como um fundamento ou garantia (*warrant*, no original) da inferência indutiva, é baseado em um suporte (ou *backing*, no original), teórico ou empírico. Explicações alternativas para o que é observado nos dados devem ser consideradas a fim de realizarmos uma análise crítica da inferência dos dados para os *claims*: "*Thus, assessment is best conceptualized as a rigorous and carefully structured process of reasoning from evidence that should be driven by theories and data on student cognition and learning.*" (PELLEGRINO, 2010, p. 3).

Como exemplo, apresentamos no quadro a seguir uma discussão esquemática sobre resultados de alunos no trabalho com a seguinte tarefa, apresentada em um teste aplicado a turmas de terceira série do Ensino Médio em escolas profissionalizantes da rede pública do estado do Ceará.

QUADRO 1

Seja ℓ o segmento de reta dado pelo gráfico da função

$$f(x) = \frac{1}{2}x,$$

em que $0 \leq x \leq 1$. A rotação de em torno do eixo horizontal no plano cartesiano gera um cone circular **C**. Já a rotação de ℓ em torno do eixo vertical gera um cone circular **C′**.

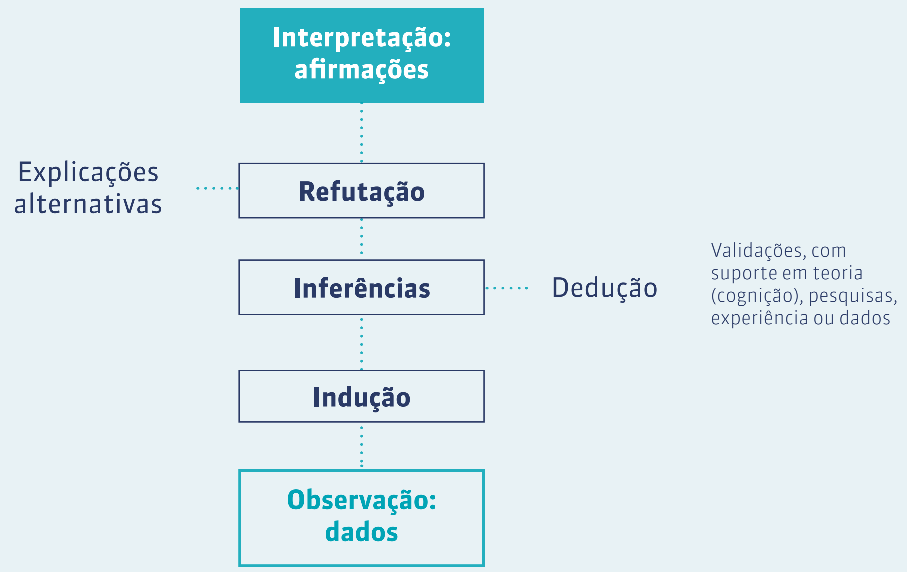
É correto afirmar que

A) os volumes de **C** e **C′** são iguais.
B) o volume de **C** é o dobro do volume de **C′**.
C) o volume de **C** é a metade do volume de **C′**.
D) o volume de C é um quarto do volume de **C′**.

Justifique sua resposta.

Vejamos exemplos de respostas dadas a essa questão e de como podemos considerá-las como dados em suporte a inferências sobre o domínio dos alunos sobre alguns conhecimentos e habilidades demandados na questão.

Para tanto, remetemos à representação, a seguir, de um diagrama de Toulmin, adaptado, para nossos propósitos, a partir da forma como é apresentado por Mislevy e colaboradores (MISLEVY; STEINBERG; ALMOND, 2003, p. 11; MISLEVY; RICONSCENTE, 2005, p. 11).



No extremo inferior do diagrama, estão os dados resultantes da avaliação, que podemos pensar como representando o vértice da **observação** no triângulo avaliativo de Pellegrino. O segmento ascendente corresponde ao raciocínio indutivo na forma de inferências que partem dos dados e culminam em afirmações ou conclusões (*claims*, no original) sobre o desempenho dos estudantes em relação às competências avaliadas. O extremo superior do diagrama, dos *claims* sobre os resultados de aprendizagem, pode ser entendido como o vértice da **interpretação** na linguagem do triângulo avaliativo. A indução ou inferência, que leva dos dados para sua interpretação, é apoiada por modelos teóricos (por exemplo, o modelo cognitivo, correspondente ao vértice **cognição**), experiências e dados prévios (por exemplo, pré-testes ou dados sobre desempenho em tarefas anteriores e estruturalmente similares) e outros fundamentos (*warrants*) que dão suporte a ela. Por exemplo, a inferência de que um aluno domina um dado conhecimento, a partir da observação do seu desempenho em uma tarefa, pode ser validada pela premissa teórica (na forma de um raciocínio dedutivo) de que, sob dadas condições, ele deve ter um determinado desempenho nesse tipo de tarefa.

Essas premissas, baseadas na teoria ou na experiência prévia e que fundamentam a indução dos dados para as conclusões, podem ser de natureza determinística (premissas em um raciocínio lógico-dedutivo, de fato) ou probabilística (como em um modelo que descreve probabilidades de resultados em função de traços latentes). De modo geral, os fundamentos ou *warrants* em suporte à evidência são consequências de um modelo sobre como o conhecimento no domínio avaliado pode ser evidenciado.

> *The primary source of warrants is the same conception of knowledge now focusing on what can be seen when people put that knowledge and skill to use. When we embed the relationships among students, tasks, and performances within a statistical (measurement) model, we elaborate the substantive warrants so as to support probability-based inference. This allows us to synthesize information from disparates sources into a common framework and characterize its evidentiary value, and to reason through sometimes-complex relationships among what we observe and what we want to infer.* (MISLEVY; STEINBERG; ALMOND, 2003, p. 13).

No entanto, explicações alternativas podem ser dadas para (parte) dos dados observados: essas alternativas refutam, total ou parcialmente, as conclusões ao enfraquecerem a inferência baseada no modelo cognitivo e demais pressupostos.

Para ilustrar esses pontos, retomemos a discussão sobre a questão do quadro 1, exemplificando os elementos do diagrama nesta situação concreta. Vejamos a síntese desses elementos no exemplo da tarefa descrita no quadro 2, a seguir.

QUADRO 2

DADOS

Respostas dos alunos à questão coletadas na plataforma de testes do CEnPE, transcritas literalmente.

- **Resposta do aluno X:**

Como o valor de y $(f(x))$ é de $1/2$ x, logo, o ponto avança, verticalmente, o dobro do que avança horizontalmente, porém, mantendo suas dimensões proporcionais entre si. Logo, seus volumes são iguais. Alternativa A

- **Resposta do aluno Y:**

resposta e a letra c dado que a fração meio corresponde a x

- **Resposta do aluno Z:**

C) o volume de C é a metade do volume de C' pois utilizando valores do gráfico da função $f(x)=1/2x$ e aplicando a fórmula do volume de um cone $(Ab.\,h)/3$ e fazendo uma igualdade entre volume do eixo x e y (C e C' respectivamente) encontraremos a resposta. Utilizando as coordenadas do gráfico (2,1) sendo 1 o raio de C e 2 a sua altura e 2 o raio de C' e 1 a sua altura aplicando-os a formula com uma igualdade entre os dois encontraremos que o volume de C=2 e C'=4.

FUNDAMENTOS PARA VALIDAR A INFERÊNCIA (*WARRANTS*).

O argumento dedutivo (estruturado em premissa e conclusão) subjacente à inferência é o seguinte:

Estudantes que conhecem fatos básicos sobre gráficos de funções lineares e sobre as relações entre altura, área da base e volume de um cone representam geometricamente a situação descrita, formulam corretamente o problema ***e apresentam uma solução devidamente justificada.***

Esse argumento tem suporte (*backing*) na seguinte crença, depurada da experiência dos professores e de resultados em testes anteriores, sobre a aquisição e a mobilização de um certo elemento do repertório matemático:

O cálculo do volume do cone requer conhecer o fato de que esse volume é proporcional à altura do cone e, também, proporcional à área da base. Além disso, o aluno precisa deduzir que as informações sobre raios e alturas estão contidas nos dados do problema. Em problemas que envolvam funções, precisa conhecer fatos fundamentais que relacionam representações algébricas e geométricas dessas funções.

INFERÊNCIAS E AFIRMAÇÕES

A partir dos dados e admitindo os argumentos (*warrants*) acima, inferimos as seguintes afirmações sobre o desempenho dos alunos em relação aos conhecimentos e habilidades mobilizados (de acordo com os fundamentos expostos anteriormente) nessa questão.

- **Afirmações sobre o desempenho do aluno X**

Interpretação da resposta observada

O aluno X utilizou as informações sobre o gráfico da função para representar algebricamente o problema, chegando à conclusão correta de que as dimensões lineares em ambos os cones são proporcionais. No entanto, conclui, erradamente, que os volumes são iguais. Certamente, não considerou o fato de que o volume é proporcional à área e, portanto, não diretamente proporcional ao raio da base.

Afirmação

O aluno não conhece fatos fundamentais sobre a geometria de cones, especialmente a relação entre volumes e elementos lineares ou superficiais. No entanto, revela alguma habilidade na interpretação da representação gráfica e algébrica de funções lineares (nesse caso, em termos de proporcionalidade entre as variáveis).

- **Afirmações sobre o desempenho do aluno Y**

Interpretação da resposta observada

O aluno Y não fez uso da representação geométrica do problema. Resposta correta, mas sem suporte como evidência de que domina os conhecimentos e habilidades requeridos.

Afirmação

A resposta, embora indique a alternativa correta, **não** traz elementos, de acordo com os fundamentos que consideramos, que permitam inferir, validamente, que o aluno conhece o repertório necessário para resolver a questão.

- **Afirmações sobre o desempenho do aluno Z**

Interpretação da resposta observada

O aluno Z usou as informações relevantes que poderiam ser obtidas do gráfico da função. Em seguida, menciona, corretamente, a relação algébrica entre altura, área da base e volume do cone. Usa esses conhecimentos para modelar o problema e conclui corretamente qual a razão entre os volumes. O erro técnico cometido (não levar em conta o fator multiplicativo, que, aliás, não altera a razão) não compromete a qualidade do argumento e da estratégia usados.

Afirmação
O aluno conhece os fatos fundamentais requeridos para resolver a questão, apresentando argumentos matematicamente e logicamente consistentes. Conseguiu, em sua justificativa, relacionar os dados sobre a função linear ao reconhecimento dos dados necessários para a comparação dos volumes.

EXPLICAÇÕES ALTERNATIVAS (REFUTAÇÕES)
Em refutação, são apresentadas explicações alternativas como argumentos de que a cadeia de inferências não encontra suporte nos dados ou nos outros argumentos, portanto, não seria validada. Por exemplo, pode ser elaborada a seguinte refutação.

O estudante assinala a alternativa correta. No entanto, esse dado não permite inferir que domine os conhecimentos avaliados: de fato, o estudante pode assinalar que um volume é metade do outro simplesmente porque considerou o coeficiente da função $f(x) = 1/2\ x$; ou por considerar, a partir disso, que a relação entre os volumes é dada pela relação entre as alturas ou entre os raios da base. Essa refutação é baseada na análise de respostas como a do aluno Y.

Finalizando esse exemplo simplificado de aplicação do diagrama, concluímos que a explicação alternativa não é suficiente para invalidar o uso do argumento, uma vez que, em sua conclusão, esse argumento explicita a conjunção lógica **"e apresenta uma solução devidamente justificada"**. Como a tarefa envolvia tanto uma etapa de múltipla escolha quanto a explicação (justificativa) do raciocínio e dos fatos e procedimentos matemáticos empregados, a resposta apresentada pelo aluno Y não está no padrão de desempenho descrita na conclusão do argumento. Portanto, a inferência não é válida se parte desse tipo de resposta.

Observamos que, reduzindo a tarefa a uma questão de múltipla escolha, os resultados (respostas dos alunos, resumidas às escolhas das alternativas) não seriam dados suficientes para dar suporte à inferência, caso mantivéssemos o modelo cognitivo expresso no argumento. De fato, se uma questão de múltipla escolha pudesse produzir inferências válidas para sustentar a informação de que o estudante domina os elementos de repertório avaliados, deveríamos considerar respostas como a do aluno Y como evidências em suporte à afirmação de que **ele conhece fatos básicos sobre gráficos de funções lineares e as relações entre altura, área da base e volume de um cone**, a premissa do argumento.

A seguir, nos ocuparemos sobretudo da **análise do domínio** do conhecimento matemático básico, mencionada anteriormente como uma das camadas relevantes do ECD, em que são sistematizadas, para as finalidades da avaliação, informações sobre a natureza do conhecimento em um dado domínio, como as pessoas o adquirem e como o utilizam. Essas informações são derivadas do trabalho, do aprendizado e da interação das pessoas na produção, mobilização e transferência dos conhecimentos e habilidades característicos do domínio.

A análise deve reunir e organizar essas informações para a elaboração dos modelos cognitivos, de tarefas e de evidências que reflitam os padrões, estruturas e relações no âmago do domínio de conhecimento em foco. Como já apontado, alguns dos elementos considerados na análise de domínio são os descritos na sequência.

- Trabalhos e produtos valorizados na área, desenvolvidos em situações reais em que as pessoas usam o conhecimento no domínio, realizando atividades que podem inspirar as tarefas na avaliação e definir padrões de desempenho nessas situações características.

- Características das tarefas, que sejam recorrentes e relevantes nas situações em que as pessoas usam o conhecimento para realizar trabalhos valorizados no domínio. Os elementos dessas tarefas são a base para o modelo nas avaliações, uma vez que trazem informações sobre que aspectos do conhecimento são particularmente mobilizados e de que maneiras o são.

- Representações do conhecimento, na forma esquemática, gráfica ou simbólica, que devem ser aprendidas e utilizadas como requisito à proficiência no domínio. São essas as representações usadas, nas avaliações, para apresentar tarefas aos sujeitos avaliados e para observar/coletar suas respostas.

- Conhecimento valorizado no domínio, definido como os tipos de conhecimentos e habilidades considerados relevantes na área, utilizados em diversas situações pelas pessoas com proficiência nessa área. Deve ser organizado segundo estruturas e relações internas ao domínio, tais como currículos, mapas de conhecimento, análises de performance e teorias sobre o desenvolvimento das competências.

- Relações conhecimento-tarefas, distinguindo, em particular, os graus de complexidade e os padrões de desempenho na mobilização de conhecimentos e habilidades para a execução de diferentes tarefas. Com isso, são identificadas características de tarefas que permitem mobilizar determinados aspectos do conhecimento de modo a estabelecer inferências a respeito da proficiência dos sujeitos quanto a esses aspectos.

Zieky (2014) descreve, de forma bastante sintética, alguns questionamentos que direcionam a análise de domínio, que mencionamos a seguir.

- Quais conhecimentos, habilidades e atitudes (do trinômio *knowledge, skills and aptitudes* – KSA) são os mais importantes?
- Como esses conhecimentos, habilidades e atitudes são representados?
- Como os conhecimentos, habilidades e atitudes são relacionados uns aos outros?
- Como os conhecimentos, habilidades e atitudes são, em geral, adquiridos e como são usados no mundo real?
- Que tipos de trabalhos/tarefas, dependentes dos conhecimentos, habilidades e atitudes, são valorizados no domínio?
- Como um trabalho de boa qualidade é distinguido de um trabalho medíocre ou de baixa qualidade?

A análise de domínio é complementada, na arquitetura do ECD, com a modelagem do domínio, em que os principais elementos são os modelos de tarefas e de evidências, juntamente com seus pressupostos teóricos, conforme apresentamos anteriormente, de modo abreviado, na discussão sobre a estrutura do argumento que vai dos dados às inferências. De acordo com Mislevy, Steinberg e Almond (2003, p. 20), em tradução livre, "a modelagem de domínio consiste em estruturas sistemáticas para descrever as proficiências que são de interesse, as formas de obter observações que evidenciem proficiência e os meios de elaborar situações que possibilitem gerar a evidência".

O diagrama a seguir completa o anterior com as especificações e as camadas da modelagem do domínio e é baseado na figura 4 do artigo de Mislevy, Steinberg e Almond (2003, p. 21).

Uma discussão pormenorizada de todos esses componentes extrapola os limites deste relatório. Recomendamos ao leitor interessado o artigo supracitado de Mislevy, Steinberger e Almond (2003) como uma referência para aprofundamento.

3. ANÁLISE E MODELAGEM DE DOMÍNIO A PARTIR DAS BASES CURRICULARES

Retomando o conceito de análise de domínio, ressaltamos que, de acordo com Mislevy, Almond e Steinberg (2013), o desenho de avaliação deve reunir e organizar informações sobre a natureza do conhecimento na área em consideração, os modos como as pessoas adquirem esse conhecimento e as formas como o utilizam.

Portanto, um dos componentes do modelo avaliativo diz respeito a coletar e sistematizar informações relevantes para o desenho das tarefas e das evidências sobre os padrões, estruturas e relações entre os conhecimentos em um dado domínio da atividade humana, o qual, neste estudo, é a Matemática Básica. Relembramos que o componente de análise do domínio no ECD abrange, segundo os autores, as categorias a seguir.

- Conhecimentos e habilidades pertinentes ao domínio e considerados importantes pelos especialistas no domínio (*valued knowledge*).

- Estruturas e relações entre os conhecimentos: estruturas conceituais em que estão organizados os conhecimentos do domínio, como currículos, mapas, descrições e regras especificando padrões de desempenho e modelos de desenvolvimento das competências.

- Atividades realizadas em situações reais em que pessoas utilizam os conhecimentos daquele domínio. Esses usos e atividades podem inspirar tarefas, além de ajudar a definir padrões de desempenho com características relevantes de cada padrão. Essa é categoria que Mislevy e seus colaboradores chamam de *valued work*.

- Características relevantes e recorrentes das tarefas (*task features*) nas situações reais em que os conhecimentos do domínio são mobilizados. Essas características fornecem indícios importantes para o desenho de tarefas no modelo de avaliação, ao permitir enfatizar quais aspectos do conhecimento devem ser enfocados de modo a produzir evidências válidas sobre o desempenho. A proficiência dos sujeitos é baseada tanto nas regularidades observadas em seu comportamento frente às situações em que os conhecimentos são mobilizados quanto nas diferenças em seus desempenhos, aprendizados e êxitos.

- Formas de representação (e.g., textuais, simbólicas, gráficas, esquemáticas) no domínio de conhecimento, com as quais devem ser estruturadas as tarefas apresentadas nos testes e as respostas dadas pelos sujeitos avaliados.

- Resultados produzidos pelas pessoas nas tarefas em que mobilizam os conhecimentos do domínio considerado. A observação desses resultados deve revelar o desempenho em efetuar as tarefas e são as bases para a formulação de rubricas e modelos de mensuração.

- Relações entre conhecimentos e tarefas, ou seja, entre conhecimentos do domínio, situações e tarefas e o desempenho dos sujeitos expostos a esses contextos. Essa categoria da análise de domínio é um fundamento para o desenho de tarefas que permitam produzir evidências sobre os aspectos de proficiência nos conhecimentos considerados na avaliação.

Em suma, de acordo com Mislevy e Haertel:

> *As the first stage in assessment design, Domain Analysis leads us to understand the knowledge people use in a domain, the representational forms, characteristics of good work, and features of situations that evoke the use of valued knowledge, procedures, and strategies. These categories of information presage the entities and structures that appear in subsequent layers.* (MISLEVY; HAERTEL, 2006, p. 7).

CONTEÚDOS, HABILIDADES E PROCESSOS COGNITIVOS NA BNCC

O currículo é um recurso natural para iniciarmos a análise de domínio. Sendo assim, apresentamos aqui, de forma sucinta, algumas das diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na área de Matemática.

A BNCC (BRASIL, 2017) relaciona conhecimentos e habilidades que concorrem para o desenvolvimento de competências na trajetória do ensino básico de Matemática. No Ensino Fundamental, as habilidades na BNCC estão reunidas em unidades temáticas descritas a seguir.

- **Números:** compreensão dos números naturais, inteiros, racionais e reais e das operações entre eles, demandada na resolução de problemas em diversos contextos cotidianos, matemáticos e em outras áreas do conhecimento.

- **Álgebra:** “demandas para identificar relações de dependência entre duas grandezas em contextos significativos”, bem como expressá-las e aplicá-las na linguagem algébrica, além de resolver problemas envolvendo equações e inequações algébricas.

- **Geometria:** compreensão dos efeitos de transformações geométricas (e.g., homotetias), associando-os às noções de congruência e de semelhança; além disso, contempla habilidades sobre o uso de coordenadas na localização e na descrição de deslocamento no ambiente geométrico.

- **Grandezas e Medidas:** unidade temática de interface, em que grandezas são expressas aritmeticamente, fazendo uso das habilidades de pensamento numérico; em que relações entre grandezas e suas variações podem ser algebricamente descritas e estudadas; e em que grandezas geométricas, como áreas e volumes, são modelos naturais para o desenvolvimento dos conhecimentos e habilidades na unidade.

- **Pensamento Probabilístico:** eixo temático que perpassa desde noções intuitivas de eventos aleatórios, espaços amostrais e medidas de probabilidade, até o desenvolvimento da expressão matemática dessas categorias, com a modelagem de distribuições de probabilidade elementares (e.g., distribuições discretas uniformes), árvores de possibilidades, interpretação frequentista de probabilidades, princípio multiplicativo e técnicas de contagem, entre outros tópicos, geralmente apresentados com ênfase em simulações, experimentos e registros. Portanto, há um enlace entre os desenvolvimentos da **Probabilidade** e da **Estatística** na BNCC, uma vez que as habilidades associadas a esta última dizem respeito ao planejamento e à realização de pesquisas amostrais; ao cálculo, ao uso e à interpretação de medidas de tendência central; à comunicação de resultados, segundo diversas representações gráficas; e à análise crítica de dados quando divulgados, por exemplo, na mídia.

O **Pensamento Computacional**, na BNCC do Ensino Fundamental, perpassa essas unidades temáticas, desde, por exemplo, o trabalho com a noção de algoritmo nas operações aritméticas ao uso de *softwares* para estabelecer conjecturas e produzir evidências em Geometria, tanto a propósito da construção de figuras e do reconhecimento de suas simetrias e invariâncias quanto no cálculo, estimado ou exato, de medidas geométricas. Os experimentos e simulações, bem como o registro, a organização e a visualização dos dados, desenvolvidos no eixo de Probabilidade e Estatística requerem, igualmente, a mobilização de conhecimentos e habilidades de Pensamento Computacional.

Especial ênfase é dada, na BNCC do Ensino Fundamental, ao desenvolvimento na noção de proporcionalidade, em suas representações aritmética, algébrica e geométrica. Essa "grande ideia" é trabalhada, em uma espiral ascendente, ao longo de algumas cadeias de conhecimentos e habilidades no currículo, agregando tópicos como: equivalência de frações; razões e taxas de variação; representações geométricas de relações de proporcionalidade no plano cartesiano; modelagens em termos de equações lineares; descrição quantitativa de relações de semelhança; mudanças de escala ou de unidades de medida; médias aritméticas; noções intuitivas de regressão linear; entre outros.

Esse é um exemplo da conectividade dentro de uma unidade temática e entre unidades temáticas, evidenciando um eixo estrutural da base curricular. Outras dessas grandes ideias estão no arcabouço da base curricular, de modo mais ou menos evidente, ao longo da progressão. Em alguns casos, são apenas sugeridos a partir de uma análise mais profunda do que estaria na fronteira do currículo; isto é, alguns conjuntos de conhecimentos e habilidades que se vão consolidando na trajetória curricular convergem para estruturas ou aplicações que lhes dão coesão e sentido, mas que não estão, necessariamente, explicitados na base. Esses objetivos para os quais o currículo converge poderiam ajudar no entendimento das competências específicas descritas na BNCC, representando expectativas de aprendizagem esperadas na trajetória escolar. Na seção seguinte e no **quadro 7**, mostramos alguns exemplos, na BNCC do Ensino Médio, desses pontos focais de convergência curricular, discutindo de que modo poderiam ser descrições que explicitariam alguns dos objetivos gerais formulados nas competências.

Enfatizamos que as unidades temáticas no Ensino Fundamental não são estanques e, sim, articuladas e interdependentes, como é próprio do conhecimento matemático. Além disso, concorrem para uma visão integrada e panorâmica da Matemática Básica que deve ser ampliada, aprofundada e consolidada no Ensino Médio, de acordo com o próprio documento da BNCC: "Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos." (BRASIL, 2017, seção 5.2).

Aponta-se, ainda, que a progressão da BNCC no Ensino Médio deve fazer uso do potencial adquirido no Ensino Fundamental, ampliando o letramento inicial consolidado nessa etapa.

> *Novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (BRASIL, 2017, seção 5.2).*

As habilidades, para a etapa do Ensino Médio, devem desenvolver processos de investigação, modelagem e resolução de problemas. Essas competências envolvem, sempre segundo a BNCC, as ações descritas a seguir.

- **Raciocinar:** "investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática."

- **Representar:** "espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da Matemática."

- **Comunicar:** "os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles."

- **Argumentar:** "(...) seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar."

No referencial da BNCC, prevalece, portanto, o objetivo do desenvolvimento de competências complexas (e.g., resolução de problemas, pensamento crítico, comunicação, colaboração) a partir dos conhecimentos e habilidades descritos nas duas etapas de aprendizagem. Como discutido nas seções anteriores, esse objetivo depende da aquisição, estruturação e mobilização de um repertório matemático de conceitos, fatos, procedimentos e técnicas.

Tomemos como exemplos algumas das competências específicas relativas à progressão curricular no Ensino Médio. Transcrevemos, na **tabela 1**, a terceira, a quarta e a quinta dessas competências e algumas habilidades associadas diretamente a cada uma delas.

Tabela 1 – Algumas competências específicas e habilidades presentes na BNCC

Competências específicas	Habilidades associadas
3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
	(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
	(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

	(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
	(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
	(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções.
	(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Dados os objetivos de aprendizagem fixados nessas competências específicas, os quais demandam, em particular, a consolidação das habilidades da BNCC a elas associadas, torna-se natural fazer as perguntas a seguir.

- Quais elementos do repertório, em termos de conhecimentos e *skills*, são necessários para o desenvolvimento dessas competências?
- De que modo esses elementos devem ser organizados, estruturados e mobilizados para que as competências sejam desenvolvidas?
- Que relações lógico-cognitivas entre esses conhecimentos e habilidades podem ser mapeadas de modo a permitir desenhar percursos curriculares que, progressiva e recursivamente, convirjam para as competências almejadas?
- Que atividades ou tarefas são relevantes para evidenciar a aquisição, organização e mobilização dos conhecimentos e habilidades requeridos, de forma progressiva e articulada, para o pleno desenvolvimentos das competências?
- Como gerar evidências válidas, a partir de avaliações compostas por tarefas relevantes, sobre a consolidação do repertório e o consequente desenvolvimento das competências?

Como vimos, os achados da Psicologia Cognitiva, que corroboram a intuição dos matemáticos sobre a formação de pensamento matemático de alta ordem, reforçam a necessidade da estruturação dinâmica do repertório como condição *sine qua non* para que os estudantes confrontem demandas complexas relativas a modelagem, resolução de problemas, descoberta e criação matemáticas.

No caso específico das competências destacadas e das habilidades da BNCC que lhes correspondem, observamos que há uma demanda por *higher-order thinking skills* encapsulada em verbos como "construir modelos", "resolver problemas", "construir argumentação", "compreender", "estabelecer conjecturas", "investigar", que compõem as sentenças descritoras das competências específicas. Além disso, algumas dessas operações cognitivas, como "compreender", são dificilmente observáveis ou mensuráveis, mesmo indiretamente, a partir de um conjunto de tarefas.

Não bastassem essas dificuldades, o fato de que as habilidades devem ser mobilizadas em problemas formulados em diversos contextos torna ainda mais desafiador circunscrever que tipos de tarefas podem produzir evidências válidas sobre a consecução desses objetivos de aprendizagem.

Portanto, a análise de domínio, partindo dos objetivos de aprendizagem fixados pela BNCC, requer, como uma de suas etapas iniciais, definirmos o repertório matemático necessário, não apenas na forma de tópicos, mas, mais profundamente, com a descrição de padrões, estruturas e relações intrínsecas ao domínio da Matemática Básica. Além disso, é preciso conectar elementos desse repertório a processos cognitivos em diversos arranjos e níveis de complexidade, apropriados para definir conjuntos de tarefas relevantes nos diversos contextos, matemáticos ou exteriores à Matemática, em que conhecimentos e habilidades são evocados e combinados.

No quadro 7, partimos da seleção de competências e habilidades da tabela 1 para identificarmos, à guisa de exemplo, conteúdos matemáticos e processos cognitivos que podem ser articulados, em diferentes configurações, em percursos que conduzam ao cumprimento de alguns dos objetivos curriculares implícitos nas competências enunciadas.

Complexidade das competências específicas na BNCC e mapas de progressão

As habilidades da BNCC transcritas na tabela 1 envolvem conhecimentos sobre funções de primeiro grau (afins) e funções de segundo grau (ou quadráticas). Mesmo quando não mencionam explicitamente a terminologia de funções, dizem respeito à noção de proporcionalidade ou linearidade, como é o caso das seguintes habilidades:

- EM13MAT5314 (em que são trabalhadas grandezas relativas, dadas por razões ou produtos, isto é, por relações de proporcionalidade direta ou inversa);

- EM13MAT506 (que considera as grandezas geométricas de perímetro e de área como exemplos de funções que variam, respectivamente, de forma linear ou quadrática com respeito às medidas lineares de figuras planas);

- EM13MAT507 (concernente a progressões aritméticas, versões discretas de funções afins);

- EM13MAT510 (em que a noção de regressão linear é prenunciada pela interpolação de retas, dados pares ordenados determinados pelos valores amostrais de variáveis aleatórias).

Algumas temáticas unificadoras e "grandes ideias" são antecipadas e entrevistas, em seus fundamentos mais básicos, nesse rol de competências e de habilidades da BNCC. Vejamos alguns exemplos a seguir.

- A habilidade EM13MAT503 menciona problemas básicos de otimização associados a funções quadráticas. Essas funções oferecem um modelo fundamental (simples, mas contendo vários elementos conceituais relevantes em construções mais gerais) para diversos problemas de otimização que surgirão, sob diferentes representações, em Física, Economia, Engenharia e Estatística, normalmente em variantes de problemas de "mínimos quadrados". Portanto, a habilidade dá relevo às funções quadráticas não apenas como os primeiros modelos funcionais não lineares vistos no ensino básico, mas também como ferramentas de linguagem apropriadas para formular problemas realísticos de otimização. Essas ideias, trabalhadas de modo ainda preliminar no Ensino Médio, servirão de base, por exemplo, para uma imensa amplitude de técnicas baseadas em minimizar distâncias via projeções ortogonais. Sendo assim, a habilidade antecipa conhecimentos que estarão presentes no substrato de desenvolvimentos científicos em várias áreas (Estatística, Ciência de Dados, Óptica Geométrica, teoria de seleção de carteiras em Finanças, para citar apenas alguns exemplos).

- A habilidade EM13MAT510 é um ponto de convergência de modelos lineares e quadráticos. Alguém versado em Estatística Básica reconhece, de imediato, os rudimentos da ideia de regressão linear nessa habilidade – técnica fundamental, mas extremamente disseminada em vários campos científicos e tecnológicos, que se baseia nos mínimos quadrados, mencionados no item anterior, e, por óbvio, na interpretação geométrica e algébrica de coeficientes de uma equação ou função linear. Funções quadráticas são essenciais para essa habilidade tanto para modelar distâncias entre pontos ou entre pontos e retas, presentes na regressão linear, quanto para definir medidas de variabilidade.

- As habilidades EM13MAT402 e EM13MAT502 envolvem a exploração de funções ou expressões quadráticas na modelagem de relações de não proporcionalidade entre variáveis, como é o caso da área como função de uma medida linear. A experimentação com o traçado de gráficos confere concretude às noções de curvatura e aceleração, contrapartes geométrica e dinâmica de um mesmo conceito (predominante nas leis físicas de movimento), que podem ser experimentadas (inclusive com instrumentos físicos, mecânicos ou eletrônicos) no desenho geométrico de curvas planas. As simetrias de parábolas e os efeitos de transformações geométricas (translações verticais, homotetias em um dos eixos, entre outras) devem ser interpretados em termos de mudanças nos coeficientes: aqui, há uma distinção importante, que aparece na Economia e em Engenharia, entre variáveis endógenas e parâmetros exógenos aos modelos.

- Fechando esse circuito de ideias, todas embrionárias nesses nós no currículo, problemas de máximos e mínimos, modelados por funções quadráticas, ajudam a antecipar, com a devida discussão dirigida pelo professor, a profunda ideia de que formas ótimas têm simetria, como na discussão de retângulos com perímetro fixo e máxima área, para citar um exemplo costumeiro, associado à EM13MAT506.

Nesses pontos, esboçamos como conhecimentos e habilidades previstas na BNCC podem estar na base de desenvolvimentos e aplicações complexas da Matemática que, concretamente, requerem as competências específicas a que essas habilidades estão associadas. Por exemplo, o objetivo geral de aprendizagem expresso na competência específica 3 – "utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente" – pode requerer descrever uma trajetória ajustando uma parábola a alguns dos pontos e estimando os erros cometidos nesse ajuste; ou, ainda, elaborar medidas da precisão com que os valores em um certo conjunto de dados podem ser descritos por uma função linear.

Em suma, as competências específicas poderiam ser, efetivamente, determinadas com mais concretude caso fosse possível exemplificar situações, no cotidiano ou em diversos campos profissionais, em que os conhecimentos e habilidades na base dessas competências são requeridos, articulados, aprofundados, recriados, recombinados e ressignificados. Executar tarefas autênticas com o uso desses conhecimentos poderia significar que as competências estão, de fato, desenvolvidas. As evidências, nesse caso, não seriam sobre habilidades tomadas isoladamente, mas relativas ao concerto dessas habilidades na resolução de problemas em diversos contextos e níveis de complexidade.

Uma vez que essas habilidades contribuem, em arranjos dinâmicos e variegados, para o desenvolvimento das competências e são **andaimes** para grandes temas da Matemática, como exemplificamos acima, uma avaliação lastreada na BNCC deve conter **tarefas que apontem para a frente,** ou seja, em que se exercitem a visão integrada da Matemática e atitudes de pesquisa, prospecção, experimentação e criação matemática. Conjecturas, generalizações, analogias, correspondências, teoremas, deduções e induções, todos esses aspectos da atividade matemática estão embutidos, embora nem sempre explicitamente, nos processos de elevada complexidade presentes nas competências específicas da BNCC.

A escassez de comentários de natureza pedagógico-matemática sobre essas competências e a falta de exemplos de tarefas que concretizem realizações esperadas dessas competências torna a transposição da BNCC para o planejamento escolar uma tarefa árdua para o professor.

Por outro lado, um modelo avaliativo que pretenda gerar evidências sobre o desenvolvimento, nos estudantes, das competências específicas da área de Matemática não pode utilizar apenas tarefas procedimentais que acessem aspectos de menor demanda cognitiva das habilidades correspondentes a essas competências, segundo o paradigma "um item, uma habilidade".

O fato de que as competências acionam conjuntos articulados de habilidades presentes na BNCC em demandas cognitivas de elevada complexidade requer tarefas que envolvam compreensão conceitual, fluência procedimental e a aplicação, nem sempre imediata, da linguagem e do raciocínio matemático em situações que exigem modelagem e as consequentes validação e comunicação dos modelos e dos procedimentos empregados.

DOMÍNIOS DE CONTEÚDOS E PROCESSOS COGNITIVOS NO PISA

No caso do Pisa, a análise de domínio leva em conta dois aspectos da literacia matemática, definida, de acordo com o *framework* de 2021 (OECD, 2018), como (em tradução livre):

> *Literacia matemática é a capacidade do indivíduo em raciocinar matematicamente e em formular, empregar e interpretar conhecimento matemático na resolução de problemas em uma variedade de contextos do mundo real. Isso inclui conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas para descrever, explicar e predizer fenômenos. [Essa competência] auxilia os indivíduos em reconhecer o papel que a Matemática desempenha no mundo e em elaborar juízos e tomar decisões fundamentados, necessários para uma cidadania, no século XXI, que seja construtiva, participativa e reflexiva. (OCDE, 2018).*

Os aspectos ressaltados na definição são o raciocínio matemático e a capacidade de resolver problemas matematicamente modelados. Os processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas, bem como os contextos em que esses são apresentados, serão discutidos mais adiante. Por ora, focamos na descrição de *standards* que, no referencial do Pisa, são considerados como bases do raciocínio matemático que seriam estruturadas na formação escolar do aluno ("*key understandings that undergird school mathematics*") e avaliadas nos testes.

Essas bases, que formam o núcleo do raciocínio matemático, perpassam os domínios de conhecimento e podem ser entendidas como **metas de aprendizagem** para as quais convergem a educação matemática dos aprendizes (nesse caso, jovens de 15 anos, público que participa dos testes do Pisa). No *framework* de 2022, algumas dessas metas são descritas a seguir.

1. Compreender a noção de quantidade, os sistemas numéricos e suas propriedades algébricas

Alguns conhecimentos e habilidades necessários para a compreensão da noção de quantidade são:

- comparar cardinalidades de conjuntos de objetos;
- contar, recorrendo a estimativas, arredondamentos e ordens de grandeza;
- usar números em classificações, ou seja, em seu aspecto ordinal em vez de cardinal;
- usar números em medidas, ou seja, na quantificação de atributos de objetos;
- usar números para expressar quantitativamente relações, situações ou fenômenos do mundo real.

Por outro lado, a compreensão dos sistemas numéricos (e.g., o sistema decimal posicional decimal na base da Aritmética) e de suas propriedades algébricas depende de conhecimentos e habilidades necessários como os descritos a seguir.

- Conhecer e compreender os sistemas numéricos e como estão encaixados (dos naturais para os inteiros; desses para os racionais; e, por fim, dos racionais para os reais).
- Compreender, efetuar e utilizar as operações aritméticas (inclusive fazendo uso de suas propriedades fundamentais, tais como comutatividade, associatividade e distributividade da multiplicação com respeito à adição) nos sistemas numéricos.
- Compreender e estabelecer equivalência entre as diversas representações dos números (em termos de algarismos, no sistema decimal posicional, por exemplo, ou em termos de pontos na reta numérica); perceber como essas representações permitem exprimir eficientemente os números e realizar operações entre eles.
- Compreender como as sucessivas expansões dos sistemas numéricos permitem resolver equações progressivamente mais complicadas (e.g., inversos aditivos ou multiplicativos permitem determinar termos desconhecidos em uma dada soma ou produto, respectivamente).

Esses conhecimentos e habilidades acerca da Aritmética e das estruturas algébricas que já se anunciam na lida com as operações aritméticas, as relações entre elas (por exemplo, entre adição e subtração como operações “inversas” uma da outra) e suas propriedades provêm bases para o avanço em outros domínios. Notadamente, mas não unicamente, esse é o caso da Álgebra, especialmente no que diz respeito à manipulação com expressões algébricas (adição, multiplicação, potenciação com expoentes naturais, operações que seguem regras que estendem as das propriedades aritméticas correspondentes) em procedimentos de agrupamento, simplificação, fatoração, entre outros. Além disso, a solução de equações lineares, por exemplo, tem alguns antecedentes em problemas que demandam determinar uma dada parcela ou fator em uma soma ou produto, respectivamente. Esses fundamentos da Aritmética são igualmente importantes, na progressão de aprendizagens do estudante, para a elaboração de modelos funcionais e para a sistematização e a interpretação de dados numéricos com reconhecimento e comparação de padrões, por exemplo.

2. Apreciar o poder da abstração e das representações simbólicas

Essa meta de aprendizagem diz respeito às estruturas matemáticas intrinsecamente, mesmo quando não relacionadas a um contexto, uma motivação ou uma aplicação sugeridos pelo mundo real. Envolve reconhecer ou revelar similaridades estruturais entre objetos matemáticos e, a partir delas, construir relações entre esses objetos. Por exemplo, operações aritméticas tanto com números decimais (decompostos em potências de dez) quanto com polinômios (decompostos em potências da variável real) têm propriedades homólogas de comutatividade, associatividade e assim por diante. Perceber essas homologias e elaborar definições e propriedades que descrevem essas correspondências e façam uso delas é um exemplo do pensamento abstrato que orienta o desenvolvimento da Matemática. Essa competência tem óbvios impactos na formação do pensamento computacional no aprendiz, bem como no manuseio de conceitos e técnicas que requerem elevado nível de abstração (basta pensarmos em como genes, bits, informação, *blockchains*, inteligência artificial e outras entidades abstratas são determinantes do nosso cotidiano).

Criar, operar e dar significado a conceitos, estruturas, relações, propriedades e fatos resultantes de um processo de abstração são habilidades presentes quando, por exemplo, percebemos, por meio da indução vulgar, que a área de um triângulo é expressa pela metade do produto de um de seus lados pela altura correspondente, independentemente do triângulo em questão; ou de que essa medida de área é invariante por movimentos rígidos do plano, ou seja, não depende de como o triângulo é posicionado no plano.

Um elemento fundamental de organização e comunicação do raciocínio matemático, a representação de noções e estruturas matemáticas (em palavras, na língua natural, e simbólicas, gráficas, numéricas, geométricas ou mesmo em códigos computacionais) permite apresentar ideias matemáticas de forma sucinta. Além disso, ajuda a analisar criticamente o uso de conceitos e de procedimentos, tornando-o mais eficiente. Por fim, a representação é indispensável na modelagem matemática, ao permitir elaborar formalismo matemático que seja um modelo simplificado/idealizado do fenômeno ou problema no mundo real, do qual são abstraídos os elementos que forem relevantes.

3. Perceber estruturas matemáticas e suas regularidades

As representações simbólicas são elementos de linguagem importantes para descrever estruturas matemáticas. Reciprocamente, essas estruturas, ao serem reconhecidas ou descobertas, trazem significados e interpretações para conteúdos matemáticos representados simbolicamente. Uma estrutura que relaciona objetos matemáticos permite um avanço na compreensão desses objetos que não se reduz ao entendimento de cada um deles isoladamente: as relações entre os objetos, evidenciadas pela estrutura, trazem seu conhecimento a outro patamar.

Estruturas são pervasivas em Matemática e permitem estabelecer correspondências, seja entre domínios diferentes do conhecimento matemático, seja entre diferentes representações matemáticas de um dado objeto. Isso é particularmente útil no esforço de modelagem. Vejamos alguns exemplos a seguir.

a) O aluno pode perceber que as reflexões e rotações no plano podem ser combinadas, ou seja, podemos aplicar, a uma dada figura, uma sequência de duas ou mais dessas transformações. Essas transformações podem ser, portanto, "multiplicadas" segundo regras próprias, algumas das quais similares às da multiplicação entre números.

b) Os coeficientes de uma equação linear são parâmetros que, quando alterados, correspondem a movimentos da reta representada por essa equação no plano. Portanto, as manipulações algébricas com os coeficientes de duas equações em um sistema correspondem a "mover" retas no plano, preservando sua intersecção.

c) Operações com números naturais seguem regras operatórias estruturalmente similares às regras de operações com polinômios.

d) Amostras de valores de variáveis de interesse, organizadas em conjuntos de dados obtidos em contextos diferentes, podem ter distribuições muito próximas, indicando que a variabilidade desses dados, embora incerta, segue algum padrão, ou seja, que a aleatoriedade pode ser descrita por estruturas similares.

Esses são exemplos de estruturas que "emergem" de objetos matemáticos, revelando, por vezes, relações insuspeitadas entre eles. Em geral, vislumbrar essas estruturas permite, a uma pessoa proficiente em Matemática, resolver problemas que seriam, sem isso, considerados impraticáveis.

4. Reconhecer relações funcionais entre quantidades

Uma das grandes ideias que atravessa toda a paisagem curricular da Matemática Básica é o conceito de relação funcional entre variáveis: o modelo mais simples de tal relação está contido na própria noção de proporcionalidade (e na sua contraparte geométrica, de semelhança). O estudante, em sua formação escolar, deve ser exposto a diversas representações (gráficos, tabelas, descrições verbais ou simbólicas) de relações entre variáveis e fazer uso delas, inicialmente pressupondo linearidade, ou seja, proporcionalidade entre suas variações, e, progressivamente, abrangendo modelos não lineares (quadráticos, geométricos/exponenciais, entre outros). Nesse sentido, equações e funções lineares e quadráticas, juntamente com suas representações geométricas e gráficas, vão sendo integradas ao repertório do aluno, habilitando-o a tarefas tanto de descrição quanto de predição de fenômenos em diversos contextos.

5.Usar a modelagem matemática como uma lente sobre o mundo real.

Modelos matemáticos são simplificações e idealizações de fenômenos (sociais ou naturais, por exemplo) ou de problemas em diversos contextos, de modo que possam ser estudados ou abordados usando conceitos e técnicas da Matemática. A modelagem, portanto, requer um trabalho de abstração, adotando hipóteses simplificadoras em que alguns dados da realidade são enfatizados e outros desconsiderados. Com isso, são identificadas variáveis, relações, padrões e estruturas relevantes e, a partir disso, ferramentas e resultados matemáticos podem ser usados para a investigação do fenômeno ou para a resolução do problema. O modelo, embora reduza o problema ou o fenômeno original a termos mais simples, torna-se adequado e acurado quando explica ou prediz aspectos da evolução ou da configuração do recorte da realidade representado por ele. Na modelagem matemática, é importante que sejam observados se os dados do problema ou do fenômeno se ajustam às predições do modelo. Além disso, o aprendiz deve ter compreensão do efeito de mudanças dos parâmetros do contexto real sobre a validade do modelo e a necessidade eventual de ajustes.

Retomando os pontos anteriores, a modelagem de um problema cinemático, por exemplo, pode envolver: fazer registros de distâncias percorridas e dos tempos dos percursos, lançando mão de tabelas ou de gráficos; adotar a hipótese simplificadora de que uma reta se ajusta, com alguma margem de erro, a pontos marcados no plano cartesiano e que representam os valores correspondentes de distância e de tempo; representar algebricamente uma relação funcional entre essas duas variáveis; determinar a velocidade prevista no modelo a partir da medida da inclinação da reta; observar se a velocidade prevista se aproxima da velocidade observada; considerar as limitações do modelo, como erros nas medidas, erros no ajuste da curva, necessidade de considerar uma função não linear em vez de uma função afim, entre outras.

6. Entender a variabilidade como o coração da Estatística

Variáveis de valores não determinísticos (variáveis aleatórias) são representações matemáticas da aleatoriedade em fenômenos naturais ou sociais. Dados coletados sobre essas variáveis, por meio de observação, experimentos ou simulações, se conformam a uma distribuição representada em gráficos, por exemplo. Modelamos a distribuição desses dados buscando aproximá-la, o mais possível, de distribuições definidas matematicamente. Por sua vez, essas distribuições usadas nos modelos dependem de parâmetros: em geral, um deles reflete a média dos valores observados ou previstos; outro, ainda mais relevante, mede a dispersão ou a variabilidade dos dados em relação à média. A medida de variabilidade indica a magnitude do erro cometido ao considerar a média da variável em vez da informação trazida pela distribuição como um todo.

De acordo com o *framework* do Pisa, as descrições desses *standards* devem comunicar uma mensagem sobre como essas (grandes) ideias vão aflorando ao longo da Matemática escolar e sobre como, ao reforçar sua ocorrência no ensino, podemos apoiar os aprendizes em perceber o quanto podem ser aplicadas em novos e diferentes contextos.

Processos cognitivos no Pisa

O *framework* do Pisa define a literacia matemática pela utilização do raciocínio matemático, mobilizando conhecimento dos quatro domínios (quantidade; variações e relações; espaço e forma; e incerteza e dados) na resolução de problemas do mundo real, relativos a diferentes contextos. Por sua vez, o raciocínio matemático, no modelo conceitual do Pisa, envolve uma gama de processos cognitivos de diversas qualidades e níveis de complexidade, alguns dos quais textualmente mencionados no *framework* de 2022:

- identificar, reconhecer, organizar, conectar e representar;
- construir, abstrair, avaliar, deduzir, justificar, explicar e defender; e
- interpretar, formular juízos, criticar, refutar e qualificar.

Os processos cognitivos associados à modelagem matemática e à resolução de problemas são enfeixados em três momentos de um ciclo: **formular**, **aplicar** e **interpretar**. Um dado item não requer, necessariamente, que essas três fases sejam trabalhadas pelo aluno, posto que alguns aspectos da formulação ou da representação matemática do problema já estejam disponíveis; inversamente, pode haver situações nos testes em que o ciclo inteiro tenha de ser percorrido mais de uma vez em aproximações sucessivas à solução, como mencionamos na apresentação do ciclo de Polya. A seguir, descrevemos essas etapas da resolução de problemas, mobilizadoras do raciocínio e dos conteúdos matemáticos, enumerando, em cada uma, algumas expectativas sobre o trabalho a ser executado pelos alunos.

1) Formular situações matematicamente envolve aplicar raciocínio matemático, tanto indutivo quanto dedutivo, na modelagem e representação do problema, tornando-o passível de tratamento matemático. Logo, inclui vislumbrar a estrutura matemática subjacente ao problema e às informações em seu contexto para identificar variáveis e adotar hipóteses que, simplificando esse contexto real, permitam modelá-lo e, assim, buscar soluções para a apresentação, idealizada e matematizada, do problema.

Algumas atividades tipicamente desenvolvidas nesta etapa de formulação matemática são:

- reconhecer estruturas matemáticas (incluindo regularidades, relações e padrões) nas informações e nos contextos dos problemas;
- reconhecer aspectos que correspondem a problemas ou conceitos, fatos e procedimentos matemáticos já conhecidos;
- identificar variáveis relevantes para a modelagem do problema;
- adotar hipóteses simplificadoras que permitam o tratamento matemático do problema do mundo real (possivelmente em uma versão idealizada ou reduzida);
- considerar as limitações da modelagem do problema trazidas pelas hipóteses simplificadoras e pela representação matemática utilizada;
- representar matematicamente o problema de uma ou mais formas, usando variáveis, símbolos, formas geométricas, diagramas e outros elementos da linguagem matemática.

2) Empregar Matemática para a resolução da formulação do problema envolve utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas que compõem o repertório mobilizado no raciocínio matemático. Em particular, inclui efetuar cálculos, manipular expressões e equações aritméticas e algébricas, bem como analisar matematicamente dados em diagramas, gráficos e tabelas. E, em geral, abrange desenvolver as etapas procedimentais da resolução, chegando a conclusões matemáticas (e.g., resultados numéricos, figuras geométricas construídas, equações resolvidas, manipulações algébricas ou deduções lógicas efetuadas, medidas estatísticas calculadas a partir de dados em gráficos ou tabelas) deduzidas ou induzidas por passos matematicamente justificados.

Nesta etapa, são desenvolvidas atividades como:

- vislumbrar e implementar estratégias para obter soluções matemáticas do problema formulado matematicamente;
- aplicar fatos, regras operacionais, algoritmos e estruturas matemáticas para encontrar essas soluções;
- operar com números, dados e informações, gráficos, equações e expressões algébricas e formas e representações geométricas para a resolução matemática do problema;
- usar e alternar entre uma ou mais representações matemáticas no processo de resolução;
- elaborar gráficos, diagramas, simulações e outras construções matemáticas, extraindo informação relevante para o problema;
- elaborar generalizações e conjecturas baseadas nos resultados obtidos com a aplicação dos procedimentos matemáticos empregados;
- refletir sobre os argumentos matemáticos, explicando e justificando os resultados obtidos com o uso dos procedimentos.

3) Interpretar/avaliar, segundo o texto do *framework*, é

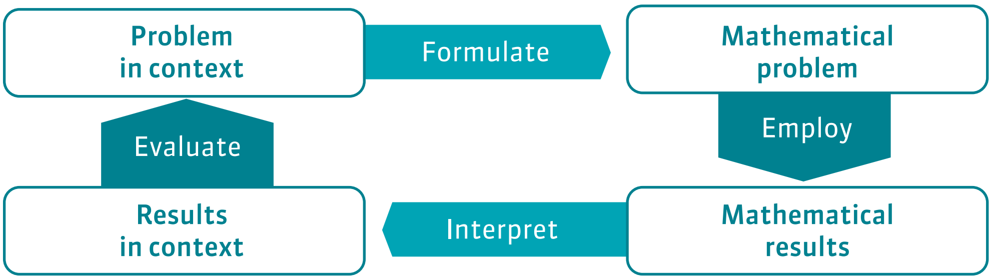
> *the ability of individuals to reflect upon mathematical solutions, results, or conclusions and interpret them in the context of the real-life problem that initiated the process. This involves translating mathematical solutions or reasoning back into the context of the problem and determining whether the results are reasonable and make sense in the context of the problem. (OECD, 2018).*

Abrange, além disso, habilidades relativas a comunicar os procedimentos utilizados e as conclusões obtidas no processo de resolução. Portanto, essa etapa do ciclo de resolução de problema é relacionada a competências complexas, como pensamento crítico e reflexivo e comunicação, envolvendo *skills* como:

- interpretar os resultados obtidos na etapa de aplicação, com o uso de procedimentos matemáticos, em termos do contexto do problema no mundo real;
- entender de que modo o contexto do problema no mundo real pode impactar o modelo e os resultados e como esses poderiam ser ajustados;
- avaliar a razoabilidade desses resultados no contexto do problema;
- explicar por que um dado resultado obtido matematicamente faria ou não sentido no contexto do problema;
- compreender as condições e os limites de validade do modelo usado na formulação e resolução da versão matematizada do problema;

- usar raciocínio matemático (e computacional) para fazer predições, prover evidências para argumentos baseados nos resultados e testar e comparar soluções obtidas sob diferentes modelos, hipóteses e representações.

A figura a seguir representa esquematicamente o ciclo de resolução de problemas no arcabouço conceitual do PISA.



Fonte: Pisa 2022 Mathematics framework (OCDE, 2018).

Tarefas que combinam elementos dos domínios de conhecimento, cuja resolução engendra os processos cognitivos descritos acima, são elaboradas em diversos contextos: pessoal, ocupacional, social, científico.

As respostas geradas por tarefas com esse escopo permitem gerar evidências sobre o quanto os estudantes desenvolveram de competências como pensamento crítico, criatividade, atitudes investigativas, iniciativa, comunicação, reflexão, entre outras.

4. ELEMENTOS ESTRUTURAIS DO MODELO PROPOSTO DE AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA

Nesta seção, apresentamos os **elementos estruturais de nosso modelo de avaliação formativa** em Matemática Básica, construído a partir da análise crítica dos referenciais expostos anteriormente e de um esforço de síntese criativa também embasado em experiências que vêm sendo desenvolvidas na prática na rede estadual e em algumas redes municipais do Ceará.

METAS GLOBAIS PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA BÁSICA

As metas a seguir são associadas aos domínios de conteúdos (números, álgebra e funções, geometria e medidas, probabilidade e dados) em que organizamos o conhecimento básico de Matemática. Portanto, são uma síntese das metas de aprendizagem quanto à **consolidação do repertório** de conhecimentos e habilidades matemáticas, cuja descrição pormenorizada é sistematizada na Matriz dos Saberes, a ser apresentada posteriormente.

- Utilizar as operações aritméticas em sistemas numéricos, com o uso de algoritmos baseados nas propriedades dessas operações e do sistema posicional decimal, em problemas motivados por diversos contextos.

- Representar, com o uso de linguagem algébrica (e.g., expressões e equações algébricas), relações, estáticas ou dinâmicas, entre variáveis, padrões, simetrias e estruturas em contextos matemáticos ou externos à Matemática.

- Elaborar modelos, em termos algébricos, gráficos ou geométricos, de relações funcionais entre variáveis, explicando ou predizendo o comportamento dessas variáveis, identificadas como relevantes em problemas sugeridos por diversos contextos.

- Interpretar dados relativos a diversos contextos, organizados em gráficos, tabelas, textos e outros meios, determinando medidas (média, dispersão) que embasem inferências ou predições.

- Descrever matematicamente a aleatoriedade em valores de variáveis, provenientes de diversos contextos, modelando-a em termos de probabilidades e identificando as diferentes formas como essas probabilidades são distribuídas.

- Deduzir relações, simetrias, estruturas e propriedades de objetos geométricos (no plano e no espaço) que descrevem padrões e formas abstratas ou presentes na natureza e na cultura.

- Definir, medir e relacionar grandezas em formas geométricas, constatando sua invariância por movimentos geométricos e as relações/razões entre medidas realizadas utilizando-se diferentes unidades e escalas.

- Identificar grandezas relevantes em estruturas matemáticas (e.g., quantidades numéricas; formas geométricas; variáveis, equações e funções; conjuntos de dados) e em diversos contextos (cotidianos, científicos, profissionais, sociais), definindo unidades de medida apropriadas, as relações entre essas unidades e as limitações em seu uso (erros intrínsecos ao processo de medição; incomensurabilidade; entre outras).

- Perceber relações internas entre conceitos, fatos, técnicas ou estruturas em um mesmo domínio da Matemática Básica ou pertinentes a diferentes domínios.

- Estabelecer conexões entre conceitos e estruturas em outros domínios do conhecimento (linguagens, ciências, programação) e elementos do conhecimento matemático, utilizando-as, em particular, para escrever, modelar ou resolver problemas nesses domínios.

COMPETÊNCIAS MATEMÁTICAS

As competências a seguir refletem marcos na aquisição, aplicação e transferência dos conhecimentos e habilidades matemáticos, especificando *standards* desejáveis no desenvolvimento da literacia matemática. Portanto, essas são as metas de aprendizagem quanto aos aspectos do **raciocínio matemático e da capacidade de resolver problemas** em vários patamares de dificuldade e de complexidade cognitiva.

Em nossa apresentação do que define a proficiência nas práticas matemáticas, nos baseamos nas organizações propostas pelo National Council of Mathematics Teachers (2000) e no relatório *Adding it up*, elaborado por Kilpatrick, Swafford e Findell (2001). Seguimos esses documentos ao descrever quatro eixos que definem aspectos interdependentes da competência matemática, associados à compreensão conceitual, à fluência procedimental, à resolução de problemas ou à competência estratégica e ao raciocínio matemático, complementados pela proficiência quanto a aplicações e modelagem, representação e comunicação e estabelecimento de conexões no domínio da Matemática e de suas aplicações. A multidimensionalidade da competência matemática fica evidente em nossa proposição, atendendo ao que é pontuado por Kilpatrick et al. (2001, p. 116): *"Mathematical proficiency is not a one-dimensional trait, and it cannot be achieved by focusing on just one or two of these strands."*

Esse é um fato que, por si só, motiva profunda reflexão sobre o uso de instrumentos analíticos multidimensionais na geração e intepretação de evidências resultantes de processos avaliativos. Descrevemos, brevemente, na seção *Modelo de evidências: uso de métodos diagnóstico-cognitivos*, como modelos diagnóstico-cognitivos podem ser associadas a esse esforço de representar os vários e complementares aspectos da proficiência matemática, dificilmente redutíveis à mensuração em uma escala ordinal unidimensional.

Aspectos da proficiência matemática

Compreensão conceitual

O estudante proficiente mobiliza conhecimentos e habilidades matemáticos dispostos, de forma estruturada, conectada e dotada de significados, em sua memória de longo prazo. Esse aspecto da proficiência matemática exige mais do que o acúmulo de fatos e procedimentos estanques; requer, de fato, que o estudante compreenda os significados de construtos matemáticos e a relevância de seus usos em contextos variados.

Além disso, a organização desses conhecimentos propicia que o estudante possa conectá-los a novos conhecimentos ou aplicá-los a outros problemas ou contextos. Conhecimentos sobre conceitos e fatos, adquiridos com um esforço de compreensão, podem ser mais facilmente recuperados ou reconstruídos, uma vez que sejam demandados. O desenvolvimento da compreensão conceitual está diretamente ligado ao adensamento dos *chunks* sobre os quais já discutimos anteriormente. Adotando-se o termo *cluster* em vez de *chunk*, lemos, no documento de Kilpatrick e colaboradores:

> *Conceptual understanding frequently results in students having less to learn because they can see the deeper similarities between superficially unrelated situations. Their understanding has been encapsulated into compact clusters of interrelated facts and principles. The contents of a given cluster may be summarized by a short sentence or phrase like "properties of multiplication," which is sufficient for use in many situations. If necessary, however, the cluster can be unpacked if the student needs to explain a principle, wants to reflect on a concept, or is learning new ideas. Often, the structure of students' understanding is hierarchical, with simpler clusters of ideas packed into larger, more complex ones. (KILPATRICK et al., 2001, p. 121).*

A compreensão conceitual é um requisito para que o estudante busque e recupere conceitos, métodos e procedimentos em sua memória, de modo que possa utilizá-los, em diversos contextos, com correção (especialmente nas suas representações, nas sequências lógico-dedutivas e no uso de procedimentos), adequação (ao perceber quais objetos e métodos matemáticos são pertinentes e mais adequados ao contexto em que trabalha, além de ter clareza sobre de que modo devem ser usados, eventualmente com adaptações, naquele contexto) e justificativas.

Espera-se que o estudante, com proficiência no aspecto da compreensão conceitual, lide com as diferentes representações de objetos, relações e estruturas matemáticas, relacionando-as e distinguindo-as. É relevante que o estudante perceba quais representações podem ser mais adequadas, úteis ou vantajosas em um dado contexto ou problema. Por exemplo, faz parte da compreensão conceitual da representação geométrica de números racionais reconhecer sua utilidade para justificar critérios de equivalência e comparação de frações ou para representar as escalas (em potências de dez) usadas na expansão decimal desses números. Perceber relações/conexões entre diferentes representações de um objeto matemático (e.g., frações representadas na reta numérica, em barras ou em gráficos de setores; em termos de porcentagens ou de números decimais) é um aspecto importante do entendimento conceitual dessas representações, uma vez que possibilita ao estudante decidir quais delas melhor modelam e trazem mais informações em um dado contexto ou problema.

Portanto, além de propiciar a modelagem de uma situação ou a abordagem de um problema fazendo uso de diferentes possíveis representações dos conteúdos matemáticos pertinentes, a compreensão conceitual promove outras facetas da proficiência matemática, como a descoberta de conexões e estruturas e a comunicabilidade do raciocínio matemático, que serão detalhadas na sequência. De acordo com Kilpatrick *et al.*:

> *Knowledge that has been learned with understanding provides the basis for generating new knowledge and for solving new and unfamiliar problems. When students have acquired conceptual understanding in an area of mathematics, they see the connections among concepts and procedures and can give arguments to explain why some facts are consequences of other. (KILPATRICK et al., 2001, p. 119).*

Por exemplo, uma clara compreensão da diferença entre as expansões decimais de números racionais e de números reais irracionais é fundamental para o entendimento das noções de comensurabilidade e incomensurabilidade de segmentos. A conexão que se estabelece entre os conceitos de número racional e de pares comensuráveis de segmentos é uma das grandes ideias presentes no currículo escolar e base para avanços conceituais na aritmética dos números reais. Com essa compreensão devidamente fundamentada, o aluno tem bases sólidas para resolver problemas envolvendo a expressão de relações de semelhança entre medidas de figuras planas em termos de razões entre números.

Habilidades cognitivas complexas de autorregulação e metacognição podem ser também promovidas por uma firme compreensão conceitual: o estudante pode analisar seu próprio trabalho ao efetuar cálculos aritméticos e perceber que obtém resultados implausíveis, como em 0,7 x 0,12 = 0,84. Em situações como essa, mais do que verificações diretas das etapas do algoritmo, o estudante pode usar seu senso numérico, desenvolvido com raízes na compreensão profunda do sistema decimal posicional, para observar que o produto deve ser próximo de 0,7 x 0,1, ou seja, de um décimo de 7 décimos, isto é, de 7 centésimos, o que o leva a corrigir o resultado para 0,084. Da mesma forma, a compreensão conceitual promove o entendimento das representações matemáticas e amplia as possibilidades de efetiva comunicação de conceitos, processos e resultados matemáticos: o estudante pode embasar, expressar, justificar e comunicar seu trabalho em Matemática e, no sentido oposto, está apto a analisar criticamente a produção matemática de outras pessoas (em sala de aula ou, mais amplamente, no cotidiano, em textos e outras mídias).

Logo, a compreensão conceitual não se resume a armazenar um compilado de conceitos e fatos, mas a entender de onde provêm, como se relacionam e como podem engendrar novos desenvolvimentos conceituais e factuais, revelando a conexão interna das estruturas conceituais na Matemática. Por exemplo, o entendimento da noção de área de figuras planas vai além do conhecimento factual de expressões para o cálculo de figuras elementares, como paralelogramos, triângulos e círculos, em termos de medidas de lados ou raios, conforme seja, mas em compreender que: i) a área de uma figura é invariante por movimentos rígidos do plano; ii) a área é aditiva, no sentido de que, ao decompor uma figura em partes mensuráveis e disjuntas, a soma das áreas das partes é igual à da área da figura; iii) uma medida de área depende de fixarmos uma unidade de medida (por exemplo, a área de um quadrado de lados medindo uma unidade de comprimento); iv) a medida de área de uma figura plana é obtida por comparação (exata ou aproximada) com a unidade de medida de área; e assim por diante.

Esse *cluster* conectado de conceitos é a base da verdadeira compreensão conceitual do cálculo de áreas, cujo elemento mais emergente e imediato, no trabalho com um problema específico, é o conhecimento de expressões e fórmulas para determinar áreas de um certo conjunto de figuras elementares (e.g., o produto das medidas da base e da altura relativa a essa base no cálculo da área de um paralelogramo). Essa base conceitual pode ser ampliada com novos elementos ou novas abordagens e significados para os conceitos já estruturados. Nesse exemplo, dado o *chunk* de conhecimentos relativos à noção de área, o estudante pode perceber que áreas de figuras mais complexas podem ser aproximadas e, portanto, estimadas, recobrindo a figura com reticulados formados por quadrados de lados conhecidos.

Como aludido anteriormente, a compreensão facilita a compressão: blocos de conhecimentos são organizados de modo mais eficiente, reduzindo a carga cognitiva sobre a memória do trabalho, seja no aprendizado de novos conceitos, seja no domínio (*mastery*) de novas habilidades ou na resolução de problemas não rotineiros. O trabalho efetuado com conhecimentos e *skills* previamente estruturados resulta em novas aquisições de conhecimentos ou em interpretações e configurações daqueles já disponíveis; o estudante os incorpora, organicamente, ao seu repertório.

Fluência procedimental

A fluência procedimental diz respeito ao conhecimento de procedimentos matemáticos bem como à sua utilização adequada (quando e como utilizar), correta e destra. São exemplos de procedimentos em alguns domínios da Matemática Básica o uso de algoritmos em operações aritméticas e algébricas, a construção de representações geométricas e gráficas, a execução de cálculos envolvendo equações e funções, a determinação de medidas associadas a diversas grandezas ou de medidas estatísticas relacionadas a conjuntos de dados. O estudante deve ser capaz de utilizar tais procedimentos de forma **acurada, eficiente e flexível.**

Por exemplo, ao tentar determinar o valor máximo (ou mínimo) de uma função quadrática, um estudante fluente pode recorrer diretamente ao conhecimento de seus zeros reais, no caso em que existam e sejam distintos, e considerar que o valor extremo da função ocorre quando a variável tem valor igual à média aritmética dos zeros, em vez de lançar mão, mecanicamente, de fórmulas aplicáveis ao caso geral. Trata-se de efetuar procedimentos mais eficientes (e que envolvem maior compreensão conceitual) do que a aplicação de vários passos de um algoritmo pré-definido. Em outra situação corriqueira no Ensino Médio, ao defrontar-se com problemas de Geometria Analítica em que se deve determinar o baricentro ou a área de um triângulo, o estudante pode adotar um sistema de eixos coordenados adaptados à figura, eventualmente explorando suas simetrias e considerando o fato de que as medidas são invariantes por translação e rotação de eixos. Esse segundo exemplo ilustra o uso flexível, reflexivo, criativo e adaptativo de procedimentos, o qual requer entendimento conceitual profundo dos conhecimentos que embasam o emprego de expressões rotineiras de cálculos geométricos em termos de coordenadas cartesianas, comuns nos livros didáticos e em testes.

Em cálculos aritméticos como a divisão de 10.101.010 por 101, torna-se mais eficiente observar, com base nas propriedades do sistema decimal, que o dividendo é igual a 101 vezes 10 mais 101 vezes 100.000 e, que, portanto, sua divisão por 101 é igual a 100.010 do que usar diretamente o algoritmo euclidiano da divisão em várias iterações. Nesse mesmo contexto, o uso de estimativas razoáveis (critérios de razoabilidade demandam senso numérico) já indicam para o estudante que a quociente teria ordem de grandeza de 10.000.000/100 = 100.000. A acurácia e a correção dos resultados podem ser afetadas pela escolha de um procedimento eficiente. A flexibilidade diz respeito a lançar mão de diferentes procedimentos ou de variantes de um procedimento, como em somas da forma 97 + 56, em que as parcelas, ao serem decompostas em 90 + 50 + 5 + 5 + 2 + 1 ou reescritas como 100 + 53, podem ser somadas de modo mais eficiente do que recorrendo a algoritmos usuais. Em problemas de Combinatória, por exemplo, uma estratégia de solução pode ser vislumbrada mais facilmente recorrendo-se a princípios fundamentais do que a fórmulas prontas para casos importantes, todavia particulares e rotineiros, de contagem de permutações e combinações.

De modo geral, a fluência procedimental é indissociável da compreensão conceitual: ou seja, a correção, a eficiência e a flexibilidade no uso de algoritmos pressupõem o claro entendimento dos conceitos e fatos envolvidos. De acordo com Kilpatrick e colaboradores:

> *Students need to see that procedures can be developed that will solve entire classes of problems, not just individual problems. By studying algorithms as "general procedures," students can gain insight into the fact that mathematics is well structured (highly organized, filled with patterns, predictable) and that a carefully developed procedure can be a powerful tool for completing routine tasks. (KILPATRICK et al., 2001, p. 121).*

Portanto, não apenas a utilização reflexiva de procedimentos depende da compreensão dos conceitos em sua base, mas, no sentido inverso, ajuda a aprofundar essa compreensão. A prática (preferivelmente espaçada em vez de massiva, a julgar pelas descobertas da Psicologia Cognitiva) é essencial para internalizar conceitos e fatos matemáticos, garantindo sua integração à memória de longo prazo.

Por outro lado, "(...) *once students have learned procedures without understanding, it can be difficult to get them to engage in activities to help them understand the reasons underlying the procedure*". A prática, devidamente espaçada e deliberada, para aquisição dos *skills* procedimentais permite aprofundar o entendimento conceitual e a capacidade de resolver problemas.

> *The attention they devote to working out results they should recall or compute easily prevents them from seeing important relationships. Students need well-timed practice of the skills they are learning so that they are not handicapped in developing the other strands of proficiency. (KILPATRICK et al., 2001).*

A ênfase em práticas procedimentais dissociadas do aprofundamento da compreensão conceitual pode cristalizar o uso de procedimentos errados ou o entendimento falho de conceitos e fatos matemáticos, tornando mais complicado identificar essas falhas em etapas posteriores da formação do aluno, com efeitos deletérios sobre todo o aprendizado subsequente. Por exemplo, erros no entendimento conceitual ou nos procedimentos de adição e multiplicação de frações podem comprometer a aquisição futura de conhecimentos sobre proporcionalidade.

> *If students have been using incorrect procedures for several years, then instruction emphasizing understanding may be less effective. When children learn a new, correct procedure, they do not always drop the old one. Rather, they use either the old procedure or the new one depending on the situation. Only with time and practice do they stop using incorrect or inefficient methods. Hence initial learning with understanding can make learning more efficient. (KILPATRICK et al., 2001).*

Portanto, compreensão e fluência reforçam-se mutuamente, possibilitando que o estudante perceba relações entre objetos, estruturas e operações nos domínios da Matemática em vez de considerá-los como fatos e procedimentos isolados, cada um dos quais adotado para determinados tipos de práticas rotineiras e problemas específicos. As desejáveis competências relacionadas a aplicações e transferência dos conhecimentos matemáticos (inclusive para situações cotidianas, externas ao ambiente escolar) ficam também comprometidas em uma abordagem que enfatiza procedimentos desvinculados de um contexto conceitual mais amplo e integrador, apresentando-os meramente como algoritmos para executar tarefas previsíveis.

Remetendo a um exemplo mencionado pelos autores, o uso, correto e justificado, de algoritmos de adição e multiplicação de números naturais em atividades práticas deliberadas contribui para esclarecer as propriedades do sistema posicional decimal e abre caminho para o entendimento profundo da expansão decimal de números racionais e reais, bem como, no domínio da Álgebra, para as operações aritméticas com expressões algébricas. Por outro lado, a compreensão conceitual permite que o estudante possa decidir, entre procedimentos e representações alternativas, qual é o mais adequado e eficiente em uma classe de exercícios e problemas. Os autores do painel *Adding it up* apontam que a alegada dicotomia entre a ênfase na compreensão ou no desenvolvimento de *skills* procedimentais por meio da prática é falsa:

> *(...) the two are interwoven. Understanding makes learning skills easier, less susceptible to common errors, and less prone to forgetting. By the same token, a certain level of skill is required to learn many mathematical concepts with understanding, and using procedures can help strengthen and develop that understanding. (KILPATRICK et al., 2001).*

O uso judicioso de tecnologias e de ferramentas (como *softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, calculadoras, instrumentos de desenho geométrico, entre outras) deve facilitar o esforço técnico e exige o entendimento conceitual dos procedimentos mediados por esses aparatos. O domínio conceitual e técnico sobre as noções e ferramentas matemáticas empregadas é um pressuposto cognitivo para todas essas operações.

Competência estratégica (resolução de problemas)

Essa dimensão da competência matemática diz respeito à capacidade de formular e representar problemas em termos matemáticos e de resolvê-los. Na apresentação dos ciclos de Polya e de resolução de problemas no arcabouço do Pisa, discutimos extensamente a complexidade inerente ao processo de formulação e representação matemáticas do problema: em contextos reais, não é imediato reconhecer que conceitos, fatos ou estruturas matemáticas podem ser usados na modelagem de uma dada situação, tampouco a aplicação de conhecimentos matemáticos se dá de uma forma direta com o emprego de procedimentos rotineiros. Mesmo no âmbito escolar, Hattie e colaboradores (2016) distinguem, em *Visible learning for mathematics*, exercícios, problemas rotineiros e problemas não rotineiros: de acordo com os autores, exercícios são o tipo de tarefa mais frequente como prática apresentada nos livros-texto usuais, destinados à prática de um determinado *skill* e destituídos de um contexto. Problemas podem ter maior grau de complexidade e exigir mais do que a aplicação direta de um dado conhecimento ou habilidade específica. De fato, podem demandar a combinação de diversos elementos de repertório, algumas vezes utilizados de formas não-rotineiras.

Em materiais didáticos e testes, um exemplo usual de problemas com aplicações rotineiras de conhecimentos, fatos e procedimentos específicos são aqueles formulados com palavras (*word problems*), em que contextos, muitas vezes "cotidianos", são apresentados na forma de textos nos quais não estão explicitadas as representações matemáticas necessárias à aplicação, geralmente direta, de conceitos e operações matemáticas. O enunciado dos problemas pode trazer, além do texto, suportes com gráficos, infográficos, tabelas, figuras e outros elementos em que estão presentes informações, relevantes ou secundárias, para a formulação matemática. Uma das habilidades fundamentais necessárias para a proficiência na resolução é, exatamente, a de distinguir quais informações são essenciais e quais não são relevantes em uma dada situação-problema.

Vemos, a seguir, um exemplo de exercício a respeito de operações com frações.

Exercício. *Calcule 3/5 de 5/8.*

Esse exercício requer a aplicação direta do conceito de fração, uma vez que o estudante deve representar o procedimento no comando "calcule uma dada fração de um número" em termos, por exemplo, da operação

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{8}$$

Em exercícios desse tipo, a formulação e a representação são praticamente automáticas: o objetivo precípuo é o de promover a familiaridade do estudante com o conceito de fração, aqui na acepção de "uma dada parte de uma quantidade". Além disso, espera-se o desenvolvimento da prática com operações envolvendo frações. Uma sequência de exercícios nesse formato é, em geral, disposta em níveis de dificuldade técnica crescente, mas não necessariamente de aumento da complexidade cognitiva. Portanto, conjuntos de exercícios em práticas deliberadas (e repetição espaçada) podem promover tanto a compreensão conceitual quanto a fluência procedimental, como discutido anteriormente.

Voltando ao exemplo, o estudante pode, de forma mais automática e menos reflexiva, empregar, na resolução do exercício, uma cadeia de procedimentos aos quais está habituado e que reconhece como familiares ao contexto de multiplicação de frações, efetuando cálculos como os seguintes,

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{3 \times 5}{5 \times 8} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

em que utiliza regras de multiplicação e simplificação de frações. Trata-se de uma estratégia de baixa eficiência e que pode significar lacunas de compreensão conceitual. Alternativamente, dado que tenha um entendimento consolidado dos conceitos na base dos procedimentos, pode argumentar que 1/5 de 5/8 é 1/8 e que, portanto, 3/5 são 3/8.

Voltando ao tema da distinção entre exercícios e problemas, vejamos como esse exemplo de exercício procedimental aparece como parte das etapas na formulação e representação matemática de um *word problem* apresentado na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) de 2019 (OBMEP, 2023).

QUADRO 3

Problema 2

OBMEP 2019 – Primeira Fase – Nível 2 – Questão 10

Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche 3/5 da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche 5/8 da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande.

O que vai acontecer com a caneca grande?

A) Ela ficará preenchida em 7/8 de sua capacidade.
B) Ela ficará preenchida em 8/13 de sua capacidade.
C) Ela ficará preenchida em 5/8 de sua capacidade.
D) Ela ficará cheia, sem transbordar.
E) Ela vai transbordar.

O estudante proficiente na formulação e resolução de problemas descontextualiza o fato de que o enunciado fala de canecas, abstraindo a informação relevante no enunciado, que é a comparação ou razão entre medidas de capacidade, expressas como frações. Tendo isolado os fatos e aspectos realmente relevantes para a formulação matemática, passa a recuperar, em seu repertório, elementos para a representação (nesse caso, numérica) dos dados considerados importantes. A depender do que dispõe em seu repertório e da estratégia de resolução (talvez ainda difusa, de acordo com o modelo de Polya), pode utilizar a representação, certamente mais habitual, de que

- 1 caneca pequena = 3/5 da caneca média,
- 1 caneca média = 5/8 da caneca grande.

Ou, ainda, em termos de razões,

- capacidade da caneca pequena/capacidade da caneca média = 3/5,
- capacidade da caneca média/capacidade da caneca grande = 5/8.

Uma alternativa de representação, que não utiliza explicitamente o conceito de frações, mas tão-somente números naturais, seria, por fim,

- 5 canecas pequenas = 3 canecas médias,
- 8 canecas médias = 5 canecas grandes.

Cada uma dessas representações conecta a situação posta pelo problema, de um lado, aos conhecimentos prévios disponíveis; de outro, à estratégia entrevista de resolução do problema. A partir da representação matemática definida e da estratégia inicial, o estudante passa a combinar conceitos e procedimentos em etapas, progressivas e recursivas, rumo à solução do problema.

Por exemplo, caso represente os dados do problema em termos de relações entre números naturais, pode constatar que as quantidades inteiras de canecas não são diretamente comparáveis. Com essa constatação, relembra situações similares em que fora preciso encontrar quantidades comparáveis com dois ou mais números naturais dados, no contexto de exercícios sobre múltiplos comuns. A conexão com esses conhecimentos prévios não é tão imediata e envolve retomá-los criativamente, adaptando-os ao presente contexto. Esse esforço traz uma carga cognitiva à memória de trabalho; sem o repertório existente na memória de longo prazo, o estudante poderia chegar, nessa etapa, à percepção, bastante comum, de ficar paralisado diante do problema, sem clareza dos passos a seguir.

Portanto, a plena capacidade da memória de trabalho, embasada pelo acesso a um repertório que vai se reorganizando no processo de resolução do problema, é exigida em etapas de maior demanda cognitiva como essas.

A formulação matemática do problema passa pela construção de um modelo mental desse problema, em que as relações estruturais entre os dados relevantes são também representadas. No exemplo acima, além de interpretar as informações em termos de frações ou razões entre capacidades, as relações entre essas capacidades, expressas no enunciado na forma de texto, foram representadas por relações de igualdade ou de proporcionalidade.

Outro aspecto decisivo da competência estratégica é o de identificar similaridades entre problemas superficialmente diferentes, mas que podem ser formulados em termos de representações matemáticas similares. De acordo com Kilpatrick *et al.*:

> *Not only do students need to be able to build representations of individual situations, but they also need to see that some representations share common mathematical structures. Novice problem solvers are inclined to notice similarities in surface features of problems, such as the characters or scenarios described in the problem. More expert problem solvers focus more on the structural relationships within problems, relationships that provide the clues for how problems might be solved. (KILPATRICK, 2001, p. 125).*

Da mesma forma, é relevante que o estudante tenha flexibilidade em ajustar elementos do repertório para formular e representar matematicamente problemas estruturalmente similares, mas que exigem, em suas modelagens matemáticas, variações inteligentes de conceitos, fatos ou procedimentos. Essa faceta da competência estratégica é demandada, sobretudo, quando o estudante se defronta com problemas **não rotineiros**. Por exemplo, consideremos um problema rotineiro que pode ser modelado e resolvido segundo procedimentos usuais envolvendo equações lineares.

QUADRO 4

Problema 3

CEnPE – Avaliação Diagnóstica – Eusébio – Nono ano – Questão 4
Um motorista verificou que a cidade de Jucás é 110 quilômetros mais distante de Eusébio do que a cidade de Sobral.

Se a soma das distâncias dessas cidades a Eusébio é igual a 680 quilômetros, qual a distância de Eusébio a Sobral, em quilômetros?
A) 285.
B) 340.
C) 395.
D) 570.

Trata-se de um problema usual em testes e em livros-texto. O aluno com conhecimento factual e procedimental correspondente aos anos finais do Ensino Fundamental reconhece o tipo de *word problem* que pode ser modelado em termos de sistemas de equações lineares da forma

$$\begin{cases} a + b = 680 \\ a - b = 110 \end{cases}$$

e procede com etapas meramente procedimentais e costumeiras para produzir a resposta numérica. Por outro lado, essa resposta é diretamente interpretável em termos do que foi demandado no problema: a validação e interpretação dos resultados não traz desafios cognitivos consideráveis para o estudante que tenha efetuado os procedimentos com compreensão conceitual e correção técnica.

Mesmo problemas rotineiros como esse podem ter soluções segundo procedimentos diferentes dos habituais, o que traz alguma evidência sobre o domínio, pelo estudante, de *skills* cognitivos de ordem superior. Estratégias de solução alternativas às familiares ao professor exigem, por outro lado, algumas competências profissionais mais complexas do que as que seriam necessárias para uma correção *by the book*. Por exemplo, um estudante proficiente em competência estratégica e raciocínio adaptativo pode engendrar uma solução segundo uma variante do chamado método da falsa posição (mesmo sem conhecer o método ou sua justificativa matemática, mas apenas intuindo a estratégia necessária para o problema). Nesse caso, argumentaria que, se as distâncias fossem iguais, mediriam, cada uma, 680/2 = 340 quilômetros; mas, dado que a diferença das distâncias é igual a 110, deveria diminuir 110/2 = 55 em uma delas e acrescentar 55 à outra metade, obtendo 340 – 55 = 285 e 340 + 55 = 395 como as distâncias, de acordo com os dados do problema. Um professor, diante de abordagens menos usuais como essa, precisa exercitar habilidades muito finas relativas tanto ao “conhecimento especializado do conteúdo” quanto ao “conhecimento do conteúdo e dos alunos”, dois dos domínios do conhecimento pedagógico do conteúdo. Desenvolveremos esses pontos mais adiante, ao tratarmos da questão da formação docente associada a um processo de avaliações formativas.

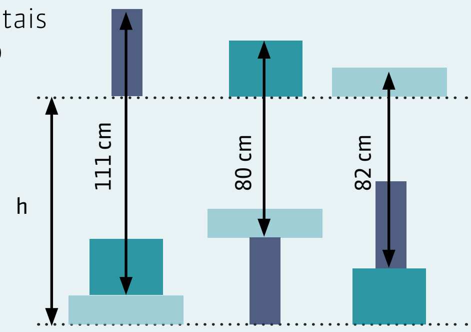
A seguir, temos um exemplo de problema não rotineiro.

Quadro 5

Problema 4

OBMEP 2019 – Primeira Fase – Nível 2 – Questão 17

Na figura, os lados dos retângulos são horizontais ou verticais, e os retângulos de mesma cor são idênticos.



Qual o valor de h?

A) 88 cm.
B) 89 cm.
C) 90 cm.
D) 91 cm.
E) 92 cm.

Uma estratégia rotineira seria a de modelar o problema auxiliar de encontrar as medidas das alturas dos retângulos em termos de um sistema linear da forma,

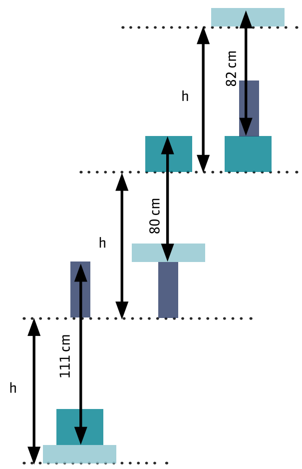
$$\begin{cases} a + b = 111 \\ a + c = 80 \\ b + c = 82 \end{cases}$$

e, resolvido o sistema e determinadas as alturas, obter o valor de h considerando, por exemplo, que

$$h - c = 111 - b.$$

Essa estratégia se apoia no uso de procedimentos rotineiros, mas usados com flexibilidade, ou seja, combinados com novas ideias, necessárias para os passos seguintes à modelagem e representação. A dificuldade técnica é considerável, uma vez que o caminho adotado envolve adaptar abordagens costumeiras de resolução de sistemas de equações lineares.

Outra possibilidade de resolução revelaria, de forma mais evidente, a capacidade do estudante de defrontar-se com situações pouco familiares e, ao mesmo tempo, produzir soluções que usam o repertório de modo mais eficiente. Justapondo e transladando as três configurações na figura (vide a próxima figura), o estudante pode perceber que $h + h + h = 273 = 3 \times 91$.



Nessa segunda abordagem ao problema, o repertório mobilizado é mais básico (diz respeito a operações com números naturais, essencialmente) e a dificuldade técnica é claramente menor do que na primeira estratégia. No entanto, há um salto cognitivo inicial na ideia de que, reorganizando os dados disponíveis na figura, uma informação de grande relevância para o problema pode ser acessada.

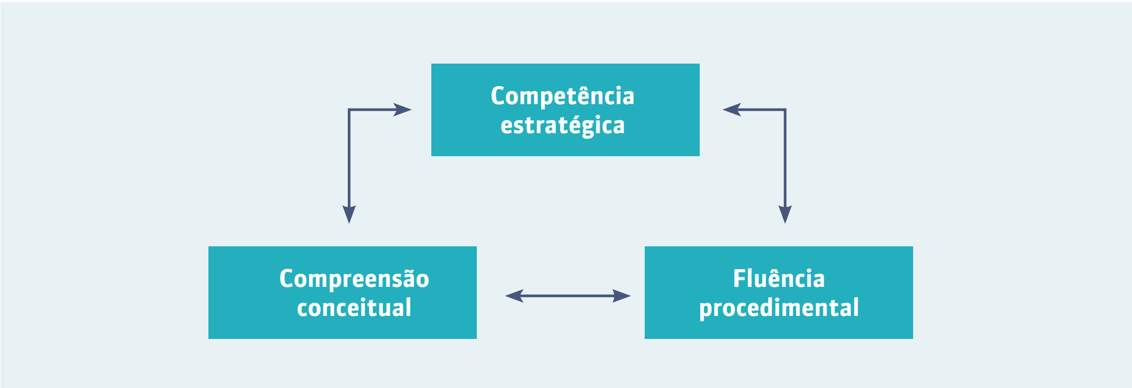
Esses exemplos hipotéticos de processos de resolução demonstram como a flexibilidade cognitiva é um aspecto central da competência estratégica, especialmente no caso de problemas não rotineiros. De acordo com Kilpatrick *et al.*:

> *In becoming proficient problem solvers, students learn how to form mental representations of problems, detect mathematical relationships, and devise novel solution methods when needed. A fundamental characteristic needed throughout the problem-solving process is flexibility. Flexibility develops through the broadening of knowledge required for solving nonroutine problems rather than just routine problems. (KILPATRICK, 2001).*

Assim como em Hattie *et al*. (2016), os autores distinguem entre problemas rotineiros e não rotineiros: os rotineiros são aqueles que o aprendiz sabe resolver com base na experiência prévia. Quando confrontado com um problema rotineiro, o estudante reconhece um método de resolução adequado e consegue aplicá-lo diretamente. Portanto, problemas desse tipo demandam a reprodução, ancorada na prática frequente, de procedimentos bem assentados e já associados a uma dada classe de problemas.

Em oposição, quando exposto a problemas não rotineiros, o estudante não reconhece, de imediato, que métodos e procedimentos utilizar. Ademais, definida uma estratégia de resolução, a aplicação de conhecimentos factuais e procedimentais não é necessariamente direta e requer, ao contrário, reconfigurar criativamente esses conhecimentos em estruturas e procedimentos pouco habituais. Na prática matemática real, os problemas estão na fronteira do conhecimento disponível. Da mesma forma, estudantes podem ser confrontados com problemas para os quais precisam criar conceitos, métodos e procedimentos originais, mesmo que baseados em adaptações dos que já são conhecidos.

As resoluções das questões que discutimos anteriormente exemplificam outro aspecto essencial da proficiência matemática: a dependência recíproca entre compreensão conceitual, fluência procedimental e competência estratégica.



Remontando aos exemplos acima a fim de esclarecer os fluxos entre essas três dimensões da competência matemática, vemos que um problema rotineiro como o 3 ajuda a consolidar conceitos sobre equações, incógnitas e expressões algébricas ao mesmo tempo que permite praticar algoritmos convencionais de resolução de sistemas lineares. Reciprocamente, tarefas como o problema 2 podem ser importantes ativos para o ensino e a aprendizagem da noção de fração ou de razão. O trabalho de formulação matemática e resolução do problema pode ensejar uma atividade de instrução, dirigida pelo professor ou autônoma, ao longo da qual são explorados os usos da fração para expressar partes de uma quantidade ou razões entre quantidades. Além disso, o problema 2 apresenta um contexto intuitivo e interessante para introduzir ou consolidar procedimentos de adição e multiplicação de frações, juntamente com sua base conceitual. De acordo com Kilpatrick *et al.*:

> *Part of developing strategic competence involves learning to replace by more concise and efficient procedures those cumbersome procedures that might at first have been helpful in understanding the operation (...). Students develop procedural fluency as they use their strategic compe- tence to choose among effective procedures. They also learn that solving challenging mathematics problems depends on the ability to carry out procedures readily and, conversely, that problem-solving experience helps them acquire new concepts and skills. (KILPATRICK et al., 2001, p. 127).*

Em síntese, a competência estratégica requer um conjunto de habilidades, entre as quais estão:

- mobilizar os conhecimentos necessários;
- analisar os dados, o contexto e o que é demandado no problema;
- identificar possíveis pontos de entrada para abordar o problema;
- compreender o significado do problema e planejar uma estratégia;
- considerar casos similares ou particulares buscando *insights* e validando a estratégia planejada;
- decompor o problema em etapas de modo a resolvê-las gradualmente/sucessivamente;
- monitorar e avaliar o progresso da estratégia em suas etapas e resultados, alterando o planejamento, se necessário;
- comparar diferentes representações matemáticas (gráficos, figuras, diagramas, equações) do problema ou diferentes estratégias para sua resolução.

Raciocínio matemático (*adaptive reasoning*)

Os autores de *Adding it up* consideram esse aspecto da proficiência como sendo "*(...) the glue that holds everything together, the lodestar that guides learning*". O raciocínio matemático, no sentido lato que consideramos aqui, articula e dá sentido e significado a conceitos, fatos, procedimentos, atividades e resultados do trabalho matemático.

Necessariamente, os aspectos cognitivos de supervisão, autorregulação e metacognição estão presentes nessa dimensão da proficiência matemática. Da mesma forma, o domínio da argumentação lastreada no raciocínio lógico-dedutivo é um componente do raciocínio adaptativo. De fato, uma das competências relativas ao raciocínio matemático é pensar logicamente sobre as relações entre conceitos e contextos, segundo uma cadeia rigorosa de deduções lógicas:

> *In mathematics, deductive reasoning is used to settle disputes and disagreements. Answers are right because they follow from some agreed upon assumptions through series of logical steps. Students who disagree about a mathematical answer need not rely on checking with the teacher, collecting opinions from their classmates, or gathering data from outside the classroom. In principle, they need only check that their reasoning is valid. (KILPATRICK et al., 2001).*

No entanto, a qualidade de raciocínio matemático que consideramos não se restringe a produzir argumentos válidos por meio de cadeias de deduções lógicas. A intuição e a indução (vulgar) produzem também elementos relevantes baseados em analogia, generalização, formulação de hipóteses, reconhecimento e expressão matemática de padrões e regularidades, entre outras operações não necessariamente redutíveis ao raciocínio lógico-dedutivo. Várias das características dessa noção ampliada de raciocínio matemático (e mais fidedigna da criação e da descoberta matemáticas, de fato) são ubíquas e frequentes na produção e na transferência de conhecimentos matemáticos. São, portanto, indispensáveis em atividades matemáticas de elevada demanda cognitiva.

O raciocínio adaptativo é também essencial para uma comunicação matemática fluente. Justificar procedimentos e resultados, comunicando argumentos para outras pessoas (ou, inversamente, buscando compreender e validar argumentos produzidos por outras pessoas), requer não apenas registrar cuidadosamente os passos dedutivos e representar corretamente conceitos e procedimentos, mas também apresentar justificativas intuitivas, plausíveis e inteligíveis para diferentes interlocutores.

Um exemplo característico dessa distinção entre prova dedutiva e justificativa intuitiva é o de tornar aceitável o resultado de operações como $4 : \frac{1}{2} = 8$. Nesse exemplo prosaico, argumentar que a divisão é a "operação inversa" da multiplicação e que, sendo assim, $4 : \frac{1}{2} = 8$ porque $8 \times \frac{1}{2} = 4$ talvez não seja convincente mesmo para quem formula o argumento, caso ainda esteja se habituando às operações com números racionais. Da mesma forma, "recitar" o uso do procedimento segundo o qual a divisão de a/b por c/d (com cbd não nulo) é efetuada multiplicando-se a/b por d/c não é uma justificativa no sentido que temos tratado aqui. No caso específico da divisão $4 : \frac{1}{2}$, explicar o resultado em termos de servir 4 litros de suco em copos de ½ litro pode justificar convincentemente o resultado 8. Kilpatrick e colaboradores apontam, com respeito à necessidade de desenvolver a justificativa matemática, que:

> *Students need to use new concepts and procedures for some time and to explain and justify them by relating them to concepts and procedures that they already understand. For example, it is not sufficient for students to do only practice problems on adding fractions after the procedure has been developed. If students are to understand the algorithm, they also need experience in explaining and justifying it themselves with many different problems. (KILPATRICK et al., 2001, p. 130).*

Em suma, o raciocínio adaptativo envolve, entre outros, processos de abstração, generalização, indução e dedução. Assim como antes, esse aspecto da proficiência matemática é intrinsecamente relacionado aos três anteriores. De fato, requer-se raciocínio adaptativo para a resolução de problemas e, portanto, para o desenvolvimento da competência estratégica, especialmente na modelagem matemática dos problemas; na formulação de hipóteses e conjecturas; na generalização ou particularização; na percepção e descrição de estruturas, padrões e relações; na supervisão sobre entraves, progressos, erros e acertos; na interpretação e validação dos resultados; entre outros processos próprios dessa competência.

> *Learners draw on their strategic competence to formulate and represent a problem, using heuristic approaches that may provide a solution strategy, but adaptive reasoning must take over when they are determining the legitimacy of a proposed strategy. (KILPATRICK et al., 2001).*

A expressão do raciocínio matemático, no sentido amplo em que o consideramos aqui, requer, por óbvio, domínio da representação de conceitos, objetos, estruturas e relações matemáticas, ou seja, está assentada numa sólida compreensão conceitual que, no sentido inverso, se constrói com um intenso esforço de raciocínio adaptativo. O mesmo pode ser dito da fluência procedimental: a execução, supervisão, validação e adaptação criativa de procedimentos demandam vários aspectos, de diferentes graus de complexidade, de raciocínio matemático.

A seguir, estão expostos outros aspectos da competência matemática que consideramos relevantes e são enfatizados em outros *frameworks* (por exemplo, no *Common Core* americano ou nos *standards* de Cingapura) como adicionais aos que vimos acima, embora obviamente dependentes desses.

Aplicação e modelagem

- Aplicar conhecimentos matemáticos para elaborar modelos de fenômenos em diversos contextos e resolver problemas resultantes desses modelos.

Essa prática matemática compreende ações como:

- formular hipóteses que simplifiquem a situação a ser modelada, permitindo que seja descrita e abordada matematicamente;
- compreender as limitações do modelo, em termos de poder de explicação e de predição, devidas às premissas simplificadoras ou a interpretações espúrias dos resultados matemáticos;
- identificar os elementos da linguagem matemática a serem usados na construção, descrevendo variáveis de interesse, suas relações e variações, bem como estruturas observadas no contexto, entre outros aspectos do fenômeno ou do problema passíveis de descrição matemática;
- utilizar o modelo para efetuar procedimentos matemáticos e deduzir resultados ou conclusões matematicamente embasadas;
- interpretar, criticar e validar (ou refutar) os resultados matemáticos obtidos pela modelagem em termos do contexto do fenômeno ou do problema;
- aprimorar o modelo, confrontando as premissas em sua construção e a adequação entre as respostas que gera e o contexto real do fenômeno ou do problema.

Comunicação

- Comunicar-se sobre etapas e resultados do raciocínio matemático, embasando, explicando, justificando e analisando criticamente usos de conceitos e de procedimentos.

Essa prática envolve fundamentar e expressar argumentos, procedimentos e resultados utilizados ou produzidos no trabalho matemático executado pelo aluno: a explicação, com argumentos logicamente embasados, dos processos segundo os quais os conhecimentos matemáticos foram utilizados; a justificativa sobre a seleção desses conhecimentos e procedimentos para a modelagem ou para a resolução de problemas; e argumentar sobre as evidências que permitem comparar diferentes modelos para descrever matematicamente um dado contexto ou diferentes procedimentos para obter-se um resultado ou resolver-se um problema.

Espera-se que o aluno possa distinguir claramente entre raciocínio dedutivo e argumentos baseados em indução (vulgar), entendendo o alcance e as limitações de um e de outro. Esse aspecto da prática matemática envolve habilidades tanto de metacognição e de pensamento crítico e reflexivo quanto de comunicação. De fato, o aluno deve ser capaz de: explicar e de sustentar seus argumentos; analisar criticamente os argumentos de outras pessoas (ou aqueles apresentados em livros, em aulas e em outras referências) e os seus próprios; e expor com clareza procedimentos e resultados usados ou obtidos em seu trabalho matemático.

Conexões

- Discernir estruturas no âmbito da própria Matemática ou em domínios/contextos em que seja aplicada.

O estudante pode discernir uma estrutura que conecta e dá novos significados e usos a objetos matemáticos que, inicialmente, eram percebidos individualmente. Da mesma forma, pode estabelecer correspondências entre objetos (e relações entre eles) pertencentes a domínios diferentes, mas com uma estrutura comum ou homóloga. Por exemplo, o aluno pode perceber que figuras geométricas planas diferentes possuem as mesmas simetrias e, portanto, essas simetrias determinam relações, comuns a todas as figuras dessa classe, entre lados e ângulos; e, ainda, constatar que fatos matemáticos particulares podem ser deduzidos a partir de premissas mais gerais e que, portanto, há uma conexão entre esses fatos aparentemente isolados. Em outra situação, pode observar a ideia comum de proporcionalidade tanto no estudo das razões e proporções quanto no trabalho com semelhança de figuras planas.

A percepção e o uso de estruturas podem facilitar a resolução de problemas ao propiciar ao aluno observar relações, antes implícitas, entre elementos dados nos contextos (figuras, expressões aritméticas e algébricas, entre outros). Por exemplo, um problema envolvendo triângulos pode ser consideravelmente simplificado ao utilizar-se fatos conhecidos sobre a estrutura de triângulos inscritos ou circunscritos a círculos. Reconfigurar o problema desde um ponto de vista mais "elevado", integrando suas partes a uma estrutura, pode significar uma mudança produtiva na estratégia de resolução.

- Identificar e utilizar padrões e regularidades na organização do conhecimento matemático e na resolução de problemas.

Nos *standards* do *Common Core*, usa-se, na descrição dessa prática, o termo *shortcut*. De fato, boa parte da experiência matemática deriva de construir *shortcuts* (vide o livro *Thinking Better*, de Marcus du Sautoy) que tenham se mostrado eficazes tanto para organizar *chunks* (por vezes bastante complexos) de conhecimentos quanto para representar uma dada estratégia de resolução eficaz para uma determinada classe de problemas. Algumas das habilidades matemáticas prevalentes, a esse propósito, envolvem indução (vulgar), generalização e abstração, uma vez que os padrões e regularidades são percebidos, em geral, a partir de situações particulares. Esse é o caso da constatação que um aluno pode ter de que a área de um triângulo é preservada ao mover-se um vértice oposto a um lado fixado; percebendo essa invariância, o aluno pode deduzir/induzir que basta determinar a área de uma configuração simétrica desse triângulo, a qual tem a mesma área que um retângulo com mesma altura e lado com metade do comprimento do lado fixado no triângulo. Em outra situação hipotética, o aluno pode dar-se conta de que frações cujos denominadores têm fatores diferentes de 2 e 5 geram expansões decimais não finitas.

DOMÍNIOS DE CONHECIMENTOS E HABILIDADES NA MATEMÁTICA BÁSICA

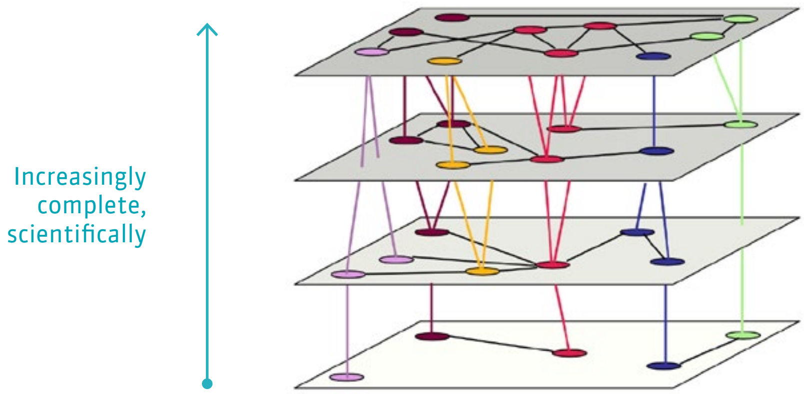
Nesta seção, expandimos e aprofundamos a análise do domínio da Matemática Básica, apresentando a Matriz dos Saberes, uma organização dos conhecimentos e *skills* matemáticos que compõem o repertório fundamental para a consecução das metas de aprendizagem e o desenvolvimento das competências matemáticas enumeradas anteriormente.

Nessa organização, seguimos a ideia de mapas ou trajetórias de aprendizagem, descrevendo os conhecimentos e habilidades no domínio da Matemática Básica em uma estrutura relacional de nós e *links*. A matriz de incidência que define as conexões entre diferentes conhecimentos e habilidades permite usar ferramentas de visualização que tornam essa organização do repertório legível e acessível. Além disso, torna-se possível identificar, em meio à estrutura global, diferentes caminhos conectando conhecimentos que incidem em um dado objetivo de aprendizagem. Esses caminhos definem múltiplas possibilidades de percursos curriculares, adequados às diferentes trajetórias cognitivas dos estudantes.

Enfatizamos que a matriz não se limita à enumeração de tópicos extraídos ou derivados do currículo. De fato, apresenta possibilidades de mapeamento das relações lógicas e cognitivas entre os conhecimentos/habilidades, um dos aspectos fundamentais do modelo cognitivo subjacente ao modelo de avaliação, de acordo com as premissas do ECD. As relações uni ou bidirecionais entre as habilidades descritas na matriz são modeladas em termos de grafos ou árvores, representando, portanto, possíveis percursos que conduzem de uma habilidade a outra.

Essa progressão lógico-cognitiva não é, necessariamente, linear, visto que alguns conhecimentos e habilidades retomam, em um nível de maior complexidade, conhecimentos e habilidades prévios. Essa progressão na complexidade deve ficar clara nas especificações que são feitas em cada tópico da matriz: ao compararmos as descrições de habilidades homólogas, mas em níveis diferentes, devemos deixar claro de que modo abordagens mais complexas dependem de etapas de menor complexidade e, ao mesmo tempo, como a retomada de um tema em um nível de maior complexidade aprofunda, ressignifica e reorganiza seus homólogos de menor complexidade.

Por exemplo, o tema da proporcionalidade é recorrente e estrutural de todo um eixo de conhecimentos e habilidades, trazendo novos camadas de significado e de uso para a equivalência de representações de números racionais ao mesmo tempo que abre caminho para modelar relações lineares entre variáveis (ou entre suas variações).



Fonte: STEVENS, S. Y.; DELGADO, C.; KRAJCIK, J. S. Developing a Hypothetical Learning Progression for the Nature of Matter. *Journal of Research in Science Teaching*, 2009. Adapted with permission. Extraído de PELLEGRINO, 2010.

A figura acima ilustra camadas da Matriz dos Saberes e, em cada uma, nós que representam conhecimentos e habilidades. As conexões entre nós em uma mesma camada ou entre nós de camadas diferentes podem significar tanto relações lógicas entre aspectos do conhecimento matemático quanto organizações desses elementos de conhecimento em *chunks* ou *clusters* na memória do longo prazo dos aprendizes. Seguindo o eixo vertical de complexidade crescente, vemos camadas em que há mais elementos conceituais ou procedimentais, ou seja, maior quantidade de nós, com conexões cada vez mais densas, representando padrões mais complexos de representação e raciocínio matemáticos.

Desse modo, a evolução indicada pela seta pode representar a organização cada vez mais complexa de conhecimentos no domínio da Matemática Básica e, em particular, no currículo escolar. Nessa interpretação, temos, de uma camada para a seguinte, mapas de progressão curriculares na sistematização dos conteúdos matemáticos. Outra forma de interpretar as camadas dispostas em complexidade crescente é vê-las como representações do adensamento das estruturas cognitivas na mente do aprendiz, em sua trajetória de progressão de noviço a *expert* no domínio de conhecimento matemático. De acordo com Pellegrino, a respeito da figura:

> *At each level in the system there are initial understandings of these core elements and they may be largely separate from one another. Some may be present in a person's knowledge structure and some may be absent. As one develops knowledge there is progress to the next level that implies a more sophisticated understanding of the core element. In addition, the elements within a level may become interconnected. Progress across levels involves assumptions in which there are increasing interconnections among the core elements and thus a much greater depth of understanding. (PELLEGRINO, 2010, p. 12).*

A estrutura interconectada da Matriz dos Saberes e das trajetórias de progressão em seu interior não é rígida. De fato, a ideia é que as especificações das habilidades e os enlaces entre elas sejam atualizados com base tanto em **revisões do modelo cognitivo** quanto nas mudanças curriculares ou pedagógicas em curso no sistema educacional.

> *A researcher-conjectured, empirically-supported description of the ordered network of constructs a student encounters through instruction (i.e. activities, tasks, tools, forms of interaction, and methods of evaluation), in order to move from informal ideas, through successive refinements of representation, articulation, and reflection, towards increasingly complex concepts over time. (CONFREY et al., 2008, apud PELLEGRINO, 2010).*

Em suma, a Matriz dos Saberes reflete a estrutura lógica do domínio da Matemática Básica e as relações de (inter)dependência cognitiva entre diferentes etapas na aquisição, consolidação e mobilização de conceitos, fatos e procedimentos matemáticos, arranjados em seus diversos subdomínios. Essa construção espelha a estrutura de um modelo cognitivo na forma de uma **rede bayesiana**, conceito antecipado na seguinte observação de Mislevy, Steinberg e Almond:

> *We connect claims and observations through a web of inference. Some links depend on our beliefs about the nature of knowledge and learning. What is important for students to know, and how do they display that knowledge? Other links depend on things we know about students from other sources. (MISLEVY; STEINBERG; ALMOND, 2003, p. 15).*

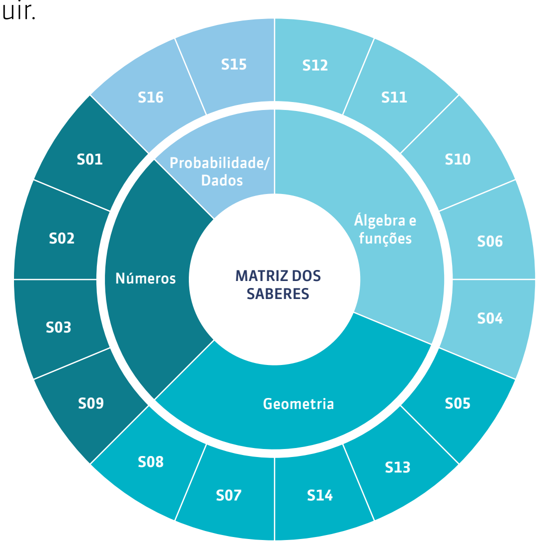
De fato, em termos da linguagem de redes bayesianas de Mislevy *et al.* (1996, 2015), a Matriz dos Saberes pode ser pensada como uma versão *a priori* do modelo cognitivo em que as avaliações são baseadas, definida a partir da visão dos especialistas, nesse caso, matemáticos e professores de Matemática no ensino básico.

As crenças que modelaram a matriz devem ser atualizadas a partir da interpretação das evidências geradas por tarefas e testes de um ponto de vista cognitivo. A abordagem sugerida por Mislevy e colaboradores envolve a modelagem de uma complexa rede bayesiana, com probabilidades condicionais associadas aos enlaces entre diferentes nós nos (hiper)grafos que constituem essa rede. No atual estágio de desenvolvimento do projeto, estamos reunindo dados de pré-testes, com o uso de modelos diagnóstico-cognitivos, para validar relações entre habilidades associadas à Aritmética Básica.

A matriz, como construída, se amolda a finalidades predominantemente diagnósticas ou formativas de avaliação, uma vez que apresenta uma descrição mais pormenorizada de conhecimentos e habilidades, das relações de dependência lógico-cognitiva entre esses e, sobretudo, da especificação de padrões de desempenho, o que permite gerar, para as escolas, devolutivas rápidas, focalizadas e legíveis na forma de marcos em mapas de progressão. As devolutivas, além disso, podem ser expressas em termos de objetivos de aprendizagem associados a diretrizes curriculares. Por fim, as evidências, devidamente interpretadas em termos desses objetivos e dos padrões de desempenho, podem orientar o agrupamento de alunos segundo os conhecimentos e habilidades mais fragilizados em cada grupo. O intuito, com essa organização das turmas em níveis bem definidos (e ajustáveis entre escolas e entre tempos), seria a recomendação de percursos curriculares definidos com ajuda da matriz e adequados à superação das lacunas mais proeminentes em cada grupo, com o suporte de intervenções planejadas para esse fim e com base nos resultados de avaliações.

Em termos populacionais, por outro lado, a Matriz dos Saberes ajuda na compreensão e na visualização da cadeia causal de conhecimentos e habilidades em que os estudantes têm lacunas que se aprofundam ao longo dos anos finais e reverberam, mais à frente, nos indicadores de desempenho no Ensino Médio, afetando não apenas as métricas agregadas, mas também os projetos de vida desses estudantes, e comprometendo severamente a equidade.

Esse desenho de devolutivas e de intervenções exige, naturalmente, um esforço de formação de coordenadores pedagógicos e professores. A formatação *a priori* da matriz foi extensamente trabalhada em formações (pós-graduações *lato sensu*) de professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio ocorridas no âmbito do Programa Cientista-Chefe em Educação Básica, cooperação entre a Universidade Federal do Ceará, a Secretaria da Educação do Estado do Ceará e Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP). Os professores, sob supervisão dos formadores na universidade, contribuíram para a definição dos conhecimentos e habilidades na matriz e dos *links* entre esses elementos. Em sua configuração atual, a matriz é organizada em 16 grandes setores, os saberes, dispostos da forma como aparecem na figura a seguir.



Essa representação gráfica demonstra, ao menos em parte, como saberes diferentes são contíguos, no sentido de que as relações lógico-cognitivas entre eles (ou, mais precisamente, entre as habilidades que os compõem) são densas. *Grosso modo*, conjuntos de saberes são associados às quatro unidades temáticas de Números, Álgebra e Funções, Geometria e Medidas e Probabilidade e Dados. De modo esquemático, apresentamos a seguir essas 4 unidades e 16 saberes.

Domínios de conhecimento	Saberes	
Números	S01	Utilizar, em diversos contextos e problemas, conceitos e propriedades do sistema de numeração posicional decimal.
	S02	Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números naturais e inteiros.
	S03	Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números racionais e suas representações fracionárias e decimais.
	S09	Efetuar operações aritméticas, expressar medidas e representar informações com números reais.
Geometria	S05	Aplicar, a problemas em diversos contextos, conhecimentos sobre formas geométricas no plano (elementos, propriedades, transformações e relações de congruência e semelhança).
	S07	Modelar e medir grandezas geométricas de figuras geométricas planas.
	S08	Aplicar, em problemas de diversos contextos, relações métricas e razões trigonométricas (em figuras geométricas planas).
	S13	Utilizar conceitos algébricos em contextos e problemas geométricos.
	S14	Compreender elementos, propriedades e medidas de objetos geométricos no espaço.
Álgebra e Funções	S04	Modelar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.
	S06	Modelar e resolver problemas envolvendo relações lineares entre variáveis.
	S10	Modelar e resolver problemas envolvendo relações quadráticas e polinomiais entre variáveis.
	S11	Modelar e resolver problemas envolvendo relações exponenciais (e outras relações não polinomiais) entre variáveis reais.
	S12	Modelar e resolver problemas envolvendo matrizes e sistemas lineares.
Probabilidade e Dados	S15	Aplicar ferramentas estatísticas na análise de dados e informações.
	S16	Compreender e aplicar métodos probabilísticos na análise de dados e de aleatoriedade.

5. DETALHANDO ALGUNS DOMÍNIOS DE CONHECIMENTOS E HABILIDADES

A seguir, detalhamos a estrutura interna de dois dos domínios na matriz de conhecimentos e habilidades, enfatizando alguns marcos em mapas de progressão ao longo dos saberes que compõem cada um desses domínios. Essa descrição está alinhada tanto às unidades temáticas da BNCC quanto aos domínios de conteúdos especificados nos modelos conceituais do Pisa, do TIMSS e do MARS, exemplos de referenciais curriculares ou avaliativos nos quais este estudo é fortemente inspirado.

NÚMEROS

Saberes componentes do domínio Números

S01	Utilizar, em diversos contextos e problemas, conceitos e propriedades do sistema de numeração posicional decimal.
S02	Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números naturais e inteiros.
S03	Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números racionais e suas representações fracionárias e decimais.
S09	Efetuar operações aritméticas, expressar medidas e representar informações com números reais.

Progressão no domínio Números

Os conhecimentos e habilidades no domínio Números abrangem a construção progressiva dos sistemas numéricos, recuperando a progressão dos números naturais (e inteiros) para os números racionais e desses para os números reais. Alguns temas são recorrentes nessa espiral progressiva, como exemplificamos a seguir.

a) Noções e propriedades do sistema posicional decimal (ordens decimais, valor posicional, papel do zero, decomposição aditiva e multiplicativa, entre outras): ao longo dos saberes neste domínio, a expansão decimal, inicialmente dos números naturais, é ampliada, com a introdução de divisões sucessivas por 10 (ou seja, com a notação de potências inteiras de dez, tanto positivas quanto negativas), permitindo a expansão também de números racionais e, em seguida, de números reais. A distinção entre expansões decimais finitas ou infinitas e periódicas e expansões decimais infinitas e não periódicas é especialmente ressaltada como um salto cognitivo, que requer o entendimento, ainda que em bases geométricas, intuitivas, da relação entre irracionalidade de um número real e incomensurabilidade entre medidas de segmentos, tema explorado no decurso do Saber 09.

b) Definição das **operações aritméticas em sistemas numéricos,** que são gradualmente ampliados (dos naturais e inteiros para os racionais e reais), enfatizando a coerência entre as propriedades dessas operações à medida que vão sendo retomadas em sistemas cada vez mais amplos: iniciamos o percurso no Saber 01, ao basear a operação de adição na noção de sucessão, que fundamenta tanto a construção indutiva dos números naturais quanto sua representação geométrica na reta numérica. Com essa abordagem, adições tanto podem ser entendidas como sucessões iteradas quanto como translações ao longo da reta numérica.

Combinando as propriedades aritméticas da adição com a representação decimal, o Saber 02 explora o uso, correto, embasado e justificado dos algoritmos de adição, quer sejam os procedimentos costumeiramente ensinados nas escolas, quer sejam algoritmos livremente desenvolvidos pelos estudantes, especialmente em rotinas de cálculo mental. Por outro lado, são abordadas representações das propriedades fundamentais das operações aritméticas em termos de propriedades correspondentes de translações de segmentos na reta numérica ou de uniões de conjuntos, com o intuito de relacionar essas diferentes representações e desenvolver a intuição a respeito das operações aritméticas e de suas propriedades.

A multiplicação, por sua vez, é trabalhada a partir da ideia de adições iteradas e, novamente, os algoritmos combinados de adição e de multiplicação são entendidos como consequências das propriedades operatórias (incluindo, agora, a distributividade da multiplicação em relação à adição) e das convenções do sistema de representação posicional decimal. Os modelos geométricos são, uma vez mais, associados à construção de representações que desenvolvam intuição sobre a “naturalidade” das propriedades das operações. Assim como a representação decimal é utilizada como ferramenta para efetuar as operações aritméticas, as habilidades nos saberes 02 e 03 envolvem, no sentido oposto, reconhecer que a expansão decimal é expressa em termos de adições e de multiplicações e que, em especial, multiplicações iteradas de 10 permitem definir a decomposição de um dado número em ordens decimais. Por fim, é abordado, nos saberes 02 e 03, como essas decomposições, juntamente com as propriedades operatórias, explicam e justificam todos os algoritmos válidos que puderem ser usados ou criados para efetuar o cálculo de somas e produtos com números naturais, inteiros e racionais.

As representações geométricas na reta numérica e em outros modelos são também relevantes para descrever padrões formados por múltiplos, comuns ou não, de dois ou mais números naturais, tema que será retomado na descrição do algoritmo de divisão e nas sequências sobre equivalência de frações. Além disso, a extensão da adição (e subtração) aos números inteiros é apoiada pelo uso da reta numérica para promover a compreensão de operações como

3 - 8 em termos de translações e sua interpretação como adições da forma 3 + (- 8).

O Saber 02 (respectivamente, Saber 03) culmina com a modelagem e resolução de problemas, suscitados por diversos contextos, que envolvam operações aritméticas com números naturais ou inteiros (respectivamente, números racionais). O trabalho com expressões aritméticas, especialmente para verificar equivalências entre essas expressões ou determinar termos desconhecidos, antecipa a transição do domínio da Aritmética para o domínio da Álgebra e Funções. Relevo particular é dado à "conservação da igualdade" no sentido de que a igualdade entre expressões aritméticas é preservada ao adicionarmos/subtrairmos ou multiplicarmos/dividirmos ambas as expressões por uma mesma parcela ou fator não nulo: esses expedientes são relevantes para a compreensão da relação entre operações aritméticas (subtração como "inversa" da adição, por exemplo) e para determinar o valor de parcelas (respectivamente, fatores) desconhecidos em uma soma (respectivamente, produto).

c) O Saber 03 abrange a **aritmética de números racionais,** partindo do aprofundamento do trabalho com a operação de divisão. Na construção do Saber 02, trabalha-se, inicialmente, a divisão (exata) de um número por um fator e, em seguida, considera-se o caso de divisão com restos, quando atentamos para a ideia, ainda intuitivamente formulada, de congruência, sugerida pelo padrão periódico formado pelos restos na divisão por um dado número natural não nulo. Um dos pontos altos nesse percurso é a compreensão de que o algoritmo euclidiano de divisão é baseado em aproximar, em cada iteração, o dividendo pelo múltiplo do divisor mais próximo e menor do que o dividendo. Portanto, o algoritmo, em vez de ser executado como um procedimento completamente inédito até então, é visto como um desdobramento do algoritmo da multiplicação em conjunção com o uso de estimativas e de aproximações (ótimas) de produtos, que, por sua vez, requer familiaridade com tábuas de múltiplos e de divisores, além do uso inteligente de decomposições decimais dos números que surgem em cada iteração.

A partir dessa formulação do algoritmo de divisão, um resto m, na divisão por um número natural n, é reinterpretado em termos da fração m/n. Por outro lado, usando o fio condutor temático das representações dos números na reta ordenada, presente nos saberes 02 e 03, representa-se a fração $1/n$ como o ponto P cuja distância orientada ao ponto O (que representa 0) é n vezes menor do que a unidade de medida, de modo que a fração m/n é vista como o ponto cuja distância ao ponto O é m vezes maior do que a distância de O a P. O propósito desta passagem do Saber 03 é aproximar a representação geométrica de frações em termos de medidas de segmentos comensuráveis com a unidade de medida (m/n é a medida de um segmento tal que n cópias, contíguas e não sobrepostas, desse segmento medem m unidades de medida, em suma) com o resultado de uma divisão, não necessariamente exata.

Firmado esse entendimento, o conceito de número racional, fulcro do Saber 03, emerge da noção de equivalência de frações: novamente, a ideia de medida de segmentos é usada para tornar "natural" a relação de equivalência entre frações m/n e p/q, estabelecida quando $mq=np$. Esse critério aritmético é pensado em termos da adoção de duas unidades de medida comensuráveis (ou, equivalentemente, de dois submúltiplos de uma dada unidade): um segmento que mede m vezes 1/n da unidade de medida tem mesma medida que um segmento que mede p vezes 1/q da unidade de medida se, e somente se, nq cópias do primeiro segmento medem o mesmo que nq cópias do segundo. Essa definição fundamental é tomada como o conceito (geométrico-aritmético) de equivalência de frações, a partir do qual são deduzidos e utilizados os critérios usualmente empregados relacionados a denominadores comuns ("calcular o M.M.C", "multiplicar ou dividir numerador e denominador por um mesmo fator não nulo", entre outros procedimentos que são, de fato, consequências diretas da definição de equivalência, ou mais fundamentalmente, do conceito de número racional).

d) Ainda ao longo do Saber 03, a **equivalência de frações** vai assumindo um papel fortemente estrutural para: estabelecer a ordem e a comparação de números racionais em suas representações fracionárias ou decimais (representados como pontos na reta numérica, por exemplo); representar frações com denominadores dados por potências de dez, definindo os elementos da notação de números decimais; representar frações em termos de números decimais, com clara compreensão dos significados das expansões decimais, quer sejam finitas, quer sejam infinitas e periódicas; elaborar e aplicar, de modo correto e justificado, algoritmos de adição de frações, particularmente no caso em que tenham denominadores diferentes; e, enfim, de modo geral, permitir lidar com formas equivalentes de números racionais (em termos de frações, pontos na reta numérica, números decimais ou percentuais), úteis para o entendimento e para a utilização de procedimentos algorítmicos nas operações com esses números. Por fim, da mesma forma que o Saber 02, este saber culmina, na sua estrutura, com habilidades relativas à resolução de problemas modelados em termos de operações e expressões aritméticas com números racionais, em suas diversas representações.

e) Essa cadeia de conhecimentos e habilidades conduz, segundo diferentes possíveis trajetórias, ao Saber 09, que enfatiza o uso da **aritmética de números reais** em contextos internos ou externos à Matemática, particularmente relacionados à expressão de medidas de diversas grandezas em termos desses números. Um dos desafios cognitivos, no trânsito do Saber 09, é o da transição para o conceito de irracionalidade ou de sua contraparte geométrica, a saber, o fato de que a medida de determinados segmentos (de fato, de uma infinidade não enumerável deles) não pode ser expressa como um múltiplo racional de uma unidade de medida fixada na reta numérica; ou seja, de que, por mais que consideremos submúltiplos de uma dada unidade de medida, não atingimos o refinamento necessário para medir, com exatidão, o comprimento desses segmentos.

Essa abordagem geométrica, usada como fio condutor no Saber 09, retoma e aprofunda o trabalho efetuado no Saber 03, ao mesmo tempo que problematiza a "completude" dos números racionais como um sistema numérico "suficiente" para o processo de medição de grandezas. Algumas das habilidades componentes do Saber 09 exploram o uso instrumental dos números reais, que "completam" os números racionais, na expressão de medidas em conexão com noções de notação científica, de erros inerentes à mensuração e de algarismos significativos. A ideia de que um número real, não racional, pode ser aproximado, com níveis de precisão cada vez maiores, por sequências de números racionais, expandidos em notação decimal, é trabalhada em uma abordagem geométrica e intuitiva, associada, novamente, ao contexto de grandezas e medidas.

Aproximações por números racionais são também vistas como procedimentos relevantes para efetuar cálculos com números reais e para obter estimativas dos resultados, admitidas margens de erro expressas por ordens de grandeza (representadas por potências de dez inteiras negativas, por exemplo).

O senso numérico deve estar plenamente desenvolvido, com o aluno sendo capaz de julgar a razoabilidade dos resultados, exatos ou aproximados, de um cálculo ou estimativa. Expansões decimais e operações aritméticas com números reais são abordadas tanto em contextos puramente aritméticos ou geométricos quanto no seu emprego em medidas de grandezas de comprimento (ou distância), área, volume (ou capacidade), tempo, massa e valores monetários, por exemplo. Considera-se, por fim, a modelagem aritmética e a resolução de problemas nesses contextos.

Metas de aprendizagem diretamente dependentes dos saberes no domínio Números

1) Utilizar as operações aritméticas em sistemas numéricos, com o uso de algoritmos baseados nas propriedades dessas operações e do sistema posicional decimal, em problemas motivados por diversos contextos.

8) Identificar grandezas relevantes em estruturas matemáticas (e.g.: quantidades numéricas; formas geométricas; variáveis, equações e funções; conjuntos de dados) e em diversos contextos (cotidianos, científicos, profissionais, sociais), definindo unidades de medida apropriadas, as relações entre essas unidades e as limitações em seu uso (erros intrínsecos ao processo de medição; incomensurabilidade; entre outras).

Os conhecimentos e habilidades no domínio Números (e, portanto, nos saberes 01, 02, 03 e 09) alicerçam o desenvolvimento das competências matemáticas a seguir, entre outras.

- Quantificar variáveis e atributos relevantes em objetos, relações, estruturas, dados, fenômenos e problemas em diversos contextos matemáticos, cotidianos, profissionais, sociais, científicos ou tecnológicos.

- Utilizar números (dos vários sistemas numéricos) em problemas de contagem e ordenação; na medição de grandezas; no registro de valores numéricos de variáveis de interesse; na definição e interpretação de taxas, índices e coeficientes; na descrição de padrões e de estruturas; e na leitura, análise e interpretação de dados.

- Descrever, quantitativamente, medidas geométricas e relações entre elas; relações funcionais, estáticas ou dinâmicas, entre variáveis ou suas variações; médias e variabilidades em conjuntos de dados; e medidas de probabilidades associadas a eventos incertos.

- Compreender as representações simbólicas e geométricas de números, nos vários sistemas numéricos, particularmente com o uso do sistema posicional decimal e da reta numérica, incluindo os conceitos e fatos sobre essas representações (e.g., valor posicional, papel do algarismo 0, expansões decimais, ordens de grandeza, comparação e ordem).

- Efetuar, de modo correto, justificado, eficiente e flexível, operações aritméticas nos diversos sistemas numéricos, entendendo suas propriedades (quando definidas em um dado sistema numérico), as relações entre essas operações e os diversos procedimentos de cálculo aritmético na resolução de problemas.

- Modelar e resolver problemas, motivados por diversos contextos, mobilizando aspectos do raciocínio matemático associados ao senso numérico, à proficiência e à flexibilidade no uso de algoritmos; ao cálculo mental; ao uso de aproximações e estimativas; e à avaliação da plausibilidade de resultados obtidos em procedimentos aritméticos.

- Compreender, produzir, representar, avaliar, analisar criticamente e comunicar informações expressas numericamente, bem como procedimentos, resultados e inferências baseadas em modelos e cálculos aritméticos.

  Lidar com algoritmos em Pensamento Computacional, avaliando e comunicando resultados obtidos em cálculos, experimentos e simulações.

Exemplos de conhecimentos e habilidades componentes dos saberes

Os quadros a seguir apresentam algumas habilidades que compõem o saber. Descrevemos essas habilidades, discutindo exemplos de situações em que são mobilizadas. Enumeramos algumas habilidades da BNCC diretamente relacionadas a cada habilidade apresentada, realçando o fato de que esta pode impactar no desenvolvimento futuro das habilidades da BNCC; ou, no sentido inverso, de que as habilidades da BNCC correlatas podem representar estágios prévios, do ponto de vista lógico e cognitivo, necessários ao desenvolvimento da habilidade apresentada na Matriz dos Saberes.

Em outros trechos do relatório, mostramos exemplos de tarefas que requerem habilidades da Matriz dos Saberes. As tarefas podem ter vários níveis de complexidade e acionar processos cognitivos em vários domínios (compreender/efetuar; modelar/aplicar; analisar/integrar, conforme descritos posteriormente neste texto). Isso demonstra como uma mesma habilidade pode ser demandada em tarefas, problemas e contextos de diferentes complexidades. Descrevemos, nesses exemplos, alguns padrões de desempenho esperados para a tarefa apresentada, os quais denotam o desenvolvimento pleno ou parcial da habilidade no grau de complexidade requerido pela tarefa.

Habilidade S01.H10: compor e decompor números naturais em diversas ordens e agrupamentos, envolvendo, em particular, expansões em ordens decimais (potências de dez).

Descrição: esta habilidade abrange as etapas anteriores quanto à aquisição de conhecimentos e habilidades relativos ao uso do sistema posicional decimal para representar números naturais. O aluno deve, com destreza e correção, decompor um dado número natural em adições e múltiplos de potências de dez, por exemplo, ao escrever 20.335 como

$$20.000+300+30+5$$

ou, ainda mais detalhadamente, como

$$10.000+10.000+100+100+100+10+10+10+1+1+1+1+1.$$

Caso tenha sido exposto à operação (ou notação) de multiplicação, espera-se que o aluno reescreva essa decomposição como

$$2\times 10.000 + 3\times 100 + 3\times 10 + 5\times 1,$$

ou, caso tenha sido apresentado à notação de potências de dez, que decomponha o número do seguinte forma:

$$2\times 10^4 + 3\times 10^2 + 3\times 10 + 5\times 1.$$

É igualmente relevante que o aluno lide com diferentes formas de decompor, em adições, um número natural, por exemplo, ao escrever 3.015 como 3 milhares e 15 unidades ou 30 centenas e 15 unidades ou, ainda, 301 dezenas e 5 unidades. Analogamente, é esperado que reconheça equivalências de decomposições, como em

$$6.156 = 6\times 1.000 + 15\times 10 + 6 \text{ ou } 6.156 = 61\times 100 + 5\times 10 + 6.$$

Habilidades correlatas na BNCC: EF02MA04, EF03MA02, EF04MA01, EF04MA02, EF05MA01, EF06MA01, EF06MA02.

Habilidade S02.H4: justificar/elaborar algoritmos de adição com base nas propriedades de comutatividade e associatividade e do sistema posicional decimal.

Descrição: em seguimento à habilidade S02.H3, exploramos, agora, a justificativa lógica dos algoritmos da adição a partir de suas propriedades operatórias, como comutatividade e associatividade. Os passos executados nos algoritmos, tanto os mais corriqueiros quanto aqueles eventualmente elaborados pelo aluno, podem ser explicitados em termos de reagrupamentos de parcelas nas decomposições decimais, os quais são válidos por conta das propriedades comutativa e associativa. Por exemplo, na execução do algoritmo

$$23 + 17 = 20 + 3 + 10 + 7 = 20 + 10 + 3 + 7 = 30 + 10 = 40,$$

usamos a associatividade e a comutatividade da adição, justificando o chamado reagrupamento de 1 dezena (resultante da soma 7 + 3) na ordem das dezenas. As propriedades da adição justificam flexibilidade na escolha ou elaboração de algoritmos mais efetivos, sobretudo em tarefas que envolvam cálculo mental ou estimativas, como em

$$28 + 19 = 25 + 3 + 15 + 4 = 25 + 15 + 3 + 4 = 20 + 10 + 5 + 5 + 7 = 30 + 17 = 47$$

ou em

$$41 + 43 + 47 + 49 = 41 + 49 + 43 + 47 = 40 + 50 + 40 + 50 = 80 + 100 = 180,$$

em que são utilizadas diferentes decomposições aditivas das parcelas, bem como as propriedades comutativa e associativa da adição.

Habilidades correlatas na BNCC: EF01MA07, EF02MA04, EF03MA02, EF04MA02, EF05MA02, EF06MA02.

Habilidade S02. H25: compreender e relacionar os diversos significados e representações da divisão de números naturais (também com restos não nulos), inclusive a noção de congruência.

Descrição: expande-se, nesta habilidade, o que está descrito em S02.H16 e S02.H17. O aluno deve lidar com o conceito e o algoritmo da divisão euclidiana, possivelmente com restos. O conhecimento dos múltiplos e divisores, explorado nas divisões exatas, deve estar consolidado o suficiente para que o aluno consiga obter as melhores aproximações sucessivas de um dado número m por múltiplos de outro número n, não nulo. Por exemplo, na divisão de 65 por 24, o aluno deve recuperar a informação de que 2×24 = 48 e 3×24 = 72, de modo a considerar 48 como o maior múltiplo de 24 menor que 65, ou seja, a melhor aproximação de 65 por um múltiplo de 24. Desse modo, o aluno deve entender o resto como a diferença 65 – 2×24, de modo que chegue ao ponto de parada do algoritmo da divisão, escrevendo

$$65 = 2 \times 24 + 17.$$

O aluno deve compreender que o algoritmo euclidiano da divisão consiste em uma sequência de aproximações iteradas desse tipo, como na divisão de 6.561 por 24, em que pode proceder do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 6.561 = 6500 + 61 &= (2{\times}24 + 17){\times}100 + 61 \\ &= 200{\times}24 + 1.760 + 1 \\ &= 200{\times}24 + (7{\times}24 + 8){\times}10 + 1 \\ &= 200{\times}24 + 70{\times}24 + 81 \\ &= 270{\times}24 + 3{\times}24 + 9 \\ &= 273{\times}24 + 9. \end{aligned}$$

O aluno deve ser capaz de justificar esses passos do algoritmo da divisão e representá-los em arranjos mais abreviados e práticos, como no que se denomina, usualmente, método da chave:

$$\begin{array}{rrrrr|l} & 6 & 5 & 6 & 1 & 2\,4 \\ \cline{6-6} - & 4 & 8 & & & 2\,7\,3 \\ \cline{2-3} & 1 & 7 & 6 & & \\ - & 1 & 6 & 8 & & \\ \cline{2-4} & & & 8 & 1 & \\ & & - & 7 & 2 & \\ \cline{4-5} & & & & 9 & \end{array}$$

Por fim, é relevante que o aluno perceba que as aproximações em cada etapa correspondem às parcelas que aparecem no produto 24×273, utilizando-se a distributividade da multiplicação com relação à adição, tal qual disposta no seguinte arranjo gráfico:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 273 \\ \hline 72 \\ 1680 \\ +4800 \\ \hline 6552 \end{array}$$

Espera-se que, realizando, justificando e interpretando os cálculos dessa forma, o aluno possa concluir que 6.552 é o maior múltiplo de 24 menor que 6.561, resultando em resto igual a 9, o que deve ser expresso como:

$$6.561 = 24 \times 273 + 9.$$

O aluno deve, ainda, estar familiarizado com o fato de que, em uma divisão por n, os possíveis restos são 0, . . . , n – 1, os quais aparecem periodicamente. Essa é uma noção intuitiva de congruência, que deve ser reconhecida em modelos como o da reta numérica.

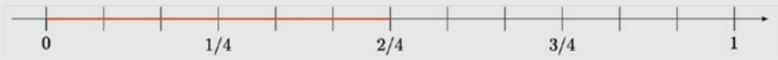
Habilidades correlatas na BNCC: EF03MA08, EF04MA07, EF04MA11, EF04MA12, EF04MA13.

Habilidade S03.H3: determinar frações de um número inteiro (e.g., metade, um terço, um quinto, um décimo, um centésimo de uma dada quantidade), associando-as às noções de divisão, fatoração ou partes de um todo.	**Descrição:** o desenvolvimento do Saber S03 envolve a compreensão, por parte do aluno, de que frações são representações de números racionais. Os diferentes significados de frações, comuns nas abordagens pedagógicas corriqueiras (por exemplo, como representação de uma divisão; de uma razão entre medidas, ou de uma relação parte-todo), devem ser consideradas como **interpretações** das frações, adequadas aos contextos em que são trabalhadas, e não como conceitos diferentes do que, na verdade, é um mesmo objeto matemático. Portanto, o objetivo de aprendizagem comum às habilidades S03.H1 e S03.H3 é a clareza quanto à unidade do conceito de número racional, substrato comum a seus múltiplos significados e representações. Sendo assim, devemos observar, neste estágio do Saber S03, se o aluno também interpreta uma expressão como 12/4 em termos de determinação de 1/4 de 12, ou seja, como uma expressão do seguinte cálculo aritmético, $$\frac{12}{4} = \frac{1}{4} \times 12 = 3,$$ que, de fato, é uma representação da divisão 12:4. Da mesma forma, a expressão $\frac{15}{10}$ tanto é entendida em termos da divisão 15:10 quanto da partição $$\frac{15}{10} = \frac{1}{10} \times 10 + \frac{1}{10} \times 5 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5.$$ Vê-se que o desenvolvimento desta habilidade é basilar para a expressão de frações em notação decimal.

Habilidades correlatas na BNCC: EF02MA08, EF03MA08, EF03MA09, EF04MA09, EF05MA03, EF06MA07, EF06MA09, EF07MA08, EF07MA09.

Habilidade S03.H6: utilizar, de modo correto e justificado, critérios aritméticos e geométricos de equivalência de frações.	**Descrição:** em complemento às habilidades S03.H4 e S03.H5, esta diz respeito ao uso correto e com as devidas justificativas, baseadas tanto no conceito de equivalência de frações quanto em suas representações geométricas ou gráficas, de critérios de equivalência de frações, como em $$\frac{m \times a}{n \times a} = \frac{m}{n}$$ onde a é um número natural não nulo, ou $$\frac{m \div a}{n \div a} = \frac{m}{n}$$ no caso em que a é um divisor comum dos números naturais m e n. O aluno deve compreender que esses critérios são **consequências lógicas** da definição de equivalência, que, como discutimos, é a noção estrutural da aritmética dos números racionais. Não, são, portanto definições de equivalência e, sim, critérios práticos para estabelecê-la, como ao afirmarmos que $$\frac{3}{6} = \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

uma vez que 3×2 = 6×1 ou 3×4 = 2×6. O aluno deve, ainda, compreender e utilizar representações métricas e geométricas de equivalências como essa, com suporte, por exemplo, em retas numéricas, como nas seguintes figuras:



O aluno que domina esta habilidade e as precedentes compreende/formula, a partir dessas figuras, argumentos geométricos ou métricos da seguinte natureza: os segmentos de 0 a 1, que têm medida igual a uma unidade de medida, foram divididos, em ambas as retas, em 12 segmentos de medida igual a 1/12 da unidade de medida. Na primeira reta, representamos a equivalência

$$\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$$

em que dividimos cada segmento de medida 1 em 12 partes congruentes, de medida igual a 1/12. Com isso, temos

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 2}{6 \times 2} = \frac{6}{12}$$

Na segunda reta numérica, representamos a equivalência

$$\frac{6}{12} = \frac{2}{4}$$

em que dividimos cada segmento de medida 1/4 em 3 partes congruentes, de medida igual a 1/12. Com isso, temos

$$\frac{6}{12} = \frac{6 \div 3}{12 \div 3} = \frac{2}{4}$$

Esses argumentos devem ser formulados em termos da mudança de unidades de medida. Voltando aos critérios acima, o aluno deve interpretá-los da seguinte forma: quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural diferente de zero, aumentamos a quantidade de partes nas quais um dado segmento é dividido, bem como, proporcionalmente, a quantidade de partes tomadas. Por outro lado, quando dividimos o numerador e o denominador por um mesmo natural diferente de zero, diminuímos proporcionalmente essas quantidades de partes. Em ambos esses casos, obtemos uma fração equivalente à inicial.

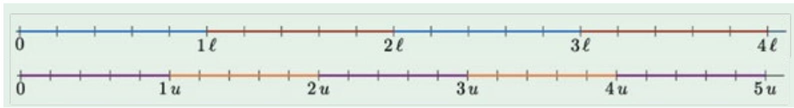
Esta habilidade e as precedentes organizam o repertório necessário à plena compreensão do conceito de proporcionalidade, trabalhado no Saber S04.

Habilidades correlatas na BNCC: EF03MA17, EF04MA09, EF05MA04, EF05MA10, EF06MA07.

S09.H2: interpretar medidas expressas por números racionais em termos de comensurabilidade de segmentos

Descrição: a ideia de que um número racional pode ser representado por frações equivalentes uma a outra é sistematicamente trabalhado no percurso do Saber 03, ao longo do qual o estudante consolida a compreensão conceitual sobre os critérios e representações (na reta numérica) de equivalência de frações e a respeito da expansão decimal dos números racionais.

Nesta habilidade, retomamos a noção clássica de que um número racional expressa a razão entre as medidas de segmentos comensuráveis, ou seja, de que a medida de um desses segmentos pode ser expressa como m vezes 1/n da medida do outro, ou ainda, que m cópias não sobrepostas de um desses segmentos têm a mesma medida de n cópias não sobrepostas do outro. As figuras abaixo ilustram, por exemplo, as razões 4/5 ou 5/4 entre as medidas de dois segmentos de reta.



A noção a ser desenvolvida é de que a medida de um segmento é expressa por um número racional m/n se for igual a m vezes um submúltiplo da unidade de medida (1/n dessa unidade). Em particular, se n é uma potência de 10, temos a representação geométrica da expansão decimal desse número racional.

Esta habilidade estabelece conexões entre a aritmética de números racionais e a expressão numérica de medidas de diversas grandezas (em particular, mas não exclusivamente) no sistema métrico decimal, tema a ser aprofundado nas trajetórias ao longo do Saber 09.

Habilidades correlatas na BNCC: EF03MA17, EF03MA18, EF09MA01.

ÁLGEBRA E FUNÇÕES

Saberes componentes do domínio Álgebra e Funções

S04	Modelar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.
S06	Modelar e resolver problemas envolvendo relações lineares entre variáveis.
S10	Modelar e resolver problemas envolvendo relações quadráticas e polinomiais entre variáveis.
S11	Modelar e resolver problemas envolvendo relações exponenciais (e outras relações não polinomiais) entre variáveis reais.
S12	Modelar e resolver problemas envolvendo matrizes e sistemas lineares.

.

Progressão no domínio Álgebra e Funções

Os conhecimentos e habilidades no domínio Álgebra abrangem a transição da linguagem aritmética para a algébrica com o desenvolvimento do raciocínio matemático na direção de crescente: i) abstração, dado que propriedades próprias das operações aritméticas são generalizadas para o manuseio de expressões tanto numéricas quanto simbólicas; e ii) unificação, uma vez que estruturas integradoras começam a ser discernidas e descritas, conectando coerentemente fatos, relações e propriedades dos objetos matemáticos que parecem, inicialmente, isolados (propriedades de operações com números e matrizes, regras de composição de movimentos geométricos e de funções, entre outros exemplos).

Em particular, o conjunto de conhecimentos e habilidades no domínio da Álgebra (e da Análise Matemática, representada, aqui, pelo estudo de funções reais) é estruturado em avanços graduais em temas como os exemplificados a seguir.

a) A noção fundamental de equivalência de frações e, mais geralmente, de equivalência entre as diversas representações que definem um número racional, trabalhadas no Saber 03, é retomada, no Saber 04, como alicerce para o conceito mais amplo de **proporcionalidade**. Os números (naturais) em uma relação de proporcionalidade da forma $\mathrm{a/b = c/d}$, com $\mathrm{bd} \neq 0$ passam a ser entendidos como valores correspondentes de duas variáveis (ou de variações dessas variáveis), em uma transição do pensamento aritmético para um quadro conceitual algébrico. Portanto, a constante de proporcionalidade, expressa como um número racional (em representação fracionária ou decimal) é interpretada como uma taxa de variação de uma variável com respeito à variação correspondente da outra variável. Ao longo do Saber 04, é aprofundada a distinção entre a noção de variável e a ideia de incógnita em uma expressão aritmética, já trabalhada no Saber 02, em que um símbolo literal, por exemplo, é usado para indicar um dado número que tornaria a expressão verdadeira (distinções no uso do sinal de igualdade em uma equação e em uma identidade são também estabelecidas no percurso do Saber 04).

Um dos pontos de maior relevância nesta etapa da progressão nos saberes é a compreensão, por parte do estudante, de que os procedimentos conhecidos como regras de três, simples ou composta, e afins nada mais são do que consequências dos critérios de equivalência entre frações, interpretados como propriedades operatórias das razões entre números naturais (ou racionais) – o que, por si só, ressalta a importância do pleno domínio dos conhecimentos e habilidades trabalhados no Saber 03 para um avanço sustentável no Saber 04 e, em seguida, no Saber 06. Como exemplos dessas propriedades, mencionamos fatos, como a igualdade dos produtos dos meios pelos extremos, ou regras, como a preservação da relação de proporcionalidade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ em $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ ou em $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. De modo geral, as habilidades nos saberes deste domínio combinam aspectos de fluência procedimental (por exemplo, na manipulação com símbolos em expressões e operações algébricas) embasadas em sólida compreensão conceitual das justificativas e motivações dos procedimentos. A manipulação com elementos de uma linguagem simbólica, amparada pelo entendimento conceitual das estruturas e das propriedades operatórias e algoritmos nessa linguagem, envolve *skills* fundamentais para o desenvolvimento do pensamento computacional.

É igualmente importante que uma relação de proporcionalidade inversa entre duas variáveis (ou suas variações) seja compreendida como uma relação de proporcionalidade direta entre uma delas e o inverso numérico (isto é, recíproco) da segunda. O entendimento da divisão de frações é um pressuposto indispensável para que o estudante desenvolva intuição sobre a proporcionalidade inversa e execute, com correção e justificativa, os procedimentos aritméticos pertinentes para, por exemplo, determinar termos desconhecidos em uma relação de proporcionalidade, dados os demais termos. Em particular, o aluno efetua e justifica procedimentos para calcular meios proporcionais (e.g., médias, terceiras ou quartas proporcionais) associadas a construções geométricas com segmentos ou áreas. Essas habilidades ajudam a estabelecer conexões cognitivas e lógicas entre procedimentos usando razões e proporções e a resolução ou interpretação de problemas geométricos ou relativos a equações algébricas como $\frac{x}{9} = \frac{8}{12}$ ou $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$.

b) Com a progressão no Saber 04, o estudante passa a **reconhecer e representar relações de proporcionalidade** entre valores (naturais ou racionais) de variáveis ou de suas variações em tabelas de dupla entrada, gráficos (particularmente quando representam valores de pares de variáveis no plano cartesiano) e outros meios de representação gráficos e geométricos. Com isso, além de lidar com a expressão aritmética e algébrica da proporcionalidade em termos de uma constante de proporcionalidade ou taxa de variação, o estudante **identifica padrões em dados numéricos, em tabelas e gráficos**, que correspondem a relações de proporcionalidade, distinguindo-os de situações em que as variáveis de interesse (ou suas variações) não são diretamente ou inversamente proporcionais. Esse contato inicial com a representação gráfica da proporcionalidade abre caminho para o estudo, no Saber 06, de lugares geométricos no plano cartesiano definidos por relações de proporcionalidade ou linearidade. Mais precisamente, no início do percurso do Saber 06, o estudante aprofunda a compreensão conceitual sobre a noção de variável (ainda restrita, em um primeiro momento, a valores naturais e racionais e, progressivamente, dado o avanço no Saber 09, estendendo-se a valores reais) e a representação de pares ordenados de números no plano, com o **uso de coordenadas**, retangulares ou mesmo em sistemas não ortogonais de coordenadas. O entendimento e o uso correto da associação entre números (racionais e, mais adiante, no Saber 09, reais) e pontos da reta numérica são condições necessárias para a compreensão de sistemas de coordenadas no plano e, portanto, para a **representação gráfica de dados sobre pares de variáveis relacionadas a diversos contextos**. Com isso, o estudante utiliza e relaciona diferentes representações (simbólicas, gráficas, geométricas, verbais) de relações lineares entre variáveis.

c) A aquisição de conhecimentos e habilidades sobre a noção aritmético-algébrica de proporcionalidade e algumas de suas representações gráficas culmina, no Saber 06, com a interpretação da condição de proporcionalidade entre variáveis (ou suas variações) em termos do alinhamento, no plano cartesiano, de pontos cujas coordenadas são dadas pelos valores, observados ou previstos, dessas variáveis (ou de suas variações). Ao interpretar a constante de proporcionalidade ou taxa de variação como uma medida de inclinação da reta definida pelos pontos alinhados, o estudante passa a estabelecer **conexões, em um nível de maior profundidade conceitual, entre proporcionalidade e linearidade.** Ou seja, o estudante detém os requisitos para descrever uma relação de proporcionalidade em termos de expressões lineares envolvendo as variáveis nessa relação e, por conseguinte, para associar essas expressões lineares a retas no plano cartesiano. Nesta etapa, a **distinção entre variáveis e parâmetros** em uma equação linear da forma $ax + by = c$ começa a ser trabalhada: os parâmetros devem ser interpretados tanto em termos da constante de proporcionalidade ou taxa de variação entre as variáveis (ou suas variações, no caso em que $c \neq 0$) quanto em termos da inclinação da reta, que é o lugar geométrico definido pelos valores (x,y) que satisfazem a equação. É esperado, nessa etapa do percurso no Saber 06, que o estudante possa identificar os parâmetros na equação a partir da reta que a representa geometricamente e, inversamente, reconhecer ou traçar a reta no plano cartesiano que representa uma dada equação (ou, em última análise, uma relação de proporcionalidade).

Essa visão, geométrica e dinâmica, da proporcionalidade/linearidade torna-se consolidada quando, por fim, o estudante percebe que mudanças nos parâmetros correspondem a movimentos das retas no plano e diferentes posições relativas entre as retas definidas com esses movimentos. Por exemplo, fixando a razão a/b ou b/a entre os parâmetros a e b e variando o parâmetro c, o estudante deve constatar que é construído um feixe de retas paralelas entre si. Essas mudanças nos parâmetros, por sua vez, são retomadas na discussão sobre sistemas lineares e determinantes nos Saberes 06 e 12. As equações lineares a duas variáveis em um sistema linear devem ser representadas pelas retas correspondentes e, com isso, as condições de existência e unicidade de soluções do sistema devem ser descritas em termos do paralelismo, da coincidência ou das transversalidade das retas no plano associadas às equações. Por sua vez, espera-se que essas condições, no desenvolvimento do Saber 12, possam ser reescritas em termos do determinante da matriz de coeficientes do sistema. A interpretação geométrica desse determinante como uma medida (a menos de sinal) da área do paralelogramo determinado por vetores diretores das retas é uma aquisição de conhecimento esperada na progressão ao longo do Saber 12.

d) De modo geral, a progressão no Saber 12 diz respeito à retomada do estudo das equações e sistemas lineares sob um viés geométrico, baseado em matrizes. Ao mesmo tempo em que são apresentados os **exemplos e as estruturas de matrizes que descrevem movimentos** rígidos e homotetias no plano, são abordadas as operações com matrizes (adição, produto por escalar e multiplicação), juntamente com suas propriedades operatórias e a estrutura algébrica particular que definem, enfatizadas as similaridades e as diferenças com respeito às operações com números ou com funções (particularmente, funções polinomiais), para mencionar dois exemplos de estruturas algébricas já trabalhados em saberes como 03, 06 e 10. A representação matricial de sistemas lineares (em geral, com duas ou três equações lineares a 2 ou 3 variáveis, interpretáveis em termos de retas ou planos no plano ou no espaço euclidianos) permite discutir a existência e a unicidade de soluções por meio de operações elementares sobre linhas ou colunas (que correspondem a métodos de “eliminação” ou “substituição”, no jargão dos livros-texto), as quais devem ser interpretadas geometricamente em termos de movimentos geométricos de planos e retas (de acordo com as mudanças dos coeficientes ou parâmetros das equações) que preservam o conjunto de soluções do sistema.

Outra estratégia trabalhada no percurso do Saber 12 é o uso de determinantes no caso de sistemas lineares 2 x 2 ou 3 x 3. Determinantes são abordados também geometricamente como expressões algébricas de área e de volume “orientados”, ou seja, como expressões que dependem, de forma multilinear e antissimétrica, das linhas ou colunas de uma matriz 2 x 2 ou 3 x 3. No que diz respeito a repertório, o Saber 12 culmina com o entendimento de que a existência e a unicidade de soluções podem ser refraseadas em termos da área (ou do volume, conforme seja) de paralelogramos (ou paralelepípedos, respectivamente) definidos pelas direções perpendiculares às retas ou por planos associados às equações do sistema linear. No que concerne a aplicações, o Saber 12 envolve modelagem de problemas em Ciência de Dados, Probabilidade, Matemática Financeira e outros contextos que exijam a organização de informações, variáveis ou não com o tempo, em arranjos matriciais.

e) Outro eixo temático, presente principalmente nos saberes 06, 10 e 11, é a representação matemática do conceito de **variação** de variáveis relevantes na modelagem de fenômenos e na resolução de problemas. Os avanços na compreensão da noção de variável e da representação, algébrica e geométrica, de relações de proporcionalidade, expressas por equações lineares a duas variáveis, conduzem, gradualmente, ao **conceito de função,** cujo estudo é iniciado no Saber 06 e progride, com a descrição de **modelos não lineares**, nos Saberes 10 e 11. Como objetivo de aprendizagem resultante do aprofundamento nesses saberes está a capacidade de compreender, explicar, descrever, inferir, predizer, representar e comunicar o comportamento dinâmico de variáveis em resposta, linear ou não linear, à mudança nos valores de variáveis das quais elas dependem ou de parâmetros do modelo.

A essa altura do percurso, espera-se que os estudantes possam decidir quando curvas no plano descrevem, local ou globalmente, relações entre duas variáveis em que uma delas é função da outra; ademais, que possam diferenciar **gráficos de funções lineares e de algumas classes de funções não lineares,** como as quadráticas, exponenciais e logarítmicas. O estudante deve dominar fatos básicos sobre a interpretação geométrica dos parâmetros na representação gráfica de **funções lineares, quadráticas e exponenciais,** bem como seu papel na determinação dos zeros, dos intervalos de crescimento e decrescimento e dos máximos e mínimos dessas funções. Por exemplo, no desenvolvimento do Saber 10, o aluno deve perceber as relações que existem entre os coeficientes de uma função quadrática, suas raízes e pontos de máximo ou mínimo, particularmente ao utilizar a forma fatorada dessa função. Para tanto, é preciso que, inicialmente, o estudante lide com o formalismo da linguagem algébrica no que diz respeito a operações (e.g., soma, produto, simplificação, fatoração, expansões binomiais, produtos notáveis, entre outras) com expressões algébricas e suas propriedades operatórias.

f) Além disso, é relevante a compreensão da composição e da inversão de funções, juntamente com suas propriedades algébricas e as relações entre suas representações gráficas. Em se tratando de funções exponenciais, especial ênfase deve ser dada ao conceito de logaritmo como um *shorthand* notacional (uma abreviação simbólica) para soluções de equações da forma $2^x = 3$. O Saber 11 parte de uma base conceitual e procedimental com potências (primeiro, com expoentes naturais; depois, racionais, quando passam a envolver aproximações e estimativas), incluindo propriedades operatórias de potências, aproximação e estimativa de potências e de raízes e, por fim, resolução de equações exponenciais ou logarítmicas. Nesse ponto do percurso, é desejável que estejam claras as distinções entre equações lineares e quadráticas (ou, em geral, equações algébricas) e equações exponenciais ou logarítmicas (como exemplo de equações transcendentes, cujas soluções envolvem operações infinitesimais e que são apenas prenunciadas nos nossos currículos, os quais, de modo geral, não contemplam a Análise Infinitesimal). Em suma, equações exponenciais como a do exemplo anterior envolvem ideias de aproximações sucessivas para sua resolução, a qual não pode ser obtida diretamente por uma sequência finita de operações algébricas.

A estruturação, no Saber 11, de conhecimentos relativos a equações e funções exponenciais e logarítmicas tem como um de seus eixos a noção de crescimento geométrico, em contraste com os modelos linear e quadrático (mais geralmente, polinomial) de variação e de dependência funcional de uma variável com respeito a outra (tempo, por exemplo). Da mesma forma, é gradualmente abordada, no Saber 11, a distinção entre progressões e meios aritméticos e geométricos, em termos da representação tanto simbólica ou algébrica quanto gráfica, de crescimento geométrico/exponencial. Essas distinções são, ao mesmo tempo, aprofundadas e aplicadas no contexto de problemas em Matemática Financeira (e.g., em comparações entre valor presente e valor futuro) e Ciências.

g) A progressão ao longo do Saber 10 passa, ainda, pela compreensão, cada vez mais profunda, de que equações e funções quadráticas são modelos elementares de relações não lineares entre variáveis. Por um lado, há habilidades que exploram esses modelos para trabalhar noções intuitivas de curvatura e convexidade associadas à descrição de movimentos acelerados; em outra vertente, há habilidades que envolvem a modelagem de problemas, otimização em diversos contextos em termos de funções quadráticas, aplicações elementares, mas estruturais, da modelagem matemática de fenômenos de segunda ordem.

Metas de aprendizagem diretamente dependentes dos saberes no domínio Álgebra e Funções

4) Representar, com o uso de linguagem algébrica (e.g., expressões e equações algébricas), relações estáticas ou dinâmicas entre variáveis, padrões, simetrias e estruturas em contextos matemáticos ou externos à Matemática.

5) Elaborar modelos, em termos algébricos, gráficos ou geométricos, de relações funcionais entre variáveis, explicando ou predizendo o comportamento dessas variáveis, identificadas como relevantes em problemas em diversos contextos.

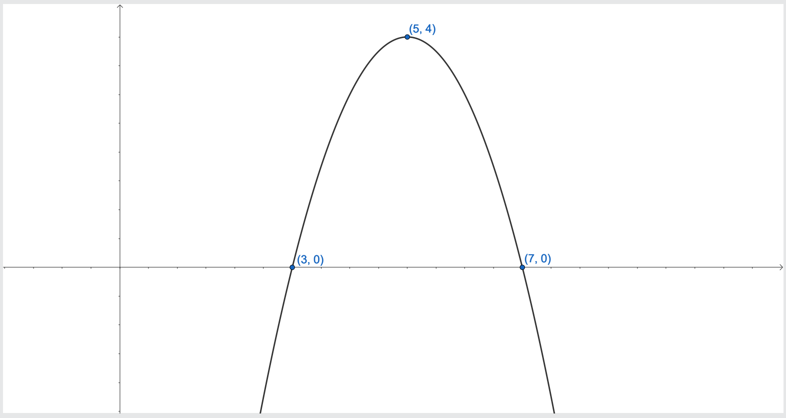
Os conhecimentos e habilidades no domínio Álgebra (e, portanto, nos saberes 04, 06, 10, 11 e 12) estão na base do desenvolvimento das competências matemáticas a seguir, entre outras.

- Modelar matematicamente relações entre variáveis (discretas ou contínuas) ou entre suas variações, expressas por equações, inequações e funções, lineares ou não lineares.
- Representar relações funcionais entre variáveis usando gráficos, diagramas, tabelas e, reciprocamente, formular algebricamente modelos dessas relações a partir dos dados apresentados nesses meios.
- Manipular, revelando conhecimento conceitual e procedimental, a linguagem simbólica e as operações entre elementos dessa linguagem (e.g., expressões algébricas, equações, inequações, variáveis, parâmetros, operações aritméticas com expressões algébricas, entre outros elementos), respeitando as regras formais dessas operações.
- Distinguir entre modelos lineares e não lineares (e.g, quadráticos, exponenciais) e identificar quais são mais bem adaptados para descrever, explicar ou predizer relações entre variáveis de interesse em uma aplicação ou problema em vários contextos.

S10.H19: identificar os parâmetros de uma função quadrática em termos da parábola que a representa graficamente.	**Descrição:** na progressão de habilidades ao longo dos saberes 06 e 10, o estudante compreende que há diferentes relações funcionais, lineares e não lineares, entre variáveis ou entre as variações dessas variáveis. A relação entre retas (não verticais) no plano cartesiano e funções afins (mais especificamente, a interpretação geométrica dos coeficientes ou parâmetros de uma função afim em termos de declividades e intersecções com eixos) é exaustivamente explorada em habilidades do Saber 06.

Trata-se, a essa altura do percurso, de consolidar o entendimento de que funções quadráticas, como exemplo fundamental de função não linear, são descritas por curvas de curvatura não nula e, em particular, entender como os coeficientes ou parâmetros da função determinam a curvatura do gráfico e outras características geométricas, como intersecções com eixos coordenadas e convexidade. A partir disso, abre-se caminho tanto para a determinação de dados relevantes da função, como raízes e valores máximo e mínimo, quanto para a representação dos efeitos de movimentos geométricos sobre os parâmetros da função, e vice-versa.

Em termos mais específicos, dado um gráfico da forma



o estudante deve reconhecer os zeros da função nos pontos (3,0) e (7,0) e a simetria do gráfico com respeito à reta vertical que passa pelo ponto médio entre os zeros, ou seja, relativamente à reta x = 5. Com essa informação geométrica, deve ser capaz de representar algebricamente a função na forma

$$f(x) \;=\; a(x-3)(x-7),$$

considerando os dados sobre os zeros, ou

$$f(x) \;=\; a(x-5)^2 \;+c,$$

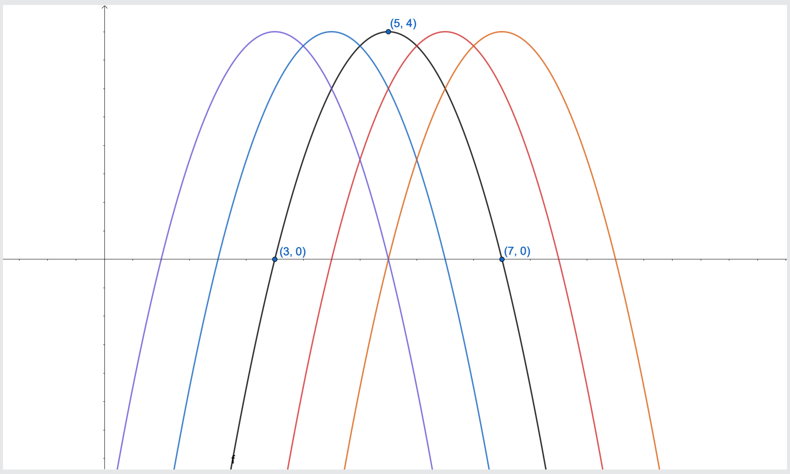
tendo em conta a simetria do gráfico (ou seja, paridade da função quadrática) com relação à reta x=5. Nessas representações, deve compreender que o parâmetro c é dado pela ordenada do vértice do gráfico, ou seja, pelo valor da função quando x=5, ao passo que o parâmetro a deve ser um número real negativo, uma vez que o gráfico é limitado

S10.H19: identificar os parâmetros de uma função quadrática em termos da parábola que a representa graficamente.

superiormente. Usando uma dessas representações (ou qualquer outra que tenha obtido), consegue determinar o parâmetro a usando o dado sobre o vértice da parábola, isto é, a informação expressa no gráfico de que f(5) = 4. Constata, desse modo, que o coeficiente a depende tanto da altura máxima do gráfico quanto da distância entre pontos do gráfico a uma mesma altura, o que sugere uma relação entre esse coeficiente e a curvatura ou convexidade do gráfico. Portanto, espera-se que, ao estabelecer a correspondência entre os dados geométricos e os parâmetros algébricos, o estudante observe que o coeficiente do termo linear na expressão algébrica da função é associado ao eixo de simetria da parábola. Por exemplo, as funções da família

$$f(x) = a(x-b)^2 + c,$$

onde b é um parâmetro livre, têm eixo de simetria dado pela reta vertical x = b. A variação desse parâmetro, por exemplo, corresponde a translações ao longo do eixo horizontal.



Habilidade correlata na BNCC: EM13MAT402.

S10.H20: determinar raízes, máximos/mínimos e outros elementos algébricos e geométricos (convexidade, interceptos, vértice, eixo de simetria) a partir da forma estendida ou da forma fatorada de uma função quadrática.	**Descrição:** retomando os conceitos e procedimentos trabalhados na habilidade S10.H19, o propósito, agora, é de que o estudante determine, a partir da expressão algébrica de uma função quadrática, as principais características geométricas de sua representação gráfica e informações relevantes sobre o comportamento da função (e.g., zeros, valores máximo/mínimo, convexidade ou curvatura, intervalos de crescimento/decrescimento, entre outros). Por exemplo, dada uma função expressa na "forma fatorada" como $$f(x) = a(x-3)(x-7),$$ deve concluir que os zeros ocorrem em x=3 e x=7 e que o valor extremo da função é atingido no valor médio x = (3+7)/2 = 5. Além disso, que o sinal do coeficiente a determina o comportamento da função no intervalo entre os zeros e fora dele. Por exemplo, se a = -1, a função é limitada superiormente e atinge valor máximo em x = 5, sendo crescente para valores inferiores a 5 e decrescente para valores superiores a 5. Além disso, o estudante deve reconhecer o efeito da mudança do parâmetro a sobre a convexidade (interpretada como "abertura") do gráfico. Da mesma forma, dada uma expressão algébrica da forma $$f(x) = ax^2 - 2abx + c,$$ o estudante deve estar apto a realizar manipulações algébricas, como completamento de quadrados, que a reduzam à forma equivalente $$f(x) = a(x-b)^2 + c - ab^2,$$ a qual permite rapidamente identificar a reta vertical $x = b$ como eixo de simetria do gráfico e $c - ab^2$ como valor extremo (máximo ou mínimo, a depender do valor de a) da função.
Habilidade correlata na BNCC: EM13MAT402.	

6. DOMÍNIOS DE PROCESSOS COGNITIVOS: RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NA EXECUÇÃO DE TAREFAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

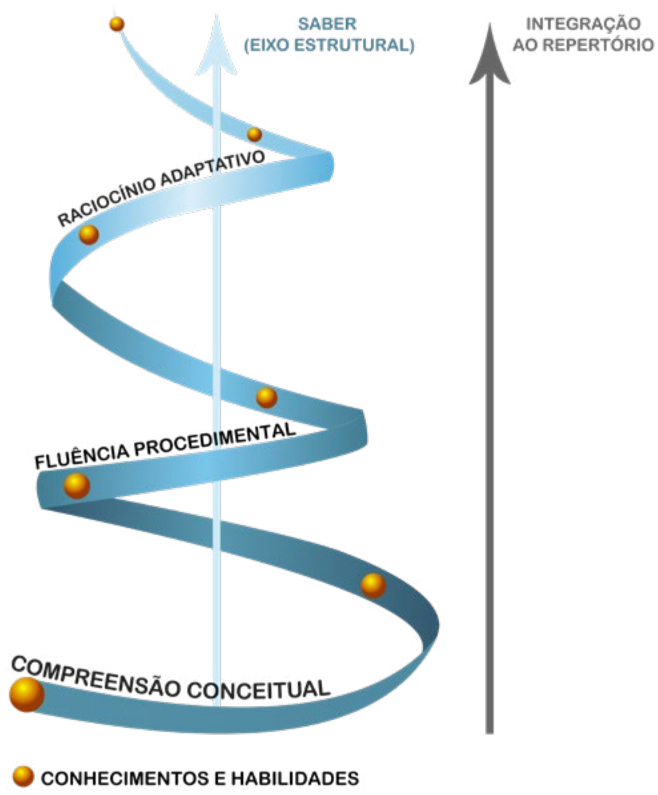
O ciclo de Polya, com os refinamentos introduzidos por Schoenfeld (1985, 1992) e outros autores, brevemente descrito anteriormente, pode ser um referencial comum aos processos cognitivos considerados nos arcabouços conceituais de sistemas como o Pisa, TIMSS e MARS, por exemplo. Além disso, fundamenta nossa própria definição de processos cognitivos. Esses referenciais estão alinhados aos avanços da Psicologia Cognitiva, os quais, como vimos, endossam, por sua vez, as descrições pormenorizadas que matemáticos como Poincaré, Hadamard e Polya realizaram do processo de aprendizado e de descoberta do conhecimento matemático.

Resumindo os aspectos da competência matemática que descrevemos anteriormente, podemos, de modo simplificado, dizer que, ao longo de uma trajetória de progressão do aprendizado, o estudante mobiliza conhecimentos e habilidades matemáticos dispostos, de forma estruturada e dotada de significados, em sua memória de longo prazo. Emprega conceitos, métodos e procedimentos em diversos contextos, matemáticos ou não matemáticos, com correção (especialmente no uso da terminologia, em sequências lógico-dedutivas e no uso de algoritmos e demais técnicas), adequação (ao perceber quais objetos matemáticos são pertinentes e mais adequados ao contexto em que trabalha, além de ter clareza sobre de que modo devem ser usados, eventualmente com adaptações, naquele contexto) e justificativas. A respeito desse último aspecto, espera-se que o estudante compreenda, explicite e comunique as premissas que considera, as noções que utiliza e os resultados que obtém. Da mesma forma, é esperado que formule suas conjecturas e exiba a cadeia de raciocínio dedutivo que segue na prova ou na refutação (eventualmente com contraexemplos) dessas afirmações. O domínio conceitual e procedimental sobre as noções e ferramentas matemáticas empregadas é um pressuposto cognitivo para todas essas operações. O trabalho efetuado com conhecimentos e *skills* previamente estruturados resulta em novas aquisições de conhecimentos ou em interpretações e configurações daqueles já disponíveis: o estudante os incorpora, organicamente, ao seu repertório, eventualmente com novos arranjos e estruturas.

As tarefas associadas às metas de aprendizagem e aos aspectos de competência matemática na aplicação dos conhecimentos e habilidades estruturados na Matriz dos Saberes mobilizam processos cognitivos de várias naturezas e níveis de complexidade. Para efeito de exposição e tendo em conta a estrutura presente no ciclo de

Polya e em referenciais como os *frameworks* do Pisa (OECD, 2018) e do TIMSS (TIMSS, 2023), enfeixamos esses diferentes processos em três **domínios cognitivos**. Esses domínios não são estanques: etapas diferentes de uma tarefa podem perpassar, em uma progressão de complexidade, os níveis, demandando processos cognitivos em cada um deles.

Complexidade dos processos cognitivos nos saberes da matriz



COMPREENDER/EFETUAR

Neste domínio cognitivo, há predominância de processos de **compreensão conceitual** e de fluência procedimental. As tarefas que exploram processos cognitivos neste domínio requerem, sobretudo, que o estudante recupere conceitos, fatos e procedimentos que considera necessários para executá-las. Além disso, apresentam situações e contextos rotineiros, os quais demandam, em geral, a aplicação direta de conceitos e procedimentos que devem estar integrados ao repertório matemático do estudante, dada sua etapa de aprendizagem. Espera-se que o estudante possa buscar e selecionar fatos e procedimentos pertinentes ao problema, revelando compreensão profunda dos conceitos básicos e correção, acurácia e eficiência no emprego dos procedimentos selecionados. Em sua estratégia de resolução, o estudante deve representar matematicamente os objetos, estruturas, relações, fatos e procedimentos aplicados, bem como expressar com clareza e precisão o raciocínio matemático empregado nas etapas de execução da tarefa.

MODELAR/APLICAR

A compreensão conceitual e a fluência procedimental continuam sendo demandadas em tarefas que envolvam processos cognitivos neste domínio. No entanto, passa a haver maior ênfase também nos aspectos da proficiência matemática relacionados à **competência estratégica**, particularmente à resolução de problemas. De fato, as tarefas podem apresentar situações ou contextos (próprios da Matemática ou referentes a aplicações cotidianas ou em outros domínios do conhecimento) que requerem modelagem matemática de maior complexidade, por não se restringir ao reconhecimento imediato de quais objetos e estruturas matemáticas representam informações relevantes. Além disso, o estudante deve decidir estrategicamente, nessas tarefas, que modelos e representações matemáticas são mais eficientes e permitem acessar mais informação útil em seu repertório. Enfatizamos que a aplicação de fatos e procedimentos não é, necessariamente, imediata nos problemas próprios deste domínio cognitivo. De modo geral, o estudante deve demonstrar flexibilidade no uso criativo e reflexivo de conceitos, estruturas, relações e procedimentos matemáticos. Os problemas apresentados nas tarefas devem ter elementos que não sejam completamente rotineiros. Por outro lado, devem propiciar que o estudante elabore conexões entre os novos contextos e seus conhecimentos prévios. Habilidades na representação e na comunicação matemáticas são especialmente exigidas neste domínio, especialmente nas etapas que envolvem a formulação e representação matemática e a adaptação dos conhecimentos prévios às situações menos rotineiras sugeridas nos contextos. Em suma, são mobilizados, nesse nível, aspectos tanto de *surface knowledge* quanto de *deep knowledge*, na terminologia empregada por Hattie (2016).

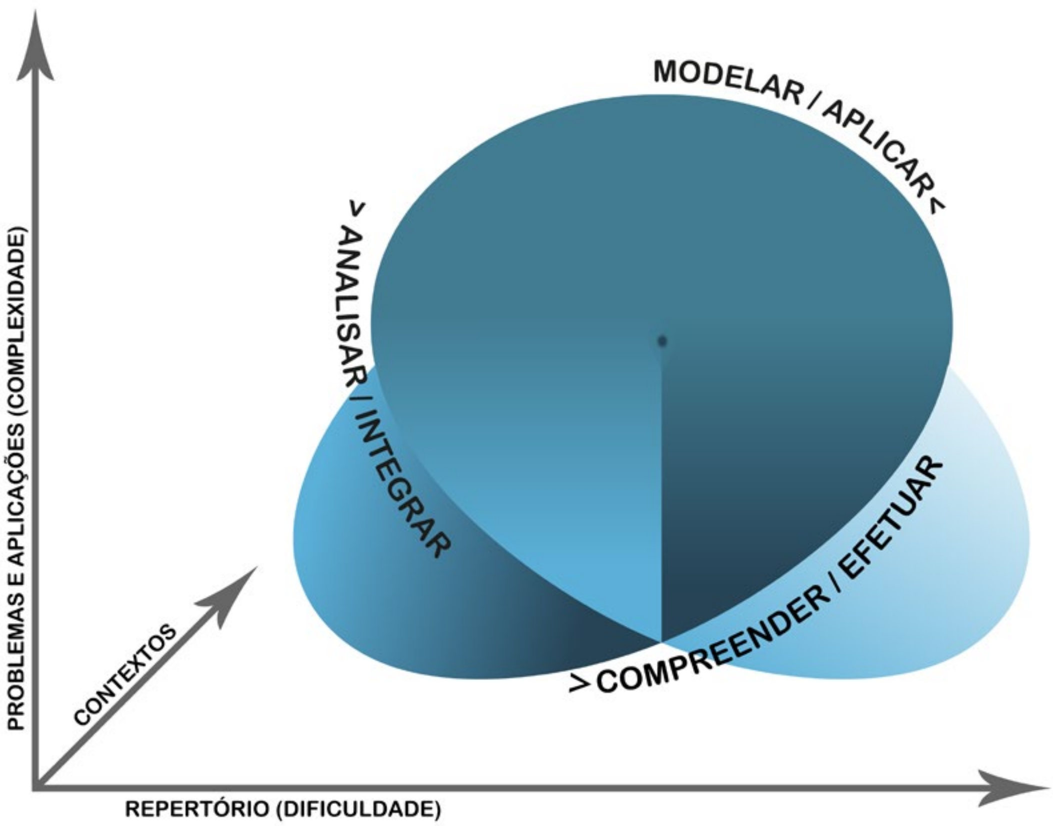
ANALISAR/INTEGRAR

Neste domínio, prevalecem demandas cognitivas associadas à competência estratégica e ao raciocínio adaptativo. Em particular, são exigidos aspectos da proficiência relativos à representação, expressão e comunicação do raciocínio matemático (abstração, intuição, indução, dedução, analogias, formulação de hipóteses e conjecturas, generalizações, particularizações, conclusões e inferências, elaboração de exemplos e contraexemplos, justificativas, entre outros). Requer-se, além disso, que o estudante estabeleça conexões entre conceitos, fatos, estruturas e relações matemáticas ou desses com contextos ou conhecimentos externos à Matemática. Em particular, é relevante que o estudante possa perceber características estruturais comuns a elementos do conhecimento matemático, assim como similaridades entre problemas e aplicações, diferentes na superfície, mas com similaridades mais profundas do ponto de vista matemático. Espera-se que o estudante possa avaliar o trabalho realizado na formulação matemática ou na resolução de problemas, rotineiros ou não rotineiros: processos cognitivos relativos à supervisão, autorregulação e metacognição são especialmente enfatizados neste domínio. Essas habilidades na (auto)avaliação dos processos e resultados do trabalho matemático devem ser acompanhadas da fluência na representação, expressão e comunicação desse trabalho.

Por fim, as tarefas que acionam processos cognitivos neste domínio, especialmente as não rotineiras, devem propiciar a aplicação ou a transferência de conhecimentos prévios para novos contextos. Esse aprendizado, produzido pela prática da transferência, deve ser integrado pelo estudante a seu repertório, promovendo uma reestruturação e ampliação dos usos e significados dos conhecimentos matemáticos de que dispõe. Nesse sentido, os problemas associados a este domínio requerem tanto *deep knowledge* quanto *transfer knowledge*. (HATTIE, 2016)

Dada uma tarefa em um determinado contexto, o estudante realiza o esforço de abstração, isolando elementos que podem ser representados matematicamente. Uma vez que a representação matemática (aritmética, geométrica, algébrica, probabilística, computacional) é realizada, procedimentos dedutivos ou simbólicos são efetuados sem, necessariamente, referência ao contexto original. O estudante é apto a selecionar e utilizar, se preciso, procedimentos diferentes, de acordo com sua própria avaliação no progresso com a tarefa. No sentido inverso, os resultados matemáticos da execução da tarefa devem ser interpretados de volta em termos do contexto em que essa tarefa é posta. Nessas etapas, operações cognitivas próprias do raciocínio matemático são realizadas, a exemplo de identificar, representar, relacionar, abstrair, calcular, deduzir, avaliar, explicar, justificar, interpretar, qualificar e comunicar.

Processos cognitivos mobilizados nas tarefas



7. MODELO DE TAREFAS

Segundo o princípio do conteúdo formulado em *Measuring what counts*, testes em um processo avaliativo devem ser compostos por tarefas que enfatizem as conexões entre áreas da Matemática, combinando conceitos, teoremas, técnicas e representações aritméticas, algébricas, geométricas e probabilísticas, por exemplo. Tarefas dessa natureza são exemplificadas em algumas passagens deste estudo e são baseadas em uma visão integradora de currículo, que realce a estrutura interna da Matemática, com suas múltiplas conexões, em vez de apresentá-la como uma coleção de tópicos isolados.

> *Much assessment tradition is based, however, in an atomistic approach that in practice, if not in theory, hides the connection among aspects of mathematics and other domains. Assessment developers will need to find new ways to reflect these connections in the assessment tasks posed for students. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993, p. 47).*

A esse propósito, recomenda-se que os testes contemplem tarefas que combinem diferentes áreas da Matemática ou que explorem contextos reais, os quais mobilizam habilidades de modelagem. Além disso, avaliações que respeitam o princípio do conteúdo definido por Bass e colaboradores (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993) têm tarefas em que a Matemática é empregada em contextos externos à área (em particular, relativos a situações do mundo real) que sejam relevantes. Por fim, devem conter tarefas que exijam dos estudantes uma comunicação clara do pensamento matemático e que promovam a resolução de problemas não rotineiros. Em uma fórmula sintética proposta pelos autores, o princípio do conteúdo implica que "*rather than forcing mathematics to fit assessment, assessment must be tailored to the mathematics that is important to learn*". (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993).

Um exemplo concreto dessa Matemática relevante pode ser extraído da Aritmética: além de questões procedimentais que envolvam meramente o uso de algoritmos para efetuar cálculos com somas e produtos, cabe apresentar tarefas que trabalhem o senso numérico, com aproximações e arredondamentos (e considerações sobre como os erros se propagam nas etapas dos algoritmos), bem como problemas que demandem modelagem usando essas operações.

O princípio do conteúdo implica desafios consideráveis. Por exemplo, elaboradores devem pensar em como propor um problema não rotineiro e garantir equidade entre estudantes que tenham diferentes *backgrounds* com respeito a conhecimentos prévios a ser mobilizados nas estratégias de resolução que terão de ser elaboradas, dada a novidade do problema. Desafios com esse grau de complexidade requerem equipes de desenvolvimento de testes que combinem um profundo entendimento de Matemática Básica e um conhecimento sólido sobre aspectos cognitivos do aprendizado nessa área.

Tarefas que respeitem o princípio do conteúdo exigem dispositivos de observação e mensuração como rubricas, ou seja, especificações de padrões de desempenho revelados nas respostas dos estudantes. Os autores citam exemplos de rubricas compostas de dois escores: um para a acurácia de uma resposta numérica e outro para a adequação das justificativas dadas pelo estudante para a resposta. De modo geral, as rubricas devem avaliar o domínio do conhecimento matemático julgado relevante e os processos cognitivos durante a execução da tarefa ou teste: "*If a rubric is developed to deal with a single task or a type of task, the important mathematical ideias and processes involved in the task can be specified so that the student can be judged on how well those appear to have been mastered*". (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993, p. 58).

Os autores enumeram algumas perguntas norteadoras para o desenvolvimento de testes em um sistema de avaliação, apresentadas a seguir.

- Que Matemática os estudantes devem saber antes de serem avaliados?
- Que Matemática devem aprender com a avaliação?
- O que os testes podem revelar sobre seu entendimento e capacidade com respeito à Matemática?
- De que formas as tarefas podem ser diversificadas, estendidas e incorporadas à instrução em curso?

Com relação às atitudes esperadas dos estudantes em um processo de avaliação, mencionam, por exemplo, se os estudantes devem formular conjecturas ou encontrar argumentos e fatos para refutá-las ou, ainda, elaborar argumentos matematicamente convincentes na modelagem e resolução de problemas.

O **princípio do aprendizado** formulado por Bass e colaboradores pode ser resumido na fórmula proposta pelos autores do relatório: "avaliações devem aprimorar a aprendizagem de Matemática e prover suporte para boas práticas instrucionais". (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993, p. 67). Essa integração entre instrução e avaliação é necessária para superar o conflito, mencionado no relatório, entre as demandas postas por avaliações externas e as práticas de ensino que os docentes julgam mais apropriadas.

Os autores mencionam três formas de avaliação que possam satisfazer ao princípio do aprendizado:

- assegurar que a avaliação fornece, diretamente, suporte ao aprendizado pelo estudante;
- assegurar que a avaliação esteja em consonância com boas práticas instrucionais;
- capacitar professores a aprimorar suas atividades para promoção da aprendizagem dos estudantes.

De acordo com essas diretrizes gerais, os autores apontam que a avaliação deve especificar e prover significados concretos para objetivos de aprendizagem valorizados no currículo. Os estudantes, conhecendo os objetivos explícitos da avaliação, podem desenvolver habilidades de autorregulação, monitorando e avaliando seu próprio desenvolvimento na progressão de aprendizagem.

Os autores enfatizam que esses objetivos de aprendizagem, como já discutido, não podem ser restritos a fatos e procedimentos em que os estudantes são treinados para uso nos testes. Testes e tarefas devem acompanhar o desenvolvimento das competências, permitindo obter inferências sobre estágios de *surface learning* e *deep learning* que ocorrem quando os estudantes passam a lidar com novos conteúdos ou problemas não familiares em suas trajetórias escolares. Os autores descrevem esses momentos cíclicos de aprendizagem de superfície e aprendizado profundo:

> *When students encounter new topics in mathematics, they often cannot see how the unfamiliar ideas are connected to anything they have seen before. They resort to primitive strategies of memorization, grasping at isolated and superficial aspects of the topic. As learning proceeds, they begin to see how the new ideas are connected to each other and to what they already know. They see regularities and uncover hidden relationships. Eventually, they learn to monitor their thinking and can choose different ways to tackle a problem or verify a solution. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993, p. 72).*

É preciso haver tarefas nas avaliações que acessem evidências sobre esses estágios diferentes e recursivos de progressão da aprendizagem: investigar se conhecimentos prévios estão consolidados; se os alunos, diante de novos conceitos ou dominando novos procedimentos, conseguem relacioná-los a conhecimentos e *skills* já adquiridos; se desenvolvem representações matemáticas desses novos elementos de repertório e lidam correta e eficientemente com essas representações; e, por fim, se estabelecem conexões e identificam estruturas entre blocos do conhecimento matemático, a despeito de suas diferenças superficiais.

Enfim, a avaliação, como processo, deve apoiar a instrução na verificação de que os diversos aspectos da competência matemática estão sendo plenamente desenvolvidos entre os estudantes. A devolutiva, dada tempestivamente aos estudantes sobre essas evidências, é um aspecto central para que um sistema avaliativo satisfaça o princípio do aprendizado. Por sua vez, devolutivas sobre tarefas relevantes requerem rubricas bastante estruturadas, ao mesmo tempo legíveis e reveladores de informação válida sobre padrões de desempenho quanto às competências que se pretende avaliar.

> *Such rubrics describe what is most important about a response, what distinguishes a stronger response from a weaker one, and often what characteristics distinguish a beginning learner from one with more advanced understanding and performance. Such information, when shared between teacher and student, has critically important implications for the learning process. (....) Teachers can use rubrics and sample work marked according to the rubric to communicate the goals of improved mathemati-*

cal explication. When applied to actual student work, rubrics illustrate the next level of learning toward which a student may move. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993, p. 74).

Outra característica que qualifica uma avaliação quanto ao princípio do aprendizado é o uso das evidências no planejamento da instrução. Para tanto, as avaliações devem informar ao professor, com base nas expectativas de aprendizagem que alicerçam o desenho das tarefas e a interpretação dos resultados, o que os estudantes sabem, como aprenderam e como estruturam e comunicam representações e raciocínio matemáticos. Os dados providos pelo sistema de avaliação não podem ser apenas escores destituídos de significado pedagógico.

Por fim, o próprio papel do professor como sujeito ativo da avaliação deve ser enfatizado para que o uso das evidências na instrução seja pleno. A **participação de professores** na elaboração de modelos conceituais de avaliação, testes, rubricas, dados e devolutivas pode ser ampliada com o uso de ferramentas tecnológicas e de formações continuadas intensivas e dirigidas a aplicações em sala de aula.

Teachers are being recognized as rich sources of information about what students know and can do, especially when they have been helped to learn ways to evaluate student performance. Many students' anxiety about mathematics interferes with their test performance; a teacher can assess students informally and unobtrusively during regular instruction. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993, p. 85).

Citando Shepard (2000), Pellegrino (2010) comenta sobre as várias formas segundo as quais as avaliações podem ser aprimoradas de modo a reunir e utilizar informações e *insights* que passam a fazer parte do processo de ensino-aprendizagem. Sendo assim, avaliações se tornariam tema central em programas de formação profissional, como discutiremos na conclusão do relatório.

O terceiro princípio, o da **equidade**, assevera que avaliações devem oferecer, a **todos os estudantes**, oportunidades de aprender Matemática relevante. De modo mais preciso, os autores enfatizam que as tarefas devem permitir observar as diferentes maneiras segundo as quais os estudantes pensam matematicamente e demonstram entendimento matemático:

Embora todos os estudantes sejam avaliados em conceitos e habilidades matemáticos relevantes, de acordo com os princípios do conteúdo e do aprendizado, o princípio da equidade implica que avaliações devem ser suficientemente flexíveis para permitir que todos os estudantes possam mostrar o que sabem, o que podem fazer com o que sabem. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993, p. 92).

Essa flexibilidade pode ser obtida apresentando-se, por exemplo, tarefas como **múltiplos pontos de entrada e de saída**, conforme exemplificaremos mais adiante em algumas aplicações-piloto que realizamos. Remetemos o leitor ao exemplo de tarefa no quadro 6. Tarefas dessa natureza permitem que os estudantes realizem diferentes percursos, com diversas estratégias e repertórios, revelando diferentes níveis de conhecimento matemático e de sua mobilização em situações de diversos graus de complexidade.

Os autores de *Measuring what counts* ressaltam, ainda, cuidados que devem ser tomados na elaboração de tarefas, especialmente quanto ao contexto e à linguagem empregados. Tanto equipes de elaboração quanto de correção devem ter conhecimento de diferentes expressões e representações. Elaboradores que não conheçam contextos culturais representativos de uma minoria podem apresentar tarefas com contextos ou linguagens que afetam o desempenho por razões não matemáticas; corretores que não têm conhecimento sobre formas de pensamento matemático, expressas ou representadas de acordo com o contexto ou a linguagem de estudantes em grupos específicos, podem desconsiderar elementos importantes para avaliar o desempenho dos alunos em uma tarefa. É fundamental que as tarefas produzam evidências sobre as diferenças genuínas de desenvolvimento matemático, que não estejam associadas a diferenças produzidas pela diversidade dos alunos quanto a outros aspectos.

> *As assessments become more complex and more connected to real-world tasks, there is a greater chance that the underlying assumptions and views may not apply equally to all students, particularly differences in background and instructional histories are involved. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993, p. 95).*

Alertam para o fato de que se fatores não matemáticos, como contexto, linguagem, perfil dos corretores, entre outros, contribuem para medidas diferentes de desempenho entre grupos diversos, as inferências e interpretações a partir dos resultados podem estar enviesadas, ou seja, não serem igualmente válidas para todos os grupos. Especialmente preocupantes são decisões tomadas quanto a agrupamentos e *tracks* curriculares, baseadas em inferências sobre diferenças de resultados entre grupos não diretamente atribuíveis ao desenvolvimento matemático dos estudantes. Trilhas curriculares de baixos objetivos e baixas expectativas de aprendizagem, recomendadas a alunos de desempenho insuficiente, comprometem ainda mais a equidade, distanciando os alunos que seguem esses percursos de conhecimentos e habilidades matemáticos demandados no mundo real e na vida adulta. Esse pode ser o caso da adoção recente de esquemas de priorização curricular amparados em avaliações com itens de baixíssima complexidade.

A extrapolação da validade estatística dos testes para apoiar inferências, "cientificamente" embasadas, sobre *ranking* e agrupamento de alunos pode conduzir a um crescente distanciamento daqueles em situações mais desfavoráveis de padrões de conhecimento matemático necessários para o desenvolvimento de competências básicas ou complexas.

> *In mathematics, many of the children who begin remediation in third grade never catch up to their peers. By ninth grade many are so far behind that they opt out of more challenging mathematics courses if given a choice. Others are programmed out os such courses by teachers and counselors who judge them poorly prepared for gateway subjects, such as algebra and geometry. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993).*

Além de tarefas com múltiplos pontos de entrada e saída, os autores mencionam problemas em que os alunos utilizam seu repertório não formal de Matemática, de suas experiências cotidianas, e elaboram modelos matemáticos que, mesmo expressos em uma linguagem não convencional, envolvem conceitos sutis e complexos.

Ainda em atenção ao princípio da equidade, a comunicação com a comunidade de aprendizagem é abordada como um aspecto fundamental para que pais, professores, gestores e demais membros dessa comunidade possam chegar a consensos sobre valores, objetivos e necessidades de informação que o sistema de avaliação deve atender. Mencionam, a propósito, a iniciativa do CRESST de tornar públicos os *blueprints* da avaliação no que se refere a conhecimento de mundo, conhecimentos prévios, demandas de linguagem, estrutura e tópicos da tarefa, critérios para atribuição de escores, perfil dos corretores, acesso e referenciais de equidade educacional do sistema.

Em particular, a discussão com os pais sobre testes e tarefas, bem como sobre padrões de desempenho em rubricas e sobre conhecimentos e habilidades esperados, elucida muito as distinções entre a abordagem, certamente mais procedimental, requerida em currículos e testes de suas gerações e as demandas complexas que os testes apresentados a seus filhos devem contemplar para que acessem informações sobre o desempenho em Matemática realmente relevante.

PRINCÍPIOS PARA A ELABORAÇÃO DE TAREFAS

No modelo que propomos, a elaboração das tarefas atenta para os princípios de conteúdo, aprendizado e equidade definidos por Bass e colaboradores em *Measuring what counts*. Sendo assim, a estruturação de tarefas e testes deve compreender as ações descritas a seguir.

1. Definir para quais **metas de aprendizagem** as tarefas podem trazer evidências em suporte ao processo instrucional. Nesse sentido, é relevante que os conhecimentos e habilidades especificados pelos elaboradores sejam aderentes a objetivos de aprendizagem previstos no currículo da rede ou da escola.

Por exemplo, pode ser tomada a decisão de elaborar tarefas que demandem conhecimentos e habilidades sobre o uso de operações aritméticas (e de suas propriedades e representações) em contextos do mundo real. Como meta de aprendizagem, pode ser considerado o desenvolvimento gradual de um modelo matemático, a partir de informações dadas no contexto do problema, envolvendo operações aritméticas. Uma tarefa pode ser proposta, por exemplo, de modo a mobilizar conhecimentos e habilidades relativos aos saberes 01, 04 e 09, entre os quais:

- operações aritméticas, suas propriedades e representações;
- múltiplos e divisores;
- razão como constante de proporcionalidade;
- perímetro de figuras elementares;
- medidas de distância e tempo;
- grandezas relativas;
- ordem e comparação de números racionais;
- modelagem matemática.

Para um exemplo de uma tal tarefa, remetemos o leitor ao quadro 6.

É relevante ressaltar que esses conhecimentos podem ser demandados, na tarefa, em combinações, representações, usos e significados que não são, necessariamente, aqueles familiares em questões de natureza mais procedimental. Essa é a razão primeira pela qual descrevemos os conhecimentos e habilidades na Matriz dos Saberes de modo que a definição de quais são mobilizados na tarefa não se resuma a uma lista de tópicos específicos e estanques ou a uma seleção de habilidades genéricas na base curricular, dificilmente observáveis de forma direta. Ademais, a matriz estabelece, como vimos, ligações lógico-cognitivas entre os conhecimentos de modo que tanto elaboradores quanto, posteriormente, professores e alunos possam entender a rede de interdependências lógicas e cognitivas entre os aspectos da Matemática que estiveram nos planos de frente e de fundo da tarefa.

Além disso, é importante que seja vislumbrada a unidade da Matemática e a forma como elementos de repertório convencionalmente atribuídos a domínios diferentes podem ser combinados de maneiras originais para a resolução de problemas. De acordo com Bass e colaboradores, "*the types of problems that matter – the types we really wish to have students learn how to solve – are the ones that are nonroutine*". (NATIONAL RESEARCH COUNCIL,1993).

Para que se garanta equidade em testes que apresentem tarefas não rotineiras, é preciso que o processo de instrução confronte o estudante com situações nas quais o conhecimento que adquiriu seja realmente mobilizado em novos desafios que, com a assistência do professor, promovam atitudes de abertura a situações não familiares, mas para as quais as ferramentas necessárias estejam disponíveis. Os autores ponderam, assim, que: "*(...) The challenge, ultimately, is to ensure that all students being assessed have had substantial experience in grappling with nonroutine problems as well as the opportunity to learn the mathematical ideas embedded in the problem*". (NATIONAL RESEARCH COUNCIL,1993). Observam, ainda, que os professores devem estar abertos a soluções alternativas para problemas não rotineiros. Por essa razão, o cuidado com as rubricas e devolutivas é tão essencial quanto o mapeamento, na etapa inicial da confecção das tarefas, dos conhecimentos acessados.

2. Definir um **contexto significativo** e realístico que tanto requeira um efetivo esforço de modelagem quanto contenha informações essenciais para a mobilização dos conhecimentos e habilidades considerados na elaboração da tarefa. Enfatizamos que devem ser elaboradas também tarefas que não se refiram, necessariamente, a um contexto externo à Matemática; ou seja, os testes devem também contemplar tarefas que tenham a própria Matemática como objeto.

A delimitação dos conhecimentos e habilidades (relacionados a uma ou mais metas de aprendizagem) deve ser acompanhada da definição de um contexto, a exemplo do que ocorre no desenho do Pisa. Conforme expusemos anteriormente, os contextos podem ser de situações cotidianas ou sociais, ou, ainda, científicos e tecnológicos, abrangendo informações sobre Economia, Tecnologias da Informação, Genética e Ecologia, Física e Astronomia, a própria Matemática, entre outros campos em que a linguagem matemática é requerida e os conceitos científicos possam ser apresentados de forma condizente com a etapa de escolarização dos alunos.

Retomando o exemplo acima, pode ser fixado um contexto cotidiano como motivação inicial, mas que permita esforços de indução, generalização, abstração e formalização como resultados da representação e modelagem matemáticas necessárias. Ou seja, a situação cotidiana empresta significados e atalhos cognitivos para o aluno, dada a familiaridade do contexto; além disso, serve como uma baliza para que o aluno analise criticamente os resultados de seus procedimentos, uma vez que devem fazer sentido quando interpretados em termos da situação concreta que é matematicamente modelada. No entanto, o papel do contexto deve ser dimensionado de modo que o aluno possa perceber que as representações e procedimentos usados na tarefa podem ser incorporados organicamente a seu repertório e, com isso, empregados, seja em etapas mais abstratas ou gerais da tarefa, seja em tarefas com estrutura matemática similar, embora, possivelmente, motivadas por outros contextos.

3. Definir os **processos cognitivos**, em uma gradação de complexidade, demandados na execução da tarefa.

Seriam demandadas, no exemplo de tarefa envolvendo conhecimentos de Aritmética (saberes 01, 04 e 09): i) recuperar conhecimentos básicos necessários para a execução da tarefa (por exemplo, sobre as operações de adição e multiplicação, mobilização de conceitos e fatos a respeito de propriedades operatórias; uso de algoritmos costumeiros; uso da representação decimal posicional para efetuar cálculos aritméticos; arredondamento e estimativa de somas e de produtos); ii) reconhecer quais operações e quais de suas propriedades e representações (por exemplo, geométricas, em termos de translações na reta numérica) podem ser úteis para modelar o problema; iii) modelar a situação apresentada pelo problema em termos de representações das operações aritméticas consideradas úteis para o contexto; iv) elaborar estratégia para combinar os conhecimentos mobilizados de acordo com a modelagem matemática do problema; v) efetuar, com correção e justificativas, os procedimentos necessários para implementar a estratégia; vi) interpretar os resultados obtidos na implementação em termos de possíveis respostas ao problema, considerando a forma como foi modelado; vii) analisar criticamente a adequação tanto das respostas ao modelo quanto do modelo ao problema em sua forma original; viii) comunicar, em linguagem natural e/ou matemática, o raciocínio matemático usado na estratégia de resolução; ix) descrever o raciocínio dedutivo formulado nas etapas da resolução; x) induzir, generalizar ou extrapolar o modelo ou a implementação da estratégia de resolução para etapas seguintes da tarefa ou para tarefas matematicamente similares.

A propósito dessa progressão de demandas cognitivas, cabe dizer que atende à ideia de "múltiplos pontos de entrada e de saída" discutida por Bass e colaboradores, um dos eixos do princípio da equidade que tem, também, claras contribuições à interpretação e ao uso pedagógico das respostas dadas às etapas das tarefas, segundo uma gradação predefinida de complexidade.

(...) Students should be allowed to become engaged in assessment tasks through a sequence of questions of increasing difficulty. They ought to be able to exit the task at different points reflecting differing levels of understanding and insight into the mathematical content. For too long, assessment tasks have not provided all students with the opportunity to start the task, let alone work part way through it. As a result some students have inadequate opportunities to display their understanding. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL,1993).

Progressões cognitivas na estrutura da tarefa buscam reproduzir, no ambiente do teste, aspectos reais do pensamento matemático, especialmente na resolução de problemas, conforme as descrições de Hadamard e Polya, já mencionadas. Além disso, nos aproximamos, com essa arquitetura, das tríades de processos cognitivos no TIMSS e no Pisa, como discutimos anteriormente. No caso do MARS (MARS, 2023), temos uma configuração análoga metaforicamente ilustrada com a figura de uma "rampa" cognitiva.

Em suma, a ascensão em espiral ao longo das etapas de uma tarefa (ou conjunto articulado de tarefas em um bloco) inicia com questões que evocam o repertório (conceitos, procedimentos, fatos), seguem para o esforço de modelagem a partir de contextos diversos e com a combinação (em maior ou menor complexidade) do repertório acessado na primeira parte, e culmina com questões que exigem algum esforço de generalização, formalização, validação dos modelos, hipóteses e procedimentos, adaptação para outros contextos, analogia, identificação de padrões e estruturas, entre outras operações "criativas" do pensamento matemático.

4. Elaborar questões componentes da tarefa, explicitando hipóteses plausíveis sobre possíveis fontes de erros em cada etapa representada por essas questões.

Nas fases de elaboração descritas anteriormente, foram definidos, com precisão, conhecimentos, habilidades e processos cognitivos a serem mobilizados nas etapas graduais da tarefa, sempre sobre o pano de fundo e com a intencionalidade de gerar evidências sobre uma dada meta de aprendizagem associada ao currículo escolar. Essas intenções são concretizadas com a engenharia das questões que compõem a tarefa, fase crucial para a validade das evidências que se pretende gerar a partir da aplicação do problema em uma rotina escolar.

Uma observação relevante é de que não pretendemos, nessa engenharia, estabelecer uma correspondência biunívoca ao estilo de "uma questão, uma habilidade". De fato, é o conjunto de questões, global e organicamente arranjadas na tarefa, que pode trazer evidências sobre os conhecimentos e *skills* usados em sua resolução, com os processos cognitivos previstos no modelo que embasa a tarefa. No entanto, cada questão deve contribuir, de modo preciso, para construir aspectos dessas evidências.

Observamos que tarefas, na acepção que damos a esse termo, não correspondem, necessariamente, a itens, muito menos se restringem a itens de múltipla escolha. De fato, entendemos por tarefa uma ou mais questões que dizem respeito a um estímulo comum, em geral um texto e um contexto que suscitam problemas matemáticos. Essas questões, componentes articuladas da tarefa, podem ser tanto de múltipla escolha como, em sua maioria, de resposta construída, ou seja, questões abertas. No entanto, como se referem a textos e contextos bem delimitados, o grau de abertura dessas questões não é amplo a ponto de não permitir uma categorização exequível de respostas, nem estreito a ponto de não facultar o acesso às informações cognitivas que um item de múltipla escolha não permite registrar.

Alguns cuidados devem ser tomados pelos elaboradores em pontos que requerem a participação de professores atuantes nas escolas para uma validação pedagógica das questões. A linguagem adotada, seja a natural, seja o jargão matemático, não pode se sobrepor aos conteúdos e *skills* realmente relevantes; ou seja, é preciso cuidar para que a complexidade cognitiva da tarefa, em suas questões, não se deva predominantemente à linguagem empregada em sua formulação e, sim, aos aspectos efetivamente contextuais ou matemáticos do problema. As questões não devem demandar conhecimentos conceituais ou procedimentais que não tenham sido expostos aos alunos, embora a forma de utilizá-los deva ser não rotineira em algumas questões, como já discutido. Para que cada questão contribua com uma "peça" de evidência, é preciso que alguma informação seja extraída a partir do registro do trabalho do aluno. Nesse sentido, não é recomendável a restrição a itens de múltipla escolha; itens de resposta construída podem suscitar respostas com dados que revelem **como** o aluno resgatou, combinou e utilizou os conhecimentos de interesse na avaliação, bem como dar mostras, ainda que indiretas, dos processos cognitivos de que lançou mão na estratégia empregada.

A experiência dos professores, combinada ao trabalho dos elaboradores, é igualmente indispensável para que alguns padrões de comportamento frequentes possam ser manifestados quando as questões são expostas aos alunos: lacunas conceituais e procedimentais; uso inadequado da terminologia e das representações simbólicas; imprecisão no uso dos conceitos; erros nos procedimentos, causados por conhecimento ou prática insuficiente; extrapolação dos procedimentos para usos inadequados; entre outros. Entraves de natureza emocional, ligadas a uma prevalência de crenças sobre a capacidade matemática (referidas, na literatura em torno das contribuições de Boaler, como *mindset* fixo), devem ser também consideradas no mapeamento preliminar do que pode ser revelado pelo conjunto de questões.

A complexidade das tarefas é também considerada pelos técnicos e professores na correção, uma vez que elas mobilizam conhecimentos e habilidades combinados segundo processos cognitivos de maior ou menor complexidade. A atividade de correção não gera apenas um valor binário (certo/errado), como é habitual quando nos restringimos ao uso de itens de múltipla escolha. Nos experimentos conduzidos no projeto, vimos que a correção, quando realizada por professores devidamente qualificados em duplas ou trios, fixa, por aproximações sucessivas, classes ou categorias de respostas, com características comuns e que denotam graus diferentes de domínio dos conhecimentos e habilidades acessados, no nível de complexidade cognitiva demandada. Esses padrões de desempenho são iterativamente ajustados, pois partem de expectativas definidas *a priori* e, gradualmente, se ajustam ao que é efetivamente observado nas respostas concretas. Esse aspecto não é um preciosismo e, sim, um elemento fundamental de validade das evidências e das devolutivas: os resultados não são comunicados em termos de escalas genéricas com marcos abstratamente fixados, mas referentes ao contexto específico dos alunos e escolas em que os testes foram realizados.

As categorias estabelecidas de respostas devem ser explicitamente descritas em textos objetivos, claros e informativos. Dito de outro modo, é preciso que os técnicos e professores responsáveis pela correção dos conjuntos iniciais de respostas (que podem alimentar algoritmos de correção automatizada, como em nossos experimentos) descrevam os padrões de desempenho, quanto aos objetivos de aprendizagem almejados na tarefa, observados nas respostas que pertencem a uma dada categoria. Essas classes, enfatizamos, não são abstratas, mas se referem às tarefas e respostas concretas. Geralmente, os desempenhos observados são rotulados com adjetivações como "insuficiente", "parcialmente suficiente" ou "totalmente suficiente". Uma vez que as amostras de respostas e correções venham a ser os insumos iniciais em uma rotina computacional de aprendizado de máquina, é necessário que as categorias estejam bem delimitadas, com fronteiras bem definidas entre os conjuntos de respostas associadas a cada uma delas. Isso requer uma construção rigorosa das tarefas e uma especificação precisa dos padrões que definem as categorias, vis-à-vis as respostas concretas reunidas na aplicação do teste.

ÊNFASE NA FINALIDADE FORMATIVA DA AVALIAÇÃO

A avaliação formativa deve ser entendida não apenas como um conjunto de atividades pedagógicas isoladas, mas como um sistema integrado de intervenções em redes de ensino com suporte em um modelo conceitual explícito e em evidências pedagogicamente válidas e visíveis. Em particular, esse sistema depende da elaboração de tecnologias educacionais que permitam capacitar docentes quanto ao uso pedagógico de avaliação formativa, possibilitar o uso rotineiro destas avaliações nas escolas, armazenar e categorizar respostas de estudantes, tornando possível a análise de erros, e, como culminância, trazer o uso de devolutivas pedagógicas para o centro da avaliação.

Na seção seguinte, delineamos alguns dos referenciais teóricos em que embasamos a proposta conceitual da plataforma de avaliações formativas do CEnPE, utilizada em alguns dos experimentos relatados neste documento.

Arcabouço conceitual

Fixados os princípios fundantes do evidence centered design, do triângulo avaliativo de James Pellegrino e do relatório de Hyman Bass e colaboradores, buscamos, em nosso referencial teórico, aproximar a avaliação de objetivos de aprendizagem explicitamente declarados, um dos pilares do ensino explícito, no sentido em que Gauthier e colaboradores o definem:

> *Globalmente, tal estratégia pedagógica implica, portanto, as ações de dizer, mostrar, guiar. Dizer, no sentido de explicitar, para os alunos, as intenções e objetivos visados na aula. Dizer, também no sentido de lhes tornar explícitos e acessíveis os conhecimentos anteriores de que eles precisarão. Mostrar, no sentido de fazer com que a tarefa a realizar se torne explícita para os alunos, executando-a diante deles e enunciando ao mesmo tempo em voz alta o raciocínio seguido. Guiar, no sentido de levar os alunos, através de perguntas, a explicitarem seu raciocínio implícito em situação prática e lhes fornecer um feedback apropriado, para que eles possam construir conhecimentos adequados antes que os erros se cristalizem em sua mente. (GAUTHIER et al., 2014).*

Os autores fundamentam o ensino explícito em achados da Psicologia Cognitiva, os quais discutimos anteriormente e que, gradual e um tanto tardiamente, começaram a ser incorporados à teoria pedagógica. A prática das tarefas tem sua importância ressaltada no contexto do ensino explícito e de acordo com os modelos atuais de arquitetura cognitiva, segundo os quais os conhecimentos e habilidades são estruturados, por meio da prática deliberada e frequente, em *chunks* interconectados na memória de longo prazo. Essas representações ou esquemas de conhecimentos prévios são mobilizados pela memória de trabalho operando na aquisição de novos conhecimentos ou na execução de uma tarefa. Segundo Gauthier e colaboradores, no momento em que uma tarefa é apresentada ao aluno por meio de instruções pedagógicas, esse estímulo gera informações sensoriais das quais o aluno

> *[...] extrai, dentre tudo o que está armazenado em sua memória, os saberes, savoir-faire e savoir-être, a partir dos quais ele será capaz de decodificar as informações recebidas para lhes dar sentido. Uma vez o sentido atribuído, o aluno constrói para si mesmo uma representação da tarefa a efetuar. Daí em diante, ele não trabalha mais no que lhe foi pedido, mas sim unicamente na representação da tarefa que ele construiu para si mesmo em função dos saberes que ele adquiriu anteriormente. Em seguida, uma série de tratamentos será efetuada nessa representação, visando produzir uma resposta ou realizar a tarefa. O trabalho do professor consiste em planejar, estruturar e dirigir uma sequência de ensino que vai permitir que o aprendiz perceba e analise a informação em função de seus conhecimentos anteriores, atribuindo-lhe o significado necessário à sua compreensão e tratamento. (GAUTHIER et al., 2014).*

Tarefas, portanto, evocam, de modo seletivo, conhecimentos e habilidades armazenados e estruturas complexas conectadas na memória de longo prazo. Novos conhecimentos e *skills* são combinados aos previamente estruturados, o que lhes confere novos arranjos e significados. Quando exposto a tarefas similares, o aluno busca representações que já lhe são familiares. A teoria da carga cognitiva reforça o fato de que os *chunks* de conhecimentos armazenados ampliam a capacidade limitada da memória de trabalho quando esta é demandada a lidar com um conjunto massivo de novas informações trazidas por uma tarefa. As consequências pedagógicas desses achados científicos são patentes no processo de ensino-aprendizagem. Willingham (2006) aponta que "*[...] understanding new ideas is mostly a matter of getting the right old ideas into working memory and then rearranging them*". Observações como essas, lastreadas na Ciência Cognitiva, deveriam ser consideradas na pauta da equidade educacional e da recomposição de aprendizagens. Essa fundamentação teórica embasa, em nossa proposta, a preocupação central de garantir o acesso e a consolidação de conhecimentos prévios, especialmente entre os alunos com resultados aquém das expectativas de aprendizagem. Ressaltamos que mesmo essas expectativas ou os conhecimentos necessários para atingi-las não estão explicitamente declarados em diretrizes curriculares ou matrizes de avaliação vigentes em boa parte dos sistemas educacionais, o que torna igualmente indispensável a definição clara desses objetivos.

O intercâmbio entre avaliação, instrução e currículo no ensino explícito é retomado na noção de avaliação formativa "imersa" no ensino, como extensamente descrita nos trabalhos seminais de Black e William (2010). Esses autores colocam a participação dos docentes como elemento central, ao mesmo tempo que reconhecem a definição dos objetivos de aprendizagem como atividade essencial. De fato, esses pesquisadores definem avaliação formativa como "(...) *encompassing all those activities undertaken by teachers, and/or by their students, which provide information to be used as feedback to modify the teaching and the learning activities in which they are engaged*". (BLACK; WILIAM, 2010, p. 7).

Ainda segundo os autores, as cinco estratégias definidoras da avaliação formativa vinculada à instrução são, em tradução livre:

1. esclarecer, compartilhar e compreender os objetivos de aprendizagem e os critérios de sucesso;
2. acessar evidências de que o aprendizado tenha ocorrido;
3. prover devolutivas que promovam aprendizagem;
4. estimular os aprendizes para que sejam recursos instrucionais uns para os outros;
5. estimular os aprendizes para que sejam protagonistas de sua própria aprendizagem.

Nosso conceito de plataforma considera esses cinco eixos, uma vez que prevemos organizar um compêndio de tarefas ilustrativas de objetivos de aprendizagem bem definidos, juntamente com padrões de desempenho especificados por rubricas e exemplificados por respostas representativas desses padrões. As rubricas, que permitem categorizar respostas em padrões de desempenho quanto ao domínio e uso de conhecimentos e habilidades nas tarefas, permitem compor devolutivas. Essas devolutivas, por sua vez, sistematizam e apresentam pedagogicamente as evidências para professores e aprendizes. Portanto, são o principal meio de comunicação, acessível aos que participam da comunidade de aprendizagem. Desse modo, os pontos 2 e 3 levantados por Black e Wiliam (2010) são conceitualmente atendidos no projeto. Por fim, a estrutura de testes e de tarefas, juntamente com as formações de professores, permitem atividades colaborativas em que os estudantes interagem e reforçam mutuamente suas aprendizagens, o que atende ao quarto ponto. Além disso, o ponto 5 é considerado na plataforma, visto que as tarefas são explicitamente vinculadas a objetivos declarados e as devolutivas se referem, em linguagem acessível, aos graus em que esses objetivos são atingidos (com justificativas claras, geradas pela observação direta das respostas).

Black e Wiliam (2010) trazem diversas evidências sobre o impacto efetivo de avaliações formativas integradas ao desenho instrucional. Esse impacto é documentado também por Hattie (2017) em seu celebrado esforço de meta-análises, quando menciona que o tamanho do efeito médio das avaliações formativas é duas vezes maior que o efeito médio de todos os outros efeitos de escolarização. Em seus próprios termos, enfatiza o papel do professor na avaliação formativa:

> *Trabalhar com fatores observáveis é a base da avaliação formativa da aprendizagem. Muito frequentemente, os professores trabalham a partir de teorias ou inferências sobre o que os alunos fazem que não são sempre abertas a mudanças à luz do que os alunos na verdade fazem. Em vez disso, os professores precisam primeiro se concentrar no que os alunos fazem, dizem, criam ou escrevem e modificar suas teorias sobre os alunos a partir dessas observações (ou dessas evidências). Os professores precisam buscar feedback a partir dessa avaliação, de modo que possam modificar seu ensino. (HATTIE, 2017, p. 115).*

Na arquitetura conceitual do ensino visível elaborada por Hattie (2017), a devolutiva deve abordar três questões.

- Para onde estou indo?
- Como estou indo para lá?
- Para onde ir em seguida?

A primeira questão é, naturalmente, relativa aos objetivos de aprendizagem e níveis de desempenho comunicados com as tarefas e nas devolutivas. A questão da progressão das aprendizagens, em termos de objetivos de aprendizagem encadeados ou de tarefas em um crescendo de complexidade, é o objeto das duas outras questões. Além de contemplar esses questionamentos, a devolutiva, segundo Hattie (2017), deve ser estruturada em quatro níveis, dos quais descrevemos os dois primeiros a seguir.

- **Nível da tarefa ou do produto:** esse primeiro nível diz respeito ao *feedback* sobre o conhecimento superficial (na terminologia de Hattie) mobilizado na tarefa, ou seja, às evidências da aquisição do repertório por parte do aluno, especialmente importante para noviços naquele domínio de conhecimento. Por exemplo, em uma tarefa que envolva modelar um problema em termos de operações aritméticas, a devolutiva, nesse nível, enfatiza a correção dos procedimentos utilizados pelo aluno e a validade dos resultados que obtém.

- **Nível do processo:** o segundo nível considera o conhecimento profundo (uma vez mais, no jargão de Hattie e de seus colaboradores). Isso significa que a devolutiva, nesse nível, abrange "fornecer conexões entre as ideias, oferecer estratégias para a identificação dos erros, aprender a aprender explicitamente a partir dos erros e fornecer sinais sobre as diferentes estratégias ou erros". (HATTIE, 2017, p. 118). Segundo o autor, ao incidir sobre os processos cognitivos e não apenas sobre os produtos da realização da tarefa, essa camada da devolutiva pode otimizar as estratégias segundo as quais o aluno resgata ou representa conhecimentos da memória de longo prazo e os recombina na memória de trabalho, diminuindo a carga cognitiva. Contribui, ainda, para o reconhecimento das causas dos erros, em termos de lacunas de conhecimentos prévios, *misconceptions* ou procedimentos falhos. Retomando o exemplo de uma tarefa de Aritmética, trata-se não apenas de apontar os erros conceituais ou procedimentais no uso de um algoritmo aritmético, mas de identificar que partem de concepções erradas sobre as propriedades das operações aritméticas ou, ainda, de indicar ao aluno possibilidades de usar algoritmos mais efetivos que consumissem menos tempo e energia de sua memória de trabalho. Com esse gênero de devolutivas, o aluno pode compreender e assimilar novas estratégias, conceitos e fatos que lhe permitirão resolver problemas similares de modo correto e eficiente.

Essas referências convergem para a necessidade de que a avaliação formativa, por meio das tarefas e das devolutivas, seja um ativo relevante para alunos e professores e para a implementação curricular. Esquemas conceituais que descrevem a integração de avaliação, ensino-aprendizagem e currículo podem ser apresentados, conceitual e graficamente, na forma de ciclos. Nesta fundamentação teórica do projeto, usamos como modelo conceitual o ciclo de Elmore.

No centro desse ciclo está a tarefa instrucional ou avaliativa, que deve ser entendida como o que estudantes fazem na sala de aula, e não simplesmente o que os professores acham que estão fazendo ou os elementos do currículo especificado que estão estudando. A tarefa é a unidade pedagógica para a formação dos docentes e para a rotina de atendimento dos estudantes, a partir, dentre outras evidências, da análise dos erros.

Concretamente, a plataforma adere ao ciclo de Elmore, uma vez que pretende criar uma comunidade de prática, com clareza da centralidade do estudante e de seus aprendizados observados, evidenciados e promovidos pelas tarefas. De fato, alguns dos princípios do núcleo instrucional advogado por Elmore são descritos a seguir.

1) Os avanços de aprendizagem apenas ocorrem como consequências da melhoria:
- do nível dos conteúdos;
- do nível de conhecimentos e habilidades dos professores; e
- do compromisso dos alunos.

2) A tarefa prediz o desempenho.

3) Um sistema real de *accountability* se baseia nas tarefas recomendadas aos estudantes.

Tarefas, em particular, são instrumentos que concretizam os três pontos do primeiro princípio, uma vez que, na interação com os estudantes, evidenciam a aquisição, a mobilização e a transferência dos conhecimentos; fixam, ainda, padrões de desempenho, rubricas e devolutivas que ampliam a metacognição (regulação e supervisão) e promovem um *mindset* de crescimento (BOALER, 2016). Com respeito a conteúdos, tarefas relevantes ilustram objetivos de aprendizagem explicitados em mapas de progresso, como discutido anteriormente. Por fim, em relação ao vértice dos professores, no triângulo de Elmore, tarefas demandam complexas habilidades profissionais para a docência e, portanto, tanto requerem quanto promovem aspectos do **conhecimento pedagógico do conteúdo** referentes, por exemplo, ao reconhecimento dos erros dos alunos, à elaboração de hipóteses plausíveis para as razões desses erros e à comunicação, aos alunos, sobre esses erros e estratégias cognitivas que os ajudem em sua superação.

Em termos metodológicos, a construção proposta do modelo de avaliações formativas, concretizado na plataforma, é também alicerçada no triângulo avaliativo, em sua formulação devida a Pellegrino e na arquitetura do *evidence-centered design* desenvolvida por Mislevy e colaboradores, como temos enfatizado.

A plataforma pode ser vista como um conjunto articulado de ferramentas pedagógicas e computacionais que possibilitam a execução, nas escolas, das diversas etapas de avaliações formativas processuais ao longo do ensino básico. Em sua arquitetura, há uma base computacional comum a essas etapas, sobre a qual são construídos sistemas específicos para as diversas fases do processo avaliativo, da produção colaborativa de tarefas à divulgação de devolutivas, passando pelos ambientes de aplicação de testes e de categorização de respostas. Os subsistemas são independentes e podem ser acionados e articulados de acordo com as demandas pedagógicas e limitações tecnológicas das escolas e das redes. Esse desenho corresponde à ideia, no jargão computacional, de microsserviços.

Ressaltamos que o ambiente da plataforma não se resume a um aparato tecnológico que veicula testes e resultados. A inovação que buscamos não se reduz a aprimorar o meio pelo qual testes são aplicados e resultados são divulgados, sendo isso um efeito incidental do desenvolvimento da plataforma. O ponto crucial é que as soluções tecnológicas de transcrição de respostas redigidas pelos alunos ou a categorização dessas respostas, embasando robustamente as devolutivas, propiciam a real inovação, que é de caráter pedagógico. O propósito de conjugar as soluções tecnológicas é apoiar as redes em reconhecer quais modelos de tarefas permitem acessar conhecimentos e habilidades relevantes e gerar evidências válidas (no sentido lato de validade dado por Messick) da aquisição e mobilização desses conteúdos.

Ademais, a proposta de uma comunidade de práticas subjacente à plataforma torna possível e indispensável associar à implementação da avaliação a formação de professores, tomando-os como colaboradores em cada fase do processo. Formações continuadas, ofertadas pelo CEnPE na forma de pós-graduações *lato sensu*, institucionalizam parcerias com as redes municipais e certificam professores, no esforço de criação de uma cultura avaliativa nas escolas a que esses professores estejam associados. No sentido inverso, as formações serão laboratórios de inovação para validação das tarefas, correção de conjuntos de respostas, mapeamento de erros frequentes, elaboração de hipóteses de lacunas evidenciadas nos erros, produção das devolutivas e, não menos importante, formação de seus próprios pares.

Os dispositivos computacionais da plataforma impulsionam a construção cooperativa dos instrumentos avaliativos, ou seja, das tarefas, a unidade básica da ação pedagógica deste projeto. Esse é, de fato, o ponto de partida do processo avaliativo: constituir um repositório encadeado, colaborativo e adaptável de tarefas, sistematizadas por ano escolar, indexadas por conhecimentos e habilidades (em correspondência com a BNCC), em vários níveis de complexidade cognitiva, de acordo com os processos cognitivos demandados em sua execução. Esse repositório permite ilustrar mapas de progresso, exemplificando objetivos de aprendizagem esperados na trajetória curricular com tarefas concretas e padrões de desempenho e respostas. Por sua vez, os mapas de progresso, em conjunto com as tarefas que lhes dão concretude, representam possibilidades de percursos curriculares que podem servir de fios condutores para as intervenções pedagógicas norteadas pelas evidências das avaliações. Para tanto, as avaliações formativas, geradoras dessas evidências, são construídas em consonância com esses mapas.

A colaboração de professores nessa fase inicial do processo de avaliação diz respeito, portanto, à produção e curadoria de tarefas que reflitam objetivos de aprendizagem explícitos. O ambiente de formação continuada permite que a elaboração e a posterior validação das tarefas sejam acompanhadas por equipes que já foram devidamente capacitadas em versões preliminares dessa iniciativa. Os professores, uma vez também qualificados, passam a ser atores fundamentais na manutenção, atualização e eventual expansão dessa “árvore cognitiva” de tarefas.

MODELO DE EVIDÊNCIAS: CONSTRUÇÃO DE RUBRICAS E DE DEVOLUTIVAS

Esse esforço conjunto de elaboradores e professores deve ser concretizado na preparação não apenas das questões componentes de uma dada tarefa, mas também, indissociavelmente, de padrões esperados de atitudes e respostas, com base tanto nas expectativas de aprendizagem consideradas na proposição da tarefa quanto nas observações empíricas dos professores sobre atitudes e resultados frequentes entre alunos em tarefas relativas a essas expectativas.

Componente vital da plataforma, as devolutivas são os canais mais intensos de comunicação com escolas e redes. O público ao qual as devolutivas são dirigidas não consiste apenas nos técnicos e professores diretamente envolvidos nas fases anteriores (elaboração, correção, categorização, interpretação). Na verdade, destinam-se a toda a comunidade de aprendizagem, dadas versões adequadas e legíveis para diferentes perfis nessa comunidade. A estrutura das devolutivas considera tanto os níveis definidos por Hattie (2017) quanto as finalidades postas por Black e Wiliam (2010).

Uma tarefa, como vimos, é composta usualmente por unidades menores, tipicamente questões, ordenadas em um gradiente de complexidade. Observamos e armazenamos, na plataforma, respostas dadas às questões que compõem a tarefa, referentes a um contexto comum. Dada essa estrutura, as devolutivas podem informar os pontos a descritos a seguir.

1. O que é esperado dos estudantes, tanto no conjunto da tarefa quanto em suas etapas gradativas, em termos de domínio e uso do repertório. Neste ponto, é preciso que haja clareza quanto aos objetivos de aprendizagem esperados que foram considerados na elaboração da tarefa.

2. O que foi observado nas respostas, ou seja, que elementos das respostas foram tomados pelos corretores como evidências dos conhecimentos, habilidades, atitudes e processos cognitivos usados pelo aluno na execução da tarefa. Em particular, erros conceituais e procedimentais devem ser apontados e descritos, no que diz respeito ao nível 1 de devolutivas sobre conhecimento superficial, na terminologia de Hattie (2017). Além disso, devem ser registrados, com clareza, aspectos relevantes sobre estratégias cognitivas na mobilização dos conhecimentos e habilidades, conexões entre conceitos, reorganização de conhecimentos prévios e assimilação de conhecimentos novos; enfim, evidências que digam respeito à aprendizagem profunda (deep learning), acessadas a partir da análise da resposta.

3. Recomendações que explicitem para o aluno (e para o professor) um ou mais roteiros de atividades, permeadas por novas tarefas, que consolidem conhecimentos e habilidades e desenvolvam processos cognitivos necessários para que, partindo do estágio atual revelado pela análise das respostas, atinja, gradualmente, os objetivos de aprendizagem especificados na proposição da tarefa.

4. Sugestões de rubricas plausíveis que facilitem, para o professor e para o aluno, implementar a sequência sugerida de atividades e acompanhar o desempenho ao longo desse percurso. Essa parte da devolutiva requer o envolvimento direto de professores e alunos, transferindo a continuidade do ciclo avaliativo para a sala de aula e incentivando os aspectos de metacognição e de autorregulação que são previstos, no desenho de Hattie (2017), nos níveis ou etapas 3 e 4 da devolutiva estruturada.

Na interação com a plataforma, alunos, professores e gestores pedagógicos podem acessar diretamente as devolutivas e as quatro camadas que as constituem. Em um estágio preliminar de desenvolvimento, as etapas 3 e 4 no modelo de Hattie (que dizem respeito aos níveis de autorregulação e pessoal das devolutivas) são realizadas fora do ambiente da plataforma, tendo em conta que o professor pode lançar mão de tarefas que ele mesmo elabora a partir das recomendações feitas e da qualificação que obtém em sua formação. As devolutivas para essa sequência de tarefas adicionais baseadas nas rubricas são, neste estágio, produzidas no cotidiano da sala de aula, envolvendo a participação do professor e dos alunos. Em etapas posteriores de desenvolvimento, tarefas elaboradas pelos professores nas escolas e validadas pelos curadores podem ser acrescentadas à plataforma, e as correções e devolutivas dessas tarefas específicas das escolas podem ser preparadas e disseminadas na própria plataforma.

Para efeitos de exposição, bem como de implementação prática na plataforma e na comunicação com as escolas, esses padrões esperados de desempenho no conjunto de questões de uma tarefa podem ser abrigados em três níveis, os quais rotulamos, tipicamente, da forma descrita a seguir.

- **Insuficiente:** nível que, em geral, é atribuído a respostas que revelem falhas conceituais ou procedimentais que dificultam as etapas de **mobilização** dos conhecimentos e *skills* necessários à progressão na tarefa. No exemplo acima, podemos categorizar nesse rótulo respostas que evidenciam o desconhecimento de fatos básicos sobre as relações entre multiplicação e divisão; ou sobre múltiplos e divisores; ou, ainda, a respeito de dificuldade de compreensão do texto em que o problema é apresentado. Esse nível, portanto, diz respeito a lacunas de compreensão conceitual ou de fluência procedimental, predominantemente.

- **Parcialmente suficiente:** categoria atribuída a respostas em que, mobilizados conceitos e procedimentos relevantes para a tarefa, são reveladas imprecisões, inadequações e, em geral, dificuldades para a **aplicação** eficiente, correta e justificada desses conhecimentos à resolução da tarefa. Nesse nível, ainda são evidenciadas lacunas conceituais ou procedimentais; no entanto, as deficiências típicas passam a ser relacionadas também à formulação e à comunicação do raciocínio matemático e a limitações de competências estratégicas, especialmente no caso de problemas não rotineiros.

- **Totalmente suficiente:** é o rótulo dado a respostas que revelam avanços nos processos de mobilização e aplicação dos conhecimentos e habilidades demandados pela tarefa, os quais permitiram ao aluno extrair conclusões sobre os resultados, logicamente ou indutivamente baseadas nos procedimentos efetuados, e analisar a adequação desses procedimentos e resultados ao problema e à linguagem matemática formal.

A descrição dos três níveis é uma abstração simplificadora do que ocorre em uma aplicação prática da tarefa. De fato, esses níveis só podem ser especificados em uma avaliação real, dada a tarefa concreta que é apresentada ao aluno, com toda a informação explícita sobre quais são seus objetivos pedagógicos quanto à observação da mobilização de determinados conhecimentos e *skills* segundo processos cognitivos de menor ou maior complexidade. Além disso, a definição das categorias das respostas abrigadas em cada nível e a própria descrição sintética desses níveis só podem ser estabelecidas com validade pedagógica quando um conjunto representativo de respostas reais for analisado pelas equipes (uma vez mais, compostas também por professores, além dos especialistas) à luz das expectativas que foram explicitamente definidas na arquitetura e na engenharia da tarefa.

Exemplos de tarefas e de devolutivas

Os exemplos a seguir foram extraídos de uma avaliação aplicada entre alunos do quarto ao nono ano na rede municipal de Caucaia, usando a plataforma do CEnPE, no segundo semestre de 2022.

O teste consistiu em tarefas compostas por unidades articuladas umas às outras em uma gradação de complexidade. Nesse sentido, a estrutura foi pensada de modo a atender, ao menos parcialmente, o que Bass e colaboradores apontam como:

> ***Ease of entry and various point of exit.*** *Students should be allowed to become engaged in assessment tasks through a sequence of questions of increasing difficulty. They ought to be able to exit the task at different points reflecting different levels of understanding and insight into the mathematical content. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1993, p. 52).*

No uso da plataforma, executamos as operações a seguir, relativas à geração das evidências (no triângulo avaliativo de Pellegrino, os trabalhos que apoiam os vértices da observação e da interpretação, em resumo).

1) Armazenamento das respostas dos alunos, questão a questão: no caso de tarefas respondidas por meio digital diretamente na plataforma, essa compilação de respostas é totalmente automática. No cenário bastante mais frequente de testes impressos, em que as respostas são escritas no papel, o processo é acrescido de algumas etapas adicionais relativas ao uso, com refinamentos iterativos, de algoritmos de transcrição.

2) Correção de um conjunto representativo de respostas às questões que compõem uma tarefa, trabalho executado por um grupo formado, em geral, por dois corretores (um *expert* e um novato) e um mediador (cuja função é garantir que as premissas e intencionalidades na elaboração da tarefa sejam considerados pelos corretores, ao mesmo tempo que garante confiabilidade, no sentido de que respostas similares, observadas em contextos pedagógicos similares, tenham avaliações próximas em um mesmo grupo de corretores e entre grupos). É o próprio trabalho dessa equipe de corretores/mediador que começa a isolar características definidoras de subgrupos de respostas, agrupando-as por similaridades, entre as quais erros conceituais e procedimentais frequentes ou lacunas em conhecimentos prévios, sejam matemáticos, sejam contextuais. Portanto, a correção é, de fato, a atribuição de respostas a dadas categorias, que vão sendo ajustadas e atualizadas à medida que o espaço de respostas analisadas aumenta. Convém relembrar que os professores participantes da elaboração contribuíram, idealmente, com algumas possibilidades previstas dessas categorias, que funcionam como um modelo inicial. No entanto, é o confronto com as respostas observadas que, efetivamente, consolidará a definição delas (que deve ter fronteiras bem demarcadas tanto por conta da interpretação pedagógica sem ambiguidades quanto pela necessidade de automatizar a **categorização** em conjuntos muito grandes de respondentes).

É relevante mencionar que, no caso dos itens de resposta construída, predominantes no teste, a avaliação pelos corretores considera dois níveis em que a pergunta é apresentada ao aluno: no primeiro, é observada a solução propriamente dita, com as manipulações aritméticas e algébricas, as representações geométricas e o manuseio de dados; no segundo, é avaliada a resposta que o aluno apresenta em campos com comandos como "justifique seu raciocínio", "explique como chegou a essa resposta" ou afins.

3) Consolidação de categorias e rubricas e **automatização:** o conjunto inicial de respostas corrigidas pela equipe de corretores/mediador tanto permitiu aprimorar os resultados da transcrição digital de respostas colhidas em testes impressos (essencial para viabilizar as avaliações em contextos escolares com limitações tecnológicas e de letramento digital, que poderiam enviesar os resultados de desempenho) quanto possibilitou exemplificar categorias de respostas, ao mesmo tempo que essas categorias vinham sendo abstraídas e depuradas da análise pedagógica de respostas representativas de padrões de desempenho. Dado esse *input* ou essas sementes iniciais, o aprendizado de máquina passa a ser usado *full force* para: i) ampliar o léxico coletado nas respostas, melhorando a transcrição de respostas impressas usando um *corpus* próprio das peculiaridades da grafia dos alunos; ii) ajustar e atualizar os grupos de respostas que são associadas às categorias – esse é um processo iterativo e supervisionado, em que os corretores humanos devem realizar validações, de tempos em tempos, seja dos critérios, automatizados no modelo computacional, de alocação das respostas nas categorias, seja da precisão e da suficiência das categorias originalmente propostas para abranger a diversidade das respostas reais compiladas no universo dos respondentes, e não apenas, agora, em uma amostra inicial.

4) Construção de devolutivas: todos os fluxos acima convergem para o produto culminante, que são as devolutivas, as quais devem conter um resumo dos elementos norteadores das etapas anteriores, legível por professores e gestores escolares (e, em versões apropriadas, também por alunos, de modo que tenham pleno conhecimento do que foi avaliado, para que foi avaliado e do que será feito com essa informação, promovendo, como *by-product*, suas faculdades de autorregulação e de metacognição). Esquematicamente, as devolutivas, na forma de boletins individuais ou agregados (por turma, ano, escola ou professor), devem informar os objetivos de aprendizagem a serem apoiados pela tarefa (ou seja, a tarefa evidencia graus de consecução de dadas expectativas de aprendizagem: aqui, seriam declaradas quais), de acordo com a estrutura descrita a seguir.

- Conhecimentos, habilidades e processos cognitivos demandados/mobilizados nas etapas da tarefa.

- Respostas esperadas, ilustrativas dos três padrões de desempenho descritos acima. É importante notar que não se trata, necessariamente, de uma resposta correta na forma de uma alternativa ou de um valor numérico. Antes, são apresentadas estratégias alternativas de resolução com indicações de "pontos de entrada e de saída", isto é, de marcos que indiquem o quanto o aluno prosseguiu rumo ao desfecho da tarefa. As rubricas, portanto, servem para qualificar essas respostas, explicitando critérios que definem os padrões de desempenho.

- Respostas observadas: no caso do aluno, individualmente, é informada sua própria resposta, apontando-se as razões que levaram à sua classificação em uma das três categorias e identificando as lacunas que separam a resposta observada de uma resposta esperada nos padrões de desempenho seguintes àquele em que a resposta foi classificada. No caso de uma devolutiva agregada, essa análise é feita sobre um conjunto de respostas na mesma categoria, que, no todo, ilustre um ou mais dos critérios que definem sua alocação naquela dada categoria.

- Síntese: quadros, na forma matricial, por exemplo, mostrando os padrões de desempenho questão a questão, tarefa a tarefa, e/ou os padrões de desempenho relativos à mobilização dos conhecimentos e habilidades e à complexidade dos processos cognitivos empregados pelo aluno (de modo que professor e aluno tenham indícios sobre a consecução da meta de aprendizagem subjacente à tarefa).

- Análise de lacunas de aprendizagem entre o esperado e o observado: análise global dos erros, falhas conceituais ou procedimentais, insuficiências ou fragilidades nos conhecimentos prévios e demais informações que propiciem intervenções, por parte do professor/escola, ou estratégias autorreguladas de aprendizagem, pelo aluno. Em resumo, trata-se de sumarizar as evidências, traduzidas em achados cognitivos que possam amparar a tomada de decisões pedagógicas pela escola, pelo professor ou pelo aluno.

De modo abreviado, essa estrutura da devolutiva contempla os quatro níveis do desenho proposto por Hattie (2017): a) nível do produto: especificação do referencial cognitivo da tarefa, o que era esperado e o que fora observado na sua realização; b) nível do processo: especificação sobre as expectativas de como os conhecimentos seriam mobilizados, o que foi observado, mesmo indiretamente, e as lacunas entre objetivos e resultados realizados; c) e d) nível de autorregulação e nível pessoal: síntese de resultados e comunicação sobre as lacunas em a) e b) e suas prováveis razões satisfazem a esses aspectos da devolutiva.

Exemplos de tarefas, rubricas e devolutivas

A tarefa que discutimos a seguir fez parte do teste aplicado a alunos de quarto e quinto anos em escolas da rede municipal de Caucaia, Ceará. A partir de um contexto comum, com as informações relevantes para a execução da tarefa, é apresentada uma sequência de questões ao longo da qual, gradativamente, o aluno deve realizar comparações de medidas de distância e tempo a partir das quais deduz medidas de velocidade ou velocidade relativa e, na parte final, aplica essas medidas para determinar tempos e distâncias de certos eventos nas trajetórias. Não são demandados conhecimentos formais ou procedimentos técnicos (e.g., uso de fórmulas ou expressões algébricas de velocidade), mas um esforço progressivo de modelagem matemática da noção intuitiva de velocidade em um contexto que envolve apenas operações aritméticas (adição iterada ou multiplicação e divisão exata) e o conceito de perímetro. Portanto, a demanda cognitiva é mais de compreensão conceitual profunda de fatos básicos de Aritmética do que de fluência procedimental. Aspectos do raciocínio matemático relacionados a formulação, representação e comunicação são explorados, uma vez que o aluno deve, a partir dos fatos que vai obtendo na resolução das etapas, elaborar um modelo de velocidade relativa e justificar os argumentos utilizados e a plausibilidade dos resultados. As habilidades da Matriz dos Saberes diretamente mobilizadas nas questões componentes da tarefa são as descritas a seguir.

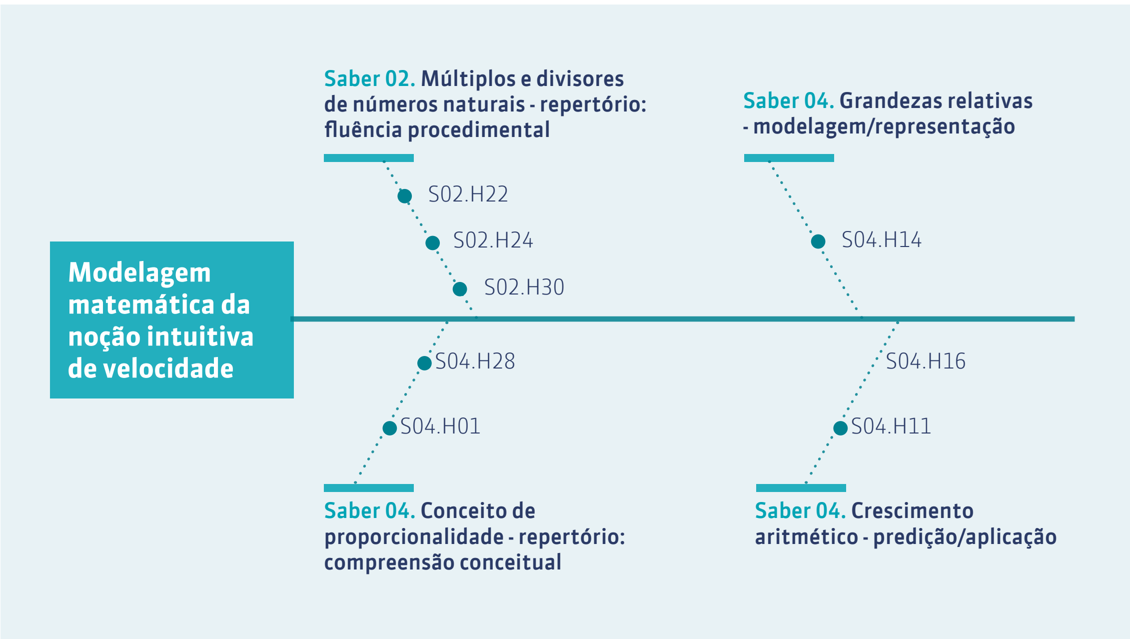
- **S02.H22:** efetuar divisões exatas (restos nulos) de números naturais, relacionando essas divisões a multiplicações e seus diversos significados e representações.
- **S02.H24:** modelar e resolver problemas que envolvam múltiplos e divisores comuns a dois ou mais números inteiros.
- **S02.H30:** determinar parcelas desconhecidas em um cálculo aritmético a partir de parcelas e resultados dados, preservando igualdade entre expressões aritméticas.
- **S04.H1:** reconhecer relações de proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas ou entre suas variações, em diferentes contextos, aplicações e problemas.
- **S04.H8:** modelar e resolver problemas, motivados por diferentes contextos e aplicações, que envolvam a variação proporcional entre grandezas direta ou inversamente proporcionais.
- **S04.H11:** determinar termos desconhecidos em uma proporção a partir dos termos dados.
- **S04.H14:** modelar e resolver problemas que envolvam grandezas relativas, como velocidades, densidades, fluxos, vazões e outras taxas de variação entre grandezas, motivadas por diversos contextos e aplicações.
- **S04.H16:** identificar relações de proporcionalidade em contextos e problemas que envolvam acréscimos simples ou, equivalentemente, progressão aritmética de uma variável.

- **S07.H2:** determinar o perímetro de figuras planas elementares, como retângulos, a partir da definição de uma unidade de medida.

A relação entre essas habilidades e as questões que compõem a tarefa estão esquematicamente representadas na tabela a seguir.

Habilidades/ Questões	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Questão 7
S02.H22	■					■	
S02.H24		■					■
S02.H30		■				■	
S04.H1			■				■
S04.H8			■	■	■		■
S04.H11				■	■	■	
S04.H14			■				■
S04.H16					■	■	
S07.H2		■					

A figura a seguir representa o grafo conectado das habilidades mobilizadas na tarefa. Observamos que habilidades no Saber 02 são utilizadas no trabalho com razões e proporções e na modelagem de grandezas relativas, presentes nas habilidades do Saber 04. Essa interdependência é representada pelas conexões entre as habilidades.



No quadro 6, transcrevemos a tarefa com suas questões componentes. Para cada etapa ou questão, são fornecidos comentários pedagógicos, dirigidos aos professores, a respeito dos objetivos de aprendizagem sobre os quais a tarefa pretende gerar evidências. Além disso, são dados exemplos de rubricas que categorizam padrões de resposta observados: para cada rubrica, exibimos algumas respostas representativas entre as coletadas na aplicação do teste. E, ao fim da discussão sobre um bloco de questões, escrevemos algumas recomendações, também dirigidas aos professores, sobre conteúdos e abordagens que podem ser trabalhados com alunos cujas respostas, para as questões nesse bloco, tenham sido categorizadas por uma dada rubrica.

QUADRO 6

Leia o seguinte texto para responder às questões 1 a 7.

Mariana dá uma volta de bicicleta na praça da cidade em 4 minutos enquanto Teresa consegue dar uma volta de bicicleta na mesma praça em 5 minutos.

A praça é retangular e tem lados medindo 300 metros e 100 metros. Em seu interior, há árvores e um lago, como mostra a seguinte figura da praça vista de cima.

Mariana e Teresa saem, em um mesmo instante, do ponto de partida destacado na figura e começam a pedalar no sentido indicado pela seta por um tempo de 40 minutos.

Elas percorrem o contorno da praça, pedalando quase todo o tempo em linha reta e mantendo suas velocidades constantes, ou seja, não aumentam nem diminuem suas velocidades.

Questão 1. Quantas voltas Mariana consegue dar na praça no tempo de 40 minutos? Explique seu raciocínio.

Comentários sobre a questão
O objetivo é o de observar se o estudante isola, do contexto, as informações relevantes, a saber, o tempo gasto em cada volta (4 minutos) e o tempo total (40 minutos). A partir disso, se pode modelar o problema aritmeticamente, seja em termos de adições iteradas de 4 minutos, seja por uma divisão exata.

O desejável é que possa interpretar o resultado do cálculo como uma medida de velocidade (ainda expressa em voltas por minuto), o que será explorado na sequência da tarefa. A questão 3, a seguir, permite obter evidências sobre se o estudante elabora, ou não, essa interpretação.

Padrões de desempenho

Insuficiente	Parcialmente suficiente	Suficiente
O estudante não isola os dados relevantes para o problema, evidenciando dificuldades na leitura e interpretação do texto-base e do próprio comando.	O estudante isola as informações relevantes, mas tem dificuldade em modelar o problema usando operações aritméticas de adição ou de divisão. Por exemplo, considera que deve *multiplicar* 4 por 40 em vez de *dividir*.	O estudante isola as informações, modela aritmeticamente o problema e calcula, seja por adição ou por divisão, o quociente.

Exemplos de respostas

a) Elas só mudam de posição b) ARVORES	a) Ela deu 16 voltas b) 160 voltas pois 4x40=160 c) 5 volta porque 40 divido pra 5 igual a 40 d) 40 voltas porque um minuto da quarenta Voutas e) Marina percorre 160 km	a) Ela da uma volta em 4 minutos na lógica ela duas voltas em 8 minutos então ela da dez voltas em 40 minutos. b) Vou somando 4+4 até chegar em 40 e em fim 10 voltas no parque

Questão 2. Quantos metros, aproximadamente, Teresa percorre no tempo de 40 minutos? Explique seu raciocínio.

Comentários sobre a questão
Inicialmente, o estudante deve recuperar o modelo que usou na questão anterior para, desta vez, calcular o número de voltas dadas por Teresa. Tendo em conta, pelo exercício anterior, que 40 minutos correspondem a 8 voltas, a demanda, desta vez, é determinar quantos metros equivalem a 1 volta.

Uma vez mais, os processos cognitivos envolvem: interpretar o comando e relacionar a demanda aos dados postos no enunciado; rememorar o resultado obtido na questão anterior; modelar o problema de conversão de "volta" para "metros" em termos do cálculo do perímetro da praça; empregar a noção (intuitiva, nesse caso) de perímetro como soma das medidas dos lados; efetuar a operação aritmética pertinente (adição, simplesmente; ou adição e multiplicação, combinadas).

A resposta desejada expressa o resultado de 8 x (300 + 300 + 100 +100).

Padrões de desempenho		
Insuficiente	**Parcialmente suficiente**	**Suficiente**
Os estudantes não identificam, no enunciado, os dados relevantes para iniciar a modelagem aritmética do problema. Ora tomam o tempo total gasto (40 minutos) como a distância total percorrida, ora consideram como distância as medidas dadas na figura (300 e 100 metros).	Os estudantes determinam o número de voltas, mas não convertem essa informação em metros, portanto, não concluem com a dedução da distância total percorrida; ou, ainda, cometem erros de cálculo, geralmente por considerarem a soma das medidas informadas (300 + 100) como o perímetro. Em alguns casos, ocorrem erros como em operações da forma 4 x 5 =12.	O estudante reúne as informações relevantes (distâncias e tempos), calcula o número de voltas e converte, corretamente, o resultado em metros; além disso, observa que cada volta corresponde ao perímetro, calculando-o como 2 x 300 + 2 x 100.
Exemplos de respostas		
a) 3km pois uma dobra meio km e uma reta e 1km b) Ela consegui dar 10 voltas c) Teresa saiu do porto de partida d) Ela percoreu 40 metros e) 300 metros a 100 pois n daria as mesma voltas	a) Ela percorre 3,200 metros. No tempo de 40 minutos ela dá 8 voltas na praça, totalizando 3,200 metros. b) Teresa da uma volta em 5 minuto ela da duas em 10 minutos e em 40 minutos ela da 8 voltas. c) Vou somando 5 mais 5 até chegar no 40 e da 8 voltas no parque d) 300+100=400 5 min= 1 volta 40 min= 8 voltas 400×8= 3.200 metros e) Ela percorre 3.200 metros, multipliquem os 400 metros da praça pela 8 voltar que ela deu f) 300+100=400×5=1200 logo Teresa percorre 1200 metros em cinco minutos ou seja 1k e 200m em 5 minutos	a) 6.400 Se a Teresa pode percorrer 800 metros em 5 minutos para dar 40 minutos ela deverá dar 8 voltas e 8×800=6.400

Questão 3. De acordo com o enunciado do problema, sabemos que Mariana e Teresa mantêm velocidades constantes ao darem voltas na praça. Quem dá voltas na praça com maior velocidade: Mariana ou Teresa?

Comentários sobre a questão

Realizadas as etapas anteriores, nas questões 1 e 2, o estudante deve ter informações suficientes para responder a esta pergunta sem a necessidade de cálculos adicionais. O propósito, de fato, é de que possa formular, matematicamente, ainda que de modo intuitivo, a noção de velocidade: não cabe usar fórmulas ou expressões previamente conhecidas, mas, antes, usar os dados disponíveis para decidir qual das duas ciclistas percorre mais voltas em um mesmo intervalo de tempo; ou, equivalentemente, gasta menor tempo para percorrer uma volta. A maior complexidade da questão diz respeito a essa demanda conceitual, mais do que procedimental.

Padrões de desempenho

Insuficiente	Parcialmente suficiente	Suficiente
Os estudantes interpretam a informação de que cada uma das ciclistas mantém velocidade constante como a afirmação de que ambas têm a mesma velocidade; em outros casos, revelam dificuldade de usar as informações precedentes para tomar a decisão de indicar uma das alternativas, Mariana ou Teresa. Observa-se, ainda, respostas sem relação alguma com o comando.	O estudante elabora uma tentativa de resposta, baseada na intuição sobre o conceito de velocidade, mas não utiliza os dados numéricos nem do texto-base nem das respostas anteriores.	As respostas indicam que os estudantes usaram as informações no enunciado e do próprio trabalho que realizaram para apontar a ciclista mais rápida; em algumas respostas, os estudantes sintetizam argumentos que já usaram nos cálculos anteriores, demonstrando que conseguiram associar esses resultados à noção (mesmo que intuitiva) de velocidade.

Exemplos de respostas

a) Significa que as duas estão em velocidade diferente. Teresa. b) Significa mesma velocidade ou seja não aumenta e nem diminui e quem dá voltas na praça com maior velocidade e nenhuma delas. c) Dá árvores e o lago d) Velocidade constante significa: velocidade igual. Nenhuma das duas meninas pois elas estavam em velocidade igual. e) ELA VÃO MUITO RAPIDO	a) Quem da mais voutas	a) Mariana porque ela da a volta com 4 min e a Teresa com 5min b) Teresa pedala devagar Mariana pedala rápido conseguindo dar voltas em 4 minutos Tereza em 5minutos

Recomendações relativas às questões de 1 a 3	
Padrões de desempenho	**Recomendações**
Insuficiente	Alunos cujas respostas estão nesse padrão revelam dificuldades em ao menos um dos seguintes aspectos: a) leitura e interpretação dos dados (medidas de tempo e de distância, figuras), condições (hipóteses, por exemplo) ou das incógnitas; b) repertório básico sobre operações aritméticas, não necessariamente com respeito a algoritmos e propriedades, mas a como selecionar as que melhor modelam a situação apresentada no problema; c) falta de familiaridade com problemas dessa natureza, que não são apenas procedimentais. Cabe ao professor investigar essas hipóteses, que encontram algum suporte nas respostas coligidas. Recomendamos, verificadas essas suposições, que o professor trabalhe problemas aritméticos, sugeridos por vários contextos, envolvendo adição, multiplicação e divisões (exatas, inicialmente), com o propósito de estimular o entendimento dos problemas e sua modelagem. Cálculos laboriosos e procedimentos algorítmicos não são a prioridade por ora.

Questão 4. Quantas voltas na praça Mariana dá a mais que Teresa após os 40 minutos? Explique seu raciocínio.

Comentários sobre as questões de 4 a 7

Na sequência formadas pelas questões 4 a 7, usamos a medida de velocidade, explícita ou implicitamente, para estabelecer conclusões sobre as trajetórias das duas ciclistas ao longo dos 40 minutos de pedalada. Pretendemos observar, com isso, se o modelo de velocidades deduzido nas 3 primeiras questões pode ser aplicado, agora, para descrever/predizer as posições em dados instantes ou, inversamente, os instantes em que as ciclistas estão a uma dada distância relativa.

Novamente, o propósito não é o de utilizar conceitos, fórmulas ou procedimentos que sejam típicos, por exemplo, da Cinemática vista nos anos finais do Ensino Fundamental: a intenção, aqui, é de constatar se a noção aritmética (intuitiva, mas mensurável e quantificável) de velocidade, inicialmente elaborada na questão 3, pode ser mobilizada para modelar os problemas que se seguem.

Padrões de desempenho

Insuficiente

Respostas que revelam erros de diferentes naturezas, como limitações na compreensão do conceito de velocidade (e.g., confusões entre velocidade e intervalos de tempo ou de distância): por exemplo, há alunos que calculam a diferença 5 x 40 – 4 x 40 como uma medida de distância relativa; em outros casos, consideram que a diferença de números de voltas é a diferença entre os tempos gastos em uma volta; há respostas, inversamente, em que os alunos tomaram a diferença entre os números de voltas como sendo a diferença entre os tempos, em minutos, gastos para uma volta; outros alunos responderam com o número de voltas de uma ou de outra ciclista; há respostas com a diferença entre as medidas dos lados da praça, assinalando 200 metros como resposta; por fim, algumas respostas sugerem que os alunos calculam 40 – 1 = 39, subtraindo a diferença entre os tempos do tempo total da brincadeira.

Parcialmente suficiente		
Respostas corretas, mas sem a apresentação de argumentos que as justifiquem.		
Suficiente		
Respostas corretas, sustentadas por argumentos que retomam os raciocínios e os procedimentos efetuados nas etapas anteriores.		
Exemplos de respostas		
a) 10 minutos b) Só um c) 11 voltas d) 40 e) 39 f) 160_200=40 ela da a mais 40 voltas404 g) 5×40=120 e o tanto de voltas que Teresa da e 160 e o tanto de voltas que Mariana da então logo Mariana da 40 voltas a mais que teresa h) Só 160 km i) 10 voltas a mais j) A Mariana dará 1 volta a mais que teresa k) 4 minutos 5 minutos	a) Duas voltas a mais que Teresa	a) 10-8=2 2 voltas a mais b) 2 VOLTAS A MAIS PORQUE 4X10=40 E 5X8= 40

Questão 5. Qual a diferença entre o número de voltas dadas por Mariana e por Teresa vinte minutos após o começo da brincadeira? Explique seu raciocínio.

Comentários sobre a questão

Avançamos nessa progressão, observando o quanto os alunos percebem a relação de proporcionalidade expressa nas velocidades, já calculadas, das duas ciclistas. Espera-se que os estudantes, de posse das informações, tanto apresentadas no texto-base quando originadas na resolução das etapas anteriores, possam elaborar argumentos como os a seguir.

Dado que, em 40 minutos, Mariana percorre 2 voltas a mais que Teresa, essa diferença é de 1 volta, em 20 minutos.

(Solução que, implicitamente, usa a noção de velocidade como uma taxa de variação ou razão constante, nesse caso)

Como Mariana percorre uma volta em 4 minutos, percorre 20:4 = 5 voltas em 20 minutos. Da mesma forma, dado que Teresa percorre uma volta em 5 minutos, em 20 minutos percorre 20:5 = 4 voltas. Sendo assim, a diferença no número de voltas é 5-4 = 1 volta.

(Estratégia que usa, diretamente, as velocidades das ciclistas como razões, de modo que, nessa abordagem, o estudante deve efetuar duas etapas: determinar as velocidades como voltas por minuto; multiplicar o intervalo de tempo pela velocidade)

Observamos, no entanto, respostas como “Teresa da 15 voltas e Mariana da 16 voltas”, o que parece indicar que o aluno entende a velocidade como subtração: 20 – 5 = 15 e 20 – 4 = 16 e não como razão.

Padrões de desempenho		
Insuficiente	**Parcialmente suficiente**	**Suficiente**
Respostas com erros conceituais que, em alguns casos, revelam dificuldades de compreensão do comando ou das informações dadas e de como utilizá-las; ou, ainda, erros na modelagem matemática do problema, inclusive em como descrever matematicamente a noção de velocidade.	Respostas corretas, mas sem a apresentação de argumentos que as justifiquem.	Respostas corretas, sustentadas por argumentos com base no modelo matemático e nas respostas anteriores.
Exemplos de respostas		
a) Que Mariana já deu duas voltas, e a Teresa nenhuma. b) 20 minutos c) A diferença é 20 d) 500 e 400 e) Teresa da 15 voltas e Mariana da 16 voltas. f) 40-160=120-40=80 logo a diferença ainda é de 40 g) Teresa é 100 km e a Marina é 80 km h) UMAS 30 VOLTAS E OUTRO 28 VOLTAS	a) Uma volta a mais. b) 5 voltas mariana e 4 tereza c) EM VINTE MINUTOS MARIANA DEU 5 VOLTAS, E TERESA 4 VOLTAS	

Questão 6. Quantos minutos após o começo da brincadeira são suficientes para que Mariana tenha percorrido meia volta a mais do que Teresa? Explique seu raciocínio.

Comentários sobre a questão

O encadeamento de questões segue, agora, demandando que o estudante utilize o que elaborou anteriormente a respeito da velocidade das ciclistas e da velocidade relativa entre elas. Apesar de não envolver procedimentos tecnicamente exigentes ou novos cálculos, a questão revelou-se como sendo de maior complexidade, do ponto de vista conceitual, do que as anteriores.

Espera-se, a esta altura da progressão, que o estudante, dadas as informações que obteve nas etapas anteriores, identifique um padrão na distância relativa entre as ciclistas: duas voltas em quarenta minutos; uma volta, em vinte minutos; e, portanto, metade de uma volta, em dez minutos. Esse seria um raciocínio direto, baseado na noção de proporcionalidade (ainda que intuitivamente utilizada) que está na base do conceito de velocidade como razão ou taxa de variação constante.

Um raciocínio inverso seria considerar que, se uma separação de duas voltas ocorre depois de 40 minutos, uma separação de ½ volta (ou seja, em ¼ da separação final) ocorreria passado ¼ do tempo final, ou seja, em 10 minutos. Em qualquer uma das abordagens, o significado das frações (mesmo frações com ½ ou ¼, mais familiares aos estudantes) presentes nesse contexto pode representar dificuldades evidenciadas no trabalho do estudante.

De todo modo, a questão conduz a uma ampliação do modelo (que permita aplicações a outros problemas) que habilite o estudante a lidar com distâncias e velocidades relativas, conceito cuja formulação matemática envolve razão entre variações de grandezas.

Padrões de desempenho		
Insuficiente	**Parcialmente suficiente**	**Suficiente**
Respostas que sugerem parco entendimento da questão (dados, contexto, perguntas); ou, ainda, erros conceituais graves que desqualificam mesmo as tentativas parciais de argumentos e de cálculos apresentadas por alguns estudantes (por exemplo, associar a distância relativa de meia volta a meia hora ou a um minuto e meio; ou, ainda, tomar 2,5 minutos, metade do tempo de volta de Marina, como resposta).	Respostas corretas, mas sem a apresentação de argumentos que evidenciem a estratégia de resolução empregada pelos alunos.	Respostas corretas, devidamente fundamentadas no uso correto de conceitos e técnicas apresentadas pelos alunos, ainda que com algumas eventuais falhas de argumentação.
Exemplos de respostas		
a) Exatamente meia hora. b) 22 minutos c) 2 minutos i meio d) 9 mim e 30 sgd. e) 60 voltas f) 1.30 minutos g) Por que a praça e 300 metro h) 2 Voltas i) 45 min j) Mais de uma vez	a) 10 minutos b) 10	

Questão 7. Sabemos que as duas ciclistas partem do mesmo ponto. Elas voltam a se encontrar durante os 40 minutos da brincadeira? Justifique sua resposta.

Comentários sobre a questão

Esta etapa não requer modelos ou cálculos, mas tão-somente a interpretação do que é solicitado no comando e a constatação, pelo estudante, de que os resultados obtidos já respondem à pergunta. De fato, os encontros das duas ciclistas, depois do instante inicial, ocorrem quando a mais veloz encontra a menos veloz após um número inteiro de voltas.

Uma abordagem mais algébrica do problema envolveria, por exemplo, considerar as distâncias percorridas por Mariana e por Teresa, em termos de voltas por minuto (1/4 e 1/5, respectivamente) ou de metros por minutos (800/4 e 800/5, respectivamente). Devemos, então, buscar distâncias percorridas cujas diferenças sejam múltiplos de 300 + 300 + 100 + 100 = 800. Para que essa diferença seja um inteiro, deve ser múltiplo de 4 e de 5; logo, deve ser múltiplo de 20.

Desdobramentos dessa questão poderiam levar o professor a propor atividades sobre múltiplos e divisores comuns, ou, ainda, que envolvam gráficos e tabelas.

Padrões de desempenho
Insuficiente
As respostas indicam que os estudantes consideram dados do problema e mesmo informações relevantes obtidas nas etapas anteriores; em muitos casos, no entanto, parecem não ter desenvolvido uma representação geométrica ou cinemática do problema, como quando mencionam que mesmo com uma ou duas voltas a mais dadas por Mariana em relação a Teresa, as duas ciclistas não se encontram em nenhum ponto/instante do percurso; há muitas outras respostas que denotam incompreensão do texto da questão; finalmente, percebemos evidências de que muitos alunos nesse padrão de desempenho não isolam que elementos da aritmética seriam relevantes para formular matematicamente o problema.
Parcialmente suficiente
Respostas (parcialmente) corretas, mas sem indicações explícitas de que os estudantes tenham usado os resultados obtidos nas etapas anteriores, os quais, devidamente interpretados, já conteriam a resposta a esta questão.
Suficiente
Respostas corretas, devidamente justificadas pela adequada interpretação das etapas anteriores ou por cálculos aritméticos simples que modelem a condição de que as duas ciclistas estão em uma mesma posição a menos de um número inteiro de voltas.

Exemplos de respostas		
a) Não, porque Mariana da 2 voltas a mais que Teresa, então Mariana terminaria primeiro. b) Sim, porque elas só dão voltas diferentes mas elas voltam a se encontrar. c) 40 minutos e 5 minutos 4 minutos d) Porque elas voltarem por começo da partida e) Sim porque as duas vão na mesma ora f) Não porque eles pedala diferente g) sim, cada volta é um encontro. h) Não porque correr a pé não é muito rapido i) Sim. Porque se elas comesarão a brincadeira ela tem que ser em contra no ponto de pratida. j) Para elas descançarem e brinca dinovo	a) 2 vezes b) Sim, mais não tempo inteiro c) 2 d) Sim, mas com a quantidade de voltas diferentes e) Sim, pois como a Mariana é veloz ela ainda consegue alcançar Teresa uma vez	

MAPAS DE PROGRESSO: GRAFOS DE CONHECIMENTOS E HABILIDADES COM TAREFAS EXEMPLARES

Na seção “Complexidade das competências específicas na BNCC e mapas de progressão”, avançamos, a partir da discussão de algumas competências específicas e habilidades da BNCC do Ensino Médio em Matemática, para a fronteira do currículo escolar. Mostramos como essas competências e habilidades da BNCC encerram objetivos de aprendizagem de elevada demanda cognitiva que apontam para aplicações e transferências da Matemática Básica para o cotidiano e outros domínios do conhecimento. Portanto, avaliações desses objetivos de aprendizagem devem conter tarefas que requeiram os demais aspectos da competência matemática além da fluência procedimental. Além disso, para que gerem evidências válidas sobre os objetivos de aprendizagem expressos (por vezes implicitamente) na BNCC, as tarefas devem envolver processos cognitivos de ordem superior, situados no domínio do conhecimento profundo da Matemática e em ações próprias de domínios cognitivos de integração e de avaliação, conforme descritas anteriormente.

Na direção inversa, apresentamos, no quadro 7, o exemplo de um mapa de progressão que encadeia conhecimentos e habilidades prévios, os quais formam o repertório básico nas etapas progressivas de consolidação das competências específicas e habilidades da BNCC enumeradas na tabela 1. Esse mapa representa uma trajetória de progressão cognitiva e lógica possível, concatenando conhecimentos e habilidades presentes na Matriz dos Saberes que se vão constelando em agrupamentos mais conectados e densos de usos e significados à medida que avançamos na progressão. Mostramos que as etapas intermediárias no mapa podem ser assinaladas por tarefas e por rubricas que qualifiquem padrões de desempenho nessas tarefas. Esses *standards* de resultados podem ser úteis como descrições do alcance total ou parcial das metas associadas a cada etapa na trajetória.

Logo, o mapa ou trajetória é pontuado por etapas progressivas, tarefas exemplares e rubricas qualificadoras de padrões de desempenho, que devem ser detalhadamente especificadas e articuladas umas às outras. Em termos de instrução, descrições das etapas, tarefas e rubricas podem ajudar o professor a especificar, monitorar e mensurar objetivos de aprendizagem alinhados às competências matemáticas almejadas. Tarefas e rubricas desenhadas em respeito a esses objetivos podem produzir evidências válidas sobre se o processo instrucional está, de fato, consolidando o repertório prévio e articulando-o à promoção das competências complexas desejadas.

Um dos fundamentos conceituais na base das competências específicas e habilidades dispostas na tabela 1 é o conceito de relação proporcional entre variáveis (ou entre variações dessas variáveis). Como vimos, a distinção entre comportamentos lineares e não lineares começa a ser explorado nesses pontos da BNCC, uma vez que as funções quadráticas são consideradas como um modelo fundamental de relação não linear entre variáveis. Outras habilidades acessarão modelos de crescimento geométrico ou exponencial, ampliando a gama de expressões matemáticas para as relações de dependências entre pares de variáveis.

Por sua vez, a proporcionalidade, que é uma noção estruturante da BNCC ao longo do Ensino Fundamental, remonta a conceitos ainda mais básicos, embora profundos, como é o caso da equivalência de frações. Portanto, expomos, a seguir, um dos possíveis mapas ou trajetórias ao longo dos quais, gradualmente, conhecimentos e habilidades possam ser adquiridos, retomados em contextos mais amplos e profundos, conectados uns aos outros, utilizados em situações que lhes revestem de novos significados e iluminam, em retrospecto, etapas anteriores de progressão.

A trajetória que esboçamos no quadro 7, a título de exemplo, é recomendada para estudantes sobre os quais reunimos evidências de lacunas de aprendizagem relativas à aritmética de números racionais, ao entendimento da álgebra de equações lineares e ao uso de coordenadas cartesianas. Esse itinerário progressivo e espiralizado é ilustrado, em seus principais marcos, por tarefas representativas. O progresso nessa rota curricular passa a ser explicitamente descrito por padrões de desempenho nessas tarefas.

QUADRO 7

Exemplo de mapa de progressão: de conhecimentos prévios aos objetivos de aprendizagem

Conhecimentos e habilidades no mapa de progressão	
Primeira camada na progressão: conhecimentos e habilidades envolvendo a noção de proporcionalidade e sua representação geométrica com o uso de coordenadas e retas no plano	
Saber 03: efetuar operações e resolver problemas envolvendo números racionais e suas representações fracionárias e decimais.	S03.H4: compreender a noção de equivalência de frações e suas interpretações aritméticas e geométricas.
	S03.H6: utilizar, de modo correto e justificado, critérios aritméticos e geométricos de equivalência de frações.
	S03.H14: ordenar ou comparar números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais, em particular por meio de sua localização na reta numérica.
Saber S04: reconhecer e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.	S04.H2: expressar proporcionalidade em termos de frações equivalentes.
	S04.H3: relacionar números racionais a razões entre grandezas ou entre suas variações, expressando, em particular, a taxa de variação (percentual) entre essas grandezas.
	S04.H4: reconhecer relações de proporcionalidade entre grandezas ou entre variações dessas grandezas em gráficos, tabelas e outros suportes.

Saber 06: modelar e resolver problemas envolvendo relações lineares entre variáveis.	S06.H2: identificar variáveis e seus valores em diversos contextos e problemas, a partir de modelos, tabelas, gráficos e outros conjuntos de informações.
	S06.H5: reconhecer os elementos básicos do plano cartesiano, em particular eixos coordenados e projeções ortogonais sobre esses eixos.
	S06.H7: localizar pontos na reta numérica e no plano cartesiano, associando-os a coordenadas (cartesianas ou polares).
	S06.H9: associar relações de proporcionalidade entre grandezas ao alinhamento de pontos no plano, em particular identificando razões entre grandezas proporcionais à inclinação das retas correspondentes.
	S06.H12: reconhecer ou descrever relações de proporcionalidade (linearidade) entre variáveis ou suas variações a partir de modelos, tabelas, gráficos e outros conjuntos de informações.

Conhecimentos: aproximação conceitual das noções de equivalência de números racionais (em suas representações fracionárias, especialmente) e o conceito de proporção e semelhança (articulação das unidades de Números e de Geometria), antecipando, gradualmente, a linguagem das equações lineares e funções afins.

O elemento crucial, neste trecho inicial do percurso, é garantir que os alunos tenham clareza quanto à noção de número racional (em especial, quanto à representação de números racionais como frações), condição preliminar para que possam compreender os fundamentos dos algoritmos e efetuar, de modo correto e justificado, operações aritméticas com números racionais.

O conceito central é, portanto, o de equivalência de frações, que antecipa, de modo ainda não completamente formal, a noção de número racional como uma classe de equivalência. Essa noção é sutil e deve ser cuidadosamente retomada, fazendo uso de problemas envolvendo razões e proporções, taxas de variação e grandezas relativas (com impactos sobre o desenvolvimento das habilidades EM13MAT104 e EM13MAT314, por exemplo).

Além disso, deve ser explorada a representação geométrica via, por exemplo, retas numéricas ou barras do Método Cingapura; ou, ainda, pela plotagem de pontos representando valores de pares de variáveis proporcionais uma à outra; ou, ainda, por meio de tabelas com dados dessas variáveis (reverberando nas habilidades EM13MAT501 e EM13MAT510, por exemplo) ilustrando tanto a proporcionalidade quanto a não proporcionalidade. Nessa altura, o percurso contribui para a formação das habilidades EM13MAT101, EM13MAT104 e EM13MAT401, todas também abrangidas no que segue neste percurso.

Na sequência, o percurso pode passar pela retomada dos conceitos básicos de coordenadas na reta e no plano, associando números e grandezas (uma variável ou duas variáveis) a pontos na reta e no plano. Incidentalmente, seriam trabalhadas a representação visual de dados e a noção de dependência entre variáveis, que conduz, naturalmente, às noções formais de relação e função.

Particular ênfase pode ser dada às relações de proporcionalidade entre duas variáveis ou entre suas variações. A um só tempo, retomamos o estudo da Aritmética, especialmente das relações de equivalência entre frações, e reforçamos o estudo das representações geométricas dessa equivalência ou da proporcionalidade, na forma do conceito de declividade ou taxa de variação.

Deste ponto intermediário, podemos avançar, com eventuais recuos programados. Esses recuos, de tempos em tempos, ajudam a elucidar novos significados e usos para uma linguagem já trabalhada. O *retrieval* e a repetição espaçada são úteis tanto para consolidar a memória de longo prazo quanto para firmar andaimes cognitivos, com apoio do professor, para superação de dificuldades de aprendizagem evidenciadas por meio de um conjunto de avaliações formativas.

Segunda camada da progressão: representações algébricas e geométricas de relações de proporcionalidade/linearidade entre variáveis

Saber S04: reconhecer e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.	S04.H8: modelar e resolver problemas, motivados por diferentes contextos e aplicações, que envolvam a variação proporcional entre grandezas direta ou inversamente proporcionais.
	S04.H14: modelar e resolver problemas que envolvam grandezas relativas, como velocidades, densidades, fluxos, vazões e outras taxas de variação entre grandezas, motivadas por diversos contextos e aplicações.
	S04.H16: identificar relações de proporcionalidade em contextos e problemas que envolvam acréscimos simples ou, equivalentemente, progressão aritmética de uma variável.
Saber 06: modelar e resolver problemas envolvendo relações lineares entre variáveis.	S06.H19: identificar, em diferentes contextos e via distintos suportes (gráficos, figuras, tabelas etc.), a dependência de uma variável como função afim de outra.
	S06.H8: descrever movimentos e transformações geométricas do plano em termos do efeito sobre as coordenadas de pontos e de elementos de figuras geométricas.
	S06.H10: expressar relações lineares entre duas variáveis (ou suas variações) em termos de equações lineares.
	S06.H11: relacionar retas no plano ao lugar geométrico de soluções de uma equação linear.
	S06.H15: reconhecer e utilizar representações geométricas de (sistemas de) equações lineares em termos de retas no plano e suas intersecções.
	S06.H15: reconhecer e utilizar representações geométricas de (sistemas de) equações lineares em termos de retas no plano e suas intersecções.
	S06.H23: relacionar funções afins e equações lineares a relações de proporcionalidade (linearidade) entre variáveis ou suas variações e suas representações gráficas em termos de retas no plano.

Saber 06: modelar e resolver problemas envolvendo relações lineares entre variáveis.	S06.H24: identificar os parâmetros de uma equação linear ou função afim a partir da reta que a representa graficamente.
	S06.H25: associar a declividade e interceptos de uma reta aos parâmetros de uma equação linear ou função afim representada pela reta, e vice-versa.
	S06.H26: diferenciar, descrever ou expressar o efeito de translações e rotações sobre a representação gráfica e a expressão algébrica de uma equação linear ou função afim.
Saber 11: utilizar modelos e resolver problemas envolvendo relações exponenciais (e outras relações não polinomiais) entre variáveis reais.	S11.H1: distinguir e descrever padrões de crescimentos/decrescimentos aritmético e geométrico em diversos contextos e aplicações.

O próximo objetivo de aprendizagem pode ser a formalização da noção de função afim, **sem passar** por toda a linguagem geral de Teoria Ingênua dos Conjuntos, relações e funções. As funções afins são abordadas como um **exemplo simples e fundamental de relação entre duas variáveis, que modela a proporcionalidade ou linearidade.** (EM13MAT302, EM13MAT501).

Neste ponto, cumpre fazer paralelos com a Cinemática e outros modelos científicos ou cotidianos da linearidade, a exemplo de um valor financeiro corrigido no regime de acréscimos simples, modelos discretos de crescimento aritmético.

A versão discretizada das funções afins deve ser apresentada via **sequências de crescimento aritmético,** com ênfase na ideia de que incrementos de uma unidade em uma variável (o índice natural, que pode ser interpretado como tempo, por exemplo) resultam em incrementos de mesmo valor, isto é, por múltiplos inteiros da razão, da segunda variável (EM13MAT507).

Recomendamos aprofundar o estudo das progressões aritméticas, com seus jargões e procedimentos, apenas posteriormente. Neste ponto, essas progressões servem para ilustrar as características fundamentais das funções afins. Além disso, esse exemplo estabelece a necessária conexão com a unidade temática de Probabilidade e Estatística. De fato, a plotagem de dados com valores de pares de variáveis em crescimento aritmético é um primeiro ponto focal para as unidades temáticas Geometria e Medidas, Números e Álgebra e Probabilidade e Estatística (contribuições para as habilidades EM13MA101, EM13MAT203, EM13MAT510).

Finalmente, introduzimos o **estudo das retas e suas posições relativas no plano cartesiano**, interpretando as condições de paralelismo, transversalidade e perpendicularidade em termos das funções afins associadas a essas retas e de seus parâmetros.

Relevo deve ser dado à **conexão entre interceptos, declividades e parâmetros**, mostrando como **movimentos geométricos no plano** estão associados à mudança dos parâmetros, e vice-versa (vide EM13MAT105).

Este estágio do percurso é propício para a **retomada do estudo de equações e sistemas de equações lineares a duas variáveis** (vide EM13MAT301). O uso de movimentos geométricos, como translações, reflexões e rotações (ao menos, por múltiplos de ângulos retos), são representados, nesse contexto, pela possibilidade de escolha de sistemas de eixos cartesianos adaptados aos problemas modeladas pelos sistemas de equações.

Caso os estudantes estejam progredindo satisfatoriamente, o(a) professor(a) pode mostrar como equações lineares $ax+by=c$ podem ser expressas em termos de funções afins, resolvendo-as em função de y ou de x.

Terceira camada da progressão: representações algébricas e geométricas de funções lineares e quadráticas; distinções entre linearidade e não-linearidade

Saber 06: modelar e resolver problemas envolvendo relações lineares entre variáveis.	S06.H4: elaborar representações gráficas ou geométricas de variáveis (e suas variações) expressas em informações contidas em textos, tabelas, gráficos ou outros conjuntos de dados.
	S06.H13: reconhecer ou descrever relações não lineares entre variáveis ou suas variações, a partir de modelos, tabelas, gráficos e outros conjuntos de informações.
	S06.H17: representar, como função, uma relação entre variáveis em que o valor de uma determina, de modo unívoco, o valor da outra.
	S06.H18: identificar e descrever, algébrica ou graficamente, relações entre variáveis que são dadas por funções, a partir de modelos, tabelas, gráficos e outras representações e modelos dessas relações.
	S06.H20: distinguir funções lineares de não lineares a partir de representações algébricas ou geométricas.
Saber S10: utilizar modelos e resolver problemas envolvendo relações quadráticas e polinomiais entre variáveis.	S10.H17: expressar, em diversos contextos e aplicações, a dependência de uma variável como função quadrática de outra.

Em suma, para este percurso, **não propomos uma apresentação formal do conceito de função**, o que requer uma construção laboriosa, mas geralmente imprecisa, do linguajar da Teoria dos Conjuntos, passando pela noção de relação e outros conceitos. O tratamento, pretensamente formal, desses conceitos, além de não ser executado com o devido rigor, acaba desviando o foco dos aspectos essenciais do estudo das funções, cujo modelo ao mesmo tempo mais simples e mais fundamental é o de função afim.

O refinamento da linguagem, para a finalidade pedagógica deste percurso, é desnecessário e mesmo contraproducente. A terminologia de domínio, contradomínio, imagem e outros elementos do jargão deve ser adiada para o momento em que os aprendizes tenham um repertório maior de exemplos de relações e funções entre variáveis.

Aqui, cabe enfatizar a importância de estudar tanto as expressões da forma $y=mx+n$ e $y=ax^2+bx+c$ quanto expressões como $ax+by=c$ e $Ax^2+2Bxy+Cy^2=D$, por exemplo. É de suma importância enfatizar a "grande ideia" de que **relações entre variáveis descrevem lugares geométricos no plano**; curvas, nesses casos.

Não é absolutamente necessário aprofundar esse tema, mas, por meio de exemplos, evidenciar que relações lineares estão associadas a retas, ao passo que relações quadráticas, por exemplo, podem descrever curvas mais intricadas, embora bastante simétricas e com potencial para descrever formas geométricas naturais. A pergunta natural a ser feita aos estudantes, direcionando atividades de pesquisa, *quizzes* e rotinas de *flipped classroom*, é: "quais são estas curvas?" Ou, ainda: "que propriedades têm?"

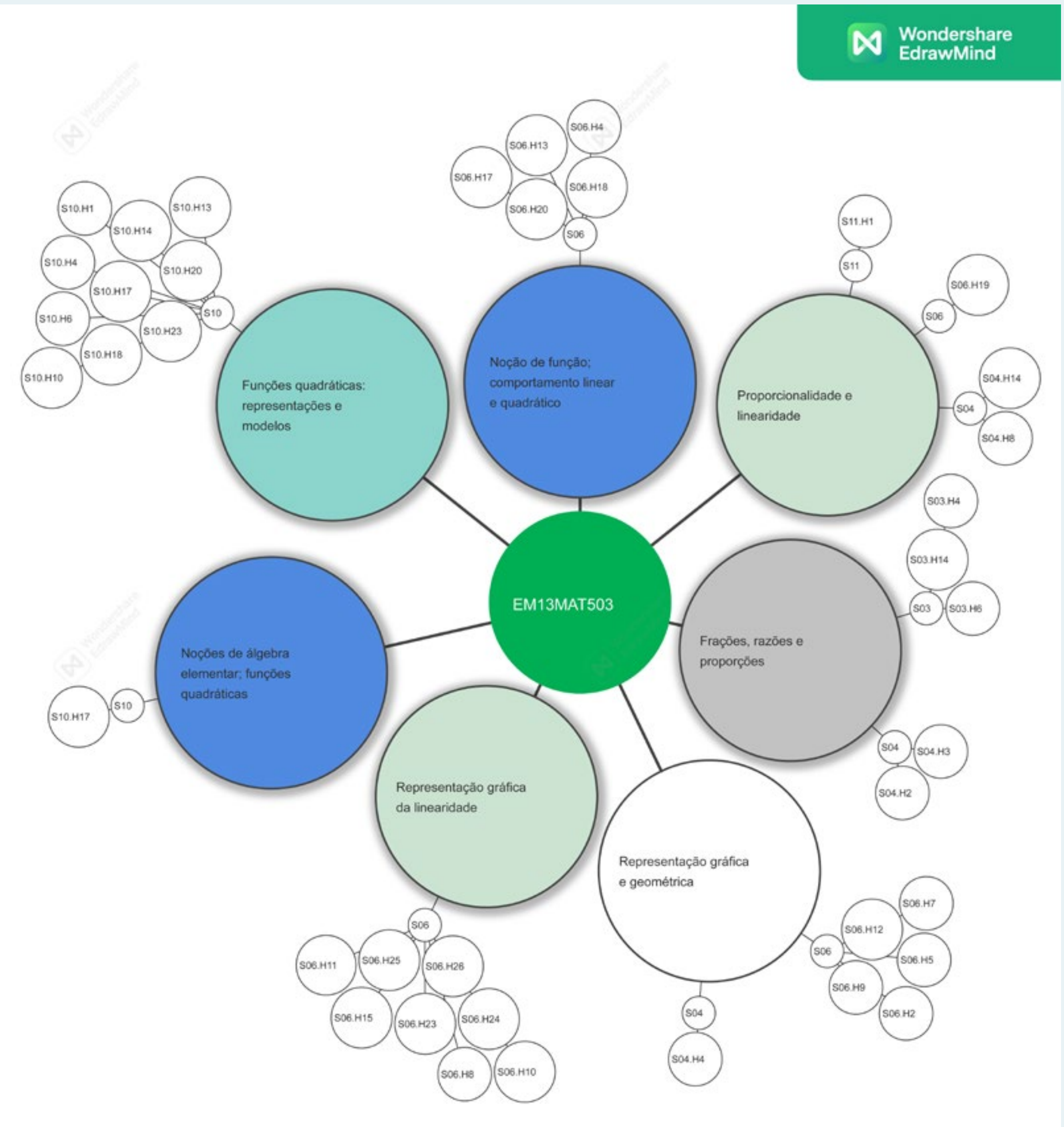
O percurso pode encerrar com uma discussão geral sobre outras relações quadráticas entre duas variáveis (por exemplo, motivadas pela descrição de um movimento acelerado ou pela relação entre área e lado ou raio de polígonos ou círculos – vide habilidade EM13MAT506).

Mais do que aprofundamento, **cabe demonstrar ao estudante as diversas naturezas do crescimento aritmético, geométrico e quadrático, via modelos algébricos ou geométricos** (EM13MAT303, EM13MAT401).

Quarta camada da progressão: conceitos, representações e aplicações das funções quadráticas	
Saber S10: utilizar modelos e resolver problemas envolvendo relações quadráticas e polinomiais entre variáveis.	S10.H1: identificar elementos estruturais da linguagem algébrica, como variáveis e expressões algébricas.
	S10.H4: efetuar soma, diferença e produto de expressões algébricas.
	S10.H6: reescrever expressões algébricas utilizando fatores comuns e produtos notáveis.
	S10.H10: compreender o conceito de zero ou raiz de uma equação algébrica.
	S10.H13: relacionar as raízes de um polinômio quadrático à sua decomposição em fatores lineares.
	S10.H14: efetuar completamento de quadrados em expressões quadráticas para determinação das raízes.
	S10.H17: expressar, em diversos contextos e aplicações, a dependência de uma variável como função quadrática de outra.
	S10.H18: reconhecer as representações algébricas ou geométricas de funções quadráticas.
	S10.H20: determinar raízes, máximos/mínimos e outros elementos algébricos e geométricos (convexidade, interceptos, vértice, eixo de simetria) a partir da forma estendida ou da forma fatorada de uma função quadrática.
	S10.H23: modelar e resolver problemas, em diversos contextos (físicos, geométricos, econômicos, entre outros), que envolvam os valores máximo ou mínimo de uma função quadrática.

O estudo das relações e funções quadráticas é centrado, neste percurso, na discussão de formas mais simples dessas funções, como a forma fatorada $f(x)=a(x-r)(x-s)$, a partir das quais possa ser combinado o **esforço de retomada da Álgebra Elementar** (e.g., fatoração, produtos notáveis, equações quadráticas). Na transição para os temas mais exclusivos do Ensino Médio, convém apresentar modelos que sirvam de **indícios** para a construção do gráfico de uma função quadrática: decomposição de movimentos na Cinemática, um esguicho de água, a trajetória de uma bola ou projétil, arcos e pontes parabólicas, entre outros exemplos, inspirados por diferentes contextos. Podem ser mencionadas outras circunstâncias que também envolvem parábolas, a exemplo de secções cônicas ou de projeções de um feixe de luz (lanternas, por exemplo).

A "grande ideia" subjacente é a relação entre a não linearidade e a curvatura ou aceleração. A esse respeito, é fundamental o uso de aplicativos de Geometria Dinâmica neste ponto (EM13MAT401, EM13MAT402, EM13MAT502).



No exemplo específico do mapa apresentado no quadro 7, enumeramos alguns marcos de conhecimentos e habilidades gradualmente trabalhados nas etapas dessa trajetória e que estão explicitados na Matriz dos Saberes. Nessa construção, atentamos para a formulação de Pellegrino, segundo a qual:

> *The progression is stated in terms of a set of increasingly complex performances that students would be expected to achieve, which makes it especially useful for thinking about the nature of the instruction that might support development of these competencies as well as ways in which they might be assessed. Not stated, however, are details of the knowledge representations and conceptual understanding that students would develop along the way as their understanding grows, although aspects of that understanding are implicit in the statements of performance at each of the levels. (PELLEGRINO, 2010).*

No exemplo de percurso esboçado anteriormente, abstraímos os *clusters* de conhecimentos e habilidades que são marcos de progressão e prescrevemos as relações lógico-cognitivas entre esses *clusters*. Uma forma esquemática de representar essa geometria de interações é por meio do uso de (hiper)grafos.

Nesses grafos, os nós são condensados de conhecimentos e habilidades, que indicam expectativas explícitas de aprendizagem naquela etapa, cronológica ou cognitiva, do percurso e, ao mesmo tempo, sugerem quais tarefas podem ser ilustrativas da plena consolidação desses conhecimentos e de sua utilização em situações relevantes para o aprendizado significativo de fatos e procedimentos matemáticos constelados em cada nó.

O próximo passo é representar as relações pressupostas entre essas habilidades na execução de uma tarefa que as mobilize conjuntamente. Inspirados na linguagem da Teoria de Grafos e de redes complexas, representamos essas relações, numa primeira aproximação, usando uma matriz de adjacência. Vejamos, a seguir, um bloco dessa matriz em que consideramos parte das habilidades enumeradas acima, que seriam mobilizadas em uma tarefa ilustrativa.

Na tabela, os algarismos 1 significam que uma habilidade na linha depende da habilidade na coluna (e vice-versa, no caso de relações de dependência bidirecionais) no contexto posto pela tarefa. Portanto, os resultados da tarefa podem gerar evidências sobre as efetivas relações cognitivas entre essas habilidades a serem trabalhadas no processo de instrução. Os algarismos 0 informam que não há conexões lógicas ou cognitivas relevantes a serem utilizadas na resolução da tarefa.

Habilidades	S06.H18	S10.H6	S10.H17	S10.H18	S10.H23
S06.H18	1	0	1	1	0
S10.H6	0	1	0	0	1
S10.H17	1	0	1	1	0
S10.H18	1	0	1	1	1
S10.H23	0	1	0	1	1

Definida essa matriz de incidência, podemos representá-la visualmente como um grafo ou árvore. Os *links* entre os nós são relações condicionais dadas *a priori* a partir das crenças de matemáticos, educadores matemáticos, professores de Matemática: tanto descrevem interdependências lógicas e cognitivas na construção formal do conhecimento matemático, quanto podem ser lidas como um modelo de como os conhecimentos vão sendo adquiridos, estruturados, relacionados e utilizados em padrões de complexidade (e abstração) crescentes.

Observamos que alguns enlaces entre nós podem ser bidirecionais, uma vez que o percurso não é seguido linearmente. Conhecimentos e habilidades podem reaparecer, em contextos mais amplos ou profundos, em pontos diferentes da progressão; novos usos e significados podem ser dados a conhecimentos prévios, uma vez que tornamos a mobilizá-los em situações mais complexas.

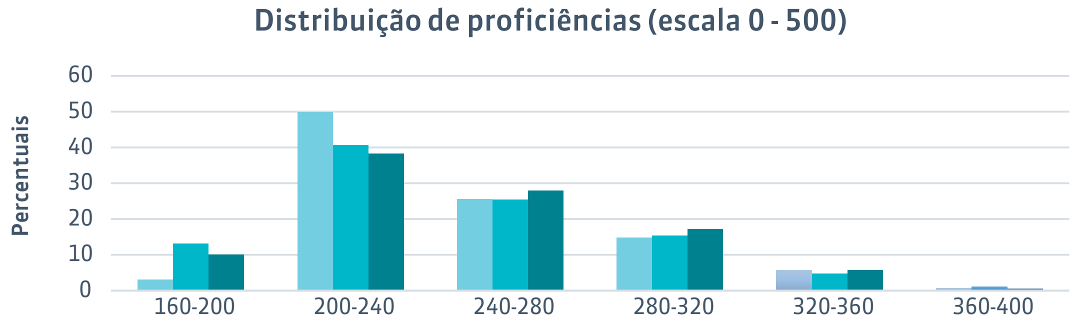
Situações e problemas provenientes de diversos contextos e formulados matematicamente são instâncias em que os nós são reorganizados internamente e certos *links* são mais fortemente ativados, ao passo que outros têm um papel menos predominante. Tarefas que representem esses contextos e situações são meios cruciais de atualizar as crenças expressas pelo modelo cognitivo-lógico na constituição interna em cada nó e nos enlaces entre eles.

Esse sistema dinâmico subjacente aos percursos e grafos, em que *links* podem ser reforçados ou enfraquecidos, ou mesmo removidos ou criados, é uma representação das atualizações do modelo cognitivo na base de uma rede bayesiana, como descrita por Mislevy *et al* (1996, 2015), conforme comentado anteriormente. Em suma, se tarefas ilustrativas de diferentes nós, ligados por *links*, gerarem evidências com base no modelo de mensuração (descrição probabilística da relação entre variáveis latentes, isto é, proficiência; e variáveis observáveis, isto é, respostas às tarefas), então a atualização do modelo probabilístico que condiciona o acerto em uma tarefa relativa a um nó ao acerto em uma tarefa relativa a um nó parental implica na atualização do próprio grafo de relações entre nós no percurso.

Em atividades correntes no CEnPE, que pretendemos desenvolver na sequência natural do projeto, realizamos alguns ensaios iniciais no sentido de validar o modelo a priori de relações entre nós ou entre *clusters* de conhecimentos e habilidades da Matriz dos Saberes presentes em uma dada trajetória de progressão. Para tanto, partimos das evidências geradas por tarefas que permeiam essa trajetória, pontuando os marcos que configuram etapas intermediárias de consecução dos objetivos de aprendizagem de interesse na avaliação.

Exemplos de tarefas

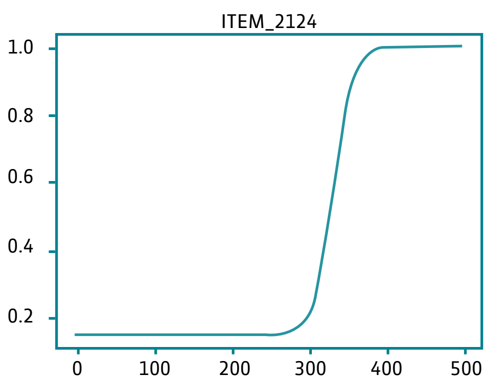
Participaram da avaliação, em que os itens a seguir foram apresentados, estudantes da rede pública estadual de Ensino Médio, cujas proficiências foram estimadas segundo a Teoria da Resposta ao Item (TRI), em uma escala própria do Sisedu (de 0 a 500 com média 250 e desvio-padrão 1), e distribuídas do modo apresentado a seguir.

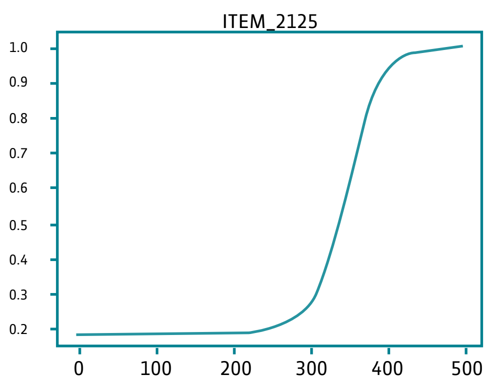


	160-200	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
1a. Série	3,04	49,86	25,64	14,88	5,77	0,74
2a. Série	13,14	40,7	25,46	15,39	4,8	1,13
3a. Série	10,08	38,33	28,03	17,22	5,76	0,61

Por exemplo, para os estudantes da terceira série, o intervalo de proficiência observado foi de 184 a 369 pontos, com mediana igual a 242 pontos. Além desses indicadores, as devolutivas dadas à rede, em avaliações dessa natureza, discutem as interpretações pedagógicas que podem nortear, como mencionado anteriormente, ações de intervenção dirigidas a grupos de alunos com dificuldade em determinados conjuntos de conhecimentos e habilidades.

Para exemplificar a forma como a informação pedagógica, com lastro estatístico, é disseminada entre coordenadores pedagógicos e professores, enfocamos a análise de dois dos itens desse teste, numerados como 2124 e 2125. As curvas características dos itens 2124 e 2125, cujos parâmetros de dificuldade são, respectivamente, iguais a 330 e 351, demonstram que ambos têm elevados parâmetros de discriminação. Convém ressaltar que estão posicionados a uma distância de 21 pontos no extremo direito da escala, sendo, portanto, itens de elevada dificuldade: observamos que o terceiro quartil de alunos corresponde a um intervalo de proficiência de 242 a 278 pontos. Os percentuais de acertos para os itens 2124 e 2125 foram, respectivamente, iguais 20,7% e 22,93%, diferença menos expressiva do que a evidenciada pela TRI.





Os relatórios trabalhados com escolas e professores vão além desse tipo de análise quantitativa e incluem propostas de uso pedagógico dos itens como parte de sequências didáticas que possam ser trabalhadas a partir da comunicação dos boletins diagnósticos. Os itens que enfatizamos se prestam a esse tipo de abordagem por serem ambos referentes a um contexto comum, a saber, a modelagem de uma situação geométrica em termos de funções quadráticas, mobilizando a compreensão da noção de área de figuras planas elementares. Portanto, são questões que envolvem algumas das competências específicas e habilidades da BNCC enumeradas na tabela 1.

Mostramos excertos desse trabalho sugerido às escolas no quadro 8. Apresentamos os dois itens e comentários dirigidos ao professor sobre o que seriam respostas esperadas a essas questões. Em seguida, é proposto um conjunto de questões que complementam os itens 2124 e 2125 e que definem uma tarefa a ser trabalhada em uma sequência didática com alunos de segunda e terceira séries no contexto de revisão sobre modelos utilizando funções lineares e quadráticas. A tarefa apresentada lida com as seguintes habilidades da Matriz dos Saberes, escolhidas entre aquelas enumeradas no mapa de progresso apresentado no quadro 7 (e relativas a algumas das habilidades da BNCC na tabela 1): S06.H5, S06.H13, S06.H18, S10.H6, S10.H17, S10.H18, S10.H23, além de algumas habilidades no Saber 07 relativas ao conceito e cálculo de área.

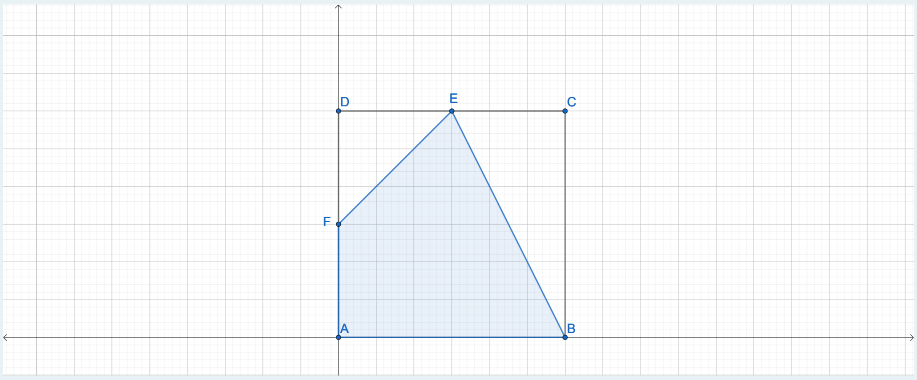
Associado a esse conjunto de questões, sugerimos, aos professores, rubricas que especificam padrões de desempenho em relação às etapas cognitivas planejadas nessa tarefa. A intenção é de que os professores possam basear-se nesse instrumento combinado de tarefas, especificações de objetivos de aprendizagem e rubricas para conduzir uma avaliação formativa ao longo da sequência didática, registrando os avanços e pontos de retenção dos alunos nas diversas etapas da progressão planejada. Esse registro tem por finalidade ajudar o professor a ajustar o planejamento didático e a comunicar os resultados de forma explícita e legível aos alunos em termos dos objetivos de aprendizagem declarados para o trabalho com a tarefa, bem como munir a gestão do Sisedu (CEARÁ, 2023) com o desenho das avaliações diagnósticas seguintes. Cabe mencionar, ainda, que os professores e escolas que participam dessas ações têm acesso a material estruturado de apoio às sequências didáticas sugeridas.

QUADRO 8

Devolutivas sobre questões apresentadas na avaliação diagnóstica de entrada Sisedu 2022-1

Questão 2124 (S07.H8: calcular ou estimar a área de figuras geométricas planas por aproximação ou comparação com áreas de figuras elementares (e.g., quadrados e retângulos), em diversos contextos, problemas e aplicações)

Na figura seguinte, o quadrado ABCD tem lados de comprimentos iguais a 12 m:



Sabendo que E e F são os pontos médios dos lados CD e AD, respectivamente, qual a área da região ABEF, destacada na figura?

A) 18 m²
B) 36 m²
C) 54 m²
D) 90 m²
E) 144 m²

Estratégia de resolução

Podemos tentar pelo menos duas abordagens, uma calculando a área da figura, outra, a do fundo. O fundo consiste em um triângulo de lados medindo 6 metros e outro com lados medindo 6 e 12 metros. Assim, a área do fundo é igual a

$$\frac{6 \times 6}{2} + \frac{12 \times 6}{2} = 18 + 36 = 54$$

metros quadrados. Subtraindo essa área da área total do quadrado, que é igual a 144 metros quadrados, ficamos com 90 metros quadrados.

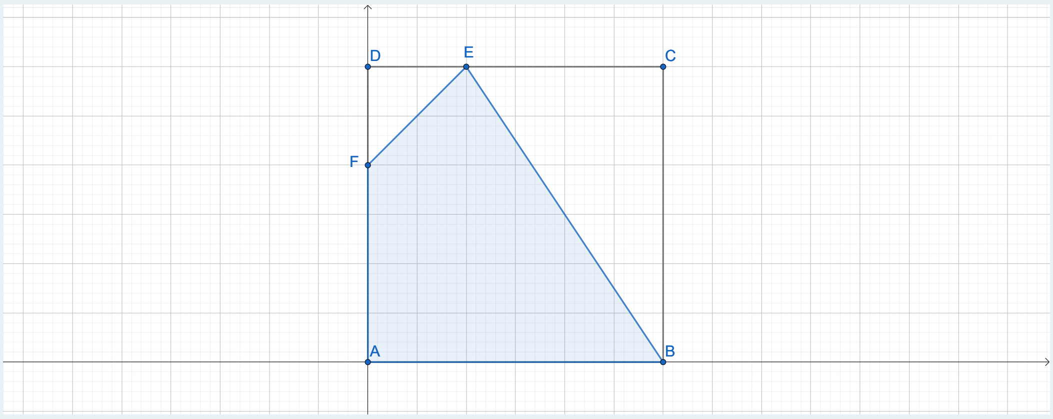
Seguindo outra abordagem e calculando diretamente a área da figura, temos um triângulo com base e altura medindo, ambos, 6 metros; e um triângulo com base e altura medindo, ambos, 12 metros. Assim, a área da figura é

$$\frac{6 \times 6}{2} + \frac{12 \times 12}{6} = 18 + 72 = 90$$

metros quadrados, o que corresponde à alternativa D.

Questão 2125 (S10.H22: modelar e resolver problemas, motivados por diferentes contextos e aplicações, em termos de funções lineares ou quadráticas)

Na figura seguinte, o quadrado ABCD tem lados de comprimentos iguais a 12 m:



Sabendo que os segmentos DE e DF medem, ambos, x metros, qual a área A da região ABEF, destacada na figura, em função de x?

A) $A(x) = 72 + 6x - \frac{1}{2}x^2$

B) $A(x) = 72 + 6x + \frac{1}{2}x$

C) $A(x) = 144 - \frac{1}{2}x^2$

D) $A(x) = 144 + \frac{1}{2}x^2$

E) $A(x) = 144$

Estratégia de resolução

Podemos calcular a área do fundo, que consiste em um triângulo de lados medindo x metros e outro com lados medindo 12 – x e 12 metros. Assim, a área do fundo é igual a

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(12-x)\times 12}{2} = \frac{x^2}{2} + 6\times(12-x)$$

metros quadrados. Subtraindo essa área da área total do quadrado, que é igual a 144 metros quadrados, ficamos com

$$144 - 72 + 6x - \frac{x^2}{2} = 72 + 6x - \frac{x^2}{2}$$

metros quadrados, o que corresponde à alternativa A.

Mais do que a aplicação de fórmulas predefinidas para o cálculo de áreas de figuras elementares "tabeladas", como retângulos, círculos e outras formas, trata-se de entender a invariância da área por movimentos rígidos no plano, o que permite decompor figuras mais complexas em partes mais simples.

Observe que, neste item, progredimos, em relação ao item 2124, para uma descrição algébrica da área. Sugerimos o seguinte percurso didático para trabalho, em sala de aula, em uma sequência didática a partir do contexto das questões 2124 e 2125.

Sugestão de tarefa para avaliação formativa em sequência didática sobre funções quadráticas

A tarefa a seguir trabalha as habilidades S06.H5, S06.H13, S06.H18, S10.H6, S10.H17, S10.H18, S10.H23, apresentadas no mapa de progressão relativa às habilidades da BNCC na tabela 1 (vide quadro 7), além de algumas habilidades no Saber 07 relativas ao conceito e cálculo de área.

Recomendações aos professores

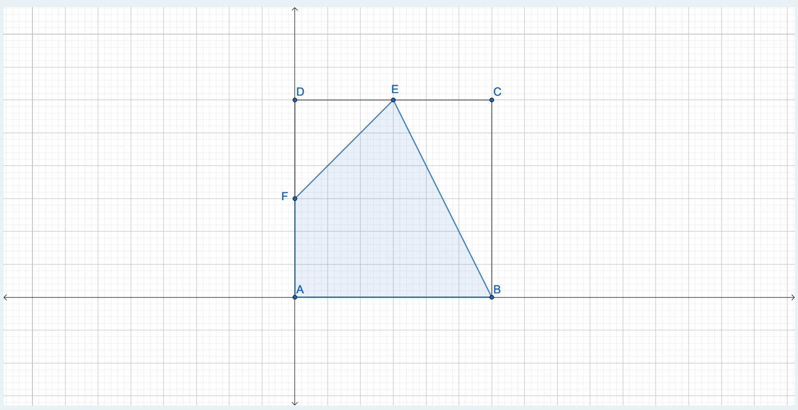
No trabalho com sequências desse tipo, devemos:

- explicitar repertório e habilidades que se almeja mobilizar;
- identificar lacunas de aprendizagem, especialmente em conhecimentos prévios;
- observar erros e falhas conceituais e procedimentais;
- dar suporte e orientação às diversas abordagens e tentativas dos alunos;
- sugerir progressão gradual na aquisição/resgate do repertório e no domínio das habilidades mapeadas.

Tarefa para a sequência didática

Questão 1 (decompondo e expandindo a questão 2124)

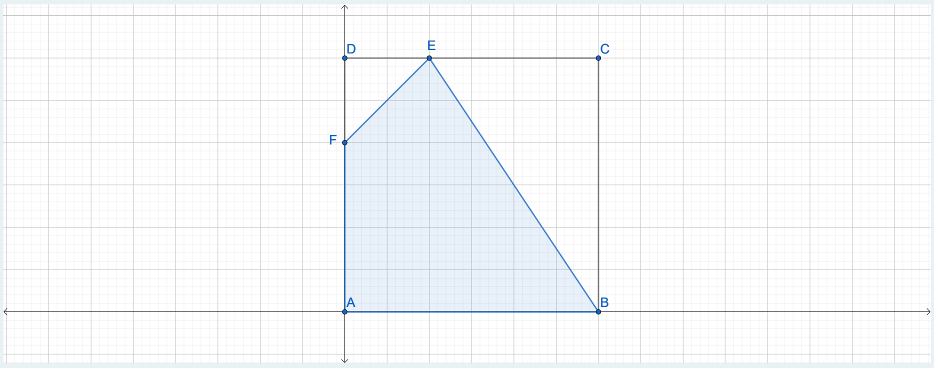
Na figura seguinte, o quadrado ABCD tem lados de comprimentos iguais a 12 m:



- Em que figuras você decomporia o quadrilátero ABEF para calcular sua área?
- Quais as áreas das figuras em que você decompôs o quadrilátero ABEF? Justifique sua resposta.
- A soma das áreas dessas figuras é igual a área do quadrilátero ABEF? Justifique sua resposta.

Questão 2

Na figura seguinte, o quadrado ABCD tem lados de comprimentos iguais a 12 m.



No caso em que o ponto E e o ponto F coincidem ambos com o ponto D, o polígono ABEF torna-se um triângulo (nesse caso, o triângulo ABD), com área igual a 72 m^2. Existem outras posições do ponto E e do ponto F para os quais isso também ocorre?

Questão 3

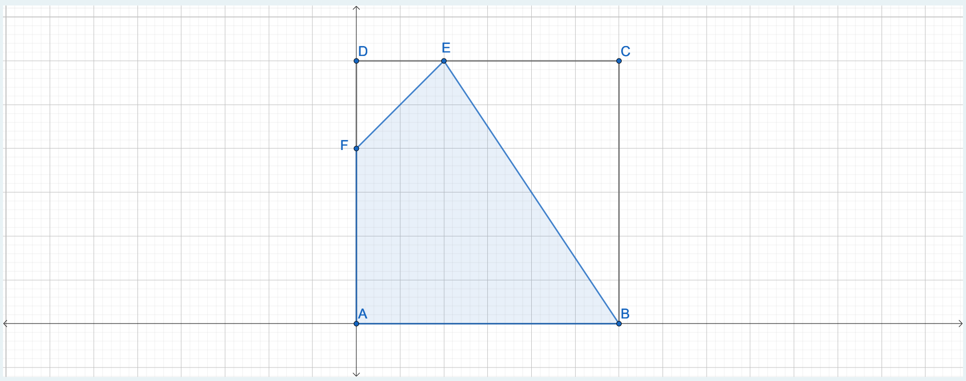
Considere a figura na questão 2 e leia a seguinte afirmação.

Movendo o ponto E ao longo do segmento CD e o ponto F ao longo do segmento AD, de modo que DE = DF = x, existem duas posições dos pontos E e F tais que o quadrilátero ABEF tem área igual a 82 m^2.

- Represente geometricamente a situação descrita na afirmação.
- Use um argumento geométrico para justificar essa afirmação.
- Use um argumento algébrico para justificar essa afirmação. Dica: modele o problema usando uma equação quadrática em x.
- Para quais valores, além de 82 m^2, essa afirmação seria também verdadeira? Existem valores para os quais essa afirmação não seria verdadeira?

Questão 4 (decompondo e expandindo a questão 2125)

Lembre-se que, na figura seguinte, o quadrado ABCD tem lados de comprimentos iguais a 12 m.



- Mostre que $72 + 6x - \frac{1}{2}x^2 = 90 - \frac{1}{2}(x-6)^2$.

- Movendo o ponto E ao longo do segmento CD e o ponto F ao longo do segmento AD, de modo que $\mathrm{DE} = \mathrm{DF} = \mathrm{x}$, encontre os valores da área do quadrilátero ABEF em função de x. Organize os dados em uma tabela e em um gráfico no plano cartesiano.

- Mostre que a área A da região ABEF é dada pela função quadrática $A(x) = 72 + 6x - \frac{1}{2}x^2$, em que x é um número entre 0 e 12.

- Quais os valores de A quando $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{x} = 6$ e $\mathrm{x} = 12$? Há algo de especial em relação a esses valores específicos?

- Conclua, a partir das letras a) e d) que a área máxima é atingida quando $\mathrm{x} = 6$.

Questão 5

- Com base nos dados que você obteve nas questões 3 e 4, esboce o gráfico da função quadrática $\mathrm{A(x)}$, em que x é um número de 0 a 12.
- Qual o valor mínimo dessa função, considerando que x é um número no intervalo de 0 a 12? Interprete esse valor mínimo geometricamente. Localize-o no gráfico.
- Qual o valor máximo dessa função, considerando que x é um número no intervalo de 0 a 12? Interprete esse valor máximo geometricamente. Localize-o no gráfico.
- O quadrilátero de área máxima tem alguma simetria?

Etapas/objetivos de aprendizagem

Etapas na progressão e objetivos de aprendizagem	Questões
Compreensão da invariância da área por movimentos rígidos - S07.H8.	1
Dedução, com base nesses movimentos, de **relações** entre a área e medidas lineares de figuras planas: quadrados, retângulos, triângulos, trapézios - S07.H8.	1, 2, 3, 4
Registro de padrões numéricos, relacionando área e medidas lineares: indução sobre diferentes relações funcionais para área e perímetro (investigação científica) – S06.H18.	4
Reconhecimento de formas elementares em que a figura no item 2124 possa ser decomposta: múltiplas abordagens, inclusive de figura e fundo (decomposição em triângulos, em triângulo e trapézio, contagem via malha quadriculada, a depender da interação com o aluno) – S07.H8.	1
Cálculos aritméticos relativos às áreas da decomposição – S02.H12.	1, 2, 3, 4
Generalização, disparada pela pergunta sobre escolhas arbitrárias de pontos sobre os lados (item 2125) – S10.H6.	3, 4
Modelagem em termos de funções lineares e funções quadráticas – S10.H17.	3, 4
Experimentos para estudo do comportamento da função quadrática – S10.H18	4, 5
Relações entre o comportamento da função (visto geometricamente) e seus coeficientes (via forma fatorada, por exemplo) – S10.H17, S10.H18, S10.H23.	5
Investigação sobre a existência de uma “melhor” escolha: máximo da função e as propriedades geométricas da melhor configuração (otimização e simetria) – S10.H23.	5

Rubricas associadas à tarefa

Domínios cognitivos/ Aspectos da competência matemática	Objetivos de aprendizagem (etapas na trajetória de progressão)	Padrões de desempenho		
		Insuficiente	Parcialmente suficiente	Suficiente
Modelar/ Competência estratégica	Decompor figura/ fundo em partes elementares (triângulos, paralelogramos, trapézios, entre outros).	O aluno revela dificuldades em reconhecer figuras elementares para decompor a figura/fundo.	O aluno indica algumas abordagens, mas tem dúvidas sobre a aditividade ou invariância da área.	O aluno propõe uma ou mais possíveis decomposições e argumenta sobre a aditividade/invariância da área.
Compreender/ Compreensão conceitual	Recuperar fatos sobre áreas de figuras elementares (triângulos, paralelogramos, trapézios etc.).	O aluno desconhece expressões para áreas de figuras elementares.	O aluno recupera, abstratamente, fatos sobre áreas de figuras elementares, mas não identifica como aplicá-los.	O aluno define como aplicar os fatos necessários sobre áreas de figuras planas às partes em que decompôs a figura/fundo.
Efetuar/ Fluência procedimental	Efetuar cálculos aritméticos relativos às áreas da decomposição da figura/fundo.	O aluno revela desconhecer fatos básicos sobre multiplicações e divisões.	O aluno demonstra dificuldades nos cálculos aritméticos, cometendo erros procedimentais.	O aluno executa corretamente os procedimentos aritméticos.
Analisar/ Raciocínio adaptativo	Reconhecer padrões numéricos lineares/quadráticos no contexto em que a área é variável.	O aluno tem dificuldades no registro numérico dos dados do experimento.	O aluno realiza os experimentos, registra os dados, mas não percebe os padrões e não formula hipóteses.	O aluno registra os resultados do experimento e elabora induções sobre relações funcionais.
Modelar/ Competência estratégica	Modelar medidas geométricas em termos de expressões quadráticas.	O aluno percebe que existe relação funcional, mas não elabora distinções entre os possíveis modelos dessa relação.	O aluno argumenta adequadamente sobre a relação quadrática entre área e dimensões lineares.	O aluno exibe, explicitamente, a relação funcional entre área e dimensões lineares.
Aplicar/ Compreensão conceitual & Fluência procedimental	Descrever geometricamente o comportamento da função.	O aluno revela limitações quanto a intuição geométrica sobre a variação da função área.	O aluno, com base nos experimentos, relata alguns exemplos, mas não descreve a variação contínua da função área.	O aluno argumenta que, movendo a configuração, a função área varia entre extremos, por exemplo.
Integrar/ Raciocínio matemático & Comunicação	Relacionar as escolhas no caso geral e o comportamento da função a seus coeficientes.	O aluno desconhece propriedades das funções quadráticas associadas a seus coeficientes.	O aluno recupera, abstratamente, fatos sobre relações entre coeficientes, raízes e eixos de simetria, mas não os aplica ao modelo.	O aluno associa a variação da função à sua forma "fatorada", determinando, por exemplo, seu valor máximo.

8. MODELO DE EVIDÊNCIAS: USO DE MÉTODOS DIAGNÓSTICO-COGNITIVOS

Nesta seção, descrevemos alguns resultados da avaliação diagnóstica realizada em maio de 2022 com os alunos da rede pública municipal de Sobral, por meio de cooperação entre a Secretaria da Educação de Sobral (Seduc-Sobral), a Casa da Avaliação Externa de Sobral, a Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação à Distância (Coded/CED) da Secretaria da Educação do Estado do Ceará (Seduc-CE) e o Centro de Excelência em Políticas Educacionais (CEnPE) da Universidade Federal do Ceará. Os testes contaram com a participação de 2.244 alunos, ou seja, 91,63% das turmas de nono ano do Ensino Fundamental.

O propósito da avaliação foi identificar as lacunas de aprendizagem, em Língua Portuguesa e Matemática, observados ao fim do Ensino Fundamental, com base nos objetivos de aprendizagem explicitamente fixados no currículo de Sobral para esses componentes curriculares.

Além do propósito de trazer evidências diagnósticas, a avaliação permitiu estabelecer comparabilidade aos resultados do município na série histórica do Saeb, possibilitando suprir informações que retratassem a dinâmica dos indicadores de aprendizagem em comparação a 2019 e às demais avaliações de larga escala anteriores. Desse modo, gestores, comunidades de aprendizagem e pesquisadores passaram a contar com evidências adicionais a respeito do impacto educacional das medidas sanitárias de restrição às atividades presenciais durante as fases críticas da pandemia de SARS-Covid-19, em 2020 e 2021. Esses dados, portanto, contribuíram para o planejamento pedagógico e curricular das escolas no segundo semestre de 2022, dada a premência de estruturar políticas públicas de recomposição de aprendizagens em adição às iniciativas já existentes, de reconhecido êxito, no Ensino Fundamental de Sobral.

No que segue, detalhamos alguns dos resultados da avaliação pertinentes aos temas deste relatório. Para analisar quantitativamente e interpretar pedagogicamente esses resultados, usamos tanto a TRI quanto modelos diagnóstico-cognitivos. Pretendemos, com isso, exemplificar alguns dos pontos conceituais e metodológicos que discutimos na parte inicial deste documento.

Os testes em Língua Portuguesa e Matemática foram elaborados pela equipe do CEnPE. Cada um deles teve 25 itens de múltipla escolha, com quatro alternativas cada, alguns dos quais previamente parametrizados em edições anteriores do Saeb. Na elaboração desses testes, foram considerados, do ponto de vista pedagógico:

- conhecimentos e habilidades prévios, estruturantes de metas de aprendizagem do currículo de Sobral e progressivamente elaborados, segundo expectativas bem definidas, ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental;

- conhecimentos e habilidades específicos do nono ano, usualmente trabalhados nos meses iniciais, que, de um lado, dependem da aquisição de conhecimentos prévios e, de outro, estão na base de objetos de conhecimento essenciais no decorrer do nono ano e do Ensino Médio.

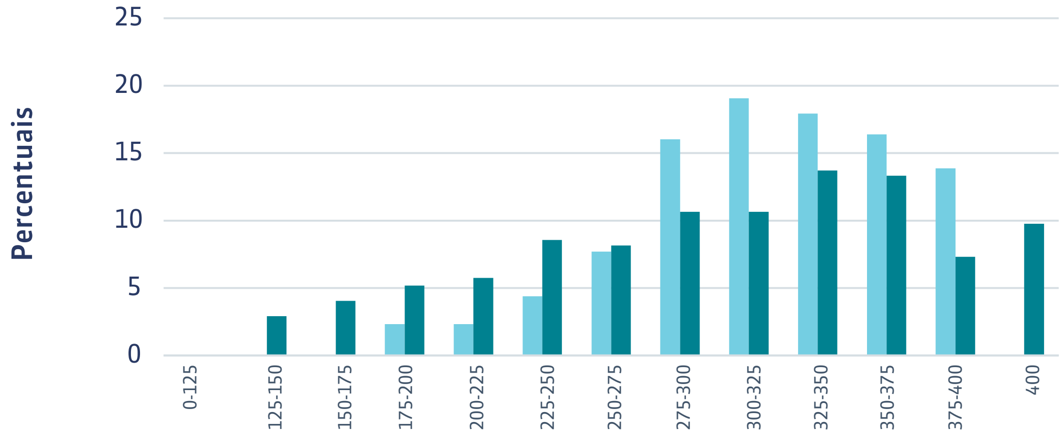
Em termos de **demandas cognitivas**, os itens foram pensados de modo a acessar processos cognitivos em diferentes níveis de complexidade, incluindo desde tarefas mais corriqueiras, similares às usualmente empregadas em avaliações de larga escala (geralmente relativas a habilidades procedimentais especificadas nas matrizes de referências dessas avaliações), até tarefas que envolvessem contextualizações, mobilizações e combinações, não necessariamente imediatas, de conhecimentos básicos.

Na tabela a seguir, associamos algumas habilidades na **Matriz dos Saberes** mobilizadas nos itens a objetivos de aprendizagem, em termos de conhecimentos e habilidades em Matemática Básica especificados no currículo de Sobral. Mais precisamente, os objetivos de aprendizagem na segunda coluna são aqueles expressos na tabela de progressão das expectativas em habilidades exposta no currículo do município na área de Matemática.

Habilidades demandadas no teste (Matriz dos Saberes)	Objetivos de aprendizagem (currículo de Sobral)
S03.H23: efetuar aproximações, estimativas e arredondamentos de números racionais e dos resultados de operações aritméticas (somas, produtos, diferenças, quocientes e potências) entre esses números.	1.1.1. Representar o sistema de numeração decimal a partir de suas características, b) reconhecendo ordens e classes em geral; d) determinando o valor posicional dos algarismos em números de qualquer ordem; g) realizando a composição ou decomposição de números naturais, conforme o princípio aditivo e o multiplicativo; h) identificando diferentes decomposições de um número; i) realizando arredondamentos de números (6º ano). 1.2.1. Representar números naturais, a) realizando cálculos, a partir de estratégias como uso de contagem, cálculo mental, estimativa, arredondamento de números, composição e decomposição; b) calculando adição sem ou com reserva; c) calculando subtração sem ou com reagrupamento; d) reconhecendo adição e subtração como operações inversas; e) utilizando a prova real para comprovar resultados de adição e subtração; f) resolvendo problemas de adição ou de subtração, inclusive os que envolvam as duas operações ao mesmo tempo;g) calculando multiplicações com ou sem reserva;h) calculando divisões exatas e não exatas (6º ano).
S04.H14: modelar e resolver problemas que envolvam grandezas relativas, como velocidades, densidades, fluxos, vazões e outras taxas de variação entre grandezas, motivadas por diversos contextos e aplicações.	1.4.1. Aplicar conceitos de razão e proporção, a) reconhecendo razão como a divisão entre dois números; b) reconhecendo o significado de grandeza; c) interpretando a razão entre grandezas de naturezas diferentes; d) identificando algumas razões especiais como escala, velocidade média e densidade (7º ano).

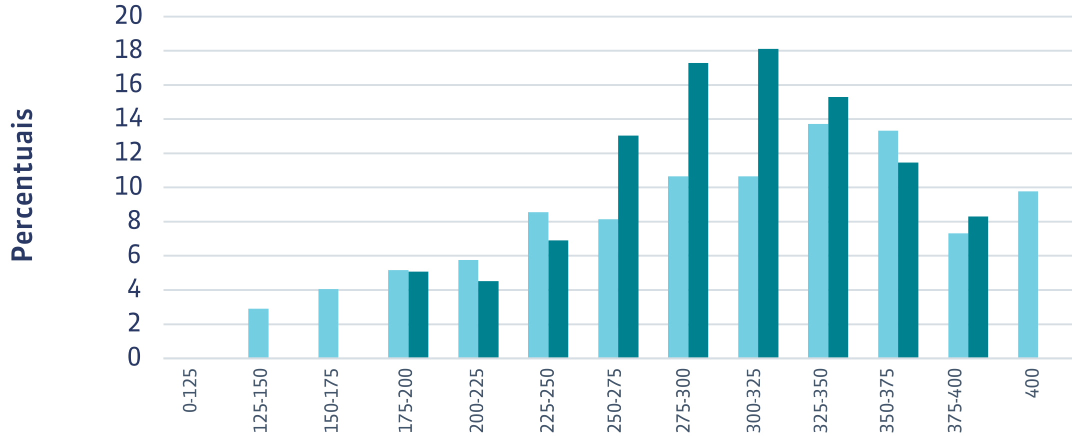
O gráfico a seguir representa os percentuais dos alunos participantes nos níveis de proficiência da escala do Saeb em **Matemática**. Os níveis identificados no gráfico são descritos, na escala de proficiência do Saeb, em termos de habilidades mobilizadas pelos itens cujos parâmetros de dificuldades variam dentro de cada um dos intervalos. Os dados obtidos em nossa avaliação (percentuais 2022) são comparados com os resultados observados tanto no Saeb 2019 quanto na edição de 2021.

Distribuição de proficiências - Avaliação diagnóstica 2022 x Saeb 2019



	0-125	125-150	150-175	175-200	200-225	225-250	250-275	275-300	300-325	325-350	350-375	375-400	400
Percentuais (2019)				2,32	2,32	4,39	7,69	16,03	19,06	17,94	16,39	13,87	
Percentuais (2022)	0	2,9	4,05	5,17	5,75	8,56	8,15	10,65	10,65	13,72	13,32	7,31	9,77

Distribuição de proficiências - Avaliação diagnóstica 2022 x Saeb 2021



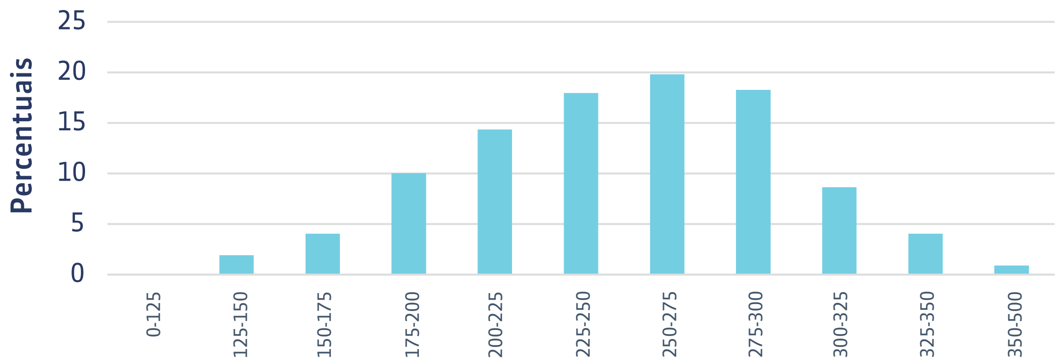
	0-125	125-150	150-175	175-200	200-225	225-250	250-275	275-300	300-325	325-350	350-375	375-400	400
Percentuais (2022)	0	2,9	4,05	5,17	5,75	8,56	8,15	10,65	10,65	13,72	13,32	7,31	9,77
Percentuais (2021)				5,08	4,52	6,9	13,03	17,28	18,12	15,3	11,46	8,3	0

Algumas medidas dessa distribuição de proficiência estão resumidas na tabela a seguir, em que informamos os intervalos de proficiência em cada quartil de alunos, além dos valores médio e mediano das proficiências em Matemática.

Medidas	Valores
Intervalo de proficiência do primeiro quartil	137 a 246
Intervalo de proficiência do segundo quartil	246 a 312
Intervalo de proficiência do terceiro quartil	312 a 361
Intervalo de proficiência do quarto quartil	361 a 508
Mediana	312
Média	303,32
Média Saeb 2021	300,79

Observamos que as médias estimadas na avaliação diagnóstica e no Saeb 2021 estão bem próximas. No entanto, a distribuição de proficiências observada no teste diagnóstico exibe proporção consideravelmente maior de alunos em estratos de proficiência abaixo de 175 pontos, percentuais maiores no intervalo de 200 a 250, percentuais menores no intervalo de 250 e 350 e uma expressão significativa de alunos com elevada proficiência, acima de 400 pontos, um achado que julgamos relevante. Estimando as proficiências sem equalização à escala do Saeb, encontramos a distribuição a seguir, bem mais simétrica, deslocada para a direita, revelando, ainda assim, a presença de alunos em ambos os extremos da escala de proficiência.

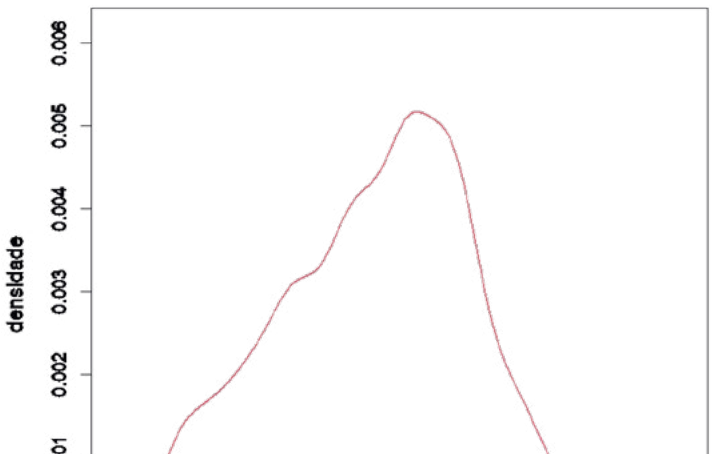
Distribuição de proficiências - Avaliação diagnóstica 2022



	0-125	125-150	150-175	175-200	200-225	225-250	250-275	275-300	300-325	325-350	350-500
Percentuais	0	1,92	4,05	10,03	14,35	17,96	19,83	18,27	8,64	4,05	0,89

O gráfico a seguir mostra uma versão contínua da distribuição de proficiências em Matemática, na escala do Saeb, em que, no eixo horizontal, estão identificados os itens do teste, ordenados de acordo com os parâmetros de dificuldade, modelados e estimados com o uso da Teoria de Resposta ao Item a três parâmetros. No gráfico, os itens conhecidos, ou seja, exibidos em edições anteriores do Saeb e cujos parâmetros de dificuldade já são dados, estão identificados por triângulos na cor verde ao longo do eixo horizontal. Os demais itens, representados por círculos pretos ao longo do eixo horizontal, são itens novos, elaborados pela equipe.

Observamos que os itens do Saeb, em sua maioria, estão em um intervalo de dificuldade menor que 350 pontos, ao passo que os itens novos estão majoritariamente difundidos no intervalo de dificuldade maior que 350 pontos. Os dez itens com maiores percentuais de erros pertencem todos ao conjunto de treze itens cujos parâmetros de dificuldade estão acima de 361 pontos na escala do Saeb. Portanto, as probabilidades de que alunos situados até o terceiro quartil de proficiência acertem um desses itens é menor que 50%.



Em suma, a engenharia do teste permitiu combinar itens novos e conhecidos de modo a percorrer diferentes espectros de dificuldade. A análise via métodos diagnóstico-cognitivos sugere que também atingimos o objetivo de acessar diversos níveis de complexidade com respeito às demandas cognitivas postas pelos itens. Cabe ressaltar que mesmo as tarefas com maiores parâmetros de dificuldade envolviam um repertório predominantemente limitado a conhecimentos básicos essenciais, trabalhados, sobretudo, do quarto ao sexto ano e, portanto, prescindindo de elementos conceituais ou técnicos mais elaborados. Dito de outro modo, a dificuldade dos itens novos pode ser explicada mais em termos de complexidade cognitiva do que de dificuldade propriamente técnica.

Os modelos diagnóstico-cognitivos utilizados na produção das evidências são baseados em uma matriz que descreve os processos cognitivos hipoteticamente acionados na realização das tarefas. Mais concretamente, essa descrição é feita associando cada tarefa do teste (nesse caso, os itens) aos processos cognitivos predominantemente demandados pela tarefa. Essa correspondência é representada na chamada Matriz Q, parte da qual é informada na tabela a seguir, em que 0 significa a ausência do processo cognitivo e 1 sua presença no trabalho com o item.

Processos cognitivos	Item 02	Item 03
A1. Utilizar diretamente conceitos, fatos ou procedimentos básicos.	1	1
A2. Combinar elementos básicos do repertório, aplicando-os a um dado contexto.	0	1
A3. Modelar matematicamente um problema, usando repertório de um dado domínio.	0	0
A4. Modelar matematicamente um problema, usando repertório de mais de um domínio.	0	0

Os atributos cognitivos (rotulados por A1, A2, A3 e A4) que definem a Matriz Q, aos quais associamos os diversos itens do teste, estão dispostos na tabela em ordem crescente de complexidade, de cima para baixo. Para analisar de que modo esse modelo cognitivo foi associado aos itens do teste, veremos, no quadro 9, um exame mais detalhado de alguns exemplos desses itens e de suas características estatísticas e cognitivas. Tipicamente, cada um dos itens do Saeb apresentados no teste envolvia apenas um atributo cognitivo por vez.

Dados os atributos presentes na Matriz Q, caracterizamos dois modelos matemáticos para a probabilidade de acerto, por um candidato ℓ, em um dado item j, condicionada à informação $\eta_{j\ell}$ de que esse candidato detém (ou não detém) os atributos cognitivos demandados pelo item (DE LA TORRE, 2008).

- O modelo DINA (acrônimo da expressão, em inglês, *deterministic input, noisy "and" gate model*), em que, para cada item j, o aluno deve deter todos os atributos α_{jk} associados ao item. Tecnicamente,

$$\eta_{j\ell} = \alpha_{\ell 1}^{q_{j1}} \times \alpha_{\ell 2}^{q_{j2}} \times \alpha_{\ell 3}^{q_{j3}} \times \alpha_{\ell 4}^{q_{j4}}.$$

  ou seja, se $q_{jk} = 1$ (o atributo k for requerido para o item j), então $\alpha_{\ell k} = 1$, isto é, o aluno deve deter esse atributo para que $\eta_{j\ell} = 1$.

- O modelo DINO (acrônimo da expressão, em inglês, *deterministic input, noisy "or" gate model*), em que, para cada item , o aluno deve deter ao menos um dos atributos associados ao item. Tecnicamente,

$$\eta_{j\ell} = 1 - (1 - \alpha_{\ell 1})^{q_{j1}} \times (1 - \alpha_{\ell 1})^{q_{j1}} \times (1 - \alpha_{\ell 1})^{q_{j1}} \times (1 - \alpha_{\ell 1})^{q_{j1}}.$$

  Ou seja, dados os atributos k requeridos para o item j, isto é, para os quais $q_{jk} = 1$ (o atributo for requerido para o item j), então ao menos um dos $\alpha_{\ell k}$, deve ser igual a 1 (ou seja, o aluno deve deter ao menos um dos atributos associados ao item) para que $\eta_{j\ell} = 1$.

Tendo em conta o modelo com os quatro atributos A1, A2, A3 e A4 acima, podemos definir $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ classes latentes, correspondentes às diferentes possibilidades de que um aluno detenha ou não cada um desses atributos. Por exemplo, a classe rotulada como 1001 é formada pelos alunos da amostra que detêm os atributos A1 e A4.

O objetivo da análise dos dados, nos modelos diagnósticos cognitivos, é o de estimar:

- as proporções de alunos em cada um dessas 16 classes;
- as proporções de alunos que detêm cada um dos quatro atributos.

Para determinarmos essas proporções, partimos das respostas dadas pelos alunos aos diferentes itens e dos modelos estatísticos que definem a probabilidade de acerto para um dado item, condicionada à informação de quais atributos são relevantes para sua resolução. Esses modelos embutem dois parâmetros, um de *guessing* (que, grosso modo, corresponde à probabilidade de acerto casual) e um de *slip*, que indica a probabilidade de que um aluno erre um dado item mesmo que detenha todos os atributos necessários.

Uma vez que esses aspectos mais técnicos da metodologia não são do escopo deste relatório, passamos diretamente a uma discussão, ainda simplificada, de alguns achados resultantes de sua aplicação ao teste de Matemática. Exporemos parte dos resultados obtidos via metodologia DINO, em que modelamos o domínio, por parte dos alunos, de ao menos um dos atributos cognitivos requeridos para a resolução de um dado item do teste.

Para a devida interpretação pedagógica dos resultados obtidos com essa metodologia, cabe observar que os quatro atributos correspondem, grosso modo, aos domínios de processos cognitivos em sistemas de avaliação como o TIMSS e o Pisa. Sendo assim, a correspondência, de modo mais simplificado, é dada no quadro 9, a seguir.

QUADRO 9

Item 02. As populações, em 2021, dos municípios de Crateús, Eusébio, Jucás e Sobral foram estimadas em, aproximadamente, 75.241; 55.035; 24.949 e 212.437 habitantes, respectivamente.

Fonte: IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br. Acesso em: 10 de abril de 2022.

Comparando essas populações, conclui-se corretamente que:

- A população de Sobral é mais de quatro vezes a população de Eusébio.
- A população de Sobral é menos de três vezes a população de Crateús.
- A população de Crateús é menos de três vezes a população de Jucás.
- A população de Eusébio é mais de quatro vezes a população de Jucás

Dificuldade	**Atributos cognitivos (DINA):** utilizar diretamente
450 (escala Saeb)	conceitos, fatos ou procedimentos básicos (A1).

Habilidade na Matriz dos Saberes
S03.H23: efetuar aproximações, estimativas e arredondamentos de números racionais e dos resultados de operações aritméticas (somas, produtos, diferenças, quocientes e potências) entre esses números.

Objetivos de aprendizagem (currículo de Sobral)
Representar números naturais, c) realizando cálculos, a partir de estratégias como uso de contagem, cálculo mental, estimativa e arredondamento de números; k) relacionando a divisão à ideia de distribuição em partes iguais; l) aplicando os fatos fundamentais da multiplicação e divisão; m) calculando multiplicações com ou sem reserva, em que o multiplicador é um número de até dois algarismos; s) resolvendo problemas que envolvam multiplicação ou divisão (4º ano).

Comentários
O objetivo da questão não é que o aluno efetue procedimentos de cálculo com o emprego de algoritmos de divisão ou multiplicação. De fato, a habilidade demandada é relativa a senso numérico, mais precisamente ao manuseio de aproximações e arredondamentos que permitam produzir estimativas razoáveis dos resultados de operações matemáticas. Para enfatizar esse aspecto, utilizamos, no contexto da questão, dados que pudessem ser aproximados por múltiplos de 25.000, por exemplo, de forma a facilitar as estimativas. No entanto, o item tem elevado parâmetro de dificuldade e o percentual de acertos foi de 32%, com 42% de respostas assinalando a alternativa A). Por fim, cabe apontar que os elementos de repertório demandados neste item estão associados a objetivos de aprendizagem do quarto ano do Ensino Fundamental no currículo de Sobral.

Observamos que, na escala de proficiência do Pisa, o nível 2 é descrito como segue.

Os alunos podem interpretar e reconhecer situações em contextos que não requerem mais do que uma inferência direta. Podem extrair informação relevante de uma única fonte e fazer uso de um único modo de representação. Os alunos deste nível podem utilizar algoritmos básicos, fórmulas, procedimentos ou convenções para resolver problemas que envolvam números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais dos resultados.

Podemos afirmar que o item acima, cuja dificuldade corresponde ao nível 8 para o nono ano do Ensino Fundamental, explora habilidades matemáticas características da descrição do nível 2 do Pisa.

Item 03. A tabela indica valores aproximados das populações estimadas e das áreas dos municípios de Crateús, Eusébio, Jucás e Sobral, de acordo com dados do IBGE.

	Crateús	Eusébio	Jucás	Sobral
População (habitantes)	75.000	55.000	25.000	210.000
Área (quilômetros quadrados)	3.000	100	1.000	2.100

Fonte: IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br. Acesso em: 10 de abril de 2022.

Com base nessas aproximações, o município que tem mais habitantes por quilômetro quadrado é

A) Crateús.
B) Eusébio.
C) Jucás.
D) Sobral.

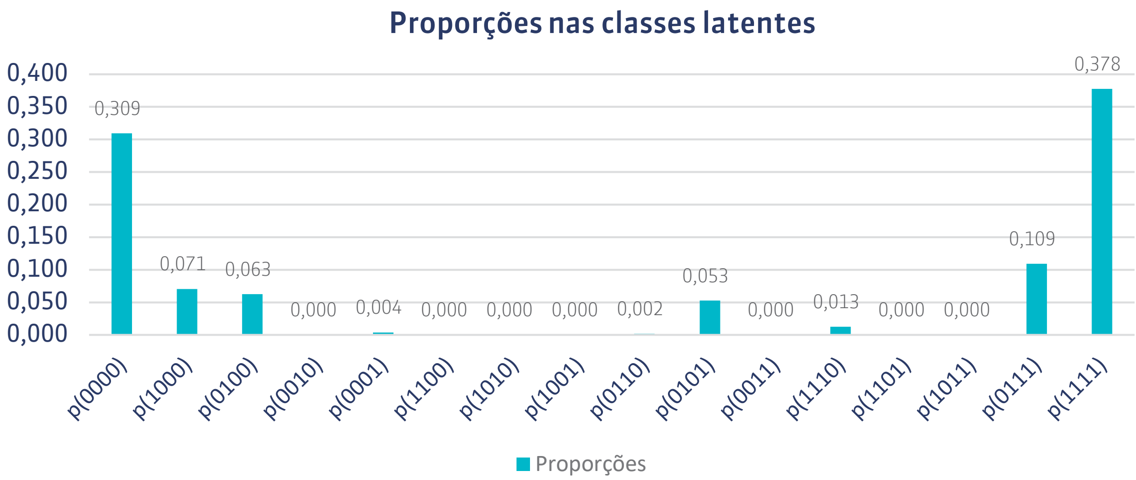
Dificuldade 387 (escala Saeb)	**Atributos cognitivos (DINA):** combinar elementos básicos do repertório, aplicando-os a um dado contexto (A2).

Habilidade na Matriz dos Saberes
S04.H14: modelar e resolver problemas que envolvam grandezas relativas, como velocidades, densidades, fluxos, vazões e outras taxas de variação entre grandezas, motivadas por diversos contextos e aplicações.

Objetivos de aprendizagem (currículo de Sobral)
Aplicar conceitos de razão e proporção, a) reconhecendo razão como a divisão entre dois números; b) reconhecendo proporção; c) utilizando o raciocínio proporcional; d) descrevendo uma relação de proporção entre duas quantidades (6º ano).

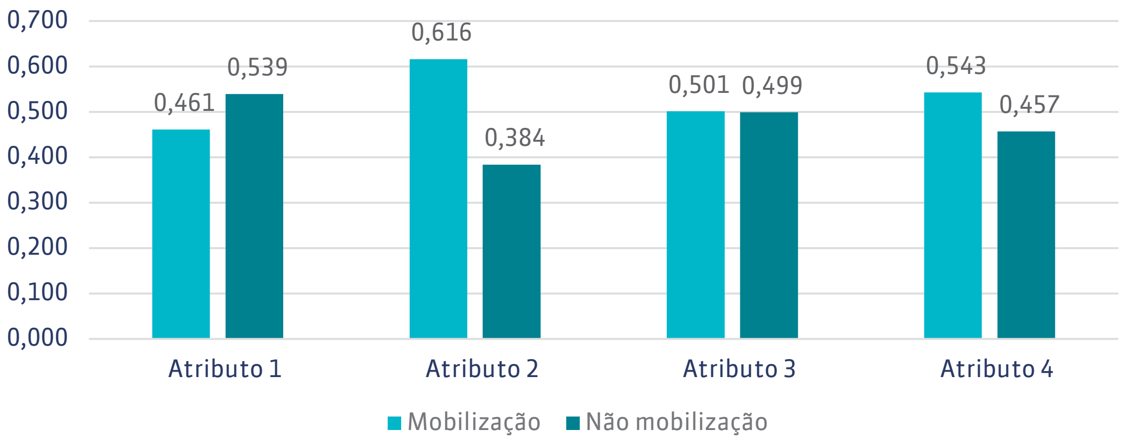
Comentários
Este item é uma sequência do anterior: desta vez, as informações estão expressas em uma tabela e dizem respeito a duas variáveis em vez de uma apenas, o que demanda mais da compreensão leitora do aluno. Um dos pontos cruciais é formular matematicamente a expressão "mais habitantes por quilômetro quadrado" em termos da razão entre os valores correspondentes dessas variáveis. A ênfase, uma vez mais, não é no procedimento aritmético, mas na representação matemática da noção (intuitiva) de densidade demográfica. A dificuldade técnica de comparação das razões é diminuída pelo fato de que aproximamos os dados por múltiplos de 100: o mais relevante é a compreensão conceitual de que a resposta não depende de considerar uma ou outra variável independentemente, mas uma dada relação entre elas. O item tem elevado parâmetro de dificuldade e o percentual de acertos foi de 33%, com 38% de respostas assinalando a alternativa A) e 23% a alternativa D). Na progressão curricular, os conhecimentos e habilidades demandados neste item estão associados a objetivos de aprendizagem do sexto ano do Ensino Fundamental no currículo de Sobral.

A figura seguinte mostra as proporções estimadas de alunos em cada uma das 16 classes latentes definidas de acordo com a metodologia DINA.



Mais precisamente, no eixo horizontal, as expressões $p(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ indicam as dezesseis classes latentes em que foram agrupados os alunos participantes do teste. Por exemplo, $p(0110)$ indica a classe de alunos que dominam os atributos A2 e A3 e não dominam os atributos A1 e A4. De acordo com as observações realizadas no teste, cerca de 31% dos alunos avaliados têm dificuldades relacionadas a todos os atributos, ao passo que 38% mobilizaram os quatro atributos quando demandados no teste.

A figura a seguir mostra as proporções de alunos que efetivamente mobilizaram/não mobilizaram cada um dos atributos cognitivos descritos na Matriz Q durante o teste.



De acordo com a correspondência entre os atributos, os domínios de processos cognitivos, as tarefas e as habilidades mobilizadas em cada uma, encontramos evidências de uma maior expressão de alunos que **não detêm** o conjunto de habilidades aritméticas e geométricas baseadas, no teste, na mobilização de conhecimentos elementares, exploradas em contextos menos usuais e mais elaborados do que em avaliações de larga escala, que exigiam do aluno aplicar esses conhecimentos na modelagem aritmética ou geométrica dos problemas, a despeito de não envolverem dificuldades técnicas consideráveis (para além do que se trabalha até o sétimo ano, em termos de conteúdos) ou a necessidade de um repertório mais denso ou mais amplo.

Uma das possibilidades metodológicas que vislumbramos para a continuidade do projeto é o uso de modelos diagnóstico-cognitivos (CDMs), como realizado nesse experimento pioneiro em Sobral:: esses modelos tanto dialogam com os pressupostos teóricos definidos por Pellegrino e no ECD quanto parecem adequados ao modelo de tarefas e de rubricas da plataforma. De modo geral, o CDM não gera, como resultado quantitativo, uma escala ordinal de proficiências a exemplo da TRI, usualmente utilizada nas avaliações somativas. Conquanto possam ser estabelecidos paralelismos entre alguns modelos diagnóstico-cognitivos e a TRI, o objetivo precípuo, em nosso sistema, é o de permitir agrupar os alunos em classes latentes definidas de acordo com o domínio/não domínio dos atributos cognitivos requeridos pelas tarefas apresentadas no teste e que são representativas de expectativas de aprendizagem fixadas em cada ano escolar.

Em resumo, a aplicação de CDMs devolve, como dados quantitativos, o mapeamento, em uma dada turma ou escola, de quantos ou quais alunos dominam ou não dominam um ou mais dos atributos exigidos tarefa a tarefa. Uma vez mais, a engenharia das tarefas deve ser tal que se tenha clareza sobre quais atributos espera-se que o aluno manifeste no esforço de respondê-las. Modelos dessa natureza permitem determinar probabilidades de créditos parciais, conhecidos os atributos. Além disso, tarefas pré-testadas podem ser úteis, em combinação com as probabilidades conhecidas, para validar ou atualizar o modelo cognitivo, isto é, os pressupostos dos especialistas sobre quais processos cognitivos são efetivamente postos em ação no trabalho com as tarefas. Essa dinâmica é um dos elementos que define a rede bayesiana subjacente à organização das tarefas quanto às habilidades e níveis de complexidades a que correspondem.

9. CONCLUSÕES E PRÓXIMAS ETAPAS: FORMAÇÃO PROFISSIONAL

Os esforços preliminares de análise e modelagem do domínio da Matemática Básica aqui relatados são respostas ainda parciais ao desafio de especificar expectativas relevantes de aprendizagem de modo a esclarecer, qualificar e monitorar os vínculos entre a planejamento e gestão do currículo, os microprocessos no cotidiano da instrução e a prática da avaliação, seja de larga escala, seja interna, associada ao acompanhamento dos marcos, explícitos e precisos, na progressão cognitiva dos aprendizes.

Para tanto, segundo Pellegrino (2010, p. 24), professores e outros gestores pedagógicos que lidam com o trinômio currículo-avaliação-instrução devem definir objetivos intermediários que sirvam como trajetórias efetivas para atingir os objetivos finais e, ao trabalhar com essas especificações, devem ter um profundo entendimento de como os estudantes representam o conhecimento e desenvolvem competências no domínio da Matemática Básica.

Nossa construção, em torno dos mapas de progressão dentro da estrutura da Matriz dos Saberes, foi proposta para apoiar professores e escolas no sentido dessa especificação de objetivos graduais de aprendizagem no caminho da consolidação das competências que definem a proficiência matemática. Pellegrino (2010) ainda afirma, nesse contexto, que:

> *Whereas this kind of epistemological and conceptual analysis of the subject domain is an essential basis for guiding assessment, deeper cognitive analysis of how people learn the subject matter is also needed. Formative assessment should be based in cognitive theories about how people learn particular subject matter to ensure that instruction centers on what is most important for the next stage of learning, given a learner's current state of understanding. (PELLEGRINO, 2010, p. 24).*

De fato, essas são premissas de uma instrução cognitivamente conduzida (*cognitively guided instruction*) e amparada, em todas as suas escalas, pela avaliação (CARPENTER et al., 2000). Por sua vez, o trabalho docente para efetivar essa simbiose curricular-avaliativa-instrucional requer o desenvolvimento de competências profissionais que podem ser correlacionadas a alguns domínios do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Sendo assim, entendemos como continuação necessária dos esforços relatados a concepção e a oferta de formações continuadas bastante planejadas e focadas no trabalho prático e no embasamento teórico a respeito do uso pedagógico de avaliações formativas (e seus pressupostos e métodos vindos da Psicologia Cognitiva, a teoria da avaliação, por exemplo).

As ações do CEnPE e instituições parceiras, como desdobramento do projeto atual, dirão respeito a esse esforço formativo. De fato, contamos, para tanto, com as funcionalidades disponíveis na plataforma do CEnPE, as quais permitem aprimorar o trabalho do professor ao otimizar o tempo e a qualidade do acompanhamento das aprendizagens de seus estudantes por meio dos recursos para tarefas, rubricas, devolutivas e indicadores de aprendizagem.

O professor, em sua prática cotidiana, pode manejar produtos já elaborados e catalogados por metas e habilidades ou utilizar os módulos descritos anteriormente para: editar tarefas e testes em uma sequência didática; coletar e categorizar respostas; definir rubricas e, por conseguinte, padrões de desempenho esperados; elaborar devolutivas sobre os desempenhos observados; e, por fim, recomendar roteiros de estudos aos alunos e rever seu próprio planejamento pedagógico à luz de evidências que ele, professor, constrói, compreende e utiliza, tempestivamente, em sala de aula.

No sentido reverso, a plataforma deve funcionar também como ambiente de formação profissional sobre o uso pedagógico de avaliações formativas. Planejamos a oferta de vários processos formativos, desde oficinas a cursos de pós-graduação *lato sensu*, em que os professores em formação são supervisionados por nossas equipes e, eventualmente, por colegas que já tenham adquirido experiência no conceito e na prática do modelo de avaliações formativas.

Essas formações devem abranger etapas que vão desde o estudo do arcabouço conceitual, passando pelo desenho de um processo de avaliação formativa na escola ou turma, até culminar no acompanhamento de uma intervenção pedagógica pautada nos achados da avaliação e nas devolutivas produzidas.

Além dos objetivos diretamente associados ao papel das avaliações formativas na instrução, as formações de professores têm o efeito de desenvolver algumas habilidades docentes relativas ao conhecimento pedagógico do conteúdo que são aderentes a competências específicas e habilidades previstas na Base Nacional de Formação Continuada, que mencionamos a seguir.

- **Na dimensão do conhecimento profissional**
  Demonstrar conhecimento sobre as diferentes formas diagnóstica, formativa e somativa de avaliar a aprendizagem dos estudantes, utilizando o resultado das avaliações para: (a) dar devolutivas que apoiem o estudante na construção de sua autonomia como aprendente; (b) replanejar as práticas de ensino para assegurar que as dificuldades identificadas nas avaliações sejam solucionadas nas aulas.

- **Na dimensão da prática profissional**

  2.3.2 Aplicar os diferentes instrumentos e estratégias de avaliação da aprendizagem, de maneira justa e comparável, devendo ser considerada a heterogeneidade dos estudantes.

  2.3.3 Dar devolutiva em tempo hábil e apropriada, tornando visível para o estudante seu processo de aprendizagem e desenvolvimento.

  2.3.4 Aplicar os métodos de avaliação para analisar o processo de aprendizagem dos estudantes e utilizar esses resultados para retroalimentar a prática pedagógica.

  2.3.5 Fazer uso de sistemas de monitoramento, registro e acompanhamento das aprendizagens utilizando os recursos tecnológicos disponíveis.

  2.4.3 Ajustar o planejamento com base no progresso e nas necessidades de aprendizagem e desenvolvimento integral dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ALMOND, R. et al. **Bayesian networks in educational assessment**. Springer, 2015.

BLACK, P.; WILIAM, D. Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. **Phi Delta Kappan**, v. 92, n. 1, p. 81-90, 2010.

BOALER, J. **Mathematical Mindsets:** Unleashing Students' Potential through Creative Mathematics, Inspiring Messages and Innovative Teaching. Jossey-Bass, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2017.

______. ______. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP n. 2, de 20 de dezembro de 2019. Diário Oficial da União, Brasília, 15 de abril de 2020, Seção 1, p. 46-49. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=135951-rcp002-19&category_slug=dezembro-2019-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 12 maio 2020.

CARPENTER, T. P. et al. **Cognitively Guided Instruction**: A Research-Based Teacher Professional Development Program for Mathematics. Research Report 03. Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research, 2000.

CEARÁ. Secretaria de Educação (SEDUC). Programa Cientista Chefe. Devolutiva. Teste comentado – **Avaliação Diagnóstica 2022-1**.

CHRISTODOULOU, D. **Making good progress:** The future of assessment for learning. Oxford University Press, 2017.

COMMON CORE STATE STANDARDS INITIATIVE. **Common Core State Standards for Mathematics.** Appendix A: Designing High School Mathematics Courses Based on the Common Core State Standards. Disponível em: <http://www.corestandards.org/the-standards>.

CORCORAN, T. B.; MOSHER, F. A.; ROGAT, A. **Learning progressions in science**: An evidence-based approach to reform. New York, NY: Columbia University/Teachers College/Consortium for Policy Research in Education/Center on Continuous Instructional Improvement, 2009.

DE LA TORRE, J. DINA Model and Parameter Estimation: A Didactic. **Journal Of Educational And Behavioral Statistics**, v. 34, n. 1, p.115, 2009.

ELMORE, R. F.; FIARMAN, S. E.; TEITEL, L. Instructional rounds in education: A network approach to improving teaching and learning. **Teacher Librarian**, v. 37, n. 3, p. 69, 2010.

GAUTHIER, C. et al. **Enseignement explicite et réussite des élèves**: la gestion des apprentissages. Pearson, 2013.

HADAMARD, J. **The psychology of invention in the mathematical field.** New York, NY: Dover Publications, 1954.

HATTIE, J. **Aprendizagem Visível para Professores:** Como Maximizar o Impacto da Aprendizagem. Penso, 2017.

HATTIE, J. et al. **Visible Learning for Mathematics, Grades K-12:** What Works Best to Optimize Student Learning. Corwin, 2016.

HIRSCH, E. D. **The Schools We Need and why We Don’t Have Them.** Doubleday, 1996.

IMPA. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas** (OBMEP). Disponível em: <http://www.obmep.org.br>.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. **Adding it up:** helping children learn mathematics. Washington, D.C.: National Research Council, 2001.

MARS. **Mathematics Assessment Project.** 2023. Disponível em: <https://www.map.mathshell.org>.

MESSICK, S. Validity. In: Linn, R. L. (Ed.). **Educational measurement.** 3rd ed. New York, NY: American Council on Education and Macmillan, 1989. p. 13-104.

MISLEVY, R. J. Test theory reconceived. **Journal of Educational Measurement**, v. 33, n. 4, p. 379–416, 1996.

MISLEVY, R. J.; ALMOND, R. G.; LUKAS, J. F. **A Brief Introduction to Evidence-Centered Design.** ETS Research Report Series, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/j.2333-8504.2003.tb01908.x>.

MISLEVY, R. J.; HAERTEL, G. D. Implications of Evidence-Centered Design for Educational Testing. **Educational Measurement: Issues and Practice**, v. 25, n. 4, p. 6–20, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1745-3992.2006.00075.x>.

MISLEVY, R. J.; RICONSCENTE, M. **Evidence-centered Assessment Design:** Layers, Structures, and Terminology. Menlo Park, CA: SRI International, 2005. PADI Technical Report 9.

MISLEVY, R. J.; STEINBERG, L. S.; ALMOND, R. G. On the structure of educational assessments. **Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives**, v. 1, n. 1, p. 3–62, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1207/S15366359MEA0101_02>.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and standards for school mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **Measuring What Counts:** A Conceptual Guide for Mathematics Assessment. Washington, DC: The National Academies Press, 1993. Disponível em: <https://doi.org/10.17226/2235>.

______. **Knowing what students know:** The science and design of educational assessment. Washington, DC: National Academy Press, 2001.

OECD. **Pisa 2022 Mathematics framework (Draft)**. Paris: OECD, 2018. Disponível em: <https://pisa2022-maths.oecd.org/files/PISA%202022%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf>.

PELLEGRINO, J. W. **The design of an assessment system for the race to the top:** A learning sciences perspective on issues of growth and measurement. Centre for K-12 Assessment & Performance Management [ETS], 2010. Disponível em: <http://www.k12center.net/rsc/pdf/PellegrinoPresenterSession1.pdf>.

POINCARÉ, H. **Science and method.** New York, NY: Dover Publications, Inc., 1952.

PÓLYA, G. **How to Solve It.** Princeton University Press, 1945.

______. **Mathematics and Plausible Reasoning Volume I:** Induction and Analogy in Mathematics. Princeton University Press, 1954.

______. **Mathematics and Plausible Reasoning Volume II:** Patterns of Plausible Inference. Princeton University Press, 1954.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical problem solving.** Elsevier, 1985.

______. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: GROUWS, D. A. (ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning:** A project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Co, Inc., 1992. p. 334–370.

SHEPARD, L. A. The role of assessment in a learning culture. **Educational Researcher**, v. 29, n. 7, p. 4–14, 2000.

SILVER, E. A. Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction. In: SCHOENFELD, A. H. (Ed.). **Cognitive science and mathematics education.** Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1987. p. 33–60.

SILVER, E; MILLS, V. (Ed.). **A Fresh Look at Formative Assessment in Mathematics Teaching.** National Council of Teachers of Mathematics, 2018.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically.** Cambridge University Press, 2014.
TIMSS & PIRLS INTERNATIONAL STUDY CENTER. **TIMSS 2023 Assessment Frameworks.** 2023. Disponível em: <https://timssandpirls.bc.edu/timss2023/frameworks/index.html>.

WILIAM, D. **Creating the schools our children need:** why we are doing right now don't work, and what we can do instead. Learning Sciences, 2018.

______. **Principled assessment design.** Redesigning Schooling – 8. SSAT (The Schools Network), 2014.

WILLINGHAM, D. How Knowledge Helps It Speeds and Strengthens Reading Comprehension, Learning—and Thinking. Knowledge in the Classroom. **American Educator,** 2006. Disponível em: <https://www.aft.org/periodical/american-educator/spring-2006/how-knowledge-helps>.

______. **Why don't students like schools?** A Cognitive Scientist Answers Questions About How the Mind Works and What It Means for the Classroom. Jossey-Bass, 2012.

______. Critical thinking: Why is it so hard to teach? **Arts Education Policy Review**, v. 109, n. 4, p. 21-32, 2008.

ZIEKY, M. J. An introduction to the use of evidence-centered design in test development. **Psicología Educativa**, v. 20, p. 79-87, 2014.

CEnPE

Apoio:

INSTITUTO UNIBANCO

CEnPE

Apoio:

INSTITUTO UNIBANCO