UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - CCET
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ERIC SOUSA CARTAGENES

Desigualdades entre Médias e Aplicações no Ensino Médio

São Luís
2014

ERIC SOUSA CARTAGENES

Desigualdades entre Médias e Aplicações no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Josenildo de Souza Chaves

Doutor em Estatística

São Luís

2014

Cartagenes, Eric Sousa.

Desigualdades entre Médias e Aplicações no Ensino Médio / Eric Sousa. Cartagenes - 2014

48.p

Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão, 2014.

Orientador: Josenildo de Souza Chaves

1. Matemática - Estudo - Ensino 2. Médias 3. Desigualdades 4. Aplicações. I.Título.

CDU 51:373.5(041)

ERIC SOUSA CARTAGENES

Desigualdades entre Médias e Aplicações no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28/08/2014

BANCA EXAMINADORA

Prof. Josenildo de Souza Chaves

Doutor em Estatística

Prof. José Antônio Pires Ferreira Marão

Doutor em Física

Prof. Moises dos Santos Cecconello

Doutor em Matemática

A minha família...

RESUMO

Apresentamos neste trabalho definições de médias e usamos algumas desigualdades na resolução de problemas em temas tais como, geometria, inequações e funções do 2º grau. Demonstramos entre outras, as desigualdades entre médias. Concluímos que estas desigualdades podem ser ensinadas no Ensino Médio, tornando-as em alguns casos o método mais simples na resolução de alguns problemas.

Palavras-Chave: Médias, desigualdades entre as médias aritmética e geométrica, Ensino Médio.

ABSTRACT

In this work we present definitions of means and use some inequalities to solve problems in theme such as geometry, inequalities, quadratic functions. We demonstrate other the inequalities between means. We conclude that these inequalities can be taught in secondary school, making them in some cases the simplest method in solving some problems.

Keywords: Harmonic, Geometric and Arithmetic means , Inequality between Geometric and Arithmetic mean, Secondary school.

AGRADECIMENTO

Primeiramente a Deus por ter me guiado nessa caminhada e por ter me iluminado nos momentos de menor intensidade de luz.

A minha família por sempre acreditar no meu potencial e nunca me deixar desistir desse sonho, em especial aos meus pais Marciano e Fatima, minha esposa Zelma pelo incansável apoio, minha irmã Erilana e meus filhos Lanna e Allan pois são minha motivação.

Ao Profmat pela oportunidade de adquirir mais conhecimentos a minha profissão, sendo um programa de importância imensa na qualificação de docentes do nosso País.

A meus professores do curso pelo comprometimento, em especial a meu orientador Prof. Dr. Josenildo pela singular ajuda e dedicação a meu trabalho.

A meus colegas de turma que passaram pelas mesmas dificuldades que eu mas seguiram com perseverança em busca dos objetivos.

A meu colega de profissão que me ajudou muito nesse trabalho Uilbiran Chaves, obrigado amigo.

A meus alunos que de uma forma ou de outra serviram de motivação.

"Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana seja apenas outra alma humana".

Carl G. Jung

SUMÁRIO

1 Introdução

O Mestrado Profissional em Matemática (ProfMat) fornece a disciplina de Matemática Discreta. Nesta, podemos observar uma abordagem prática de temas do Ensino Médio tais como, contagem, probabilidade, médias e matemática financeira. Um assunto dentre estes nos chamou atenção, a desigualdade entre as médias, surgindo então o questionamento: *porque esse tema não é abordado no Ensino Médio e de forma mais abrangente?*. Começamos a investigar como esse tema é abordado no Ensino Médio e como aparece na literatura desse ciclo de ensino, tendo-se em vista, sua vasta aplicabilidade nas resoluções de outros conceitos como geometria, funções quadráticas e inequações, por exemplo. Entretanto, é pouco mencionada nas bibliografias adotadas no Ensino Médio, aparecendo na seção de Estatística. Vimos assim a necessidade de elaborar um trabalho que compreende as definições de médias, as principais desigualdades entre elas e outras desigualdades importantes, além de mostrar exemplos aplicados.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) preconizam que se aborde, desde o ensino fundamental, noções básicas de Estatística. Pretende- se que o estudante seja confrontado com situações concretas de análise de dados através de gráficos ou tabelas, introduzindo conceitos fundamentais para a compreensão dos fenômenos do dia-a-dia. Entre esses conceitos, um de vital importância é a média de uma sequência de valores numéricos (SIMONIS, 2000).

O livro Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) no ano de 2001 relata diversos problemas dos livros didáticos utilizados no Ensino Médio no Brasil. A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica é dos resultados mais demonstrados da Matemática. (Mas não tanto quanto o Teorema de Pitágoras). Há demonstrações e vários tipos, de diversos graus de sofisticação e baseadas em diferentes teorias. Esse assunto, que cremos ser interessante para nossos leitores, pode ser tratado de forma elementar (LIMA, 1991).

Neste trabalho desenvolvemos um estudo entre médias e desiguadades entre médias, com a finalidade de propor uma melhor utilização desses assuntos no Ensino Médio.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é a utilização de desigualdades entre médias na resolução de problemas do Ensino Médio. Especificamente, destacamos os seguintes objetivos:

- Apresentar algumas definições de médias.
- Apresentar algumas desigualdades entre médias.
- Propor alternativas para resoluções de exercícios de diversos assuntos tais como, geometria, trigonometria e inequações.

1.2 Apresentação dos Capítulos

Começamos o Capítulo 2 definindo as médias mais usadas e conhecidas, colocando exemplos para fixação de suas definições. No Capítulo 3 apresentamos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, demonstrando-a, além de outras desigualdades onde chamaremos atenção também para a desigualdade de Cauchy[1]-Schwarz[2] que também será definida e demonstrada, terminaremos esse capítulo apresentando as desigualdade entre as médias quadrática e aritmética e a desigualdade de Jensen[3]. No Capítulo 4, apresentamos algumas aplicações que desenvolvemos utilizando as desigualdades entre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática e outras ferramentas. No Capítulo 5, apresentamos as considerações finais.

[1]Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi um matemático francês.
[2]Laurent Schwarz (1915-2002) foi um matemático francês.
[3]Johan Ludwig Jensen (1859-1925), engenheiro e matemático dinamarquês.

2 Médias

Segundo MORGADO(2001), uma ideia bastante importante é a de média. A média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica da lista. Dessa forma, dada uma sequência finita de números reais $(x_1, x_2, ..., x_n)$ e uma operação $*$ sobre os números dessa sequência, então uma Média dos elementos dessa sequência com respeito à operação $*$ é um número real M tal que:

$$x_1 * x_2 * \cdots * x_n = \underbrace{M * M * \cdots * M}_{n\ termos}. \tag{2.1}$$

Uma propriedade importante de uma Média que não poderíamos deixar de comentar é que:

$$min\{x_i\} \leq M \leq max\{x_i\}, \tag{2.2}$$

com $i = 1, 2, ..., n$. Obviamente, se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, a média é igual a estes números.

Antes de apresentar as desigualdades do Capítulo 3, definiremos as principais médias com suas respectivas características matemáticas.

2.1 Média Aritmética

Definição 2.1. Dada a sequência de números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, $n > 1$, chamamos de média aritmética o número real, que indicamos por $\overline{x}$, tal que

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \underbrace{\overline{x} + \overline{x} + \cdots + \overline{x}}_{n\ termos} = n\overline{x}. \tag{2.3}$$

Segue da equação (2.3) que

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Exemplo 2.1. A média aritmética entre os números 3, 4 e 5 é:

$$\overline{x} = \frac{3 + 4 + 5}{3} = 4.$$

Podemos verificar na sequência de números reais $x_1, x_2, ..., x_n$ a ocorrência de valores iguais, nos levando a definição de uma média aritmética onde $x_i,\ i = 1, ..., n$ tem pesos. Então, se agruparmos os termos iguais e multiplicarmos pela frequência de cada um deles teremos a conhecida média aritmética ponderada.

Definição 2.2. A média aritmética ponderada de uma sequência de números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ com pesos $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ é o número $\overline{x}_p$ tal que

$$p_1x_1 + p_2x_2, + \cdots + p_nx_n = p_1\overline{x}_p + p_2\overline{x}_p + \cdots + p_n\overline{x}_p. \tag{2.4}$$

Segue da equação (2.4) que

$$\overline{x}_p = \frac{p_1x_1 + p_2x_2, + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_ix_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

Note que, se $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, temos que $\overline{x}_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_ix_i$. Além disso, se $p_i,\ i = 1, ..., n$ representarem probabilidades associadas à ocorrência dos $x_i,\ i = 1, ..., n$, então $\overline{x}_p$ representa a média ou a esperança matemática da variável aleatória X, que gerou os x_i.

Exemplo 2.2. A média bimestral calculada em uma determinada escola é feita da seguinte forma: a primeira nota tem peso 5 e a segunda nota tem peso 3. Sabendo que um aluno tirou 5 na sua primeira prova e 7 na segunda, qual a média obtida por esse aluno?

$$\overline{x}_p = \frac{5 \times 5 + 7 \times 3}{5 + 3} = \frac{25 + 21}{8} = \frac{47}{8} \cong 5,8.$$

2.2 Média Geométrica

Definição 2.3. Dada uma sequência de números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ com $n > 1$ chamamos de média geométrica o número real $\overline{x}_g$ associado a essa sequência, através da operação da multiplicação, tal que

$$x_1x_2 \cdots x_n = \underbrace{\overline{x}_g\overline{x}_g \cdots \overline{x}_g}_{n\ termos} = \overline{x}_g^n, \tag{2.5}$$

então,

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ \cdots\ x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

Exemplo 2.3. A média geométrica entre os números 2, 4 e 8 é:

$$\overline{x}_g = \sqrt[3]{2 \times 4 \times 8} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

2.3 Média Harmônica

Definição 2.4. Dada uma sequência de números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ com $n > 1$ chamamos de média harmônica o número real $\overline{x}_h$ associado a essa sequência, através da operação adição de seus inversos, tal que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{\overline{x}_h} + \frac{1}{\overline{x}_h} + \cdots + \frac{1}{\overline{x}_h}}_{n\ termos} = \frac{n}{\overline{x}_h},$$

então,

$$\overline{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}.$$

Exemplo 2.4. A média harmônica entre os números 3, 4 e 5 é:

$$\overline{x}_h = \frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = \frac{180}{47}.$$

2.4 Média Quadrática

Definição 2.5. Dada uma sequência de números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ com $n > 1$ chamamos de média quadrática o número real $\overline{x}_q$ associado a essa sequência, através da operação adição dos quadrados, tal que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \underbrace{\overline{x}_q^2 + \overline{x}_q^2 + \cdots + \overline{x}_q^2}_{n\ termos} = n\overline{x}_q^2,$$

então,

$$\overline{x}_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}.$$

Exemplo 2.5. A média quadrática entre os números $3, 4, 4$ e 5 é:

$$\overline{x}_q = \sqrt{\frac{3^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2}{4}} = \frac{\sqrt{66}}{2}.$$

Agora que já conhecemos e definimos as médias, daremos um enfoque maior a principal desigualdade, que é entre as médias aritmética e geométrica, cuja quantidade de aplicações onde podemos usá-la lhe torna muito importante. Definimos no Capítulo 3 esta e outras desigualdades, enunciando e demostrando seus teoremas.

3 Desigualdades

Neste capítulo apresentamos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, uma das desigualdades mais usadas nas resoluções de problemas que envolvam geometria, álgebra, problemas de otimização, inequações entre outras que serão destacadas na forma de aplicação. Apresentamos também outras desigualdades com intuito de agregar ao trabalho, outros problemas relacionados.

3.1 Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica

Proposição 3.1. *Para quaisquer $n > 1$ números reais positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ temos:*

$$\overline{x} \geq \overline{x}_g, \tag{3.1}$$

em que, $\overline{x} = \overline{x}_g$ se, e somente se $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$.

A demonstração da Proposição 3.1 será feita em duas etapas: na primeira tratamos do caso em que $n = 2$, na segunda etapa generalizamos a demonstração para qualquer $n \geq 2$.

3.1.1 Demonstração da Proposição 3.1: caso $n = 2$

Para essa primeira parte, haja vista as inúmeras maneiras de provar a desigualdade, apresentamos duas demonstrações, uma algébrica e uma geométrica, com finalidade de se dispor de uma alternativa para se trabalhar em sala de aula.

Demonstração algébrica. Sabendo que x_1 e x_2 são números reais e positivos, então $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ também estão definidos nos números reais, daí podemos verificar que:

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + x_2 \geq 0. \tag{3.2}$$

Segue de (3.2) que

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2},$$

ou seja,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}. \tag{3.3}$$

Isso mostra que $\overline{x} \geq \overline{x}_g$. Por outro lado, $\overline{x} = \overline{x}_g$ se, e somente se,

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \tag{3.4}$$

ou, seja, a igualdade ocorre se, e somente se, os números x_1, x_2 forem iguais.

Demonstração geométrica. Marcamos sobre uma reta r os segmentos adjacentes

$$AB = x_1 \text{ e } BC = x_2.$$

A seguir traçamos o semi-círculo de diâmetro AC e a perpendicular a r por B até intersectar o círculo em D.

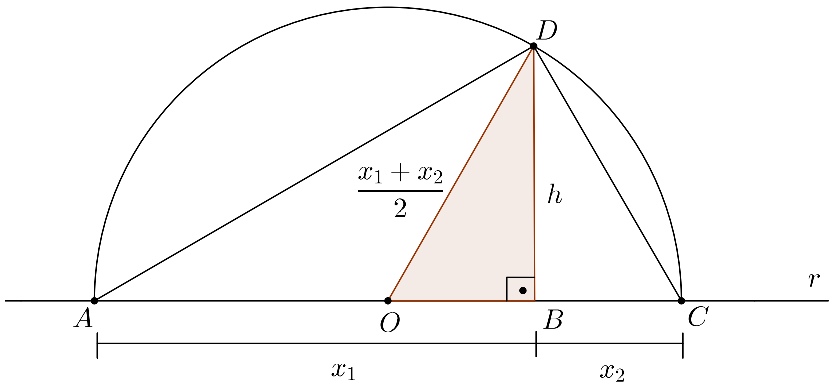

Figura 3.1: Demonstração Geométrica

Já que o arco AC tem medida de 180°, pois o segmento AC é o diâmetro do semi-círculo, temos que o ângulo ADC é reto pois trata-se de um ângulo inscrito. Como $BD = h$ que é a altura do triângulo ADC temos, por semelhança entre os triângulos BDA e CBD, que $h = \sqrt{x_1 x_2}$.

Como O é o centro do círculo, podemos ver que se $x_1 = x_2$, então $O = B$ logo, $BD = OD$. Portanto,

$$h = \sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{3.5}$$

e, assim, $\overline{x} = \overline{x}_g$. Se tivermos $x_1 \neq x_2$ verificamos que o triângulo OBD é retângulo em B, logo $OB < OD$ o que implica em

$$h = \sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{3.6}$$

De (3.5) e (3.6) segue que $\overline{x} \geq \overline{x}_g$.

3.1.2 Demonstração da Proposição 3.1: caso $n \geq 2$

Demonstrada para $n = 2$, partirmos para a segunda parte da prova da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, agora para qualquer $n \geq 2$, conforme NETO (1992):

(i) A desigualdade é verdadeira quando n for uma potência de 2, ocorrendo a igualdade se todos os números forem iguais.

(ii) A desigualdade é verdadeira em geral, e a igualdade ocorre se e só se os números forem todos iguais.

Demonstração. Nesse caso geral, primeiramente vamos considerar $n = 2^m$, com m inteiro positivo. Aplicando indução matemática sobre m, temos que para $m = 1$ é sempre verdade, uma vez que recaímos no caso $n = 2$, provado na seção anterior. Vamos supor agora que a desigualdade seja verdadeira para $m = k$, ou seja,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{x_1 x_2 \cdots x_{2^k}}.$$

Dessa forma, para $m = k + 1$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k} + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k} + x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \\
&\geq \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} \, \frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k}} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{x_1 x_2 \cdots x_{2^k}} \, \sqrt[2^k]{x_{2^k+1} x_{2^k+2} \cdots x_{2^{k+1}}}} \\
&= \sqrt[2^{k+1}]{x_1 x_2 \cdots x_{2^k} x_{2^{k+1}}}.
\end{aligned}$$

Logo, $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ para todo n da forma 2^m com m inteiro. Por outro lado, a igualdade só ocorre se, e somente se,

(iii) $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} = \dfrac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k}$

(iv) $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2^k}$ e $x_{2^k+1} = x_{2^k+2} = \cdots = x_{2^{k+1}}$.

De (iii) e (iv), temos

$$\frac{2^k x_{2^k}}{2^k} = \frac{2^k x_{2^{k+1}}}{2^k},$$

ou seja, $x_{2^k} = x_{2^{k+1}}$. Portanto, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2^{k+1}}$.

Agora, provamos essa mesma desigualdade para todo inteiro n positivo. Para isso, consideremos a desigualdade a seguir, que é verdadeira devido a conclusão anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \overbrace{\overline{x}_g + \cdots + \overline{x}_g}^{2^m - n\ vezes}}{2^m} &\geq \sqrt[2^m]{x_1 \cdots x_n \overline{x}_g^{2^m-n}} \\
&= \sqrt[2^m]{\overline{x}_g^n \overline{x}_g^{2^m-n}} \\
&= \sqrt[2^m]{\overline{x}_g^n \overline{x}_g^{2^m} \overline{x}_g^{-n}} \\
&= \overline{x}_g.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (2^m - n)\overline{x}_g \geq 2^m \overline{x}_g,$$

ou seja,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n\overline{x}_g,$$

o que implica

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \overline{x}_g. \tag{3.7}$$

Da desigualdade (3.7) segue que

$$\overline{x} \geq \overline{x}_g,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \overline{x}_g$.

□

Proposição 3.2. *Dados x_1, x_2 e x_3 reais positivos, valem as desigualdades:*

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{3}} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3} \tag{3.8}$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $x_1 = x_2 = x_3$.

Demonstração. De fato é sempre verdade que para quaisquer x_1, x_2 e x_3 reais positivos, temos

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \geq 0,$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $x_1 = x_2 = x_3$. Dessa desigualdade, temos:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $x_1 = x_2 = x_3$. Daí temos que:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1}{9} \geq \frac{3x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_3x_1}{9}$$

ou, de forma equivalente,

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 \geq \frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{3}. \tag{3.9}$$

Da desigualdade (3.9) segue que:

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq \sqrt{\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{3}} \tag{3.10}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3$. Por outro lado, aplicando a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ nos termos x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, temos

$$\begin{aligned} \frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{3} &\geq \sqrt[3]{x_1x_2x_2x_3x_3x_1} \\ &= \sqrt[3]{x_1^2x_2^2x_3^2} \\ &= \left(\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Da desigualdade (3.11) temos que

$$\sqrt{\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{3}} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}. \tag{3.12}$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $x_1 = x_2 = x_3$. Juntando (3.10) e (3.12), temos

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq \sqrt{\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{3}} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $x_1 = x_2 = x_3$. □

3.2 Desigualdade entre as Médias Geométrica e Harmônica

Proposição 3.3. *Para quaisquer $n > 1$ números reais positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ temos:*

$$\overline{x}_h \leq \overline{x}_g, \tag{3.13}$$

em que, $\overline{x}_h = \overline{x}_g$ se, e somente se $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Calculando as médias aritméticas e geométricas entre os números $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$ e aplicando a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$, temos:

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}},$$

ou seja, $\frac{1}{\overline{x}_h} \geq \frac{1}{\overline{x}_g}$ ou, de forma equivalente,

$$\overline{x}_h \leq \overline{x}_g$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$. □

3.3 Outras desigualdades

Na seção anterior apresentamos a mais popular das desigualdades, $\overline{x} \geq \overline{x}_g$, agora mostramos outras desigualdades também muito utilizadas nas resolução de problemas. Começamos pela desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, que conforme LIMA (1991), é a concorrente mais próxima de $\overline{x} \geq \overline{x}_g$, no que diz respeito a aplicações. Entretanto, há uma diferença crucial entre as duas desigualdades, a de *Cauchy-Schwarz* tem uma demonstração consagrada que se baseia nos fatos que toda soma de quadrados é maior ou igual a 0 (zero) e de que um trinômio do segundo grau que nunca muda de sinal tem sempre discriminante menor ou igual a 0 (zero).

3.3.1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Proposição 3.4. *Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ reais dados $n > 1$, então:*

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}. \tag{3.14}$$

Além disso, teremos a igualdade se, e somente se os x_i e os y_i forem proporcionais, isto é, se, e somente se, existir um real positivo λ tal que $y_i = x_i\lambda$ para todo i.

Demonstração. Considere a seguinte função f do segundo grau

$$f(t) = (x_1t - y_1)^2 + (x_2t - y_2)^2 + \cdots + (x_nt - y_n)^2.$$

Desenvolvendo os binômios, encontramos

$$f(t) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)t^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)t + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2),$$

que por ser uma soma de quadrados temos, $f(t) \geq 0$ para todo real t e daí deve ser $\Delta \leq 0$[1], isto é,

$$4(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Dividindo esta inequação por 4 e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, chegamos na desigualdade (3.14).

[1]Se $\Delta \leq 0$, então a função quadrática $f(t) = at^2 + bt + c$ onde a, b, c são números reais com $a > 0$, é positiva para todos os reais.

Examinemos agora a igualdade. Se houver igualdade, quer dizer, se for $\Delta = 0$, então o trinômio tem uma raiz real λ:

$$(x_1\lambda - y_1)^2 + (x_2\lambda - y_2)^2 + \cdots + (x_n\lambda - y_n)^2 = 0.$$

Mas aí todos os binômios devem ser nulos, isto é, $y_i = \lambda x_i$ para todo i. Então, havendo igualdade os x_i e y_i devem ser proporcionais. É evidente que se eles forem proporcionais a igualdade ocorre. □

3.3.2 Desigualdade entre as Médias Quadrática e Aritmética

De acordo com NETO (1999) a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética é uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz, apresentada na forma do corolário a seguir.

Corolário 3.1. *Dados reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$, temos*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \tag{3.15}$$

ou seja, $\overline{x}_q \geq \overline{x}$ com a igualdade sendo verdadeira se, e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Fazendo $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.\sqrt{n}, \tag{3.16}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, existir um número real positivo λ tal que $x_i = \lambda$ para todo i, ou seja, se, e somente se, os números $x_1, x_2, \cdots, x_n$ forem todos iguais. Dividindo ambos os membros da desigualdade (3.16) por n, teremos

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

ou seja, $\overline{x}_q \geq \overline{x}$ com a igualdade sendo verdadeira se, e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

Observação. Das desigualdades $\overline{x} \geq \overline{x}_g$, $\overline{x}_h \leq \overline{x}_g$ e $\overline{x}_q \geq \overline{x}$, temos que

$$\overline{x}_h \leq \overline{x}_g \leq \overline{x} \leq \overline{x}_q. \tag{3.17}$$

Além disso, a igualdade em qualquer ponto das desigualdades acima é possível se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ e, nestas condições, teremos necessariamente a igualdade de todas as médias.

Corolário 3.2. *Dado os números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$, temos que*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}. \tag{3.18}$$

Demonstração. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para as sequências

$$(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, ..., \sqrt{x_n}) \text{ e } (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}}),$$

temos:

$$\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \geq |\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n \ temos}| = n.$$

Daí, segue que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}) \geq n^2,$$

ou ainda, dividindo por $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 0$, temos:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

□

Corolário 3.3. *Para qualquer duas sequências de reais $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$ para $b_i > 0, \forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, temos*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}. \tag{3.19}$$

Demonstração. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para as sequências

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, ..., \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right) \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, ..., \sqrt{b_n}\right),$$

temos:

$$\left|\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\sqrt{b_1} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\sqrt{b_n}\right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2}{b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}}\sqrt{b_1 + \cdots + b_n}. \tag{3.20}$$

Da desigualdade (3.20) segue que:

$$\frac{\left|a_1 + \cdots + a_n\right|}{\sqrt{b_1 + \cdots + b_n}} \leq \sqrt{\frac{a_1^2}{b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}}.$$

Portanto,

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

□

3.3.3 Desigualdade de Jensen

Definição 3.1. Uma função f de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ é dita convexa se a região sobre seu gráfico, ou seja, o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq f(x)\}$$

for um conjunto convexo. Isto equivale a afirmar que para quaisquer x e y pertencentes a $[a, b]$ e para todo $t \in [0, 1]$ tem-se

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y). \tag{3.21}$$

Por outro lado, se tivermos

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y), \tag{3.22}$$

dizemos que a função é côncava.

Proposição 3.5. *Sejam I um intervalo de reta e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ e $y_1, y_2, ..., y_n \in [0, 1]$, com $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$, então $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \in I$ e, além disso:*

$$(i)\ f \textit{ convexa} \Rightarrow f(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \leq y_1f(x_1) + \cdots + y_nf(x_n) \tag{3.23}$$

$$(ii)\ f \textit{ côncava} \Rightarrow f(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \geq y_1f(x_1) + \cdots + y_nf(x_n). \tag{3.24}$$

Demonstração. Façamos a prova por indução sobre $n > 1$, para o caso em que f é convexa, sendo o outro caso análogo. Por definição temos o caso $n = 2$. Suponha agora que para um certo $n > 1$ e todos

$$x_1, x_2, ..., x_n \in I \;\text{ e }\; y_1, y_2, ..., y_n \in [0, 1],$$

com $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$, tenhamos

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \in I \;\text{ e }\; f(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \leq y_1f(x_1) + \cdots + y_nf(x_n). \tag{3.25}$$

Considere agora

$$x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in I \;\text{ e }\; y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1} \in [0, 1]$$

, com $y_1 + y_2 + \cdots + y_n + y_{n+1} = 1$. Se $y_{n+1} = 1$ então $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ e nada há a fazer. Se não, defina:

$$\lambda = \frac{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n}{1 - y_{n+1}} = s_1x_1 + \cdots + s_nx_n,$$

onde, $s_i = \dfrac{y_i}{1-y_{n+1}}$, $i = 1, ..., n$. Como

$$s_1 + \cdots + s_n = 1,$$

segue da hipótese de indução que $\lambda \in I$. Daí, teremos que

$$\begin{aligned} f(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1}) &= f((1-y_{n+1})(\frac{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n}{1-y_{n+1}}) + y_{n+1}x_{n+1}) \\ &= f((1-y_{n+1})\lambda + y_{n+1}x_{n+1}) \\ &\leq (1-y_{n+1})f(\lambda) + y_{n+1}f(x_{n+1}), \end{aligned} \tag{3.26}$$

já que f é convexa. Aplicando a outra metade da hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} f(\lambda) = f(x_1s_1 + \cdots + x_ns_n) &\leq s_1f(x_1) + \cdots + s_nf(x_n) \\ &= \frac{y_1}{1-y_{n+1}}f(x_1) + \cdots + \frac{y_n}{1-y_{n+1}}f(x_n). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Juntando as desigualdades (3.26) e (3.27), obtemos

$$f(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1}) \leq y_1f(x_1) + \cdots + y_nf(x_n) + y_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Isso mostra, por indução, que se f é convexa, então

$$f(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \leq y_1f(x_1) + \cdots + y_nf(x_n).$$

$\square$

4 Aplicações da Desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ entre Outras

Neste capítulo, apresentamos uma série de problemas que podem ser resolvidos com a utilização das desigualdades entre médias e desigualdades de Cauchy-Schwarz e Jensen. Nos problemas, algumas soluções tradicionais utilizadas no Ensino Médio são de difícil solução e por vezes exigem cálculos extensos. Isso Justifica a importância de ensinar essas desigualdades nesse nível de ensino.

4.1 Aplicações da Desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$

Aplicação 1. *Prove que para qualquer x positivo, temos*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Solução 1. Pela desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$, temos

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x\frac{1}{x}} = 1.$$

Daí, segue que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Solução 2. Para qualquer x positivo, temos que

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0.$$

Daí, segue que

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0,$$

o que implica

$$x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0,$$

ou seja,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Aplicação 2. *Sejam x e y números reais positivos, prove que*

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 8.$$

Solução. Utilizando o resultado do problema anterior, temos

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Longrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4;$$

$$y + \frac{1}{y} \geq 2 \Longrightarrow \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 4.$$

Logo, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 8.$

Aplicação 3. *Sejam x, y e z números reais positivos, prove que*

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y = z$.

Solução 1. Aplicando a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ nos números x e y, y e z e em z e x, temos:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{y + z}{2} \geq \sqrt{yz}$$

$$\frac{z + x}{2} \geq \sqrt{zx}$$

Multiplicando membro a membro, temos:

$$\frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{8} \geq xyz.$$

Daí, segue que

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, ocorrer a igualdade em cada uma das desigualdades do tipo $\overline{x} \geq \overline{x}_g$, ou seja, $x = y = z$.

Solução 2. Para todos x, y e z positivos, temos que

$$(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy,$$

ou seja,

$$(x + y)^2 \geq 4xy.$$

De maneira análoga, temos

$$(y + z)^2 \geq 4yz$$

$$(x + z)^2 \geq 4xz.$$

Logo, multiplicando membro a membro as três desigualdades anteriores, temos:

$$(x+y)^2(y+z)^2(x+z)^2 \geq 4xy4yz4xz$$

ou, de forma equivalente;

$$[(x+y)(x+z)(y+z)]^2 \geq 64x^2y^2z^2.$$

Portanto,

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz,$$

com a igualdade sendo verdadeira se, e somente se, $x = y = z$.

Aplicação 4. *Prove que dentre todos os triângulos de perímetro $2p$, o de maior área é o equilátero.*

Solução 1. Sejam x, y e z os lados de um triângulo ABC de perímetro $2p$ e área A. Então, temos:

$$p = \frac{x+y+z}{2} \quad \text{e} \quad A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Aplicando a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ em $p-x, p-y$ e $p-z$, temos:

$$\frac{p-x+p-y+p-z}{3} \geq \sqrt[3]{(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Daí, segue que

$$\frac{3p-(x+y+z)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-x)(p-y)(p-z)} \Longrightarrow p\left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq p(p-x)(p-y)(p-z),$$

ou ainda,

$$\frac{p^4}{27} \geq p(p-x)(p-y)(p-z) = A^2.$$

Logo,

$$A \leq \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$$

ocorrendo a igualdade e somente se, somente se, $p-x = p-y = p-z$, ou seja, $x = y = z$.

Solução 2. Seja o triângulo ABC com lados x, y, e z; sendo p o semiperímetro do triângulo de perímetro dado por $2p = x+y+z$; e A a área do triângulo dada por

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Considerando o perímetro constante, fixando a base x do triângulo e renomeando o lado z do triângulo como t, devemos maximizar a função:

$$f(t) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-t)}$$

o que equivale maximizar a função:

$$h(t) = f^2(t) = p(p-x)(p-y)(p-t)$$

que equivale também maximizar:

$$g(t) = (p-y)(p-t) = (p-(2p-x-t))(p-t)$$

$$g(t) = -t^2 + (2p-x)t + (xp-p^2)$$

O ponto máximo da função é encontrado quando $t = \dfrac{2p-x}{2}$ o que equivale a

$$2t = 2p - x = y + t,$$

logo $y = t$. Assim o triângulo é isósceles.

Desta forma, suponha um triângulo isósceles de lados t, y e y. Assim,

$$2p = t + 2y.$$

Temos agora que maximizar a função:

$$f(t) = p(p-t)(p-y)(p-y).$$

Mas como, $p - y = \dfrac{t}{2}$ então maximizaremos

$$g(t) = (p-t)t^2 = pt^2 - t^3$$

para $t > 0$. A derivada primeira de g é

$$g^{'}(t) = 2pt - 3t^2.$$

Fazendo $g^{'}(t) = 0$, que é o ponto extremo da função, temos

$$t_1 = 0 \;\text{ e }\; t_2 = \frac{2p}{3}.$$

Como $t > 0$, então $t = \dfrac{2p}{3}$. A derivada segunda de f é

$$g^{''}(t) = 2p - 6t.$$

Assim,

$$g^{''}\left(\frac{2p}{3}\right) = -2p < 0.$$

Isso mostra que $t = \dfrac{2p}{3}$ é ponto de máximo de g. Substituindo em $p-y = \dfrac{t}{2}$, encontramos $t = y$. Portanto, o triângulo ABC é equilátero.

Aplicação 5. *Determine o valor máximo da função*

$$f(x) = x(1-x)^2,$$

sendo $x \in (0,1)$.

Solução 1. No domínio da função, $2x$ e $1-x$ são números reais positivos. Aplicando a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ em $2x, 1-x$ e $1-x$, temos:

$$\frac{2x + (1-x) + (1-x)}{3} \geq \sqrt[3]{2x(1-x)(1-x)}$$

ou, de forma equivalente,

$$\sqrt[3]{2x(1-x)^2} \leq \frac{2}{3} \Longrightarrow 2x(1-x)^2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

ou ainda

$$x(1-x)^2 \leq \frac{4}{27},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $2x = 1-x$, ou seja, $x = \frac{1}{3}$. Como $\frac{1}{3} \in (0,1)$, então o valor máximo de f é $\frac{4}{27}$.

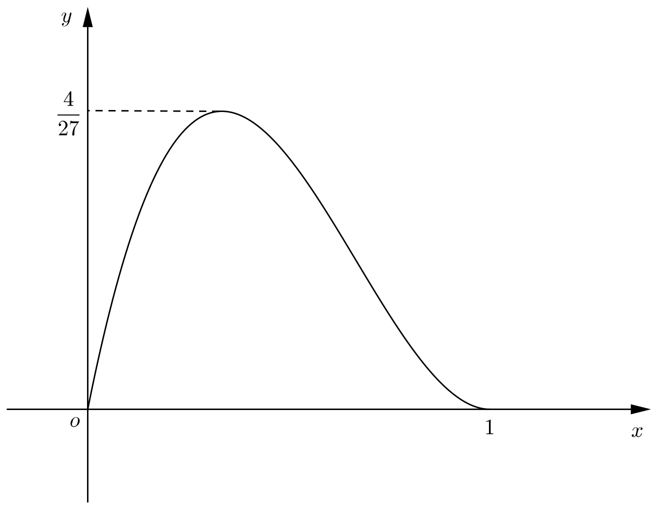

Figura 4.1: Valor máximo de $f(x) = x(1-x)^2, x \in (0,1)$

Solução 2. Temos que

$$f(x) = x(1-x)^2 = x - 2x^2 + x^3.$$

A derivada primeira de f é

$$f^{'}(x) = 1 - 4x + 3x^2.$$

Fazendo $f^{'}(x) = 0$, encontramos $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{1}{3}$. A derivada segunda de f é

$$f^{''}(x) = -4 + 6x.$$

Com isso, $f''(1) = 2$ e $f''(\frac{1}{3}) = -2$. Portanto, $\frac{1}{3}$ é ponto de máximo de f. O valor máximo de f será

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

Aplicação 6. *Dois problemas clássicos de otimização são os de determinar a área máxima de um retângulo, onde é dado um perímetro e o dual, onde se pede o perímetro mínimo de um retângulo com uma determinada área. Prove que em ambos os casos a otimização é obtida quando o retângulo é um quadrado.*

Solução 1. Sejam x e y as dimensões do retângulo, logo

$$2p = 2x + 2y \;\text{ e }\; A = xy$$

são, respectivamente, o perímetro e a área do retângulo. Pela desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$, temos

$$\frac{2p}{2} = \frac{2x + 2y}{2} \geq \sqrt{2x2y} = 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{A}.$$

Se o perímetro for dado, a área máxima será dada por $A = \left(\frac{2p}{4}\right)^2$, quando $x = y$. E se a área for dada, o perímetro mínimo será dada por $2p = 4\sqrt{A}$, com $x = y$.

Solução 2. Sejam

$$2p = 2x + 2y \;\text{ e }\; A = xy$$

, o perímetro e a área do retângulo de dimensões x e y, respectivamente. Fazendo

$$y = \frac{2p - 2x}{2} = p - x$$

, e substituindo em $A = xy$, temos:

$$A = x(p - x) = px - x^2,$$

ou seja, A é uma função quadrática com coeficiente de x^2 negativo. Isso significa que A possui um valor máximo. O valor de x para que A seja máximo será

$$x = -\frac{p}{2(-1)} = \frac{p}{2}.$$

Com isso, $y = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$. Isso mostra que o retângulo é um quadrado. Por outro lado, fazendo $y = \frac{A}{x}$ e substituindo em $2p = 2x + 2y$, temos

$$2p = 2x + \frac{2A}{x} = f(x).$$

A derivada primeira de f é

$$f^{'}(x) = 2 - \frac{2A}{x^2}.$$

Fazendo $f^{'}(x) = 0$, temos $x_1 = -\sqrt{A}$ e $x_2 = \sqrt{A}$. A derivada segunda de f é

$$f^{''}(x) = \frac{4A}{x^3}.$$

Como $f(-\sqrt{A}) < 0$ e $f(\sqrt{A}) > 0$, então f possui um valor mínimo $x = \sqrt{A}$. Assim,

$$y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}.$$

Isso mostra que o retângulo é um quadrado. Portanto, em ambos os casos a otimização é obtida quando o retângulo é um quadrado.

Aplicação 7. *Prove que para todo ângulo agudo x temos:*

$$tg\ x + cotg\ x \geq 2.$$

Solução 1. Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos

$$tgx > 0 \quad \text{e} \quad cotgx > 0.$$

Aplicando a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$, temos

$$\frac{tgx + cotgx}{2} \geq \sqrt{tg\ xcotg\ x} = 1$$

portanto,

$$tg\ x + cotg\ x \geq 2,$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $tg\ x = cotg\ x$, ou seja, quando $x = \frac{\pi}{4}$.

Solução 2. Temos que

$$tg(x) + cotg(x) = \frac{sen\ x}{cos\ x} + \frac{cos\ x}{sen\ x} = \frac{sen^2\ x + cos^2\ x}{sen\ xcos\ x} = \frac{1}{sen\ xcos\ x}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2, obtemos

$$tg(x) + cotg(x) = \frac{2}{2sen\ xcos\ x}.$$

Como

$$0 \leq 2sen\ xcos\ x = sen(2x) \leq 1,$$

para todo x agudo, então

$$\frac{2}{2sen\ xcos\ x} \geq 2.$$

Portanto,

$$tg\ x + cotg\ x \geq 2.$$

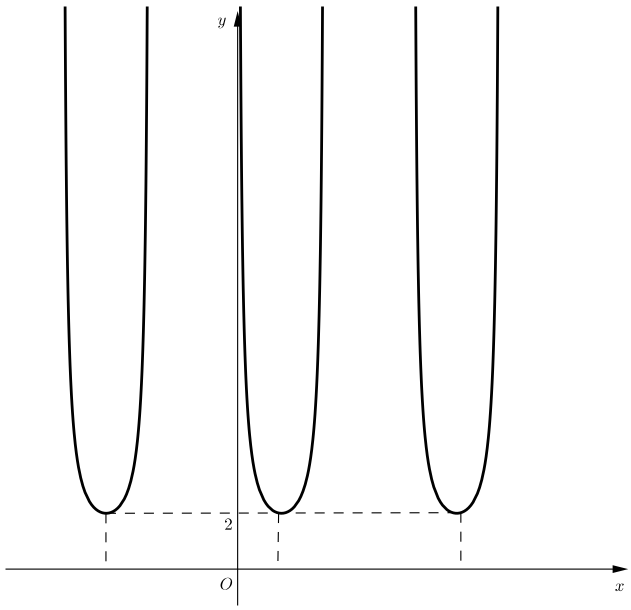

Figura 4.2: Valor mínimo de $f(x) = tg\ x + cotg\ x$

Aplicação 8. *Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência. Sejam x e y as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. Demonstre a desigualdade $\overline{x} = \dfrac{x+y}{2} \geq \overline{x}_g = \sqrt{xy}$ para x e y utilizando a situação descrita.*

Solução. Num triângulo retângulo inscrito numa circunferência temos que a hipotenusa é um diâmetro. Logo

$$\overline{CB} = \overline{CH} + \overline{HB} = x + y = 2R, \overline{OA} = R$$

e denote $\overline{AH} = h$.

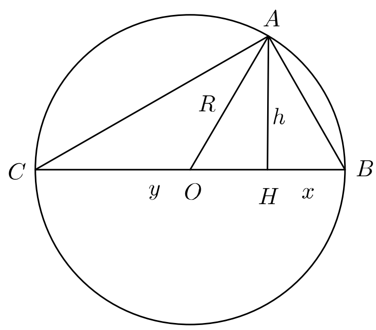

Figura 4.3: Triângulo retângulo inscrito (solução do problema)

Note que $\overline{OA} \geq \overline{AH}$, com a igualdade ocorrendo apenas quando $\overline{CA} = \overline{CB}$, ou seja, quando os triângulos AHC e BHA forem congruentes e, portanto,

$$y = \overline{CH} = \overline{HB} = x.$$

Logo por semelhança entre os triângulos AHC e BHA, temos que $h^2 = xy$. e

$$\overline{OA} = R = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = h = \overline{AH}$$

com a igualdade só ocorrendo quando $x = y$.

Aplicação 9. *Considere duas circunferências de centros O_1 e O_2 e diâmetros x e y tangentes exteriormente e tangentes à uma mesma reta t, nos pontos T_1 e T_2. Sabendo que $\overline{O_1O_2} \geq \overline{T_1T_2}$ demonstre a desigualdade $\overline{x} = \dfrac{x+y}{2} \geq \overline{x}_g = \sqrt{xy}$.*

Solução. Seja O_2A um segmento paralelo a T_1T_2. Com isso temos que $O_2T_1T_2A$ é um retângulo. Portanto O_1O_2A é um triângulo retângulo de hipotenusa O_1O_2.

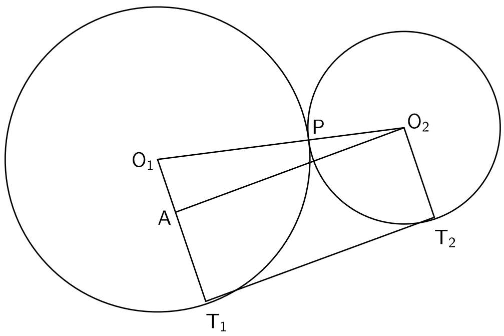

Figura 4.4: Circunferências tangentes (solução do problema)

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo O_1O_2A, temos,

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_1A}^2 + \overline{T_1T_2}^2 \Longrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \overline{T_1T_2}^2.$$

Daí, segue que

$$\overline{T_1T_2}^2 = xy \Longrightarrow \overline{T_1T_2} = \sqrt{xy}.$$

Como $O_1O_2 \geq \overline{T_1T_2}$, então

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

com a igualdade só ocorrendo quando

$$\overline{O_1A} = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 0,$$

isto é, $x = y$.

Aplicação 10. *(ProfMat-acesso 2012) Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40 m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40 m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.*

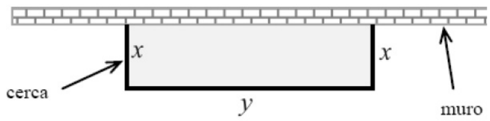

Figura 4.5: Área máxima com perímetro fixo (solução do problema)

Solução 1. Conforme indicado na Figura 4.5 temos $2x+y = 40$. Pela desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ temos

$$20 = \frac{2x+y}{2} \geq \sqrt{2xy} = \sqrt{2A},$$

logo a área será máxima quando $\sqrt{2A} = 20 \therefore A = 200\ m^2$ e acontece quando $2x = y = 20\ m^2$.

Solução 2. Conforme a Figura 4.5, temos que a soma das medidas é igual a $2x + y = 40$. Daí, $y = 40 - 2x$. Como a área do retângulo é dada por $A = xy$, então

$$A = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2.$$

Assim, a área é uma função quadrática que possui um valor máximo, dado por

$$-\frac{40^2 - 4(-2)0}{4(-2)} = 200\ m^2.$$

O valor de x para que a área máxima seja $200\ m^2$ será

$$x = -\frac{40}{2(-2)} = 10\ m.$$

Por outro lado o valor de y será $20\ m$.

Aplicação 11. *No problema anterior, qual o menor comprimento de cerca necessário para que o fazendeiro cerque uma área de $162\ m^2$?*

Solução. Aplicando novamente a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$, temos

$$\frac{2x+y}{2} \geq \sqrt{2xy} = \sqrt{2A} = \sqrt{324} = 18.$$

O valor mínimo para a cerca acontece quando a igualdade acima ocorrer, ou seja, $2x + y = 36$, com $2x = y = 18$.

Aplicação 12. *Mostre que*

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 > \binom{8}{4}.$$

Solução 1. Aplicando a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ aos termos $\frac{x}{y}, 1, \frac{y}{x}$ e 1, temos

$$\frac{\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}+1}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{x}{y}1\frac{y}{x}1} = 1 \therefore \frac{x}{y}+2+\frac{y}{x} \geq 4.$$

Logo,

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq 4^4 = 256 > \binom{8}{4}.$$

Solução 2. Temos, para todos x e y reais, que se $x \geq y$ ou $y \geq x$, então

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 1 \Longrightarrow \frac{x}{y}+2+\frac{y}{x} \geq 3.$$

Daí, segue que

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq 3^4 = 81 > \binom{8}{4}.$$

Aplicação 13. *Seja* $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ *uma sequência de números reais positivos e* $(k_1, k_2, k_3, ..., k_n)$, *uma sequência de números racionais positivos cuja soma seja igual a 1. Mostre que:*

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n \geq x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}.$$

Solução. Note que se tivéssemos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ inteiros positivos, utilizando a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$, obteríamos,

$$\begin{aligned}
\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n} &= \frac{\overbrace{x_1+\cdots+x_1}^{p_1}+\overbrace{x_2+\cdots+x_2}^{p_2}+\cdots+\overbrace{x_n+\cdots+x_n}^{p_n}}{p_1+p_2+\cdots+p_n} \\
&\geq \sqrt[p_1+p_2+\cdots+p_n]{\underbrace{(x_1\cdots x_1)}_{p_1}\underbrace{(x_2\cdots x_2)}_{p_2}\cdots\underbrace{(x_n\cdots x_n)}_{p_n}} \\
&= \sqrt[p_1+p_2+\cdots+p_n]{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}}.
\end{aligned}$$

No caso de k_i racional, considere Q inteiro de modo que $k_i = \frac{p_i}{Q}$, com p_i inteiro para todo i. Observe que,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{Q} = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i = Q.$$

Logo, recaímos no caso inteiro,

$$\begin{aligned}
k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n &= \frac{p_1}{Q}x_1+\frac{p_2}{Q}x_2+\cdots+\frac{p_n}{Q}x_n \\
&= \frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_ntx_n}{Q} \\
&\geq \sqrt[Q]{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}} \\
&= x_1^{\frac{p_1}{Q}}x_2^{\frac{p_2}{Q}}\cdots x_n^{\frac{p_n}{Q}} \\
&= x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}.
\end{aligned}$$

Aplicação 14. *(ProfMat-2011) Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo* x, y *e* z *(veja Figura 4.6, onde as linhas tracejadas indicam segmentos de arestas obstruídos por alguma face).*

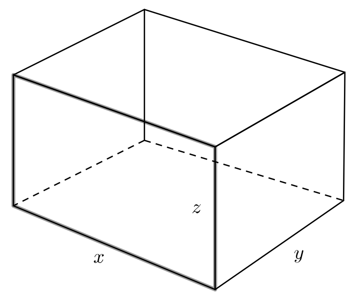

Figura 4.6: Área mínima com perímetro fixo (solução do problema)

(a) Exprima a área e o volume da caixa em função de x, y *e* z.

(b) Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior do que ou igual a 48.

(c) Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.

Solução.

(a) Área: $A = xy + 2xz + 2yz$, Volume: $V = xyz$.

(b) Pela desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ aplicada aos termos $xy, 2xz$ e $2yz$, temos:

$$\frac{A}{3} = \frac{xy + 2xz + 2yz}{3} \geq \sqrt[3]{xy2xz2yz} = \sqrt[3]{4x^2y^2z^2} = \sqrt[3]{4V^2} = 16.$$

Logo,

$$A \geq 3 \times 16 = 48.$$

(c) A área será mínima quando a igualdade ocorrer, ou seja, quando $xy = 2xz = 2yz$ o que implica $x = y = 2z$. Como $V = xyz = 32$, segue que:

$$4z^3 = 32 \Longrightarrow z = 2 \ \text{ e } x = y = 4.$$

Aplicação 15. *Qual o volume máximo de um cilindro regular inscrito em uma esfera?*

Solução 1. Utilizando as denominações fornecidas pela Figura 4.7, o volume do cilindro pode ser calculado fazendo $V = \pi r^2 2x$. Aproveitando que

$$R^2 = x^2 + r^2,$$

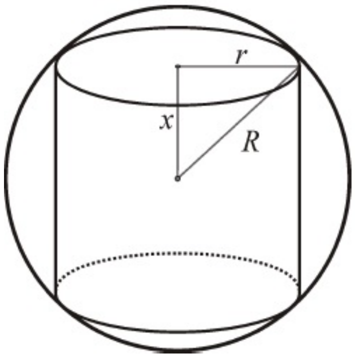

Figura 4.7: Cilindro inscrito numa esfera

podemos reescrever da forma:

$$V = 2\pi x(R^2 - x^2) = 2\pi x(R - x)(R + x).$$

O artifício agora consiste em utilizar a desigualdade $\overline{x}_g \leq \overline{x}$, acrescentaremos α e β de modo a não alterar o produto.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{V} &= \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta} x\alpha(R-x)\beta(R+x)} \\
&= \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta}}\sqrt[3]{x\alpha(R-x)\beta(R+x)} \\
&\leq \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta}}\left(\frac{x+\alpha(R-x)+\beta(R+x)}{3}\right) \\
&= \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta}}\left(\frac{(1+\beta-\alpha)x+(\alpha+\beta)R)}{3}\right)
\end{aligned}$$

Sabemos que a igualdade das médias (ou seja, o valor máximo para V) só ocorre quando

$$x = \alpha(R - x) = \beta(R + x).$$

Logo,

$$\alpha = \frac{x}{R - x} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{x}{R + x}.$$

Para que

$$\left(\frac{x+\alpha(R-x)+\beta(R+x)}{3}\right) = \left(\frac{(1-(\alpha-\beta)x+(\alpha+\beta)R)}{3}\right)$$

não dependa de x, fazemos $\alpha - \beta = 1$. Assim, teremos:

$$\frac{x}{R-x} - \frac{x}{R+x} = 1 \Longrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Logo, o volume máximo para o cilindro inscrito numa esfera de raio R será

$$V = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}.$$

Solução 2. Temos que:

$$V = 2\pi x(R^2 - x^2) = 2\pi R^2 x - 2\pi x^3.$$

A derivada primeira de V é

$$V^{'}(x) = 2\pi R^2 - 6\pi x^2.$$

Fazendo $V^{'}(x) = 0$, encontramos

$$x_1 = -\frac{R\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

A derivada segunda de V é

$$V^{''}(x) = -12\pi x.$$

Com isso, $V^{''}(x_1) > 0$ e $V^{''}(x_2) < 0$. Portanto,

$$x = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

é ponto de máximo de V. O valor máximo de V será:

$$V\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}.$$

Aplicação 16. *De uma folha de cartolina retangular de lados $2a$ e $2b$, $a > b$, retiramos quadrados de lados $x < b$ de cada vértice, dobrando em seguida as abas restantes para formar uma caixa cuja base é um retângulo de lados $(2a - 2x)$ e $(2b - 2x)$, e cuja altura é x. Qual deve ser o valor de x para que o volume da caixa seja máximo?*

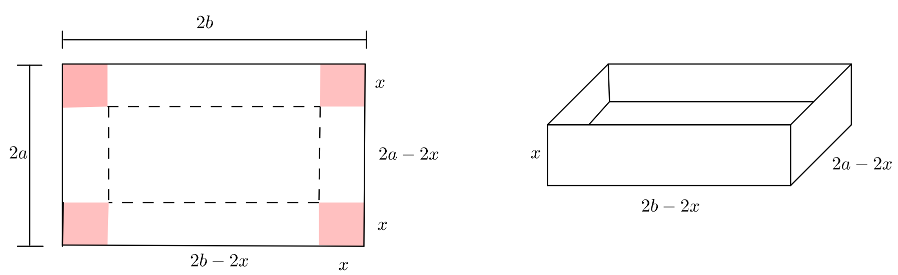

Figura 4.8: Caixa de volume máximo.

Solução 1. O volume da caixa pode ser calculado fazendo

$$V = (2a - 2x)(2b - 2x)x.$$

Aplicamos a desigualdade das médias escolhendo os termos de modo a obter uma cota máxima independente de x. Para tanto temos que fazer um ajuste semelhante ao da aplicação anterior. Para tanto, acrescentaremos α e β de modo a não alterar o produto, mas com o objetivo de tornar a média aritmética independente de x. Procedemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{x}{\alpha\beta}\alpha(2a-2x)\beta(2b-2x)} &= \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta}}\sqrt[3]{x\alpha(2a-2x)\beta(2b-2x)} \\
&\leq \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta}}\left(\frac{x+\alpha(2a-2x)+\beta(2b-2x)}{3}\right) \\
&= \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta}}\left(\frac{(1-2\alpha-2\beta)x+2a\alpha+2b\beta}{3}\right).
\end{aligned}$$

Na desigualdade acima temos um fator comum $\sqrt[3]{\dfrac{1}{\alpha\beta}}$ e a desigualdade $\overline{x}_g \leq \overline{x}$, calculadas nos termos $x, \alpha(2a-2x)$ e $\beta(2b-2x)$. Note que na média aritmética temos no numerador

$$x+\alpha(2a-2x)+\beta(2b-2x) = (1-(2\alpha+2\beta))x+2a\alpha+2b\beta.$$

Como queremos que a média aritmética independa de x, fazemos $2\alpha+2\beta = 1$. Porém, sabemos que a igualdade das médias só ocorre (o máximo para V) quando

$$x = \alpha(2a-2x) = \beta(2b-2x),$$

ou seja,

$$2\alpha = \frac{x}{a-x} \quad \text{e} \quad 2\beta = \frac{x}{b-x}.$$

Portanto, substituindo em $2\alpha+2\beta = 1$ temos:

$$\frac{x}{a-x}+\frac{x}{b-x} = 1 \Longrightarrow (a-x)(b-x) = bx-x^2+ax-x^2,$$

ou ainda

$$3x^2-2(a+b)x+ab = 0$$

e, daí,

$$x = \frac{(a+b)\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}.$$

Como $x < b$, notamos que a solução desejada ocorre com

$$x = \frac{(a+b)-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}.$$

Solução 2. Temos que

$$V = (2a-2x)(2b-2x)x = 4abx-4(a+b)x^2+4x^3.$$

Calculando a derivada primeira de V temos:

$$V^{'}(x) = 4ab - 8(a+b)x + 12x^2.$$

Fazendo $V^{'}(x) = 0$, encontramos

$$x_1 = \frac{(a+b) - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{(a+b) + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{3}.$$

Já a derivada segunda de V é dada por:

$$V^{''}(x) = -8(a+b) + 24x.$$

Com isso, $V^{''}(x_1) < 0$ e $V^{''}(x_2) > 0$. Portanto,

$$x = \frac{(a+b) - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{3}.$$

é ponto de máximo de V e a solução do nosso problema.

Aplicação 17. *Dentro de um campo de futebol, um jogador corre para a linha de fundo do time adversário ao longo de uma reta paralela à lateral do campo que cruza a linha de fundo fora do gol, vide Figura 4.9. Os postes da meta distam* a *e* b *(com* $a < b$*) da reta percorrida por ele. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo máximo quando sua distância* x *ao fundo do campo é igual a* $\sqrt{ab}$.

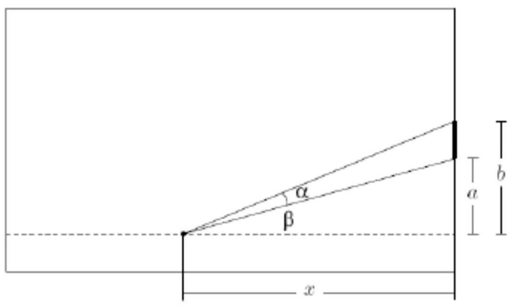

Figura 4.9: Ângulo máximo de visão (solução do problema)

Solução. O ângulo α, agudo, será máximo quando $tg\ \alpha$ for máximo. Pela Figura 4.9, temos,

$$\begin{aligned} tg\ \alpha = tg\ \left((\alpha+\beta) - \beta\right) &= \frac{tg\ (\alpha+\beta) - tg\ \beta}{1 + tg\ (\alpha+\beta) tg\ \beta} \\ &= \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x}\frac{a}{x}} \\ &= \frac{b-a}{x + \dfrac{ba}{x}}. \end{aligned}$$

Logo $tg\ \alpha$ será máxima quando o denominador $d = x + \dfrac{ba}{x}$ for mínimo. Utilizando a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ temos

$$\frac{d}{2} = \frac{x + \dfrac{ba}{x}}{2} \geq \sqrt{x\frac{ba}{x}} = \sqrt{ba}.$$

Portanto, d será mínimo quando a igualdade acima ocorrer, ou seja, quando

$$x = \frac{ba}{x} \Longrightarrow x = \sqrt{ba}.$$

Solução 2. Temos que

$$d = x + \frac{ba}{x}.$$

O cálculo da derivada primeira de d é dada por:

$$d^{'}(x) = 1 - \frac{ab}{x^2}.$$

Fazendo $d^{'}(x) = 0$, encontramos

$$x_1 = -\sqrt{ab} \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt{ab}.$$

Enquanto para a derivada segunda de d temos:

$$d^{''}(x) = \frac{2ab}{x^3}.$$

Com isso, $d^{''}(x_1) < 0$ e $V^{''}(x_2) > 0$. Assim,

$$x = \sqrt{ab}.$$

é ponto de mínimo de V. Portanto, d será mínimo quando

$$x = \sqrt{ab}.$$

4.2 Aplicações de Outras Desigualdades

Aplicação 18. *Sejam a, b e c catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa a. Prove que $b + c \leq a\sqrt{2}$.*

Solução 1. Pela desigualdade $\overline{x}_q \geq \overline{x}$, temos

$$\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \geq \frac{b + c}{2}.$$

Utilizando o teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \geq \frac{b+c}{2},$$

ou seja,

$$b + c \leq a\sqrt{2}$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $b = c = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, num triângulo retângulo isósceles.

Solução 2. Nosso problema se resume em maximizar a soma $S = b + c$. Como o triângulo é retângulo, temos $a^2 = b^2 + c^2$. Daí, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Substituindo em $S = b + c$, temos:

$$S = b + \sqrt{a^2 - b^2} = f(b).$$

A derivada primeira de f é dada por:

$$f^{'}(b) = 1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Fazendo $f^{'}(b) = 0$, encontramos $b = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Já a derivada segunda de f vem da forma:

$$f^{''}(b) = -\frac{a^2}{(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Com isso, $f^{''}(\frac{a\sqrt{2}}{2}) < 0$. Logo, $b = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ é ponto de máximo de f. Isso mostra que $b = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ e, consequentemente, $c = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ são os lados cuja soma

$$S = b + c = a\sqrt{2}$$

seja máxima. Portanto,

$$b + c \leq a\sqrt{2}$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $b = c = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, num triângulo retângulo isósceles.

Aplicação 19. *Prove que se $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, então*

$$tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + tg^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + tg^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq 1.$$

Solução. Se $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, então $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{\pi - \gamma}{2}$ e, portanto

$$tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = cotg\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Longleftrightarrow tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1.$$

Daí, segue que

$$\frac{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)+tg\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)tg\left(\frac{\beta}{2}\right)}tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)=1$$

o que implica

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)+tg\left(\frac{\beta}{2}\right)tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)+tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)tg\left(\frac{\beta}{2}\right)=1$$

. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para as sequências $\left(tg\left(\frac{\alpha}{2}\right),tg\left(\frac{\gamma}{2}\right),tg\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$ e $\left(tg\left(\frac{\gamma}{2}\right),tg\left(\frac{\beta}{2}\right),tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$, temos

$$tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+tg^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+tg^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\geq tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)+tg\left(\frac{\beta}{2}\right)tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)+tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)tg\left(\frac{\beta}{2}\right)=1.$$

Portanto,

$$tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+tg^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+tg^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\geq 1.$$

Aplicação 20. *Determine os lados do retângulo cuja diagonal mede* 8 *cm sabendo que o retângulo tem perímetro máximo.*

Solução 1. Sendo x e y as dimensões do retângulo, pelo Teorema de Pitágoras, temos $8^2=x^2+y^2$.

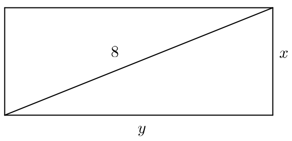

Figura 4.10: Perímetro máximo com diagonal fixa (solução do problema)

Aplicando a desigualdade $\overline{x_q}\geq\overline{x}$, temos

$$4\sqrt{2}=\sqrt{\frac{8^2}{2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geq\frac{x+y}{2}=\frac{2x+2y}{4}=\frac{2p}{4},$$

. Logo o perímetro máximo ocorre quando a igualdade é estabelecida acima, ou seja, quando $x=y=4\sqrt{2}$, e o perímetro máximo será $2p=16\sqrt{2}$.

Solução 2. O perímetro é dado por $2p=2x+2y$ e, como a diagonal é igual a 8 *cm*, então $x^2+y^2=64$. Daí,

$$y=\sqrt{64-x^2},$$

tendo em vista que y é um dos lados do retângulo e substituindo em $2p=2x+2y$, temos

$$2p=2x+2\sqrt{64-x^2}=f(x).$$

A derivada primeira de f nos dá:

$$f^{'}(x) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{64 - x^2}}.$$

Fazendo $f^{'}(x) = 0$, encontramos $x = 4\sqrt{2}$. Já a derivada segunda de f é dada por:

$$f^{''}(x) = -\frac{2\sqrt{64 - x^2 + x^2}}{(64 - x^2)\sqrt{64 - x^2}}.$$

Com isso, $f^{''}(4\sqrt{2}) < 0$. Assim, $x = 4\sqrt{2}$ é ponto de máximo de f. Portanto, $x = 4\sqrt{2}$ e, consequentemente, $y = 4\sqrt{2}$ são os lados do retângulo de diagonal 8 cm e perímetro máximo.

Aplicação 21. *Qual o maior valor que a soma das coordenadas de um ponto, pertencente à circunferência $x^2 + y^2 = 50$, pode assumir?*

Solução 1. Aplicando a desigualdade $\overline{x_q} \geq \overline{x}$, temos

$$5 = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}.$$

Então o valor máximo que a soma das coordenadas pode assumir é $x + y = 10$, e ocorre quando $x = y = 5$.

Solução 2. Sejam a e b as coordenadas de um ponto pertencente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 50$. Nosso problema é maximizar a soma $S = a + b$ sabendo que $a^2 + b^2 = 50$. Fazendo $b = \sqrt{50 - a^2}$ e substituindo em $S = a + b$, temos

$$S = a + \sqrt{50 - a^2} = f(a).$$

No cálculo da derivada primeira temos: f é

$$f^{'}(a) = 1 - \frac{x}{\sqrt{50 - a^2}}.$$

Fazendo $f^{'}(a) = 0$, encontramos $a = 5$. Enquanto a derivada segunda de f é

$$f^{''}(a) = -\frac{50}{(50 - x^2)\sqrt{50 - a^2}}.$$

Com isso, $f^{''}(5) < 0$. Logo, $a = 5$ é ponto de máximo de f. Portanto, $a = 5$ e $b = 5$ são as coordenadas cuja soma $S = a + b$ seja máxima. Assim, o maior valor que a soma das coordenadas de um ponto pertencente à circunferência $x^2 + y^2 = 50$ pode assumir é $a + b = 10$.

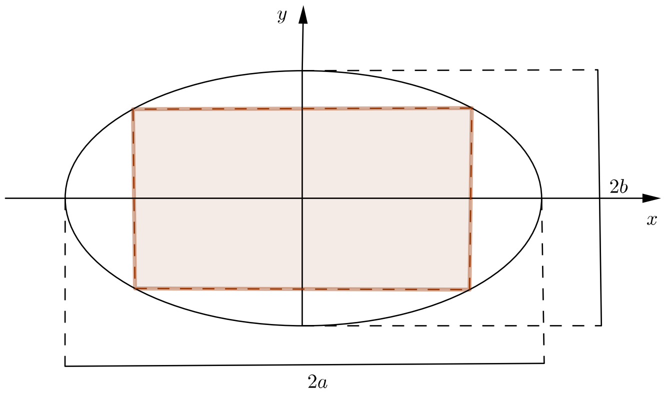

Figura 4.11: Retângulo inscrito em uma elipse

Aplicação 22. *Encontre as dimensões de retângulo de área máxima, com lados paralelos aos eixos coordenados, que esteja inscrito em uma elipse de equação:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Solução 1. Como os vértices estão sobre a elipse, as coordenadas satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aplicando a desigualdade $\overline{x_q} \geq \overline{x_g}$ aos termos $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$, temos

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}{2}} \geq \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)}.$$

Como a área do nosso retângulo é dada por $A = (2x)(2y)$ temos da desigualdade acima,

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)} = \sqrt{\frac{A}{4ab}}.$$

Logo, a área máxima acontece quando a igualdade acima ocorre, ou seja, quando $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ e é $A = 2ab$. Nesse caso, temos $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $y = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Solução 2. Temos que a área é dada por $A = xy$ e, como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

uma vez que y é um dos lados do retângulo. Substituindo em $A = xy$, temos

$$A = x\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = f(x).$$

A derivada primeira de f é

$$f^{'}(x) = \frac{b}{a}\left(-\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2}\right).$$

Fazendo $f^{'}(x) = 0$, encontramos $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. A derivada segunda de f é

$$f^{''}(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{x^3 - 2x(a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right).$$

Com isso, $f^{''}(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}) < 0$. Assim , $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ é ponto de máximo de f. Portanto, $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ e, consequentemente, $y = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$ são os lados do retângulo de área máxima.

Aplicação 23. *Sabendo que a área total de um paralelepípedo reto retângulo mede* 24 cm^2 *determine o volume máximo do paralelepípedo.*

Solução. Pela **Proposição 3.2**, sabemos que para reais positivos x, y e z, vale a desigualdade

$$\sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

com a igualdade só ocorrendo quando $x = y = z$. Logo se x, y e z são as dimensões do paralelepípedo retângulo, então sua área total é dada por $A = 2(xy + yz + zx)$ e o volume por $v = xyz$. Portanto da desigualdade acima, obtemos

$$2 = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{\frac{A}{6}} \geq \sqrt[3]{V}.$$

O volume máximo ocorre quando $x = y = z$, que implica

$$\sqrt[3]{V} = 2 \therefore V = 8\ cm^3.$$

Aplicação 24. *Qual a área total mínima de um paralelepípedo retângulo de volume* V *?*

Solução. Análogo ao **Aplicação 23**, a área total mínima ocorre quando existe a igualdade $x = y = z$ em $2 \geq \sqrt[3]{V}$, logo

$$\sqrt{\frac{A}{6}} = \sqrt[3]{V} \Longrightarrow A = 6V^{\frac{2}{3}}.$$

Em ambos problemas, a otimização ocorre quando o paralelepípedo é um cubo.

Aplicação 25. *Mostre que* $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} > 1.$

Solução 1. Pelo **Corolário 3.2**, temos que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \geq \frac{5^2}{2 + 3 + 4 + 5 + 6} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}.$$

Como $\dfrac{5}{4} > 1$, então

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} > 1.$$

Solução 2. Calculando o mínimo múltiplo comum entre os números $2, 3, 4, 5$ e 6, temos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{30+20+15+12+10}{60} = \frac{87}{60} = \frac{29}{20}.$$

Como $\dfrac{29}{20} > 1$, então

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} > 1.$$

Aplicação 26. Se um triângulo de lados a, b e c tem área A, mostre que

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}A.$$

Solução. Usando o **Corolário 3.3** para (a, b, c), temos:

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \sqrt{3(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}.$$

Logo,

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{6p\left(\frac{2p}{3}\right)^3},$$

onde $2p = a+b+c$ é o perímetro do triângulo. Por outro lado, aplicando a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ para $2p-2a, 2p-2b, 2p-2c$, temos:

$$\frac{6p-(a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{8(p-a)(p-b)(p-c)} \iff \left(\frac{2p}{3}\right)^3 \geq 8(p-a)(p-b)(p-c).$$

Daí, segue que

$$6p\left(\frac{2p}{3}\right)^3 \geq 48p(p-a)(p-b)(p-c) \iff \sqrt{6p\left(\frac{2p}{3}\right)^3} \geq 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ou seja,

$$\sqrt{6p\left(\frac{2p}{3}\right)^3} \geq 4\sqrt{3}A.$$

Portanto,

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}A.$$

Aplicação 27. Sejam p e q reais positivos tais que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Prove que para quaisquer x e y reais positivos, temos

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

Solução. Como a função logaritmo natural $f(x) = ln(x)$ é côncava, pela desigualdade de Jensen, temos:

$$f\left(x.\frac{1}{p} + y\frac{1}{q}\right) \geq \frac{1}{p}f(x) + \frac{1}{q}f(y),$$

uma vez que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Daí, segue que:

$$ln\left(x.\frac{1}{p} + y\frac{1}{q}\right) \geq \frac{1}{p}ln(x) + \frac{1}{q}ln(y) \Longleftrightarrow ln\left(x.\frac{1}{p} + y\frac{1}{q}\right) \geq ln\left(x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\right).$$

Logo,

$$x.\frac{1}{p} + y\frac{1}{q} \geq x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}.$$

Por outro lado,

$$xy = (x^p)^{\frac{1}{p}}(y^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Logo, utilizando a desigualdade anterior, temos que

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

A maioria das aplicações deste capítulo, foram baseadas em LIMA (2001), MORGADO (1999), NETO (1999) e LIMA (2010), onde verificamos grande ocorrência de problemas que podem ser resolvidos com auxílio das desigualdades apresentadas.

5 Considerações Finais

Acreditamos que este trabalho sobre desigualdades entre médias e outras desigualdades poderá ser associado as ferramentas de resolução de exercícios usados no Ensino Médio em diversos conceitos estudados. Nos Capítulos 2 e 3 apresentamos definições e demonstrações que fundamentaram nosso estudo para que pudéssemos usá-las nas aplicações do Capítulo 4. Comparamos em alguns casos métodos de resolução de problemas usando a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$.

É importante ressaltar que este trabalho, principalmente para a nossa realidade, São Luís-MA, é de grande importância, pois fornece um material pouco explorado, tanto nas bibliografias usadas quanto no currículo trabalhado em sala de aula.

Podemos concluir que as desigualdades que apresentamos, na maioria das vezes, se tornam mais viáveis do que outras ferramentas comumente usadas, pois ao colocarmos duas maneiras de resolução em algumas aplicações ficou claro que usando, por exemplo, a desigualdade $\overline{x} \geq \overline{x}_g$ não precisamos de outros requisitos matemáticos, tais como, conceitos de derivadas, função quadrática e identidades trigonométricas. O trabalho mostrou que os recursos de derivação são por muitas vezes mais trabalhosos e menos intuitivos que os recursos apropriados usando as desigualdades entre médias, além da dificuldade de trabalharmos com o tema, derivadas, no Ensino Médio.

Sugerimos como trabalhos futuros a exploração de outras desigualdades matemáticas. Temos convicção de que o ensino das desigualdades entre médias não deve ser tratado no ensino médio de modo marginalizado. Ao contrário, torne-se uma importante ferramenta para auxiliar a resolução de problemas.

Apêndice

Classificação dos Pontos em que a Derivada é Nula Pelo Critério da Derivada Segunda

Seja $f(x)$ uma função contínua e derivável e cuja derivada $f^{'}(x)$ também é derivável no intervalo $I =]a, b[$ e ainda $f^{'}(x)$ e $f^{''}(x)$ contínuas em I.

Se $x_o \in I$ tal que $f^{'}(x_0) = 0$, então:

1. Se $f^{''}(x_0) < 0$, então x_0 é o ponto de máximo relativo de $f(x)$.

2. Se $f^{''}(x_0) > 0$, então x_0 é o ponto de mínimo relativo de $f(x)$.

Se ocorrer também que a derivada segunda se anula para $x = x_0$, isto é, $f^{''}(x_0) = 0$, não podemos afirmar que x_0 é abscissa de um ponto de máximo, de mínimo ou de inflexão.

Exemplo. Dada a função $f(x) = x^2 - 6x + 8$, *determinar e classificar em ponto de máximo, de mínimo ou de inflexão, o ponto* $(x_0, f(x_0))$, *tal que* $f^{'}(x_0) = 0$.

Solução. A derivada primeira de f é dada por $f^{'}(x) = 2x - 6$. Fazendo $f^{'}(x) = 0$, temos que

$$2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3.$$

A derivada segunda de f é dada por $f^{''}(x) = 2$ para todo x real, então $f^{''}(3) > 0$. Como a derivada segunda é maior que zero, 3 é abscissa do ponto de mínimo. Por outro lado,

$$y = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1.$$

Portanto, o mínimo relativo é -1 e o ponto de mínimo é $(3, -1)$. $\square$

Referências

A. Simonis e C. Possani. Média e média das médias Revista do Professor de Matemática, N. 42, pag 4-10, (2000).

CARNEIRO, José P. Demonstrações Visuais. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 27, p. 13 - 15, quadrimestre 1. 1995.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, Roberto. Matemática completa. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. v.3.

LIMA, Elon L. Meu Professor de Matemática. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991. p. 115 - 122.

LIMA, Elon L. Análise Real. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2004. v. 2. p. 91 - 97.

LIMA, Elon L. et. al. A Matemática do Ensino Médio. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2002. v. 2. p. 153 - 158.

LIMA, Elon L. et. al. A Matemática do Ensino Médio. 4. *Enunciados e Soluções dos Exercícios.* ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2010. v. 2. p. 194 - 212.

MORGADO, A. C., PINTO, P. C. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

NETO, Antonio C. M. Desigualdades Elementares. Eureka!, Rio de Janeiro, n. 5,p. 34 - 49, 1999.