UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL/PROFMAT

Reginaldo Pereira Flor

Um Estudo Sobre a Teoria das Probabilidades Discretas: Contribuição para a Formação Continuada de Professores

BELÉM

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL/PROFMAT

Reginaldo Pereira Flor

Um Estudo Sobre a Teoria das Probabilidades Discretas:Contribuição para a Formação Continuada de Professores

Dissertação de Conclusão de Curso apresentado para obtenção de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Pará.

Orientadora: Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento.

BELÉM

2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Flor, Reginaldo Pereira, 1967-
Um estudo sobre a teoria das probabilidades discretas: contribuição para a formação continuada de professores / Reginaldo Pereira Flor. - 2014.

Orientadora: Rúbia Gonçalves Nascimento;
Coorientador: Roberto Carlos Dantas Andrade.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2014.

1. Matemática-Estudo e ensino. 2. Matemática-estudo e ensino (Ensino médio). 3. Probabilidades. 4. Teoria dos conjuntos. 5. Análise combinatória. I. Título.

CDD 22. ed. 510.7

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Reginaldo Pereira Flor

Um Estudo Sobre a Teoria das Probabilidades Discretas: Contribuição para a Formação Continuada de Professores

Dissertação de Conclusão de Curso apresentado para obtenção de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Pará, avaliada pela seguinte banca examinadora:

Banca Examinadora:

Prof

Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento (Orientadora)

Universidade Federal do Pará - UFPA

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma

Universidade Federal do Pará - UFPA

Prof. Dr. Roberto Carlos Dantas Andrade

Escola Tenente Rêgo Barros - ETRB

DATA DA AVALIAÇÃO: 02 / 12 / 2014

CONCEITO: APROVADO

Aos meus filhos e a minha mãe Maria Iracema Pereira Flor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me deram força para que esse trabalho fosse possível. Aos meus familiares pelo apoio, ao meu filho Julio Victor pela ajuda na digitação deste, a minha orientadora Rúbia Gonçalves Nascimento pela compreensão, e a Deus pelo conhecimento.

RESUMO

Ao elaborar este estudo, objetivamos uma abordagem do assunto de maneira não trivial. Seguindo esta tendência, partimos de definições simples mas necessárias e atingimos níveis de complexidade que são próprios do tema em questão, haja visto que o assunto probabilidade possui ligação muito estreita com a teoria dos conjuntos e a análise combinatória, o que lhe confere para um pleno entendimento, raciocínios lógicos bem estruturados e consistentes. Este rigor matemático aplicado ao trabalho se propõe sobretudo a enriquecer os conhecimentos de profissionais ligados a docência no ensino médio, como também a universitários que tem projetos de pesquisa nesta área assim como a estudantes do ensino médio voltados para o estudo de matemática. Abrangendo um universo tão vasto de pessoas, esperamos que esta pesquisa possa contribuir positivamente para a elevação do nível de ensino e aprendizagem em relação ao ensino médio e que seus efeitos possam ser sentidos quantitativa e qualitativamente.

Palavras-chave: Matemática-estudo e ensino, Probabilidades, Teoria dos conjuntos, Análise combinatória.

ABSTRACT

In preparing this study, we aimed to look into this matter approach of non-trivial way. Following this trend, we start with simple but necessary settings, and reached levels of complexity that are subject's own in question, given the fact that it likely has very close links with set theory and combinatorics, which gives it for a full understanding, well-structured and consistent logical reasoning. This mathematical rigor applied to the study aims primarily to enhance the professional knowledge related to teaching in high school, as well as students who have research projects in this area as well as high school students facing study of mathematics. Covering such a vast number of people, we hope that this research will contribute positively to raising the level of education and learning in relation to the high school and its effects can be quantitative and qualitative way.

Key words: Mathematics-Study and teaching, Probability, set theory, combinatorics Analysis.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A palavra probabilidade, deriva do latim *Probare* (Provar ou testar). Informalmente, provável é uma das muitas palavras utilizadas para eventos incertos ou desconhecidos, sendo substituído por algumas palavras como, “sorte”, “risco”, "azar", "incerteza", "duvidoso", dependendo do contexto.
O estudo científico da probabilidade é um desenvolvimento moderno. Os jogos de azar mostram que o interesse em quantificar as ideias da probabilidade tem existido por milênios, mas as construções matemáticas de uso nestes problemas só apareceram muito mais tarde.
Cardano, foi um dos primeiros a tratar do assunto. No livro *Liber de Ludo Aleae*, estudou as probabilidades associadas ao arremesso de dados, concluindo que a distribuição de 2 dados deve ser obtida, dos 36 pares ordenados de resultados e não apenas dos 21 pares (não ordenados).
A correspondência entre *Pierre de Fermat* e *Blaise Pascal*, em que ambos chegam a uma solução correta do célebre problema da divisão das apostas, representou um significativo passo a frente no domínio das probabilidades.
Também *Leibniz* $(1646-1716)$ não deixou de se ocupar das probabilidades. Publicou duas obras, uma sobre a "arte combinatória"e outra sobre aplicações do cálculo das probabilidades a questões financeiras. Orientado por *Leibniz*, *Jacques Bernoulle* também se dedicou ao aperfeiçoamento desta teoria. Sua obra "*Ars Conjectande*", foi publicada oito anos depois da sua morte e nela o primeiro teorema limite da teoria das probabilidades é rigorosamente provado. Podemos afirmar que graças as contribuições de *Bernoulli* que o cálculo de probabilidades atingiu o status de ciência.
Também são notáveis as contribuições de *Gauss* e *Laplace.Laplace* projetou um sistema matemático de raciocínio indutivo baseado em probabilidades, que hoje coincide com as ideias *Bayesianas*. Estas ideias consistem numa crítica àquilo que chamamos modelo empirista do conhecimento científico. Como explicar isto?. Todo conhecimento científico é baseado em causas previamente verificadas, contudo não na sua totalidade. Da mesma forma o numero de experimentos que

vai validar o referido conhecimento é finito, podendo com novas causas mudar o resultado num experimento posterior, o que invalidaria a suposta teoria científica. Em outras palavras, com recursos limitados somos induzidos a conclusões que podem ser precipitadas. *Thomas Bayes*, aplicou a teoria das probabilidades para constatar o grau de confiabilidade de uma teoria científica. Como podemos observar a teoria das probabilidades, além de ser desenvolvida por grandes matemáticos, possui uma aplicação muito vasta no mundo moderno e principalmente no campo do conhecimento científico. Quem não se lembra da frase de *Albert Einstein*: "Deus não joga dados". Nesta, ele critica a mecânica probabilística, importantíssimo ramo da mecânica quântica que não seria possível seus modelos e teorizações sem o desenvolvimento da teoria das probabilidades.

John Forbes Nash Jr. (Bluefield, 13 de junho de 1928) é um matemático norte-americano que trabalhou com teoria dos jogos, geometria diferencial e equações diferenciais parciais. Em 1994, como resultado de seu trabalho com a teoria dos jogos, que desenvolveu quando estudante de Princeton, recebeu o Prêmio de Ciências Econômicas em Memória de Alfred Nobel.

No que se refere a *Gauss*, este fez uma série de suposições gerais sobre as observações e os erros observáveis e complementou-os com uma suposição puramente matemática. A equação da curva de *Gauss* corresponde a resultados empíricos. Vejamos a equação,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}.\epsilon^{-(x-u)^2/2\sigma^2} \tag{1}$$

onde,

u é a média para esta função;

σ é o desvio padrão;

x é uma variável aleatória, e $f(x)$ é a função densidade de probabilidade.

Com isto *Gauss* demonstra matematicamente a probabilidade da ocorrência de um evento especificando o intervalo da variável aleatória em torno da média.Dado o exposto, façamos a abordagem dos conceitos, teoremas e desenvolvimento desta teoria.

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais

1.1 Fenômenos aleatórios

São aqueles que ao serem produzidos sob as mesmas condições, não se é possível determinar exatamente o seu resultado, ou seja, não se tem certeza do que realmente vai ocorrer. No cotidiano estamos sempre em contato com este tipo de fenômeno. Podemos citar, por exemplo:

1 Escolher num grupo de 100 pessoas entre 40 e 50 anos, quantas tem pressão alta ou não.

2 A quantidade de pessoas que ganharão na megassena no próximo sorteio.

3 No próximo ENEM, a média de pontos dos alunos que irão se inscrever no curso de matemática licenciatura.

1.2 Espaço Amostral

Em um fenômeno aleatório, também chamado experimento aleatório, definimos Espaço amostral, e para ele usaremos como notação a letra grega $\hat{o}mega(\Omega)$, ao total de resultados que podem ser extraídos do experimento aleatório.

Exemplo 1

Dois dados são lançados simultaneamente. qual o espaço amostral deste experimento?

Solução: Como os dados serão lançados simultaneamente, os resultados deste experimento

serão pares ordenados (x, y).
Sendo assim, $\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\}$.
Devemos também notar que, será muito importante determinar o número de elementos do espaço amostral, pois o mesmo será imprescindível no cálculo de probabilidades. Em muitas situações, como nesta do exemplo anterior recorreremos com muita frequência aos métodos de contagem estudados em análise combinatória. Também recorreremos a estes métodos para calcular o número de elementos de um evento. Vamos definir então o que vem a ser um evento.

1.3 Evento

Dado um experimento aleatório, o evento será um conjunto contido no espaço amostral, cujos elementos esperamos que ocorra ao realizarmos o experimento. Também os elementos do evento muitas vezes são chamados casos favoráveis. É muito comum nos problemas de probabilidade citar o conjunto correspondente ao evento através de uma propriedade do mesmo. Vejamos o exemplo em que precisamos calcular o número de casos favoráveis de um evento dado por uma propriedade:

Exemplo 2

Joana tem 10 calças das quais 3 são jeans e as outras são de linho. Se ela quer escolher uma calça jeans, o conjunto evento será constituido por todos os elementos que satisfazem a escolha de Joana. Seja E este conjunto. Então, $E = \{J_1, J_2, J_3\}$, onde estes J_i com $1 \leq i \leq 3$ representam as opções desejadas.

observação

Seja um conjunto A com n elementos todos distintos. Queremos saber de quantas maneiras é possivel montar grupos de m elementos também distintos, com esses n elementos, com $n \geq m$. Definimos esta quantidade de escolhas como:

$$C_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1.1}$$

Exemplo 3

No método Braille, temos uma matriz M_{3x2} de tal forma que cada símbolo (letra, número, sinal ortográfico ou matemático) são representados por pelo menos um ressalto na matriz. Qual a quantidade de símbolos representados na matriz cuja configuração represente a pelo menos uma linha ou coluna completamente preenchida?

Solução:

Neste problema queremos contabilizar o total de possibilidades de o símbolo ser representado por linhas ou colunas completamente preenchidas por ressaltos e pelo menos uma ou outra. Esta é a propriedade do evento considerado. Para tanto vamos particionar o problema. Com um ressalto não podemos preencher qualquer linha, logo essas possibilidades são descartadas. Com dois ressaltos, só teremos linhas preenchidas horizontalmente. A quantidade dessas possibilidades é três, pois neste caso preencheremos a 1, a 2 ou a 3, ou seja, $C_{3,1}$. Com três ressaltos o raciocínio é um pouco mais longo. Vamos determinar que a primeira linha foi preenchida. Então temos quatro possibilidades de preencher as outras posições com ressaltos, ou seja, $C_{4,1}$. O mesmo raciocínio é válido se supormos a segunda ou a terceira linhas preenchidas. Como, para termos uma linha horizontal preenchida, pois com três ressaltos só podemos preencher uma, temos um total de $3.C_{4,1}$ possibilidades. Além destas, restam às situações das colunas preenchidas, que no caso é uma ou outra, ou seja, $C_{2,1}$. Assim para três ressaltos na matriz temos um total de $3.C_{4,1} + C_{2,1}$ linhas ou colunas preenchidas. Para quatro ressaltos, qualquer configuração nos dará pelo menos uma linha ou coluna preenchida, ou seja, o total de maneiras para esta situação é $C_{6,4}$. O mesmo ocorre para cinco ressaltos, ou seja, neste caso o total é $C_{6,5}$. Para seis ressaltos temos apenas uma possibilidade. A contagem geral nos dará:

$$C_{3,1} + 3.C_{4,1} + C_{2,1} + C_{6,4} + C_{6,5} + 1 = 3 + 3.4 + 2 + 15 + 6 + 1 = 38$$

Desta maneira, a quantidade de elementos do evento em questão é 38. Vimos, portanto que muitas vezes pode ser trabalhoso encontra o numero de elementos de um evento. Para finalizar esta parte do nosso trabalho, enfatizaremos o conceito de evento elementar. É evidente, como visto ainda a pouco, que os elementos de qualquer evento de um experimento, também são elemento do espaço amostral. Qualquer elemento do espaço amostral, considerado isoladamente constitui um evento elementar. Para ilustrar a situação, consideremos o exemplo anterior e calculemos dele a quantidade de elementos do espaço amostral, relativo à situação já exposta, ou seja, a quantidade de símbolos que podem ser extraídos do código Braille. Primeiramente, consideremos quantos símbolos podem ser computados com um ressalto. Ora, na matriz temos 6 posições disponíveis para colocarmos 1 ressalto. Isto pode ser feito de $C_{6,1} = 6$. De maneira análoga, para escolher 2 ressaltos, com 6 posições disponíveis temos um total de $C_{6,2} = 15$ escolhas. Seguindo este raciocínio obtemos um total de símbolos, cada símbolo representado por uma possibilidade, de:

$$C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

símbolos. Em resumo, cada uma destas 63 possibilidades constitui um evento elementar.

Espaço amostral equiprovável

Este tipo de espaço é definido como aquele cujos eventos elementares possuem todos, a mesma probabilidade de ocorrer.

Exemplo 4

Seja um dado honesto. Ao ser lançado uma vez, os seus eventos elementares, isto é, os conjuntos, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, possuem as mesmas chances de ocorrência.

1.4 Definição de probabilidade

Seja um experimento aleatório qualquer. Por conseguinte, tal experimento possui um espaço amostral Ω. Dentro deste espaço que é finito, existe uma determinada quantidade de subconjuntos. Seja A um destes subconjuntos. Denomina-se probabilidade do evento associado ao conjunto A ocorrer, ao quociente entre o numero de elementos de A e o numero de elementos de Ω, ou seja,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \tag{1.2}$$

Exemplo 5

Em um torneio de xadrez participam 8 pessoas entre elas Marcos e Nuno. Serão selecionados para a primeira fase da disputa 4 grupos de 2 competidores. Qual a probabilidade de Marcos e Nuno se enfrentarem na primeira fase?

Solução:

Para resolver o problema será necessário determinar o evento em questão e o espaço amostral. Primeiramente o espaço amostral. Para tanto recorra a árvore de combinações. A árvore vai ser feita da seguinte forma:

Escolha a primeira dupla entre os oito participantes. Isto pode ser feito de $C_{8,2}$ maneiras. Para a escolha da próxima dupla dispomos de $C_{6,2}$ maneiras. Da mesma forma, para a escolha da terceira dupla tem-se $C_{4,2}$ maneiras, e para a última $C_{2,2}$. Para o total de possibilidades, é necessário multiplicar os quantitativos expostos acima, pois para cada uma das $C_{8,2}$ possibilidades de escolha da primeira dupla, temos $C_{6,2}$ possibilidades de escolha da segunda. Para cada uma das $C_{6,2}$ de escolha da segunda, temos $C_{4,2}$ possibilidades de escolha da terceira. Para cada uma das $C_{4,2}$ possibilidades de escolha da terceira, temos $C_{2,2}$ possibilidades de escolher a quarta. Nomeie os 6 competidores por A, B, C, D, E e F e Marcos e Nuno por M e N. Veja o diagrama da árvore. Suponha todas as $C_{8,2}$ formas de escolha da primeira dupla na primeira coluna da árvore. Sabe-se que a dupla AB é uma delas.

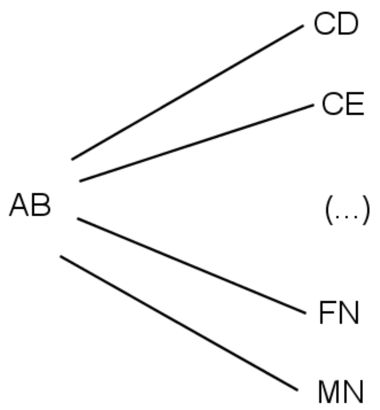

Figura 1.1: Possibilidades da segunda dupla

Logo o total de ramos que derivam de AB é $C_{6,2}$, ou seja, todas as possibilidades de escolha da segunda dupla dado que AB é a primeira. Este raciocínio feito para AB é valido para todas as escolhas da primeira dupla. Como o total delas é $C_{8,2}$, conclui-se pelo principio multiplicativo que nas escolhas das duas primeiras duplas o total de probabilidades é:

$$C_{6,2} + C_{6,2} + ... + C_{6,2}[C_{8,2} vezes] = C_{6,2}.C_{8,2} = 420$$

Obs: Vale ressaltar que a segunda coluna do diagrama, contém as escolhas da segunda dupla.

Sabendo o total de possibilidades da escolha das duas primeiras duplas, constrói-se a terceira coluna do diagrama da árvore todas as possibilidades de escolha das duas primeiras duplas. Considere AB, CD uma destas duas primeiras duplas e a destaque. O resultado para estas duas primeiras duplas é valido para todas as escolhas das outras $C_{8,2}.C_{6,2} - 1 = 419$ duas primeiras duplas.

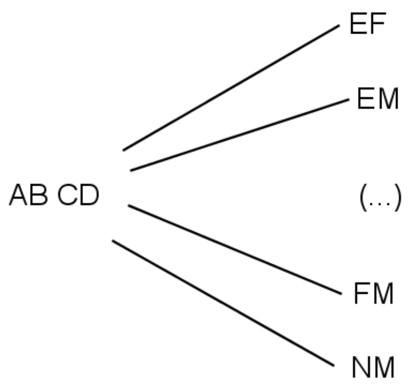

Figura 1.2: Possibilidades da terceira dupla

Para a escolha AB e CD temos $C_{4,2}$ ramos derivando dela. Como tem-se $C_{8,2}.C_{6,2}$ escolhas das duas primeiras duplas, tais quais AB e CD, então pelo mesmo principio multiplicativo, conclui-se que o total de possibilidades de escolha das três primeiras duplas é $C_{8,2}.C_{6,2}.C_{4,2}$.

Para a escolha da última só se tem uma possibilidade, que é $C_{2,2}$, o que fecha o total como foi visto anteriormente. O problema em questão é verificar se neste total de possibilidades, existem situações em que os quatro grupos de dois se repetem neste universo de possibilidades. Tome uma das quatro duplas do total de $C_{8,2}.C_{6,2}.C_{4,2}.C_{2,2}$ grupos de 4 duplas possíveis. Seja AB, CD, EF, MN um destes grupos de quatro duplas e retorne ao diagrama da árvore. Dê ênfase a estas quatro duplas na construção do diagrama. Logo, percebe-se que

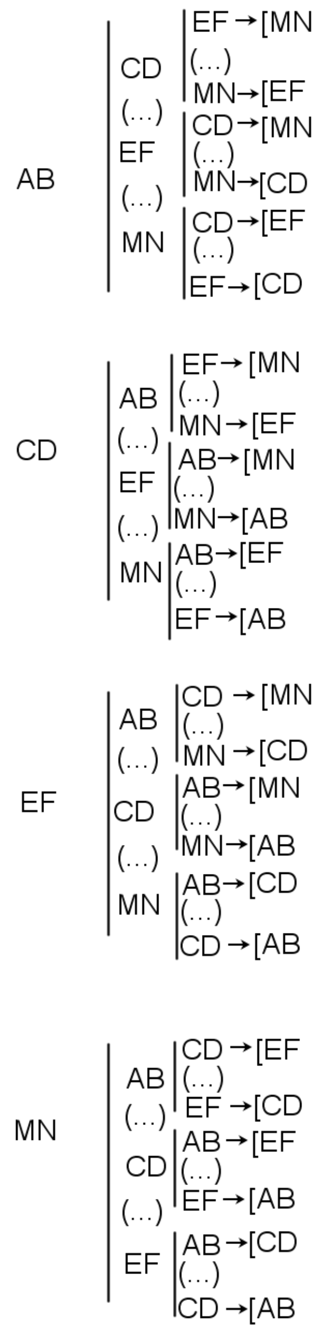

Figura 1.3: Possibilidades totais

esta possibilidade aparece no diagrama 24 vezes, ou seja, tem-se 4 maneiras para colocá-lo na primeira coluna do diagrama. E para cada uma destas 4 maneiras, 3 possibilidades para a segunda coluna. E para cada uma destas 4.3 possibilidades listadas na segunda coluna têm-se 2 possibilidades na terceira coluna. E para cada uma das 4.3.2 possibilidades listadas na terceira coluna tem-se uma possibilidade na quarta coluna. Em outras palavras estas 4 duplas de competidores apareceram no diagrama 4! vezes. Para determinar o resultado final precisa-se dividir o resultado do diagrama por 4!. Assim o numero de elementos do espaço amostral será:

$$\frac{C_{8,2}.C_{6,2}.C_{4,2}.C_{2,2}}{P_4} = 105$$

Generalizando este resultado, pode-se dizer que, para dividir n elementos distintos em grupos de m elementos, com $m \leq n$, o total de grupos será um inteiro positivo $\frac{n}{m}$, haja visto que, $m \mid n$. Neste caso o total de possibilidades será:

$$\frac{C_{n,m}.C_{n-m,m}.C_{n-2m,m}.\ldots.C_{m,m}}{P_{n/m}} \tag{1.3}$$

onde$P_{n/m}$ é o total de permutações dos grupos de m elementos que aparecerão no diagrama da árvore de combinações. É fácil perceber também que o parâmetro m representa o total de elementos de cada grupo e $\frac{n}{m}$ é o total de grupos a serem formados. A base usada no método aplicado para a determinação do espaço amostral é a mesma a ser aplicada na contabilidade do total de elementos do conjunto evento.

Neste caso, admite-se que Marco e Nuno joguem entre si na primeira fase. Dado que este fato é verdadeiro, cabe apenas calcular o total de maneiras de formar 3 grupos de 2 pessoas. Utilizando a expressão (3) é notório que $n = 6, m = 2$ e $\frac{n}{m} = 3$. Logo o total de possibilidades para o evento será:

$$n(E) = \frac{C_{6,2}.C_{4,2}.C_{2,2}}{P_{6/2}} = \frac{15.6.1}{3!} = \frac{15.6.1}{6} = 15 \tag{1.4}$$

Basta agora aplicar a definição de probabilidade, ou seja,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{15}{105} = \frac{1}{7} \tag{1.5}$$

Isto significa que para cada 7 possibilidades de formação de 4 duplas, em média 1 terão Marcos e Nuno se enfrentando.

Capítulo 2

Consequências da definição de probabilidade

2.1 Função Probabilidade

Dado um conjunto Ω, e seja A todos os subconjuntos de Ω. Define-se uma aplicação de A em $P(A)$ e denota-se $A \Rightarrow P(A)$ como a função que associa um elemento qualquer do domínio de f (no caso, os subconjuntos de Ω) a um, e somente um, elemento do contradomínio, no caso, $P(A)$.

Sabendo-se que $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ e também que $n(A) \leq n(\Omega)$, conclui-se que $P(A) \leq 1$.

Como se trata do quociente entre cardinalidade de conjuntos finitos, $P(A) \geq 0$ donde concluímos que:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$, qualquer que seja $A \subset \Omega$

b) $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$

c) Caso A e B sejam conjuntos disjuntos então pela definição de probabilidade:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} \tag{2.1}$$

Como A e B são disjuntos, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Conclui-se então que,

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} = P(A) + P(B) \tag{2.2}$$

2.2 Complementar de um conjunto

Considere um conjunto universo Ω, e um subconjunto A de Ω, tal que $A \subseteq \Omega$, ou seja, A não precisa ser necessariamente um subconjunto próprio de Ω. Nestas condições define-se o complementar de A em relação a Ω ao conjunto formado pelos elementos de Ω que não pertencem a A. Em linguagem me temática este conjunto é denotado por:

$$C_{\Omega}^{A} = \Omega - A \tag{2.3}$$

2.3 Probabilidade da ocorrência de um evento complementar de um evento representado pelo conjunto A

Seja um espaço amostral Ω e um subconjunto A de Ω. Seja também $C_{\Omega}^{A} = \Omega - A$, o conjunto que representa as possibilidades do evento A não ocorrer, isto é, o evento $\Omega - A$ ocorrer. Pela definição de probabilidade, a probabilidade de $\Omega - A$ ocorrer será:

$$P(\Omega - A) = \frac{n(\Omega - A)}{n(\Omega)} \tag{2.4}$$

Como $\Omega - A$ e A são conjuntos disjuntos pela definição de complementar e sabendo que $\Omega = (\Omega - A) \cup A$, vale a relação,

$$n(\Omega) = n(\Omega - A) + n(A) \tag{2.5}$$

de onde se conclui que,

$$n(\Omega - A) = n(\Omega) - n(A) \tag{2.6}$$

Aplicando a definição dada em (1.2) tem-se que

$$P(\Omega - A) = \frac{n(\Omega) - n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} - \frac{n(A)}{n(\Omega)} = 1 - P(A) \tag{2.7}$$

logo,

$$P(\Omega - A) = 1 - P(A) \tag{2.8}$$

2.4 Consequência da Probabilidade de um evento complementar

Sejam dois conjuntos A e B tais que $A \subset B$, então:

$$P(A) = P(B) - P(B - A) \tag{2.9}$$

Demonstração:

Hipótese: $A \subset B$.

Pela hipótese, A e $B - A$ são conjuntos disjuntos, pois se $x \in B - A, x \notin A$. Por outro lado, $B = A \cup (B - A)$. Da disjunção de A e $B - A$ tem-se que:

$$n(B) = n(A) + n(B - A) \tag{2.10}$$

logo,

$$n(A) = n(B) - n(B - A) \tag{2.11}$$

Ao aplicar a definição de probabilidade tem-se que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(B) - n(B - A)}{n(\Omega)} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(B - A)}{n(\Omega)} = P(B) - P(B - A) \tag{2.12}$$

Desta forma conclui-se que $P(A) = P(B) - P(B - A)$, desde que $A \subset B$.

2.5 Probabilidade da união de dois conjuntos não disjuntos

Dados dois conjuntos A e B, não disjuntos, ou seja, $A \cap B \neq \varnothing$. Dada esta condição conclui-se que,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{2.13}$$

De acordo com o diagrama acima, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$. Pela disjunção de $(A - B)$ e $(A \cap B)$, sabe-se que:

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) \tag{2.14}$$

De maneira análoga e explorando a mesma figura tem-se que:

$$n(B) = n(B - A) + n(B \cap A) \tag{2.15}$$

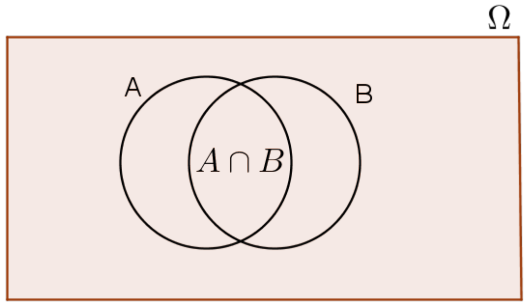

Figura 2.1: Representação de dois conjuntos não disjuntos

Somando (2.14) e (2.15), tem-se,

$$n(A) + n(B) = [n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)] + n(A \cap B) \tag{2.16}$$

Da disjunção de $(A - B)$, $(B - A)$ e $(A \cap B)$ percebe-se que,

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) \tag{2.17}$$

Aplicando (2.17) em (2.16) conclui-se que

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) \tag{2.18}$$

donde,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \tag{2.19}$$

Novamente aplicando a definição de probabilidade:

$P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \dfrac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Longrightarrow P(A \cup B) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} + \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} - \dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Observação: Veja também que esta equação é válida para dois conjuntos disjuntos, pois neste caso $A \cap B = \varnothing$ e $P(\varnothing) = 0$. Desta forma a equação fica reduzida a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, que é um caso particular da equação que acabamos de demonstrar.

2.6 Lema 1

Sejam três conjuntos A, B e C. Provemos a seguinte igualdade:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup B \cap C \tag{2.20}$$

Demonstração:

Para provarmos que dois conjuntos são iguais, devemos mostrar que a relação de inclusão é reflexiva, ou seja,

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{2.21}$$

e

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C \tag{2.22}$$

Primeira Parte: Para que um elemento $x \in (A \cup B) \cap C$ é necessário que $x \in (A \cup B)$ e $x \in C$

Para que $x \in (A \cup B)$ é necessário que $x \in A$ ou $x \in B$. Pelo exposto $x \in (A \cup B) \cap C$ se $x \in A$ e $x \in C$ ou $x \in B$ e $x \in C$. Primeiro vamos avaliar a primeira situação.

Se $x \in A \Longrightarrow x \in (A \cup B)$ e se $x \in C \Longrightarrow x \in [(A \cup B) \cap C]$. Por outro lado, se $x \in A$ e $x \in C \Longrightarrow x \in (A \cap C) \Longrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$,ou seja, para todo $x \in (A \cup B) \cap C$ implica que $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Logo,

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{2.23}$$

Analisemos a segunda situação: No caso $x \in B$ e $x \in C$.

se $x \in B \Longrightarrow x \in (A \cup B)$ e se $x \in C \Longrightarrow x \in (A \cup B) \cap C$. Da mesma forma, se $x \in B$ e $x \in C \Longrightarrow x \in (B \cap C) \Longrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Neste caso, para todo $x \in (A \cup B) \cap C$ implica que $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. O que significa dizer que,

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{2.24}$$

Vamos provar agora a segunda proposição da demonstração, isto é,

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C \tag{2.25}$$

Para $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, é necessário que, $x \in (A \cap C)$ ou $x \in (B \cap C)$, ou seja, $x \in A$ e $x \in C$ ou $x \in B$ e $x \in C$.

Analisemos o primeiro caso:

Se $x \in A$ e $x \in C$ implica que $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, como já vimos. Este fato ocorrendo, implica que $x \in (A \cup B)$ e $x \in C$. Logo $x \in (A \cup B) \cap C$. Sendo assim, para todo x pertencente a $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ implica que $x \in (A \cup B) \cap C$. Desta forma, concluímos que:

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C \tag{2.26}$$

Vejamos o segundo caso,

Se $x \in B$ e $x \in C$ implica que $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, Isto implica imediatamente que $x \in (A \cup B)$ e $x \in C$. Logo $x \in (A \cup B) \cap C$. Em síntese e nestas condições,$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$ e $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$, concluímos que,

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup B \cap C \tag{2.27}$$

2.7 Probabilidade de um evento representado pela união de três conjuntos

Sejam três conjuntos A, B e C, não necessariamente disjuntos. Nestas condições temos que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Demonstração: Neste caso vamos nos basear no que acabamos de demonstrar, ou seja, na probabilidade da ocorrência de um evento representado por dois conjuntos não necessariamente disjuntos. Para tanto vamos considerar os três conjuntos acima citados, contanto que, trataremos a união de dois conjuntos deles como um conjunto somente, o que nos conduz ao caso anterior. Seguindo esta linha de raciocínio podemos afirmar que:

$$n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C] \tag{2.28}$$

de acordo com o lema provado anteriormente temos que:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{2.29}$$

aplicando o lema ficamos com,

$n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n(A \cap C) + n(B \cap C) - n[(A \cap C) \cap (B \cap C)] = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Ordenando os termos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C)$$
$$-n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Agora, utilizando a definição,

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{n(A \cup B \cup C)}{n(\Omega)} =$$

$$\frac{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}{n(\Omega)} =$$

$$\frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} + \frac{n(C)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap C)}{n(\Omega)} - \frac{n(B \cap C)}{n(\Omega)} + \frac{n(A \cap B \cap C)}{n(\Omega)} =$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),$$

como queríamos demonstrar.

2.8 Probabilidade da ocorrência de um evento representado pela união de n conjuntos, não necessariamente disjuntos

Seja um espaço amostral Ω e um evento representado pelo conjunto $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, e $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$. A probabilidade do evento representado por este conjunto união ocorrer, será:

$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - ... -$

$P(A_{n-1} \cap A_n) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) + ... + P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n).(-1)^{n+1}$.

Utilizando o somatório teremos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + ... + P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n).(-1)^{n+1}$$

Demonstração:

Primeiro vamos demonstrar o princípio da inclusão-exclusão para a união de n conjuntos e depois aplicaremos a definição de probabilidade. Para tal, utilizaremos o princípio da indução finita. Já demonstramos anteriormente que a equação vale para $n = 2$ e $n = 3$ pois $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ e $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) +$
$n(A \cap B \cap C)$. Seguindo esta lógica, e aplicando o princípio da indução finita, vamos estabelecer a hipótese de que a equação do princípio da inclusão-exclusão vale para a união de K conjuntos, $K \in N$. Então,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_k) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - .. - n(A_i \cap A_j) - ... - n(A_{k-1} \cap A_k) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + ... + n(A_i \cap A_j \cap A_k) + ... + n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) + ... + n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k).(-1)^{k+1}$$

para $i \leq j \leq k$ e $k \in N$. Partindo desta hipótese vamos estabelecer a união de $K + 1$ conjuntos, ou seja, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{K+1}$ e provar que a equação é verdadeira para $K + 1$ conjuntos e a partir daí concluir que ela é valida para todo $K \in N$. Para tanto, vamos tratar os dois últimos conjuntos como um só, ou seja, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup (A_k \cup A_{K+1})$ e desta forma aplicar a hipótese de indução que, como já sabemos, é válida para K conjuntos. Desta forma temos,

$$n[A_1 \cup A_2 \cup ... \cup (A_k \cup A_{K+1})] \tag{2.30}$$

Vamos desenvolver a hipótese parcialmente. Primeiro vamos exibir os termos com um conjunto, ou seja,

$$n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_i) + n(A_j) + ... + n(A_k \cup A_{k+1}) =$$

$n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_i) + ... + n(A_j) + ... + n(A_k) + n(A_{k+1}) - n(A_k \cap A_{k+1})$. Observe que nos termos de 1 conjunto vamos de $n(A_1)$ a $n(A_{k+1})$ e também aparece o termo $-n(A_k \cap A_{k+1})$.

Vamos exibir os termos constituídos pela interseção de dois conjuntos. Desta forma,

$$-[n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + ... + n(A_i \cap A_j) + ... + n(A_{k-1} \cap (A_k \cup A_{k+1}))]$$

Pelo lema demonstrado ficamos com,

$$-[n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + ... + n(A_i \cap A_j) + ... + n((A_{k-1} \cap A_k) \cup (A_{k-1} \cap A_{k+1}))] = -[n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + ... + n(A_i \cap A_j) + ... + n(A_{k-1} \cap A_k) + n(A_{k-1} \cap A_{k+1}) - n((A_{k-1} \cap A_k) \cap (A_{k-1} \cap A_{k+1}))] = -[n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + ... + n(A_i \cap A_j) + ... + n(A_{k-1} \cap A_k) + n(A_{k-1} \cap A_{k+1}) - n(A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1})]$$

finalizando a interseção com dois conjuntos e acrescentando o termo $-n(A_k \cap A_{k+1})$ obtido anteriormente, ficamos com,

$$-n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - ... - n(A_i \cap A_j) - n(A_{k-1} \cap A_k) - n(A_{k-1} \cap A_{k+1}) - n(A_k \cap A_{k+1}) + n(A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1})$$

Nos termos com interseção de dois conjuntos, vamos do termo $-n(A_1 \cap A_2)$ a $-n(A_k \cap A_{k+1})$. Aparece também o termo $n(A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1})$, que será utilizado na interseção de 3 conjuntos. Desta forma os termos que representam o numero de elementos da interseção de 3 conjuntos será:

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + n(A_i \cap A_j \cap A_k) + ... + n[(A_{k-2} \cap A_{k-1}) \cap (A_k \cup A_{k+1})]$$

Não devemos confundir este último termo. Apesar de cocarmos os parênteses nos dois primeiros conjuntos, dando a impressão que temos dois conjuntos no geral, na prática continuamos com os três conjuntos do total de K conjuntos, ou seja, A_{k-2}, A_{k-1} e $(A_k \cup A_{k+1})$. Colocamos estes parênteses para podermos aplicar o lema. Assim teremos,

$$n[(A_{k-2} \cap A_{k-1}) \cap (A_k \cup A_{k+1})] = n[(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) \cup (A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_{k+1})] = n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) + n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_{k+1}) - n[(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) \cap (A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_{k+1})]$$

Colocamos todos os termos representados pela interseção de 3 conjuntos teremos,

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + n(A_i \cap A_j \cap A_k) + ... + n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) + n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_{k+1}) - n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}) + n(A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1})$$

Este último termo foi adquirido quando trabalhamos os termos com interseção de dois conjuntos.

Observe que aparece um termo representado pela interseção de quatro conjuntos. É importante notar que este fato ocorre sempre na medida em que da união do último conjunto e da aplicação do lema teremos sempre a aplicação do número de elementos da união de dois conjuntos, o que acarreta a interseção de um conjunto a mais. Aconteceu quando analisamos o número de elementos de cada conjunto isoladamente. Neste caso foi visto que um dos termos apresenta sinal oposto aos anteriores e a interseção dos dois últimos conjuntos, ou seja, A_k e A_{k+1}.

Ocorreu novamente ao ser analisado a interseção da combinação dos K conjuntos tomados dois a dois. O último termo pelo que já foi exposto representa o numero de elementos da interseção dos três últimos conjuntos, ou seja, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}. E como foi visto, ocorreu também quando desenvolvemos os números de elementos das interseções das combinações dos K conjuntos tomados três a três. O último termo deste desenvolvimento é o numero de elementos da interseção dos quatro últimos conjuntos, isto é,

$$n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}) \tag{2.31}$$

Vamos analisar o processo quando nos deparamos com o número de elementos da interseção de todos os $K-1$ conjuntos. Isto pode ser feito através da combinação da interseção de K conjuntos tomados $K-1$ a $K-1$ elementos. O número de termos deste desenvolvimento será:

$$C_{K-1}^{K} = \frac{K!}{(K-1)![K-(K-1)]!} = \frac{K(K-1)!}{(K-1)!.1!} = K$$

Tomando todos os termos com número de elementos da interseção de $K-1$ conjuntos teremos,

$$n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1})(-1)^k + ... + n[(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{k-1}) \cap (A_k \cup A_{k+1})] =$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1})(-1)^k + ... + n[(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k) \cup (A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_{k+1})] =$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1})(-1)^k + n(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k)(-1)^k + n(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_{k+1})(-1)^k + n(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1})(-1)^{k+1} =$$

$$n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1})(-1)^k + ... + n(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k)(-1)^k + n(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_{k+1})(-1)^k + n(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1})(-1)^{k+1}$$

Notamos que o último termo apresenta o número de elementos da interseção de K conjuntos enquanto os outros termos do desenvolvimento trazem o numero de elementos da interseção de $K-1$ conjuntos, e K conjuntos também. O que estamos visualizando é o ultimo termo do desenvolvimento no caso com interseção de K conjuntos. Finalizando a demonstração, trabalharemos com a interseção de todos os K conjuntos incluindo o último, que é $(A_k \cup A_{k+1})$ e calculando o número de elementos dele. Desta forma teremos:

$$n[(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1}) \cap (A_k \cup A_{k+1})] = n[(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k) \cup (A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_{k+1})] = n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k)(-1)^{k+1} + n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_{k+1})(-1)^{k+1} + n[(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k) \cap (A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_{k+1})](-1)^{k+1} = n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k)(-1)^{k+1} + n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_{k+1})(-1)^{k+1} + n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1})(-1)^{k+2}$$

Finalizando a demonstração vamos juntar todos os termos desenvolvidos parcialmente. Ficamos com:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{k-1} \cup A_k \cup A_{k+1}) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_k) + (A_{k+1}) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - ... - n(A_i \cap A_j) - ... - n(A_{k-1} \cap A_k) - n(A_{k-1} \cap A_{k+1}) - n(A_k \cap A_{k+1}) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + n(A_i \cap A_j \cap A_k) + ... + n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) + n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_{k+1}) + n(A_{k-2} \cap A_k \cap A_{k+1}) + n(A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - ... - n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}) + ... + n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1}).(-1)^k + ... + n(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k).(-1)^k + n(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_{k+1}).(-1)^k + n(A_3 \cap A_4 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1})(-1)^k + ... + n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k)(-1)^{k+1} + n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_{k+1})(-1)^{k+1} + n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1})(-1)^{k+2}$$

então pelo exposto, concluímos que o principio da inclusão-exclusão, valendo para $k = 2$ e $k = 3$ como base da indução e valendo para algum $k \geq 3$, com $k \in N$, implica valer para $k + 1$, então pelo princípio da indução finita vale para todo $k \in N$ com $k \geq 2$.

Baseado no principio da inclusão-exclusão já demonstrado e utilizando a definição de probabilidade, vamos definir a probabilidade da união de n conjuntos, $A_1, A_2, ..., A_n$, todos pertencentes a um espaço amostral Ω:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \frac{n(A_1) + ... + n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)(-1)^{n+1}}{n(\Omega)}$$

$$= P(A_1) + ... + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - ... - P(A_{n-1} \cap A_n) + ... + P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)(-1)^{n+1}$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo 6

Seja o espaço amostral Ω formado por todos os números naturais n tal que $1 \leq n \leq 100$. Sejam também os conjuntos,

$$A_1 = \{x \in N/1 \leq x \leq 100 \text{ e } 2|x\}$$

$$A_2 = \{x \in N/1 \leq x \leq 100 \text{ e } 3|x\}$$

$$A_3 = \{x \in N/1 \leq x \leq 100 \text{ e } 4|x\}$$

$$A_4 = \{x \in N/1 \leq x \leq 100 \text{ e } 5|x\}$$

Um sorteio vai ser realizado entre esses 100 números. Calcule a probabilidade de o número sorteado ser um múltiplo de 2 ou 3 ou 4 ou 5?

Solução: Este problema pode ser resolvido pela probabilidade da união dos conjuntos citados, ou seja, $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$. Este conjunto representa o evento considerado. Precisamos primeiro determinar o número de elementos de todos os conjuntos da união. Determinemos os mesmos como segue. Antes porém, é preciso frisar que o quociente apresentado entre colchetes representa como resposta a parte inteira deste quociente. Cada um destes quocientes nos revela, o número de elementos de cada conjunto da união. Vamos determinar o numero de elementos dos conjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4, como também em suas interseções.

$$n(A_1) = [\frac{100}{2}] = 50;$$
$$n(A_2) = [\frac{100}{3}] = 33;$$
$$n(A_3) = [\frac{100}{4}] = 25;$$
$$n(A_4) = [\frac{100}{5}] = 20;$$
$$n(A_1 \cap A_2) = [\frac{100}{6}] = 16;$$

$$n(A_1 \cap A_3) = [\frac{100}{4}] = 25;$$
$$n(A_1 \cap A_4) = [\frac{100}{10}] = 10;$$
$$n(A_2 \cap A_3) = [\frac{100}{12}] = 8;$$
$$n(A_2 \cap A_4) = [\frac{100}{15}] = 6;$$
$$n(A_3 \cap A_4) = [\frac{100}{20}] = 5;$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = [\frac{100}{12}] = 8;$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = [\frac{100}{30}] = 3;$$
$$n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = [\frac{100}{20}] = 5;$$
$$n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = [\frac{100}{60}] = 1;$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = [\frac{100}{60}] = 1;$$

Aplicando a definição de probabilidade do conjunto união temos:

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

Determinemos cada uma das probabilidades acima.

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(\Omega)} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2};\ P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(\Omega)} = \frac{33}{100}$$
$$P(A_3) = \frac{n(A_3)}{n(\Omega)} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4};P(A_4) = \frac{n(A_4)}{n(\Omega)} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$
$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{n(A_1 \cap A_2)}{n(\Omega)} = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$$
$$P(A_1 \cap A_3) = \frac{n(A_1 \cap A_3)}{n(\Omega)} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$
$$P(A_1 \cap A_4) = \frac{n(A_1 \cap A_4)}{n(\Omega)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$
$$P(A_2 \cap A_3) = \frac{n(A_2 \cap A_3)}{n(\Omega)} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$
$$P(A_2 \cap A_4) = \frac{n(A_2 \cap A_4)}{n(\Omega)} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$$
$$P(A_3 \cap A_4) = \frac{n(A_3 \cap A_4)}{n(\Omega)} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{n(\Omega)} = \frac{8}{100}$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \frac{n(A_1 \cap A_2 \cap A_4)}{n(\Omega)} = \frac{3}{100}$$

$$P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{n(A_1 \cap A_3 \cap A_4)}{n(\Omega)} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$
$$P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{n(A_2 \cap A_3 \cap A_4)}{n(\Omega)} = \frac{1}{100}$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)}{n(\Omega)} = \frac{1}{100}$$

logo, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{50}{100} + \frac{33}{100} + \frac{25}{100} + \frac{20}{100} - \frac{16}{100} - \frac{25}{100} - \frac{10}{100}$

$$-\frac{8}{100} - \frac{6}{100} - \frac{5}{100} + \frac{8}{100} + \frac{3}{100} + \frac{5}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{100} = \frac{128}{100} - \frac{70}{100} + \frac{17}{100} - \frac{1}{100}$$

$$= \frac{145}{100} - \frac{71}{100} = \frac{74}{100} \Longrightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 74\%$$

Exemplo 7

Durante um concurso público em uma sala, 8 candidatos entregam para o fiscal, cada um o seu telefone celular. No final do exame o fiscal vai fazer a entrega de cada um dos celulares aos 8 candidatos. Contudo esta entrega é feita de forma aleatória. Qual a probabilidade de cada um dos 8 candidatos não receba o seu próprio celular?

Resolução: Neste problema vamos primeiramente determinar o espaço amostral. Para entrega do primeiro telefone o fiscal tem 8 possibilidades para fazê-lo. Aqui não importa se ele vai entregar para o dono do telefone ou não. Para a entrega do segundo, o fiscal terá agora 7 possibilidades e assim por diante. É fácil notar pelo principio fundamental da contagem que o total de possibilidades de ser feita esta entrega é de 8!. Logo, $n(\Omega) = 8!$ Para calcular a probabilidade do evento em questão, precisaremos calcular o número de permutações caóticas, que será o número de sequências de entrega em que nenhum celular volta para o seu dono, ou seja, para o seu lugar de origem. Para isso, vamos demonstrar pelo método de recorrência uma equação que permita calcular o total de permutações caóticas de n elementos, em que a sequencia original é $(1, 2, 3, .., n)$.

A partir desta sequência dada, temos que buscar todas as outras nas quais cada um de seus elementos não se encontram na mesma posição da sequência original. A sequência original pode vir em qualquer ordem. Escolhemos a que obedece a ordem crescente dos números naturais para melhor compreensão. Um exemplo de permutação caótica de n elementos é $(2, 3, 1, ..., n-1, n, n-2)$. Esta é apenas uma delas, todavia vamos necessitar calcular o seu total.

Para tal, vamos definir o que significa atingir equações matemáticas por métodos de recorrência. Este método aplicado à ideia de permutação caótica, permite determinar o número de permutações caóticas de $n+2$ elementos sabendo quantas permutações desse gênero existem para $n=1$ e $n=2$, ou seja, permutação com 1 ou 2 elementos em sua sequência original. Usaremos a notação X_n, para designar o número de permutações caóticas de n elementos em relação a uma sequência x_n de n termos que nos é dada.

Com este intuito vamos determinar quantas permutações caóticas existem a partir de uma sequência $x_1 = 1$, ou seja, uma sequência com 1 elemento. É evidente, neste caso, que $X_1 = 0$, pois o elemento 1 da referida sequência não pode ocupar na sequência outra posição que não seja a que já possui.

Vamos considerar então, o número de permutações caóticas X_2, a partir da sequência $x_2 = (1,2)$. A única permutação caótica possível, neste caso é a permutação $(2,1)$. Logo temos $X_2 = 1$. Vamos considerar então uma sequência dada $x_{n+2} = (1,2,...,n,n+1,n+2)$, e desta calculemos número de permutações caóticas X_{n-2}.

Antes de prosseguir é bom lembrar que se tivemos uma sequência original $(1,2,...,n,n+1,n+2)$, o total de possibilidades de permutar qualquer um de seus elementos é $(n+2)-1$, pois a única posição que os mesmos não podem ocupar nas X_{n+2} sequências é sua posição original.

Para efetuar o cálculo das X_{n+2} permutações, as dividiremos em 2 grupos. Seja m um numero qualquer da sequência original tal que $1 \leq m \leq n+2$.

O primeiro grupo será formado por todas as permutações em que o número 1 troca de posição com m. Vejamos de quantas maneiras isso pode ocorrer,

$$(2,1,--,--,--,...,--)$$
$$(3,--,1,--,--,...,--)$$
$$(4,--,--,1,--,...,--)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$(n+2,--,--,--,--,...,1)$$

Pelo que foi mostrado acima, o 1 pode trocar de posição com $2, 3, ..., n+2$ $n+1$ vezes. Só que para cada uma delas, restam n números que tem de ser colocados nas n posições restantes em permutação caótica. Denotemos por X_n, o total de permutações caóticas desses n números.

Concluímos então que para cada troca de posição do 1 com m, temos X_n permutações. Como isto pode ocorrer $n+1$ vezes, então o total de permutações do primeiro grupo é $(n+1).X_n$.

No segundo grupo contabilizaremos todas as permutações em que o 1 ocupa o lugar de um m, e o m não ocupa o lugar do 1. Ora, sabemos que o 1 pode ocupar na sequência $n+1$ posições. Analisemos uma dessas posições. Seja m uma delas. Quando colocamos o 1 no lugar do m, este número m não pode ocupar o lugar do 1 nem seu próprio lugar que está ocupado por 1. Neste caso, das $n+2$ posições, ele só pode ocupar n. É bom enfatizar que se o m ocupar o lugar do 1, recaímos no primeiro caso que já foi comutado. Analisando o elemento 2, ele não pode ocupar o seu próprio lugar nem o lugar do m, que já está ocupado pelo 1. Contudo pode ocupar quaisquer das outras n posições. De modo análogo o mesmo raciocínio é valido para 3 até chegarmos em $n+2$. Logo, todos esses $n+1$ elementos, incluindo o m, podem ocupar sempre nestas condições n posições quando o 1 esta fixado na posição m. Então quando o 1 está fixado nesta posição, nos restam $n+1$ elementos que poderão ocupar sempre n posições. É fácil concluir que, de acordo com o exposto, isso nos dará X_{n+1} permutações caóticas. Isto para 1 ocupando a posição m. Como para todas as posições disponíveis para 1, ele poderá ocupar $n+1$ delas, concluímos pelo principio multiplicativo que o total de permutações caóticas para o segundo caso é $(n+1)(X_{n+1})$.

Juntando o total de permutações caóticas dos 2 grupos, teremos o total de permutações, cada uma com $n+2$ elementos, ou seja,

$$X_{n+2} = (n+1)X_n + (n+1)X_{n+1} = (n+1)(X_n + X_{n+1}) \tag{2.32}$$

que é a equação de recorrência que queríamos determinar. De posse dela podemos resolver o problema dos telefones celulares, pois a resposta consiste em determinar o número de permutações caóticas para sequências de 8 elementos, isto é, X_8. Já sabemos que $X_1 = 0$ e $X_2 = 1$. De modo iterativo, calculemos os outros.

Para $n = 1 \Longrightarrow X_{1+2} = (1+1)(X_1 + X_2) \Longrightarrow X_3 = 2(0+1) = 2$

Para $n = 2 \Longrightarrow X_{2+2} = (2+1)(X_2 + X_{2+1}) \Longrightarrow X_4 = 3(X_2 + X_3) = 3(1+2) = 9$

Para $n = 3 \Longrightarrow X_5 = (3+1)(X_3 + X_4) \Longrightarrow X_5 = 4(2+9) = 44$

Para $n = 4 \Longrightarrow X_6 = (4+1)(X_4 + X_5) \Longrightarrow X_6 = 5(9+44) = 265$

Para $n = 5 \Longrightarrow X_7 = (5+1)(X_5 + X_6) \Longrightarrow X_7 = 6(44+265) = 1854$

Para $n = 6 \Longrightarrow X_8 = (6+1)(X_6 + X_7) \Longrightarrow X_8 = 7(265+1854) = 14833$

2.9 Probabilidade condicional

O estudo da probabilidade condicional envolve dois aspectos. O primeiro já nos é conhecido, ou seja, são fornecidos um espaço amostral Ω e um evento representado matematicamente por um conjunto E. No segundo aspecto é acrescentada uma informação que restringe o espaço amostral. Esta informação vai criar um novo conjunto. Denotaremos este conjunto por A. É evidente que este novo conjunto é subconjunto de Ω pois se trata de uma restrição do mesmo. Escrevendo em termos matemáticos: $A \subset \Omega$. Como E é o conjunto do evento em questão fica evidente pela definição de probabilidade que $E \subset \Omega$.

Dadas essas conclusões iniciais, nos transportemos para um experimento aleatório para entender como tudo se processa. A priori, ou seja, antes do experimento, são dados, Ω e E. Neste caso a probabilidade do evento E ocorrer será:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \tag{2.33}$$

A informação adicional será dada, a posteriori, ou seja, depois de realizado o evento. Nesta informação nos é dito que o resultado do experimento ocorreu dentro de um conjunto universo A, que agora se comporta como um novo espaço amostral, pois é dentro dele que esta o resultado do experimento. A partir deste fato temos que calcular a probabilidade do evento E, não em relação a Ω, mas em relação à A. Como $A \subset \Omega$ e $E \subset \Omega$, há três situações a serem consideradas:

Pela figura 2.2, $A \cap E = \varnothing$. Como a informação adicional diz que o resultado do experimento está em A, é evidente que não há nenhuma possibilidade do resultado do experimento pertencer a E. Neste caso temos que:

$$P(E/A) = \frac{n(A \cap A)}{n(A)} = \varnothing \tag{2.34}$$

Esta equação nos diz que os elementos de E que serão contabilizados no cálculo da probabilidade de E ocorrer terão que pertencer a A, ou seja, a $A \cap E$, pois sabemos a posteriori

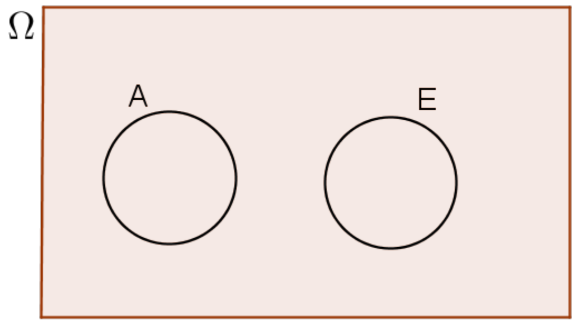

Figura 2.2: Caso 1

que o resultado do experimento aleatório esta em A. A equação acima pode ser lida da seguinte forma:

"Probabilidade do evento E sabendo que A ocorreu é igual ao numero de elementos de $(A \cap E)$, dividido pelo numero de elementos de A, novo espaço amostral". Analisemos o caso em que $E \subset A$. Observe a figura 2.3 abaixo:

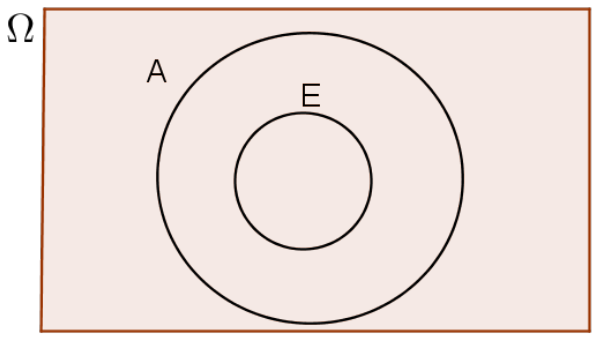

Figura 2.3: Caso 2

Nesta situação, $A \cap E = E$ e aplicando a equação já descrita temos:

$$P(E/A) = \frac{n(A \cap E)}{n(A)} = \frac{n(E)}{n(A)} \tag{2.35}$$

No terceiro caso $A \subset E$. Então pela figura 2.4 temos:

$$P(E/A) = \frac{n(A \cap E)}{n(A)} = \frac{n(A)}{n(A)} = 1 \tag{2.36}$$

No último caso, pela figura 2.5 $E \cap A \neq A \neq E$. Então

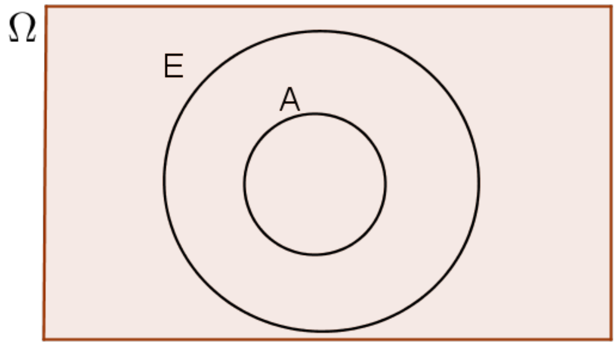

Figura 2.4: Caso 3

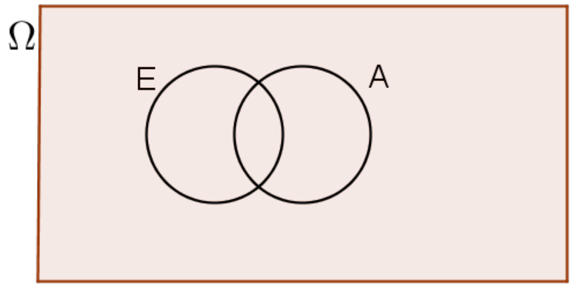

Figura 2.5: Caso geral

$$P(E/A) = \frac{n(A \cap E)}{n(A)} \tag{2.37}$$

Dividindo numerador e denominador d segundo membro da equação acima por $n(\Omega)$ e aplicando a definição de probabilidade, temos:

$$P(E/A) = \frac{\frac{n(A \cap E)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}} = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap E) = P(A).P(E/A) \tag{2.38}$$

Este último caso conclui todas as possibilidades possíveis.

Importante desta equação é que ela permite o cálculo do produto de probabilidades. Fica claro nesta situação que a probabilidade da interseção de dois conjuntos resulta em uma multiplicação de probabilidades. Vamos aplicar o que foi exposto em alguns exemplos.

Exemplo 8

Em uma turma temos 25 meninas e 20 meninos. Na disciplina língua estrangeira, todos tem a opção de escolher inglês ou espanhol. 10 meninas escolhem espanhol e 12 meninos fazem a mesma opção. Um aluno vai ser sorteado ao acaso. Sabendo-se que o aluno escolhido foi menina, qual a probabilidade da mesma ter escolhido inglês?

Resolução:

No problema podemos definir os seguintes conjuntos:

A: Formado por todas as meninas, logo $n(A) = 25$.

B: Formado por todos os alunos que optaram por inglês, logo $n(B) = 23$.

$n(A \cap B)$: Formado por alunos que são meninas e optaram por inglês. Neste caso $n(A \cap B) = 15$.

O que queremos calcular é a probabilidade do aluno ter escolhido inglês dado que é menina, ou seja,

$P(B/A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$

Exemplo 9

Um grupo de estudos composto de alunos de matemática possui 8 alunos de matemática e 6 de física. Uma viagem será ofertada a estes alunos. Para decidir quem será premiado com a mesma, será feito um sorteio.

a) Considere o evento E: serão ofertadas duas vagas e será feito um sorteio aleatório. Qual é a probabilidade de que os dois primeiros escolhidos sejam alunos de matemática?

b) Suponha, o evento E, que sejam ofertadas 3 vagas nesta viagem. Calcule a probabilidade de o primeiro aluno sorteado ser um aluno de física, o segundo ser de matemática e o terceiro também ser de matemática?

Solução:

a) Da condição dada, há 14 alunos que podem ser contemplados. Destes, 8 são de matemática em um total de 14 alunos. O experimento aleatório que está sendo feito consiste na escolha ordenada de dois alunos de matemática. Vamos definir os seguintes conjuntos:

$M = \{m_1, m_2, ..., m_8\}$ o conjunto dos alunos de matemática e

$F = \{f_1, f_2, ..., f_6\}$ o conjunto dos alunos de física.

O espaço amostral será composto por todos os pares ordenados (x, y) tal que o mesmo seja formado por elementos distintos.

Utilizando o princípio fundamental da contagem $n(\Omega) = 14.13 = 182$. Este número reflete todas as possibilidades, ou seja, o primeiro sorteado pode ser aluno de física ou matemática e o segundo também, desde que não se repitam.

Seja o evento E_1 composto por todos os pares ordenados (x, y) tais que o primeiro elemento x pertença somente a M ou a F. Neste caso, pelo mesmo princípio da contagem, $n(E_1) = 8.13 = 104$.

Da mesma forma podemos contabilizar o número de elementos do evento E_2, que consiste em calcular todos os pares ordenados $(x, y) \in \Omega$ tais que o primeiro elemento $x \in M$ ou $x \in F$ e o segundo elemento y pertence somente a M, ambos distintos.

Fica claro que, sob estas condições, o número de possibilidades do sorteio do segundo depende do resultado do primeiro. Vamos dividir os resultados possíveis em dois casos.

No primeiro caso, temos $(x, y) \in \Omega$ tal que $x \in M$ e $y \in M$. Então, $n(x, y) = 8.7$. No segundo caso, $(x, y) \in \Omega$ tal que $x \in F$ e $y \in M$. Neste caso, $n(x, y) = 8.6$.

Seja A o conjunto de pares ordenados do primeiro caso e seja B o conjunto de pares ordenados do segundo caso. Fica claro que estes dois conjuntos são disjuntos, pois $(x, y) \in A$ e $x \in M$ e $(x, y) \in B$ e $x \in F$. Então pela disjunção entre ambos, temos,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 8.7 + 8.6 = 8(7 + 6) \Longrightarrow n(A \cup B) = 13.8$$

Em síntese, o total de possibilidades de o primeiro sorteado ser um aluno dos 14 presentes e o segundo sorteado ser um aluno de matemática é:

$$n(A \cup B) = n(E_2) = 13.8 \tag{2.39}$$

Finalmente, calculemos $n(E_1 \cap E_2)$, ou seja, o primeiro e o segundo sorteados serem alunos de matemática. Pelo princípio da contagem, $n(E_1 \cap E_2) = 8.7$

Apliquemos a definição de probabilidade para calcular $P(E_2/E_1)$ e $P(E_1)$.

$$P(E_2/E_1) = \frac{n(E_2 \cap E_1)}{n(E_1)} = \frac{8.7}{8.13} = \frac{7}{13}$$

Da mesma forma:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)} = \frac{8.13}{14.13} = \frac{4}{7}$$

Pela definição de probabilidade condicional,

$$(E_2/E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} \Longrightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P(E_2/E_1) = \frac{4}{7}.\frac{7}{13} = \frac{4}{13}$$

o que conclui a resolução.

b)Primeiramente vamos calcular a probabilidade de o primeiro estudante ser de física e o segundo ser da matemática, o que poderá ser feito de maneira análoga ao item a). Já definimos os conjuntos M e F no item anterior. Vamos definir também 2 eventos.

E_1: Este evento será formado por todas as triplas ordenadas (x, y, z), tal que o primeiro aluno seja de física, o segundo de matemática e o terceiro um qualquer. Logo, $n(E_1) = 6.8.12$

E_2 : Este será formado por todas as triplas ordenadas (x, y, z) tais que o primeiro sorteado seja um estudante qualquer, o segundo também, e o terceiro um estudante de matemática. Como vimos no item a) calcularemos o número de possibilidades de um evento no futuro que depende de duas situações ocorridas. Para calcular $n(E_2)$ dividiremos a resolução em 4 situações possíveis.

1− O primeiro estudante sorteado sendo de matemática e o segundo também. Temos então 8.7.6 possibilidades.

2− O primeiro estudante sendo de física, o segundo de matemática. Temos então, 6.8.7 possibilidades.

3− O primeiro estudante sendo de matemática e o segundo de física. Temos também 8.6.7 possibilidades.

No último caso o primeiro sendo de física e o segundo também, o que nos dá 6.5.8 possibilidades. Portanto o total de possibilidades para ocorrência de E_2 será:

$$n(E_2) = 8.7.6 + 8.7.6 + 8.7.6 + 5.6.8 = 6.8(7 + 7 + 7 + 5) = 6.8.26$$

Calculemos também todas as possibilidades de termos o primeiro estudante de física, segundo de matemática e o terceiro de matemática, ou seja, $n(E_1 \cap E_2)$. Assim,

$$n(E_1 \cap E_2) = 6.7.8 \text{ maneiras}$$

Da mesma forma temos que:

$$n(\Omega) = 14.13.12$$

Finalizando, determinemos:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)} = \frac{6.8.12}{14.13.12} = \frac{6.4}{7.13}$$

$$P(E_2/E_1) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)} = \frac{6.8.7}{6.8.12}$$

Finalizando, utilizaremos a definição de probabilidade condicional,isto é

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P(E_2/E_1) \Longrightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{6.4}{7.13}.\frac{7}{12} = \frac{2}{13} \cong 15,38\%$$

2.10 Multiplicação de probabilidades

Neste tópico faremos uma extensão no que já estudamos em probabilidade condicional.
Pelo que foi analisado anteriormente, a multiplicação de probabilidades está intimamente ligada à probabilidade da interseção de dois conjuntos. Como cada um deles está relacionado a um evento, conclui-se que temos na verdade a multiplicação da probabilidade de 2 eventos, só que, a de um deles é condicionada. Este condicionamento ocorre devido ao fato de haver uma alteração no espaço amostral do segundo, considerando a ocorrência do primeiro.
No entanto, há casos em que este espaço amostral não é afetado. O fato de ter ocorrido o primeiro, de forma alguma modifica o espaço amostral do segundo. Vejamos um exemplo simples:

Exemplo 10

Um dado é lançado duas vezes consecutivamente. Qual a probabilidade de ocorrer um número par em ambos os lançamentos?
Solução: O problema pode ser dividido em dois eventos. O evento E_1 será constituído por todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in \{2, 4, 6\}$e $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Logo $n(E_1) = 3.6$.
Da mesma forma podemos definir o evento E_2. O mesmo será formado pelos pares ordenados (x, y) tais que $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $y \in \{2, 4, 6\}$. Fica claro que $n(E_2) = 18$.
Quanto aos elementos de $E_1 \cap E_2$, são constituídos por todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in \{2, 4, 6\}$ e $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. É fácil ver que $n(E_1 \cap E_2) = 3.3 = 9$. Na sequência, $n(\Omega) = 6.6 = 36$. Das informações disponíveis concluímos:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(E_2/E_1) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)} = \frac{9}{18} = \frac{18}{36} = P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)} = \frac{n(E_2)}{n(\Omega)}$$

É evidente portanto que a probabilidade de E_2 ocorrer não é alterada no seu espaço amostral próprio, ou seja, $P(E_2/E_1) = P(E_2)$. Com efeito o espaço amostral de E_2 continua sendo Ω, independente de ter ocorrido, ou não, E_1. Podemos escrever então,

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P(E_2/E_1) = P(E_1).P(E_2) \tag{2.40}$$

o que mostra que se trata de 2 eventos mutuamente independentes.

2.11 Eventos mutuamente independentes

Sejam dois eventos representados pelos conjuntos E_1 e E_2, ambos contidos em um mesmo espaço amostral Ω. Podemos afirmar que ambos são mutuamente independentes quando a ocorrência de um, não modifica de nenhuma forma o espaço amostral do outro e ambos os eventos são consecutivos. O exemplo anterior ilustra bem o que foi dito. No entanto há outros com maior complexidade que esclarecem a situação. Vejamos então.

Exemplo 11

É apresentado para um prisioneiro duas urnas idênticas e 50 bolas brancas e 50 bolas pretas. É solicitado ao mesmo que coloque as bolas nas urnas, de acordo com sua vontade. Após isto, as urnas são retiradas da vista do prisioneiro. Em seguida são repostas. É solicitado a ele que escolha uma urna e desta retire uma bola. Se a bola for branca ele é libertado. Se for preta ele é condenado. Pergunta-se: Qual a melhor maneira do prisioneiro colocar as bolas nas urnas, para que a probabilidade de libertação seja máxima.

Solução:

Suponha que o número de bolas a ser colocada na urna C_1, seja n, das quais m delas sejam brancas com $n \geq m$. B_1 será o conjunto formado pelas bolas brancas da urna C_1, ou seja, $n(B_1) = m$. Da mesma forma $n(C_1) = n$. Assim,

$$P(B_1/C_1) = \frac{P(B_1 \cap C_1)}{P(C_1)} \Longrightarrow P(B_1 \cap C_1) = P(B_1/C_1).P(C_1) \tag{2.41}$$

temos que:

$$P(B_1/C_1) = \frac{n(B_1 \cap C_1)}{n(C_1)} = \frac{n(B_1)}{n(C_1)} \tag{2.42}$$

visto que $B_1 \subset C_1$ e $B_1 \cap C_1 = B_1$. Logo,

$$P(B_1/C_1) = \frac{m}{n} \tag{2.43}$$

Da mesma forma $P(C_1) = 1/2$, pois de duas urnas temos que escolher uma. Concluímos que

$$P(B_1 \cap C_1) = \frac{m}{n}.\frac{1}{2} \tag{2.44}$$

Para a segunda urna o raciocínio é análogo.

B_2 é o conjunto de bolas brancas da segunda urna e $n(B_2) = 50 - m$. C_2 é o conjunto de todas as bolas da segunda urna, e $n(C_2) = 100 - n$. Daí decorre,

$$P(B_2/C_2) = \frac{n(B_2)}{n(C_2)} = \frac{50 - m}{100 - n} \tag{2.45}$$

e $P(C_2) = 1/2$. Então,

$$P(B_2 \cap C_2) = P(C_2).P(B_2/C_2) = \frac{1}{2}.\frac{50 - m}{100 - n} \tag{2.46}$$

$B_2 \cap C_2$ e $B_1 \cap C_1$ são conjuntos disjuntos, pois a mesma bola não pode estar nas duas urnas simultaneamente. Logo,

$$P(B) = P[(B_1 \cap C_1) \cup (B_2 \cap C_2)] = P(B_1 \cap C_1) + P(B_2 \cap C_2) =$$

$$\frac{1}{2}.\frac{m}{n} + \frac{1}{2}.\frac{50 - m}{100 - n} = \frac{1}{2}(\frac{m}{n} + \frac{50 - m}{100 - n})$$

Resumindo,

$$P(B) = \frac{1}{2}(\frac{m}{n} + \frac{50 - m}{100 - n}) \tag{2.47}$$

Vamos analisar o segundo membro da igualdade, considerando 3 possibilidades:

$i)n = 50$ $\quad ii)n < 50$ $\quad iii)n > 50$

$i)n = 50$

Com 50 bolas na primeira urna, ficamos com

$$P(B) = \frac{1}{2}(\frac{m}{50} + \frac{50 - m}{50}) = \frac{1}{2}(\frac{m}{50} + \frac{50}{50} - \frac{m}{50}) = \frac{1}{2}.1 = 0,5 = 50\%$$

Assim, independentemente da quantidade de bolas pretas na primeira ou na segunda urna, $P(B) = 50\%$

$ii)n < 50$

Para esta análise necessário se torna desenvolver a expressão de $P(B)$

$$P(B) = \frac{1}{2}(\frac{m}{n} + \frac{50-m}{100-n}) =$$

$$\frac{1}{2}[\frac{m(100-n)+n(50-m)}{n(100-n)}] =$$

$$\frac{1}{2}[\frac{100m-mn+50n-mn}{n(100-n)}] =$$

$$\frac{1}{2}[\frac{100m-2mn+50n}{n(100-n)}] =$$

$$\frac{1}{2}[\frac{m(100-2n)+50n}{n(100-n)}] =$$

$$\frac{1}{2}[\frac{m(100-2n)}{n(100-n)} + \frac{50}{100-n}] \tag{2.48}$$

Por (55) para um dado n entre 1 e 49 $P(B)$ será máxima se $m = n$. Substituindo este valor na expressão temos:

$$\frac{1}{2}[\frac{n(100-2n)}{n(100-n)} + \frac{50}{100-n}] = \frac{1}{2}[\frac{100-2n}{100-n} + \frac{50}{100-n}] =$$

$$\frac{1}{2}[\frac{100-n+50-n}{100-n}] = \frac{1}{2}[\frac{100-n}{100-n} + \frac{50-n}{100-n}] =$$

$$\frac{1}{2}[1 + \frac{100-50-n}{100-n}] = \frac{1}{2}[1 + \frac{100-n}{100-n} - \frac{50}{100-n}] =$$

$$\frac{1}{2}[2 - \frac{50}{100-n}]$$

$\frac{50}{100-n}$ será mínimo para $n = 1$. Então:

$$P(B) = \frac{1}{2}[2 - \frac{50}{99}] = 1 - \frac{25}{99} = \frac{99}{99} - \frac{25}{99}$$

$$P(B) = \frac{74}{99} = 0,7474 = 74,74\%$$

Esta é a probabilidade máxima de liberdade, isto é, colocando 1 bola na primeira urna, desde que a mesma seja branca.

$iii) n > 50$

Para todo $n > 50$ implica repetirem-se na urna C_2 o ocorrido na C_1 quando $n < 50$. Por exemplo, para $n = 30$ significa que na caixa C_1 contem 30 bolas e na caixa C_2 70 bolas. Para $n = 70$, teremos 70 bolas na caixa C_1 e 30 bolas na caixa C_2. Como $P(C_1) = P(C_2) = 1/2$, as duas situações citadas como exemplo são equivalentes. Este fato significa que a melhor probabilidade do prisioneiro ser liberto no caso de $n < 50$ tem sua equivalente quando se tem $n > 50$ e esta situação corresponde a $n = 99$, com 99 bolas na urna C_1 e 1 bola na urna C_2, sendo a bola pertencente a C_2 branca. Neste caso também teremos $P(B) = 74,74\%$.

Em síntese a melhor distribuição a ser feita será colocar uma bola branca em uma das urnas e as outras 99 na outra.

Demonstraremos um teorema que é consequência imediata da probabilidade condicional.

Teorema do produto

Se $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \neq \varnothing$ então,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1).P(A_2/A_1).P[A_3/(A_1 \cap A_2)].....P[A_n/(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})]$$

Demonstração:

Pelo princípio da indução finita o teorema é valido para $n = 2$, pois pela definição de probabilidade condicional temos que:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2/A_1) \tag{2.49}$$

Podemos também mostrar que o teorema é valido para 3 conjuntos. Basta tomar $A_1 \cap A_2$ como um único conjunto e A_3 como o outro. Teremos então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3] = P(A_1 \cap A_2).P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

Como $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2/A_1)$, concluímos que,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2) \tag{2.50}$$

Logo o teorema é valido para $n = 3$. Como hipótese de indução vamos admitir que o teorema fosse valido para $n = k$, ou seja,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1).P(A_2/A_1).P[A_3/(A_1 \cap A_2)].....P[A_k/(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1})]$$

Vejamos então se o teorema é valido para $k+1$ conjuntos. Consideremos então os seguintes conjuntos:
$A = (A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k)$ e A_{k+1}. Podemos escrever então,

$$P(A \cap A_{k+1}) = P(A).P(A_{k+1}/A) = P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k).P(A_{k+1}/A) \tag{2.51}$$

Utilizando a hipótese de indução podemos chegar a seguinte conclusão:
$P(A \cap A_{k+1}) = P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \cap A_{k+1}) = P[(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) \cap A_{k+1}] = P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k).P[A_{k+1}/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k] = P(A_1).P(A_2/A_1).....P(A_k/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1}).P(A_{k+1}/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k)$, o que prova o teorema, pois admitindo que o mesmo valha para k, concluímos que este vale para $k+1$, ou seja, vale para todos os naturais n.
Outro teorema muito importante e consequência da probabilidade condicional é o seguinte:

2.12 Teorema

Sejam os eventos A, B e C representados respectivamente por conjuntos do mesmo nome. Se $B \cap C = \varnothing$ podemos afirmar que:

$$P[(B \cup C)/A] = P(B/A) + P(C/A) \tag{2.52}$$

Demonstração:
Pelo lema já demonstrado e pela definição de probabilidade condicional temos,

$$P[(B \cup C)/A] = \frac{P[(B \cup C) \cap A]}{P(A)} = \frac{P[(B \cap A) \cup (C \cap A)]}{P(A)} \tag{2.53}$$

Sabemos contudo que,

$$P[(B \cap A) \cup (C \cap A)] = \frac{n[(B \cap A) \cup (C \cap A)]}{n(\Omega)} = \frac{n(B \cap A) + n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C)}{n(\Omega)}$$

Podemos afirmar que $n(A \cap B \cap C) = \varnothing$ pois $B \cap C = \varnothing$, condição dada no teorema. Portanto é valido afirmar que,

$$P[(B \cap A) \cup (C \cap A)] = \frac{n(B \cap A) + n(C \cap A)}{n(\Omega)} =$$

$$\frac{n(B \cap A)}{n(\Omega)} + \frac{n(C \cap A)}{n(\Omega)} = P(B \cap A) + P(C \cap A)$$

Substituindo este resultado na equação anterior ficamos com,

$$P[(B \cup C)/A] = \frac{P[(B \cap A) \cup (C \cap A)]}{P(A)} =$$

$$\frac{P(B \cap A) + P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)}$$

Logo $P[(B \cup C)/A] = P(B/A) + P(C/A)$, como queríamos demonstrar.
Tão importante quanto este resultado é a generalização do mesmo. Vamos demonstrá-lo então para a união de n conjuntos.
Sejam os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$, contidos em um espaço amostral Ω tal que $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \varnothing$, e um conjunto A também contido em Ω. É valida a generalização,

$$P[(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)/A] = P(A_1/A) + P(A_2/A) + ... + P(A_n/A) \tag{2.54}$$

Na primeira parte do teorema já provamos sua validade para $n = 2$. Podemos constatar também que é valido para $n = 3$, pois podemos considerar a união de dois conjuntos como um conjunto só e aplicar o que já sabemos quando $n = 2$. Façamos a aplicação.

$$P[A_1 \cup (A_2 \cup A_3)]/A = P(A_1/A) + P[(A_2 \cup A_3)/A] = P(A_1/A) + P(A_2/A) + P(A_3/A) = P[(A_1 \cup A_2 \cup A_3)/A]$$

com $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$. Utilizando o principio da indução finita vamos admitir como hipótese de indução que o teorema seja válido para $n = k$, ou seja:

$$P[(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)/A] = P(A_1/A) + P(A_2/A) + ... + P(A_k/A) \tag{2.55}$$

De posse desta hipótese vamos usar a base de indução, considerando a união dos conjuntos $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}$ como a união de apenas dois. O primeiro será $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ e o segundo A_{k+1}. Desta união fica claro que,

$$P[(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) \cup A_{k+1}/A] = P[(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)/A] + P(A_{k+1}/A) =$$

$$P(A_1/A) + P(A_2/A) + ... + P(A_k/A) + P(A_{k+1}/A)$$

Fato este que conclui a demonstração, isto é, o teorema é valido para todo $n \in N$ de acordo com o principio da indução finita.

Exemplo 12

Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o numero de caras nos 6 lançamentos supere o numero de coroas.

Solução: Sabemos que o resultado do primeiro lançamento foi coroa. Sendo E_1 este evento, concluímos que $P(E_1) = 1$, ou seja, a probabilidade de um evento certo.

Sabemos também que para termos mais caras do que coroas nos próximos 5 lançamentos, obrigatoriamente precisam ser sorteados 4 caras ou 5 caras. A probabilidade de obtermos uma cara ou uma coroa em qualquer dos 5 lançamentos seguintes é igual a 1/2. Cada um destes 5 lançamentos são eventos mutuamente independentes. A probabilidade da ocorrência de um destes eventos, em nada é afetada pela ocorrência ou não de outro evento. Chamaremos de E_2, E_3, E_4, E_5 e E_6 os eventos relacionados aos 5 lançamentos seguintes.

Para obtermos 4 caras, em 5 lançamentos o total de probabilidades é $C_5^4 = 5$. Só que para cada uma delas podemos usar o produto de possibilidades. Então vamos escolher uma dessas possibilidades. Uma delas poderia ser por exemplo: cara, cara, coroa, cara, cara. Vamos chamar também cada um destes resultados respectivamente pelos eventos E_1, E_2, E_3, E_4 e E_5. Utilizando a equação do produto temos,

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5) =$$
$$P(E_1).P(E_2/E_1).P(E_3/E_2 \cap E_1).P(E_4/E_1 \cap E_2 \cap E_3).P(E_5/E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)$$

Contudo os eventos $E_1, ..., E_5$, são todos mutuamente independentes, pois o espaço amostral de todos é $\Omega = \{cara, coroa\}$ e $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = P(E_5) = 1/2$. Logo

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5) = P(E_1).P(E_2).P(E_3).P(E_4).P(E_5) = (\frac{1}{2})^5$$

Ressaltemos, no entanto, que existem outras 4 situações que possuem o mesmo resultado. Isto nos leva a concluir que, incluindo todas as situações possíveis, admitindo que houvesse

4 caras nos 5 eventos, a probabilidade do evento E, que impõem no total dos 6 lançamentos, mais resultados caras do que coroas é: $5.(1/2)^5 = \frac{5}{32}$. Só que o evento E não se restringe somente a esta situação. Ele abrange a situação de termos 5 caras e do ponto de vista da análise combinatória o total de possibilidades de termos as 5 caras é $C_5^5 = 1$. Nesta situação a probabilidade de tal ocorrer será $(1/2)^5$. Em termos totais a probabilidade procurada será:

$$P(E) = 5.(\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 = 6.(\frac{1}{2})^5 = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

Outra resolução: Podemos resolver o mesmo problema usando a definição de probabilidade. Para calcular $P(E)$, tomaremos cada elemento de E e de Ω como quíntuplas ordenadas. Calculemos $n(\Omega)$. Temos o seguinte:

$$n(\Omega) = C_{5,0} + C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = 32$$

pois se trata de uma linha no triângulo de pascal. $n(E) = C_{5,4} + C_{5,5} = 6$. Logo,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

2.13 Teorema da probabilidade total

Seja B um conjunto associado a um evento B e sejam os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ associados aos eventos $A_1, A_2, ..., A_n$. Considere todos os conjuntos A_i, i variando de 1 até n todos disjuntos e também que o conjunto B esteja contido na união dos n conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$. Do que foi exposto conclui-se que:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + ... + P(A_n).P(B/A_n) \tag{2.56}$$

Demonstração: Por hipótese sabemos que $B \subset (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$. Daí decorre que,

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B) \tag{2.57}$$

Vale ressaltar que os conjuntos $(A_i \cap B), 1 \leq i \leq n$, são todos disjuntos pois os elementos de $(A_1 \cap B), (A_2 \cap B), ..., (A_n \cap B)$, pertencem respectivamente a $A_1, A_2, ..., A_n$ que são disjuntos.

Da disjunção dos $(A_1 \cap B)$ conjuntos temos:

$$n(B) = n(A_1 \cap B) + n(A_2 \cap B) + ... + n(A_n \cap B) \tag{2.58}$$

Dividindo o primeiro e o segundo membro da igualdade por $n(\Omega)$, ficamos com o resultado:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B) \tag{2.59}$$

Para concluir a demonstração do teorema, é suficiente a aplicação da definição de probabilidade condicional para todos os $(A_i \cap B)$ eventos, ou seja,

$$P(A_i \cap B) = P(A_i).P(B/A_i) \tag{2.60}$$

para $1 \leq i \leq n$
Com esta informação finalizamos da seguinte maneira:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + ... + P(A_n).P(B/A_n) \tag{2.61}$$

como queríamos demonstrar. Vejamos alguns exemplos que ilustra de maneira objetiva o referido teorema.

Exemplo 13

Três urnas I, II, e III, contém respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida seja a II?
Solução: Para calcularmos a probabilidade de ser escolhida a bola branca, vamos usar o teorema demonstrado acima. Sejam os seguintes eventos:
B : ser escolhida uma bola branca.
A_1 : ser escolhida a urna I.
A_2 : ser escolhida a urna II.
A_3 : ser escolhida a urna III.
De posse dos dados do problema, é fácil perceber que $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$, visto que a escolha de cada urna está inserida no conceito de eventos equiprováveis. Nas demais, pela probabilidade condicional fica claro que,

$$P(B/A_1) = \frac{n(A_1 \cap B)}{n(A_1)} = \frac{1}{3}$$

$$P(B/A_2) = \frac{n(A_2 \cap B)}{n(A_2)} = \frac{2}{3}$$

$$P(B/A_3) = \frac{n(A_3 \cap B)}{n(A_3)} = \frac{3}{5}$$

Fazendo uso do teorema da probabilidade total, temos:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P(B/A_3) =$$

$$\frac{1}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{3}{5} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

Sabemos do enunciado que uma bola branca foi escolhida e que para essa situação temos $P(B) = 8/15$. Contudo, o que se quer saber dada essa condição é a probabilidade desta bola ser da urna II. Logo, temos a probabilidade condicional:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_2).P(A_2)}{P(B)} =$$

$$\frac{2/3.1/3}{8/15} = \frac{2/9}{8/15} = \frac{2}{9}.\frac{15}{8} = \frac{5}{3.4} = \frac{5}{12}$$

que é a solução do problema.

2.14 Teorema de Bayes

De acordo com o teorema da probabilidade total, temos que:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + ... + P(A_n).P(B/A_n) \tag{2.62}$$

Para calcular a probabilidade de algum evento A_i, sendo este i fixado podendo assumir valores de 1 até n, dado que o evento B ocorreu, temos

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(B)} \tag{2.63}$$

Fazendo uso do que já concluímos acima, podemos escrever:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + ... + P(A_n).P(B/A_n)} \tag{2.64}$$

Importante salientar que quando calculamos $P(B)$ pelo teorema da probabilidade total, estamos calculando esta probabilidade em relação ao espaço amostral (Ω), enquanto que, ao utilizar o teorema de Bayes, estamos calculando necessariamente uma probabilidade condicional.

Vamos agora observar algumas situações onde estes teoremas, o da probabilidade total e o de Bayes possuem plena aplicação.

Exemplo 14

Marina quer enviar uma carta a Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de 8/10. A probabilidade de que o correio não a perca é de 9/10. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de 9/10. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito.

Solução: O que está sendo solicitado no problema é a probabilidade de um evento a priori, ou seja, Marina não ter escrito a carta, dado que um a posteriori, isto é, que Verônica não a recebeu.

Primeiramente é necessário denominar os eventos que nos são dados e também o que queremos determinar. Então vejamos,

B : Verônica não recebeu a carta.

A_1 : Marina não escreveu a carta.

A_2 : Marina escreveu a carta.

A_3 : O correio perdeu a carta.

A_4 : O correio não a perdeu.

A_5 : O carteiro não a entregou.

Do que nos foi apresentado há 3 situações possíveis para ocorrer o evento B.

$1-$ Marina não tê-la escrito. Neste caso temos,

$P(A_1) = P(A_1).P(B/A_1)$, pois $P(B/A_1)$ é um evento certo, e $P(A_1) = 2/10//$ $2-$ Ser escrita e o correio perder, ou seja, ocorrer $A_2 \cap A_3$. Portanto,

$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3).P[B/(A_2 \cap A_3)]$, pois $P[B/(A_2 \cap A_3)] = 1$.

Sabemos também que pelo teorema do produto,

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2).P(A_3/A_2) = \frac{8}{10}.\frac{1}{10}$$

De maneira análoga, esta situação ocorrerá se Marina escrever a carta, o correio não a perder e o carteiro não entregar, ou seja, ocorrer $A_2 \cap A_4 \cap A_5$. Então,

$$P(A_2 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_2 \cap A_4 \cap A_5).P[B/(A_2 \cap A_4 \cap A_5)] = \frac{8}{10}.\frac{9}{10}.\frac{1}{10}$$

Com estas informações e usando o teorema da probabilidade total concluímos que,

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2 \cap A_3).P[B/(A_2 \cap A_3)]+$$

$$P(A_2 \cap A_4 \cap A_5).P[B/(A_2 \cap A_4 \cap A_5)] =$$

$$P(A_1).P(A_2 \cap A_3).P(A_2 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{2}{10} + \frac{8}{10}.\frac{1}{10} + \frac{8}{10}.\frac{9}{10}.\frac{1}{10}$$

Conhecendo o valor numérico de $P(B)$, e aplicando o teorema de Bayes, temos $P(A_1/B) =$

$$\frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2 \cap A_3).P[B/(A_2 \cap A_3)] + P(A_2 \cap A_4 \cap A_5).P[B/(A_2 \cap A_4 \cap A_5)]}$$

$$= \frac{2/10}{\frac{2}{10} + \frac{8}{10}.\frac{1}{10} + \frac{8}{10}.\frac{9}{10}.\frac{1}{10}} \Longrightarrow$$

$$P(A_1/B) = \frac{2/10}{\frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{72}{1000}} = \frac{2/10}{\frac{200}{1000} + \frac{80}{1000} + \frac{72}{1000}} =$$

$$\frac{\frac{2}{10}}{\frac{352}{1000}} = \frac{2}{10}.\frac{1000}{352} = \frac{2.100}{352} = \frac{2.25}{88} = \frac{25}{44}$$

Exemplo 15

Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de 4/10. O fluminense ganha um jogo em um dia com chuva com probabilidade de 6/10 e em um dia sem chuva com probabilidade de 5/10. Sabendo-se que p fluminense ganhou um jogo naquele dia de agosto, qual a probabilidade de que choveu nesse dia?

Solução: Primeiro vamos denominar os eventos.

B : o fluminense ganhar o jogo.

A_1 : Chover em um dia de agosto.

A_2 : Não chover em um dia de agosto.

De acordo com o enunciado do problema, o fluminense ganhou o jogo. Logo o evento B ocorreu. Pelo teorema da probabilidade total, temos então,

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) =$$

$$\frac{4}{10}.\frac{6}{10} + \frac{6}{10}.\frac{5}{10} = \frac{24}{100} + \frac{30}{100} = \frac{54}{100} = \frac{27}{50}$$

Além da probabilidade do fluminense ter ganho o jogo, o cálculo feito acima se torna necessário calcular a probabilidade do fluminense ter ganho o jogo e chover no dia. Para tal, a probabilidade condicional nos diz que:

$$P(B \cap A_1) = P(A_1).P(B/A_1) = \frac{4}{10}.\frac{6}{10} = \frac{24}{100}$$

Finalizando, pelo teorema de Bayes,

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)} =$$

$$\frac{\frac{24}{100}}{\frac{27}{50}} = \frac{24}{100}.\frac{50}{27} = \frac{4}{9}$$

2.15 Probabilidade binomial

Para introduzir o tópico vamos usar uma situação problema, que vai ilustrar com clareza o que queremos mostrar. Vejamos então,

Exemplo 16

Um teste será realizado. O mesmo possui 5 questões de múltipla escolha. Cada questão possui exatamente 3 alternativas a serem escolhidas. Qual a probabilidade de um candidato que irá marcar aleatoriamente as 5 questões do teste, acertar exatamente 2 questões?

Solução: Cada solução do teste é composto de 5 escolhas. Suponha que as alternativas

para cada questão sejam os itens a, b e c.
Pela natureza do problema, a probabilidade de acerto em cada uma das questões é $1/3$. De maneira análoga, a probabilidade de erro é $2/3$. Cada uma das escolhas nas 5 questões se constituem em eventos mutuamente independentes, pois a escolha de uma alternativa em uma questão não interfere na probabilidade da escolha de outra. Sabemos contudo que, no geral, teremos sequências de dois acertos e 3 erros para que o teste apresente dois acertos. Necessário se torna então que calculemos todas as sequências possíveis onde aconteça 2 acertos e 3 erros. Designemos por A os acertos e por E os erros. O número dessas sequências será calculado através de um método de contagem descrito em Análise Combinatória por permutação com repetições. Procedendo este cálculo teremos:

$$P^5_{3,2} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5!}{(5-2)!.2!} = C^5_2 \tag{2.65}$$

Pelo que foi apresentado $C^5_2 = 10$. Este é o numero de 2 acertos em um total de 5 questões. Definimos os dois acertos, o total de erros e suas posições já estão determinados.
Passemos agora para a segunda parte do problema. Para cada uma dessas $P^5_{2,3} = C^5_2$ possibilidades, podemos calcular a probabilidade de a mesma acontecer pois sabemos que são eventos mutuamente independentes e sabemos a probabilidade de cada uma delas.
Suponha uma das 10 possibilidades. Seja uma delas (E, E, A, E, A). Pelo teorema da multiplicação de probabilidades e sabendo da independência dos eventos podemos concluir que:
: $P(X_1)$, onde X_1 é o evento relacionado à ocorrência de 3 erros e 2 acertos descrita acima será:

$$P(X_1) = P(E).P(E).P(A).P(E).P(A) = P(E \cap E \cap A \cap E \cap A) =$$

$$\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{8}{243}$$

Esta mesma probabilidade ocorrerá para todos os $X_i, 1 \leq i \leq 10$. De onde temos que:

$$P(X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{10}) = P(X_1) + P(X_2) + ... + P(X_{10}) \tag{2.66}$$

pois os X_i relacionados acima são todos disjuntos. Não há entre eles sequências iguais. Como $E = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{10}$, é fácil ver que:

$$P(E) = P(X_1) + P(X_2) + ... + P(X_{10}) = 10.\frac{8}{243} = \frac{80}{243} \tag{2.67}$$

No exemplo citado acima, temos uma aplicação do assunto que iremos abordar. Neste, podemos sem perda da generalidade chamar os acertos de sucessos e os erros de fracasso. Denotaremos a partir daqui a letra S para indicar sucesso, e F para indicar fracasso.

Definição: Seja um evento E composto de $E_1, E_2, ..., E_n$ eventos componentes e todos mutuamente independentes. Suponha que cada um destes n eventos apresentem apenas dois valores lógicos: sucesso(S) ou fracasso (F). Suponha também que nestes eventos existam K sucessos e $n - K$ fracassos. Vamos admitir que a probabilidade de cada sucesso seja P_1 e de cada fracasso seja P_2. Dada uma sequência possível de sucessos e fracassos ou seja, $SSF...S$, onde possam constar K sucessos e $n - K$ fracassos, a probabilidade de a mesma ocorrer será:

$$P_1.P_1.P_2.....P_1 = P_1^K.P_2^{n-K} \tag{2.68}$$

Cabe-nos agora calcular quantas sequências de K sucessos e $n - K$ fracassos são possíveis. Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$P_{n-K,K}^{n} = \frac{n!}{(n-K)!.K!} = C_K^n \tag{2.69}$$

Logo temos C_K^n sequências de K acertos e $n - K$ fracassos. Daí podemos concluir que se para cada uma delas temos a probabilidade de $P_1^K.P_2^{n-K}$ então para C_K^n delas, pelo princípio multiplicativo, temos que,

$$P(E) = C_K^n.P_1^K.P_2^{n-K} \tag{2.70}$$

Esta equação é aplicável para todos os eventos E, que sejam constituídos por um número n de eventos componentes e todos independentes entre si.

Exemplo 12

Um matemático sai de casa todos os dias com duas caixas de fósforo, cada uma com n palitos. Toda vez que ele quer acender um cigarro, ele pega (ao acaso)uma das caixas e retira daí um palito. O matemático é meio distraído, de modo que quando ele retira o último palito de uma caixa, ele não percebe que a caixa fica vazia. Como ele fuma muito, em certa hora ele pega uma caixa e constata que ela está vazia. Qual é a probabilidade de nesse momento a outra caixa conter exatamente $K(0 \leq K \leq n)$ palitos?

Resolução: Denominemos as caixas de C_1 e C_2. Vamos admitir que a caixa C_1 fique vazia e a caixa C_2 fique com K palitos exatamente. A situação oposta é análoga à primeira, ou seja, se considerarmos a caixa C_2 vazia e a caixa C_1 com K palitos, ambas as situações apresentarão a mesma probabilidade. Basta então analisar uma delas. Vamos analisar a primeira. Denominemos de sucesso a retirada de um palito da caixa C_1 e fracasso a retirada de um palito da caixa C_2. A situação-problema exige que ao ser escolhida a caixa vazia a outra já esteja com K bolas.

Antes de considerar esta última retirada, já foram feitas n retiradas da caixa C_1 e $n-K$ retiradas da caixa C_2. Isto para que tenhamos zero palitos na caixa C_1 e K palitos na caixa C_2. No total temos então $n+(n-K)$ retiradas, isto é, $2n-K$. Este será o número de elementos da sequência, $SSFS...SF$. Como a probabilidade de escolha de sucesso ou fracasso é $1/2$ e a ocorrência de um ou de outro se constituem eventos mutuamente independentes, temos que a probabilidade de vir acontecer uma dessas sequências é $(\frac{1}{2})^n.(\frac{1}{2})^{n-K} = (\frac{1}{2})^{2n-K}$. Esta probabilidade no entanto é apenas uma destas sequências. É necessário calcular o total delas, o que pode se feito da seguinte forma,

$$P^{2n-K}_{n,n-K} = \frac{(2n-K)!}{n!(n-K)!} = \frac{(2n-K)!}{n![(2n-K)-n]!} = C^{2n-K}_n \tag{2.71}$$

Em suma, podemos afirmar que a possibilidade desejada será:

$$P(E) = (\frac{1}{2})^{2n-K} + (\frac{1}{2})^{2n-K} + ... + (\frac{1}{2})^{2n-K}[C^{2n-K}_n] \text{ vezes} \Longrightarrow$$

$$P(E) = C^{2n-K}_n.(\frac{1}{2})^{2n-K}$$

onde E é o evento que constitui a existência de zero palitos na caixa C_1 e K palitos na caixa C_2.

Dadas estas condições citadas acima, ou seja, assumindo que a mesma ocorreu, necessitamos determinar a probabilidade $E^{'}$ de na próxima escolha das caixas seja retirada a caixa vazia. Este evento pode ser facilmente calculado usando a probabilidade condicional:

$$P(E^{'}/E) = \frac{P(E^{'} \cap E)}{P(E)} \Longrightarrow P(E^{'} \cap E = P(E).P(E^{'}/E) \tag{2.72}$$

Como E e $E^{'}$ são eventos mutuamente independentes temos,

$$P(E^{'} \cap E = P(E).P(E^{'}/E) = \frac{1}{2}.C^{2n-k}_n.(\frac{1}{2})^{2n-K} \tag{2.73}$$

Sabemos contudo que a situação oposta também pode ocorrer, ou seja, C_2 ficar vazia e C_1 ficar com K palitos antes da ultima retirada. Esta situação também possui a probabilidade

de ocorrer de $\frac{1}{2}.C_n^{2n-k}.(\frac{1}{2})^{2n-K}$.
Juntando estas duas situações descritas, e fácil ver que se trata de dois eventos disjuntos, logo a probabilidade de E_t, onde E_t é a probabilidade total será:

$$P(E_t) = \frac{1}{2}.C_n^{2n-k}.(\frac{1}{2})^{2n-K} + \frac{1}{2}.C_n^{2n-k}.(\frac{1}{2})^{2n-K} \Longrightarrow P(E_t) = C_n^{2n-k}.(\frac{1}{2})^{2n-K} \tag{2.74}$$

Citaremos ainda outra situação.

Exemplo 17

Motores de avião funcionam independentemente e cada motor tem probabilidade P de falhar durante um voo. Um avião voa com segurança se a maioria dos seus motores funciona. Para que valores de P um avião com 3 motores é preferível a um com 5 motores?
Solução: Avaliaremos primeiramente a possibilidade do avião de 3 motores voar com segurança. Para que isto aconteça, temos que ter 0 ou 1 motor sem condições de funcionar.
De acordo com a definição de probabilidade binomial, para termos zero motores com falha, a probabilidade será?

$$(1-P)(1-P)(1-P).C_0^3 = (1-P)^3 \tag{2.75}$$

onde C_0^3 é a combinação de termos 3 motores sendo que nenhum falha.
Salientemos que $(1-P)$ é a probabilidade do motor esta sem falha e P a do motor estar com falha, sendo ambas probabilidades complementares.
Por outro lado para termos 2 motores sem falhas, a probabilidade será:

$$(1-P).(1-P).P.C_2^3 = (1-P)^2.3P \tag{2.76}$$

onde C_2^3 é a combinação de termos 3 motores sendo que dois deles não falham.
Logo a probabilidade do avião com 3 motores voar com segurança será:

$$P(A_3) = (1-P)^3 + 3P.(1-P)^2 \tag{2.77}$$

A_3 representa o evento: O avião com 3 motores voar com segurança.
No tocante ao avião com 5 motores temos as seguintes conclusões para que o mesmo voe com segurança:
- Com 3 motores sem falha. A probabilidade para este evento será:

$$(1-P).(1-P).(1-P).P.P.C_3^5 = 10P^2(1-P)^3 \tag{2.78}$$

- Com 4 motores sem falha temos,

$$(1-P).(1-P).(1-P).(1-P).P.C_4^5 = 5P(1-P)^4 \tag{2.79}$$

- Com 5 motores sem falha temos,

$$(1-P).(1-P).(1-P).(1-P).(1-P).C_5^5 = (1-P)^5 \tag{2.80}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho nos permitiu visualizar o fazer para probabilidade discreta de tal forma a superar as dificuldades que porventura venham ocorrer no exercício da docência. Estas dificuldades advêm da própria natureza do tema matemático em destaque, haja vista que sua compreensão envolve raciocínios lógicos profudamente ligados e com sistemática própria. Isto nos impulsionou a atacar esta problemática utilizando certo nível de aprofundamento que se materializou pela utilização de situações problemas que interconecta este com outros temas, como a contagem e a teoria dos conjuntos que em nosso entender são os ramos da matemática que articulados fundamentam a teoria das probabilidades.

Por outro lado, também concluímos que em nossa experiência docente pudemos vivenciar que os livros didáticos apóiam a pratica educacional atendem em parte o discente, porém no que se refere ao professor estes manuais não possibilitam material necessário a abrangência de conhecimentos que o profissional necessita. Daí que o presente texto vem ao encontro, de alguma forma, a suprir estas carências docentes, pois se trata de mais uma opção a disposição dos professores para possíveis consultas e investigações.

Bem como os professores, concluímos que este estudo também possibilita aos discentes que queiram sair do nível de estudo restrito ao livro didático, uma visão fundamentada e aprofundada da probabilidade discreta. E ainda, este aprofundamento pode, de tal forma incentivá-lo a enveredar por outros estudos da matemática além da sala de aula como projetos de iniciação científica, projetos de olimpíadas de matemática visando os futuros pesquisadores do amanhã.

Referências Bibliográficas

[1] Morgado, Augusto César. Análise combinatória e probabilidade / Augusto César Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Pedro Fernandez. - 9.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 1991

[2] LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio - Volume 4/ Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado. - Rio de Janeiro: SBM, 2010

[3] Publicado em 15 de abr de 2013 Matéria - Combinatória Conteúdo - Princípio Da Inclusão-Exclusão - Contagem de Pólya Nível - 3 Aula - 5 Professor - Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira Link Material - http://poti.obmep.or
g.br/upload/AulaCategoria Educação, Licença padrão do YouTube

[4] STEWART, James. Cálculo, Volume 1, 7ª edição. Editora Cengage Learning, 2013. ISBN